



REPÚBLICA DE CABO VERDE  
Ministério da Educação Ciência e Cultura  
DIRECÇÃO GERAL DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

Programa da Disciplina de  
**Matemática**

**3º Ciclo**  
11º e 12º anos



## FICHA TÉCNICA

### TÍTULO

Programa da disciplina de Matemática  
3º Ciclo  
11º e 12º Anos

### AUTORES

Leonor Filipe  
Consultora Fundação Calouste Gulbenkian

### COLABORADORES

Gastão S. Ferreira Frederico  
Paulino Lima Fortes

### COORDENAÇÃO

Direcção-geral do Ensino Básico e Secundário

### EDITOR

Ministério da Educação Ciência e Cultura  
C.P. 111 – Praia  
República de Cabo Verde

### ACABAMENTO – VERSÃO DIGITAL

Ministério da Educação e Valorização dos Recursos Humanos  
República de Cabo Verde  
2004

# 11º ANO

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Ângulos. Arcos</p> <p>§ Ângulos orientados</p> <p>§ Radianos</p> <p>§ Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados e dos arcos com os extremos coincidentes</p>	<p>§ Representar um ângulo num referencial.</p> <p>§ Relacionar medidas em graus e radianos do mesmo ângulo.</p>	<p>É conveniente começar por rever os conhecimentos de trigonometria, adquiridos no 9º ano, com base na resolução de triângulos aplicada a uma situação prática.</p> <p>Dá-se a definição de ângulo orientado, passando de imediato aos ângulos representados num referencial e generalização de ângulo, partindo de um problema real. Para uma melhor interpretação da noção de radiano, podem resolver-se alguns problemas em que se relaciona o ângulo ao centro com o comprimento do arco correspondente.</p> <p>Através da calculadora, os alunos apercebem-se da diferença entre trabalhar com graus e radianos.</p>
<p>Razões trigonométricas</p> <p>§ Variação no círculo trigonométrico</p> <p>§ Valores em <math>\frac{p}{6}</math>; <math>\frac{p}{4}</math>; <math>\frac{p}{3}</math> radianos</p> <p>§ Relações entre as funções de <math>\alpha</math> e de <math>\frac{p}{2} \pm \alpha</math>, <math>\pi \pm \alpha</math>, <math>-\alpha</math></p> <p>Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno e tangente</p>	<p>§ Relacionar entre si as diferentes razões trigonométricas;</p> <p>§ Verificar, provar, justificar igualdades em que intervenham as diferentes razões trigonométricas</p> <p>§ Simplificar as expressões trigonométricas.</p> <p>§ Determinar razões trigonométricas de um ângulo, ou arco, conhecida uma delas.</p>	<p>O recurso sistemático ao círculo trigonométrico facilita a compreensão dos conteúdos.</p> <p>É importante que os alunos verifiquem que se mantêm as relações</p> $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a}, \text{ donde}$ $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 a}$ <p>e aplicá-los na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
Resolução de triângulos	<p>§ Resolver equações trigonométricas.</p> <p>§ Resolver problemas que envolvam o cálculo de um elemento do triângulo.</p>	<p>As equações a propor devem ser elementares. Sugere-se que numa primeira abordagem se tratem apenas as equações com senos e, depois, passar a outras.</p> <p>No 9º ano, os alunos resolveram triângulos rectângulos. Aqui, faz-se uma extensão à resolução de triângulos não rectângulos (conhecidos dois ângulos e um lado ou dois lados e o ângulo oposto a um deles). Embora não seja possível a resolução de triângulos em todos os casos, os alunos podem fazer algumas aplicações práticas, como por exemplo a determinação de distâncias a pontos inacessíveis.</p> <p>Podem também aplicar estes conteúdos no cálculo de áreas e volumes de sólidos.</p>
Funções trigonométricas	<p>§ Indicar sinal, zeros, monotonia, extremos, paridade, periodicidade</p>	<p>A utilização das calculadoras gráficas é um bom recurso para economizar tempo. A construção do gráfico das funções ponto por ponto será um processo alternativo.</p> <p>A facilidade que a calculadora nos dá, para conhecer as razões trigonométricas de um ângulo e conhecer o ângulo dada a razão trigonométrica traz ao estudo da trigonometria uma visão diferente e bem mais motivadora do que a tradicional.</p> <p>Sugere-se uma menor manipulação de fórmulas e que, cada vez mais, se coloquem questões que tenham a ver com a aquisição de conceitos e que se evitem cálculos complicados que apenas servem para desmotivar os alunos.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Vector livre do plano</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ O conjunto <math>\sqrt{p}</math></li> <li>§ Adição de vectores, multiplicação de um número real por um vector; propriedades</li> <li>§ Correspondência entre <math>\sqrt{p}</math> e <math>\mathbb{R}^2</math></li> <li>§ Projecção de uni vector sobre uni eixo: <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Componentes e coordenadas num referencial ortonormado</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Operar com vectores do plano</li> <li>§ Determinar a expressão nas coordenadas da norma, do produto de um número real por um vector, da soma de vectores, da soma de um ponto com uni vector e da diferença de dois pontos.</li> </ul>	<p>O estudo dos vectores inicia-se estabelecendo uma comparação entre segmento orientado e vector.</p> <p>As operações com vectores e as respectivas propriedades devem ser apresentadas sem formalismo, utilizando exemplos.</p> <p>As projecções de um vector sobre os eixos coordenados são vectores – componentes do vector dado.</p> <p>As respectivas medidas algébricas, relativamente ao vector unitário escolhido em cada eixo, são números reais – coordenadas do vector dado.</p>
<p>Vectores colineares</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Distância entre dois pontos do plano</li> <li>§ Produto escalar de dois vectores <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definição e propriedades</li> <li>§ Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores</li> </ul> </li> <li>§ Perpendicularidade de vectores</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Resolver situações que envolvem paralelismo de vectores, colinearidade de três pontos, ponto médio.</li> <li>§ Escrever a equação de uma circunferência. Calcular o ângulo de dois vectores.</li> <li>§ Resolver problemas envolvendo perpendicularidade de vectores com recurso ao produto escalar.</li> </ul>	<p>A noção de produto escalar de dois vectores no plano, <math>\vec{u}</math> e <math>\vec{v}</math> é dada através da definição:</p> $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\  \cdot \ \vec{v}\  \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})), \text{ se } \vec{u} \neq 0 \text{ e } \vec{v} \neq 0$ <p>Escrevendo os vectores nas suas coordenadas num referencial ortonormado</p> $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \text{ de } \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ <p>Concluindo-se que <math>(u_1, u_2) \perp (-u_2, u_1)</math></p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Vector livre do espaço</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ O conjunto <math>\sqrt{e}</math></li> <li>§ Adição de vectores, multiplicação de</li> <li>§ Um número real por um vector; propriedades</li> <li>§ Correspondência entre <math>\sqrt{e}</math> e <math>\mathbb{R}^3</math></li> <li>§ Referencial ortonormado no espaço; Componentes e coordenadas</li> </ul> <p>Vectores colineares</p> <p>Distância entre dois pontos do espaço</p> <p>Produto escalar de dois vectores</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definição e propriedades</li> <li>§ Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores</li> <li>§ Perpendicularidade de vectores</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Operar com vectores do espaço.</li> <li>§ Determinar a expressão nas coordenadas da norma, do produto de um número real por um vector, da soma de vectores, da soma de um ponto com um vector e da diferença de dois pontos.</li> <li>§ Resolver situações que envolvem paralelismo de vectores, coplanaridade de três vectores, ponto médio.</li> <li>§ Resolver situações que envolvem paralelismo de vectores, colinearidade de três pontos, ponto médio.</li> <li>§ Escrever a equação de uma esfera.</li> <li>§ Calcular o ângulo de dois vectores.</li> <li>§ Resolver problemas envolvendo perpendicularidade de vectores com recurso ao produto escalar.</li> </ul>	<p>O estudo dos vectores no espaço deve ser feito em paralelo e por comparação com os resultados já obtidos no plano.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Estudo da recta no plano</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Equação vectorial da recta no plano</li> <li>§ Equações paramétricas</li> <li>§ Equações cartesianas</li> <li>§ Intersecção de rectas</li> <li>§ Intersecção de uma recta com uma circunferência</li> <li>§ Paralelismo de rectas</li> <li>§ Perpendicularidade de rectas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Resolver problemas que conduzam à determinação de equações vectoriais, paramétricas ou cartesianas.</li> <li>§ Reconhecer <math>ma</math> (<math>y = mx + b</math>) como tangente da inclinação da recta.</li> <li>§ Relacionar as diferentes formas de equações de uma recta</li> <li>§ Determinar a intersecção de duas rectas.</li> <li>§ Determinar a intersecção de uma recta com uma circunferência</li> <li>§ Resolver problemas envolvendo paralelismo de rectas.</li> <li>§ Resolver problemas envolvendo perpendicularidade de rectas.</li> <li>§ Determinar a mediatriz de um segmento de recta.</li> <li>§ Determinar o baricentro de domínios planos fechados.</li> </ul>	<p>O estudo da recta deve iniciar-se por via vectorial.</p> <p>O aluno deve, a partir de uma equação vectorial, deduzir as equações paramétricas, a equação contínua, a geral e a reduzida.</p> <p>Deve ainda, conhecida uma das equações da recta; saber deduzir qualquer uma das outras.</p> <p>Uma vez que os alunos já conhecem o método de substituição para a resolução de sistemas, deve aproveitar-se o estudo da intersecção de rectas e da intersecção de uma recta com uma circunferência para apresentar o método de redução.</p> <p>Perante uma situação o aluno deve ser capaz de escolher a equação da recta ou a condição de paralelismo mais adequada.</p> <p>Para a determinação da mediatriz de um segmento usar o processo vectorial ou recorrer à propriedade de qualquer ponto da mediatriz estar equidistante dos extremos do segmento.</p> <p>A determinação do baricentro de domínios planos deve ser feita em casos não complicados.</p>
<p>Estudo da recta no espaço</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Equações vectoriais, paramétricas, cartesianas</li> <li>§ Paralelismo de rectas</li> <li>§ Perpendicularidade de rectas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Resolver analiticamente situações que envolvem determinação de rectas obedecendo a condições dadas, paralelismo de rectas, perpendicularidade de rectas.</li> </ul>	<p>O estudo da recta no espaço deve ser feito paralelamente e por comparação com os resultados já obtidos no plano.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Polinómios</p> <p>§ Divisão inteira</p> <p>§ Regra de Ruffini</p> <p>§ Divisibilidade por <math>x - a</math></p>	<p>§ Decompor polinómios em factores.</p> <p>§ Reconhecer a raiz de um polinómio.</p> <p>§ Resolver equações e inequações inteiras grau superior a dois.</p>	<p>Pretende-se continuar e ampliar o estudo das funções iniciado em anos anteriores. A revisão desses conhecimentos irá sendo feita à medida que vão sendo necessários. Os polinómios aparecem como expressões que definem determinadas funções.</p> <p>A metodologia aconselhada para desenvolver estes conteúdos é partir de exemplos. Na decomposição de polinómios em factores, dar a noção de raiz dupla, (tripla,...).</p> <p>O aluno deve ser capaz de construir um polinómio dadas as suas raízes e, eventualmente, ainda sujeito a alguma condição suplementar.</p> <p>Deve ser contemplado o estudo da equação biquadrada. São de considerar equações ou inequações de grau superior a dois, tio caso em que é fácil a sua decomposição noutras do 1º ou do 2º grau ou em casos particulares:</p> <p>§ <math>(x^8 - 1)(x^3 - 1) \geq 0</math></p> <p>§ <math>(x^4 + 1)(x^4 - 1)(x^3 - 1) \geq 0</math></p> <p>§ <math>(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1) \geq 0</math></p> <p>§ <math>(x + 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \geq 0</math></p> <p>§ <math>(x + 1)(x - 1)^2 \geq 0</math></p> <p>onde, <math>x \geq -1 \vee x = +1</math>, ou seja <math>x \geq 1</math></p> <p>É conveniente que o aluno se habitue a escrever o conjunto solução sob a forma de intervalo (s) de números reais.</p> <p>Introduzir as operações com intervalos (reunião, intersecção, complementação).</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Fracções algébricas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Domínio</li> <li>§ Equivalência, simplificação</li> <li>§ Operações</li> <li>§ Equações e inequações fraccionárias</li> <li>§ Funções polinomiais</li> <li>§ Funções racionais</li> <li>§ Operações com funções</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Determinar o domínio de uma fracção algébrica.</li> <li>§ Identificar fracções algébricas equivalentes,</li> <li>§ Operar com fracções algébricas,</li> <li>§ Resolver equações e inequações fraccionárias.</li> <li>§ Construir e analisar o gráfico de uma função.</li> <li>§ Operar com funções.</li> </ul>	<p>A simplificação de fracções algébricas faz-se, normalmente, utilizando a decomposição cru factores.</p> <p>Na simplificação e na equivalência de fracções os alunos devem ter sempre em conta o domínio. As equações e as inequações fraccionárias a propor aos alunos devem envolver a aplicação dos casos notáveis da multiplicação, da decomposição em factores, da lei do anulamento do produto e da redução ao mesmo denominador comum.</p> <p>Sugere-se que sejam utilizados exemplos simples e sugestivos para introduzir estes conteúdos.</p> <p>A partir do gráfico da função <math>f(x)</math> os alunos devem construir o gráfico das funções:</p> $-f(x); f(-x); f(x \pm a); \frac{1}{f(x)} f(x) \text{ quando } f(x) \text{ é}$ <p>injectiva. É conveniente relembrar as noções de aplicação e as propriedades associadas: injectividade, sobrejectividade e bijectividade. Igualmente recordar a função inversa e função composta.</p> <p>No estudo das funções racionais, considerar, do ponto de vista gráfico e analítico, funções definidas por ramos. Devem ser encarados os casos (i) em que as operações com funções obrigam a restrições; (ii) em que a ou as funções envolvidas sejam definidas por ramos. Pode aproveitar-se o estudo das funções com racionais, para abordar o cálculo da racionalização dos denominadores.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Funções com radicais quadráticos ou cúbicos</p>	<p>§ Determinar o domínio.</p> <p>§ Esboçar o gráfico.</p> <p>§ Resolver equações irracionais. Resolver equações com módulos.</p>	<p>O grau de dificuldade a atingir no estudo das funções com radicais não deve exceder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Domínio de <math>f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}</math></li> <li>- Domínio de <math>g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}</math></li> <li>- Domínio de <math>h(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}</math></li> <li>- Domínio de <math>i(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}</math></li> <li>- Domínio de <math>j(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}</math></li> </ul> <p>O grau de dificuldade das equações com módulo não deve exceder:</p> $ x^2 - 1  = 2x + 1$ $\left  \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}} \right  = 3x - 2$ <p>É desejável que o aluno resolva também algumas inequações, não devendo o grau de dificuldade exceder</p> $ x^2 - 1  < 2x + 1$

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Funções de domínio IN</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Gráficos</li> <li>§ Sucessões monótonas</li> <li>§ Sucessões limitadas</li> <li>§ Progressões aritméticas e geométricas</li> <li>§ Razão</li> <li>§ Termo geral</li> <li>§ Soma de n termos consecutivos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definir uma sucessão.</li> <li>§ Determinar termos de uma sucessão.</li> <li>§ Reconhecer se um número é termo de uma sucessão</li> <li>§ Investigar se uma sucessão é monótona.</li> <li>§ Investigar se uma sucessão é limitada.</li> <li>§ Determinar a razão e o termo geral.</li> <li>§ Determinar a soma de u termos consecutivos.</li> <li>§ Representar a soma de n termos de uma progressão pelo símbolo <math>\Sigma</math></li> <li>§ Estudar a monotonia de uma progressão</li> </ul>	<p>O estudo das sucessões pode e deve evidenciar ligações entre a matemática e outras disciplinas.</p> <p>As sucessões devem ser apresentadas como funções de domínio IN existindo terminologia própria. Partindo de um exemplo, apresenta-se a definição de sucessão, a linguagem específica e a simbologia.</p> <p>Uma sucessão pode ser definida pelo seu termo geral ou por um processo de recorrência. Pode aproveitar-se a situação para introduzir a demonstração por recorrência (indução matemática).</p> <p>Os alunos devem ser confrontados com situações em que o gráfico não permita concluir da monotonia. Utilizando a calculadora, colocar o aluno face a situações, tais como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Sucessão não monótona mas limitada:</li> <li>– Sucessão monótona e não limitada.</li> </ul> <p>No estudo das sucessões limitadas, incluir a referência a majorantes e minorantes de um conjunto.</p> <p>Vários exemplos motivadores podem ser propostos para abordar as progressões:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Números triangulares</li> <li>– Números quadrangulares</li> <li>– Sucessão de Fibonacci,</li> </ul> <p>A utilização do símbolo <math>\Sigma</math> tem como único objectivo a simplificação da escrita.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Limite de uma sucessão</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Sucessão convergente</li> <li>§ Sucessão divergente</li> <li>§ Infinitésimos e infinitamente grandes</li> <li>§ Limite da soma de n termos de uma progressão aritmética</li> <li>§ Indeterminações</li> <li>§ Estudo intuitivo da sucessão <math>a^n</math></li> <li>§ Limite da soma de ti termos de uma</li> <li>§ Progressão geométrica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Reconhecer o limite de uma sucessão.</li> <li>§ Determinar o limite de unia sucessão.</li> <li>§ Reconhecer infinitésimos.</li> <li>§ Determinar o limite de unia sucessão por equivalência.</li> <li>§ Reconhecer infinitamente grandes.</li> <li>§ Levantar indeterminações.</li> <li>§ Estudar a monotonia e convergência quando                             <math display="block">a &gt; 1,</math> <math display="block">a = 1,</math> <math display="block">0 &lt; a &lt; 1,</math> <math display="block">-1 &lt; a &lt; 0,</math> <math display="block">a &lt; -1</math> </li> </ul>	<p>Sugere-se que a definição de limite de unia sucessão seja:</p> <p>“Diz-se que o limite de uma sucessão <math>a</math> é <math>L</math> e escreve-se</p> $\lim a_n = L,$ <p>se <math> a_n - L </math> for tão pequena quanto se queira, desde que <math>n</math> seja tão grande quanto necessário.”</p> <p>Ex:</p> <p>A sucessão <math>a_n = \frac{n+1}{n}</math> tem por limite 1.</p> <p>Com efeito, <math>\left  \frac{n+1}{n} - 1 \right  &lt; \varepsilon</math> equivale <math>\left  \frac{1}{n} \right  &lt; \varepsilon</math> a ou seja <math>\frac{1}{n} &lt; \varepsilon</math>, isto é, <math>n &gt; \frac{1}{\varepsilon}</math></p> <p>E sempre possível determinar <math>n</math> que sem maior quanto menor for <math>\varepsilon</math></p> <p>No cálculo de limites deve ser considerado o caso em que se pode prescindir de alguns termos, pelo facto do seu papel ser irrelevante para grandes valores de <math>n</math>. Ex.:</p> $u_n = \begin{cases} n+1, & n < 1000 \\ \frac{1}{n}, & n \geq 1000 \end{cases} \quad \lim \frac{1}{n} = 0$ <p>O reconhecimento de infinitésimos e infinitamente grandes deve ser feito em caso simples.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
		<p>Os alunos devem reflectir sobre exemplos, como:</p> <p><math>n \rightarrow \frac{1}{2}</math> (crescente, não limitada).</p> <p><math>n \rightarrow \frac{-n^2}{4}</math> (decrescente, não limitada).</p> <p><math>n \rightarrow \frac{10}{n}</math> (decrescente, limitada, infinitésimo)</p> <p><math>n \rightarrow (-1)^n n</math> (não monótona, não limitada. infinitamente grande em módulo)</p> <p><math>n \rightarrow \frac{((-1)^n)^2}{n}</math> (não monótona, limitada. infinitésimo)</p> <p><math>n \rightarrow (n - 6)^2</math> (não monótona, infinitamente grande)</p> <p>O levantamento de indeterminações deve ser feito apenas em casos simples, como por exemplo:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = 2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - 2 + \frac{4}{n+2} \right) = \infty$

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
		$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$ $= \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ $= \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ <p>O cálculo de limites de uma sucessão por equivalência deve ser feito em casos simples, como por exemplo.</p> $\frac{n^2}{n+2} \sim n \rightarrow \infty$ $\frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} = 1 \rightarrow 1$ <p>Os conhecimentos adquiridos sobre a sucessão <math>a^n</math> aplicam-se no estudo da soma de <math>n</math> termos de uma progressão geométrica.</p>

**12º ANO**

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
Diagramas de extremos e quartis	<ul style="list-style-type: none"><li>§ Construir e interpretar gráficos de barras, poligonais, histogramas, diagramas de extremos e quartis.</li><li>§ Interpretar uma distribuição, recorrendo à análise conjunta de medidas de tendência central e de dispersão.</li></ul>	<p>Para abordar este tema, devem retomar-se as situações estudadas no 10º ano.</p> <p>A partir de exemplos em que surja a necessidade de interpretar os dados simples ou agrupados em classes aproveitar para rever os conhecimentos adquiridos nos 9º e 10º anos, relativamente às medidas de tendência central e de dispersão e introduzir os diagramas de extremos e de quartis.</p> <p>É importante comparar distribuições para tirar conclusões acerca do papel das diversas medidas.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Técnicas de contagem</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Permutações. O símbolo <math>n!</math></li> <li>§ Arranjos com e sem repetição</li> <li>§ Combinações sem repetição; propriedades</li> <li>§ Triângulo de Pascal</li> <li>§ Formula do binómio de Newton</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Resolver problemas de contagem e de probabilidades, recorrendo aos casos favoráveis e possíveis,</li> <li>§ Utilizar diagramas em árvore ou outros.</li> <li>§ Demonstrar as propriedades. <math>{}^n C_p = {}^n C_{n-p}</math> e <math>{}^n C_{p+1} + {}^n C_{p+1} = {}^{n+1} C_{p+1}</math></li> <li>§ Simplificar expressões com factoriais ou potências de binómio.</li> <li>§ Utilizar o desenvolvimento do binómio de Newton na demonstração de propriedades simples.</li> <li>§</li> </ul>	<p>Iniciar este tema a partir de problemas concretos e de jogos pode motivar o aluno para o seu estudo. Procurar desenvolver critérios de identificação de situações (há repetição ou não, interessa a ordem ou não, contagens elementares, casos favoráveis, casos possíveis,...).</p> <p>O triângulo de Pascal pode ser relacionado com actividades da vida real.</p>
<p>Aplicações ao cálculo de probabilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Acontecimentos independentes</li> <li>§ O problema das provas repetidas</li> <li>§ Lei binomial de probabilidades</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Calcular a probabilidade de uni acontecimento se realizar <math>k</math> vezes em <math>n</math> provas repetidas.</li> </ul>	<p>São de considerar apenas casos simples composição de umas, lançamento de moedas, ...</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Cónicas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Secções da superfície cónica</li> <li>§ Definição de cónica a partir das propriedades focais; equações reduzidas referentes aos eixos coordenados</li> <li>§ Conjuntos definidos por uma condição</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definir cónica como a secção de uma superfície cónica por um plano.</li> <li>§ Determinar características de uma cónica dada a equação reduzida e vice-versa.</li> <li>§ Representar num referencial conjuntos definidos por condições que envolvem rectas, circunferências, cónicas.</li> </ul>	<p>O estudo das cónicas deve basear-se essencialmente no conceito de cónica como lugar geométrico (conjunto de pontos obedecendo a determinada condição). Permite a realização de trabalhos interdisciplinares, como por exemplo, trajectórias de balas, de satélites artificiais., de astros, etc. Os alunos podem fazer o estudo experimental das cónicas, utilizando material improvisado – cordel, régua e <i>piunais</i>.</p> <p>No caso da parábola o aluno deve tomar consciência da equivalência das três definições:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Secção cónica</li> <li>- Lugar geométrico</li> <li>- Gráfico da função quadrática</li> </ul> <p>Os domínios planos a estudar devem integrar, sem exagero, os conhecimentos de geometria adquiridos não só no ano em curso, como nos anos anteriores.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Limite de uma sucessão</p> <p>§ Propriedades</p> <p>“Se <math>U_n \rightarrow +\infty</math> e <math>V_n \geq V_n</math> a partir de certa ordem, então <math>V_n \rightarrow +\infty</math>”</p> <p>Se <math>u \rightarrow +\infty</math> também</p> <p><math>(u + a) \rightarrow +\infty, a \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>\lambda u_n \rightarrow +\infty, \lambda &gt; 0</math></p> <p><math>\lambda u_n \rightarrow -\infty, \lambda &gt; 0</math></p> <p>“Se <math>u \rightarrow 0</math>, e a partir de certa ordem</p> <p><math> u_n  \leq v_n</math> então <math>ku \rightarrow 0</math> e <math>u_n + a \rightarrow a</math>”</p> <p>“Se (u) e (v) são sucessões convergentes, então</p> <p>§ <math>\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n</math></p> <p>§ <math>\lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n</math></p> <p>§ <math>\lim u_n^p = (\lim u_n)^p, p \in \mathbb{N}</math></p>	<p>§ Identificar as propriedades dos infinitésimos e dos infinitamente grandes.</p> <p>§ Utilizar as propriedades para o levantamento de</p> <p>§ Indeterminações e cálculo de limites.</p> <p>§ Determinar limites de sucessões por enquadramento.</p>	<p>Ao retomar o cálculo de limite de fazer-se sentir a necessidade propriedades.</p>
<p><math>\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}, \lim v_n \neq 0</math></p> <p><math>\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}, p \in \mathbb{N}, u_n &gt; 0</math></p> <p>Sucessão <math>u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n</math></p>	<p>§ Estudar a monotonia, a convergência da sucessão.</p> <p>§ Definição do número e.</p>	<p>O estudo da sucessão deve ser feito a partir de actividades numéricas, por exemplo, a partir do binómio de Newton e do enquadramento dos termos da sucessão para obter valores aproximados de (com recurso à calculadora).</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Limite de uma função real de variável real</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definição</li> <li>§ Limites laterais</li> <li>§ Regras operatórias.</li> <li>§ Levantamento de indeterminações</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definir limite de uma função real de variável real, segundo Heine.</li> <li>§ Calcular limites de funções.</li> <li>§ Investigar se uma função é contínua num ponto do seu domínio</li> </ul>	<p>A abordagem e o desenvolvimento deste tema deve ser feita através do esboço e análise de gráficos de funções.</p> <p>As regras operatórias devem ser apresentadas para os casos</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ Quando } a \text{ finito ou } a \text{ infinito}$ <p>Pretende-se que o aluno averigüe da existência de limite, ou de limites laterais de uma função, quando <math>x</math> tende para um ponto recorrendo às definições, às regras operatórias e em casos de indeterminação. Devem considerar-se casos em que a função é definida por ramos.</p> <p>A partir da análise de gráficos de funções, o aluno deve verificar que a igualdade de limites laterais permite concluir da existência de limite.</p>
<p>Continuidade de uma função real de variável real</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Continuidade de uma função real de variável real num ponto do seu domínio</li> <li>§ Assíntotas horizontais e verticais</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Investigar se uma função é contínua num subconjunto do seu domínio.</li> <li>§ Averiguar da existência de assíntotas ao gráfico de uma função.</li> <li>§ Esboçar e analisar gráficos de funções.</li> </ul>	<p>Convém salientar o estudo da continuidade de uma função racional (inteira ou fraccionária).</p> <p>Assegurar a noção intuitiva de que uma função contínua num subconjunto do seu domínio corresponde a um gráfico contínuo desse intervalo.</p> <p>Podem aproveitar-se algumas situações de descontinuidade num ponto em que os limites laterais são iguais e finitos, para se fazer o prolongamento da continuidade.</p> <p>Para o esboço de gráficos de funções ponto por ponto deve recorrer-se ao domínio, zeros, sinal, assíntotas. A ocorrência de assíntotas oblíquas no estudo de uma função nos pontos do infinito pode ser explorada como uma generalização das assíntotas horizontais.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Derivada de uma função num ponto</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>§ Interpretação geométrica</li> <li>§ Derivadas laterais</li> <li>§ Teorema relativo à derivabilidade e continuidade.</li> <li>§ Função derivada</li> <li>§ Derivada da soma, do produto, do quociente, da potência de expoente racional</li> <li>§ Derivadas de ordem superior à primeira</li> <li>§ Aplicações das derivadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>§ Definir derivada de uma função num ponto pertencente a um subconjunto do domínio.</li> <li>§ Interpretar geometricamente o conceito de derivada.</li> <li>§ Investigar se uma função tem derivada num ponto do seu domínio.</li> <li>§ Investigar da existência de derivadas laterais.</li> <li>§ Calcular a derivada da função num ponto, utilizando a definição.</li> <li>§ Calcular a derivada, usando as regras de derivação.</li> <li>§ Determinar a tangente ao gráfico de uma função num ponto dado.</li> <li>§ Estudar o sentido da variação de uma função.</li> <li>§ Determinar os extremos relativos.</li> <li>§ Determinar o sentido das concavidades do gráfico da função.</li> <li>§ Resolver problemas de máximos e de mínimos.</li> <li>§ Levantar indeterminações,</li> <li>§ Esboçar o gráfico de uma função.</li> </ul>	<p>O conceito de derivada pode introduzir-se a partir de modelização de situações onde é evidente a necessidade de estudar a razão (taxa) entre as variações (infinitesimais) das variáveis dependentes e independentes observando a evolução das posições das secantes e dos respectivos declives, respectivamente para a tangente e para a derivada (declive da recta tangente ao gráfico no ponto).</p> <p>O aluno deve ser confrontado com situações como por exemplo:</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ x^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$ $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} = 0 \quad : \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8$ $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Não existe } f'(2) \text{ embora} \\ \text{existam e sejam iguais as} \\ \text{derivadas laterais as} \\ \text{ponto } 2 \end{array}$ $g(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \leq 2 \\ x^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases} \quad \text{Não existe } g'(2)$ <p>Funções estudadas anteriormente devem ser retomadas para que o aluno comprove a diferença de tratamento, quanto a eficiência e precisão.</p>

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
§	§	Os problemas de optimização devem ser acessíveis e ter algum interesse prático. A partir do esboço do gráfico de uma função deve obter-se informação relativa a domínio, contradomínio, zeros, intervalo de monotonia, extremos absolutos e relativos, pontos de descontinuidade, pontos de não diferenciabilidade, sentido das concavidades.
Função exponencial § Derivada de $f(x) = e^x$	§	A função exponencial $e^x$ pode ser introduzida a partir do cálculo do $\lim\left(\frac{1+x}{n}\right)^n$  Através do esboço do gráfico da função nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$ , concluir da continuidade, monotonia e contradomínio. Dar a informação, sem demonstrar, que $f(x) = e^x$ $P(x) = e^x$ $f(x) = e^u$ $P(x) = u' \cdot e^u$ , com $u = u(x)$
Função logarítmica § Definição de logaritmo de $x$ na base $a$ com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , $x \in \mathbb{R}^+$ § Propriedades § Operações com logaritmos	§	Utilizando a máquina de calcular, os alunos podem verificar a possibilidade de simplificar alguns cálculos aplicando os logaritmos.

Conteúdos	Objectivos	Orientações Metodológicas
<p>Função logarítmica</p> <p>§ Derivada de <math>f(x) = \log_e x</math></p>	<p>§ Estudar a função logarítmica</p> $f(x) = \log_a x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}^+$ <p>§ Resolver equações e inequações que envolvam logaritmos e exponenciais.</p>	<p>Através do esboço do gráfico da função nos casos <math>a &gt; 1</math>, <math>0 &lt; a &lt; 1</math>, concluir da continuidade, monotonia e contradomínio.</p> <p>Dar a informação, sem demonstrar, que</p> $f(x) = \log_e x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \log_e u \quad f'(x) = \frac{u'}{x}$ $f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \log_e a}$ $f(x) = \log_a u \quad f'(x) = \frac{u'}{u \log_e a}$ $f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \log_e a$ $f(x) = a^u \quad f'(x) = u' a^u \log_e a$ <p>em que <math>u = u(x)</math></p> <p>Os alunos podem realizar trabalhos em grupo sobre a História do Cálculo Diferencial referindo o trabalho de alguns matemáticos como Newton, Fermat, Leibniz, Cauchy, Anastácio da Cunha, ...</p>