Geometria Descritiva

10.º ano

Ministério da Educação

ONLINE
+OFFLINE
+DOWNLOAD

Manual Digital na app **EV Smart Book** e em **www.escolavirtual.cv**

Geometria Descritiva

10.º ano

10

Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado pela Universidade de Cabo Verde.

Ministério da Educação

Explora o teu manual digital

https://escolavirtual.cv

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

DISPONÍVEL NO Google Play

Descarregar na App Store

Apresentação

A Geometria Descritiva é fundamental para comunicar ideias através do desenho, nomeadamente por meio da representação em perspetiva, sugerindo uma imagem elucidativa e próxima da realidade. Além disso, a capacidade de visualizar o espaço é essencial no desenvolvimento das noções de estética e de escala.

Esta disciplina tem um papel determinante em várias práticas profissionais que implicam a criação de novos objetos ou edifícios, nomeadamente na arquitetura, no *design* e na engenharia civil, entre outras, já que a intervenção no território necessita de um perfeito entendimento acerca deste, a par de uma capacidade de visualizar, mentalmente, em três dimensões, algo que, geralmente, se representa de forma bidimensional.

Este manual de Geometria Descritiva, vocacionado para o 10.º ano de escolaridade, pretende despertar no aluno a capacidade de perceção do mundo que o rodeia e a imaginação do que ainda não está materializado.

Propõe-se um estudo faseado, de sucessivo progresso na aprendizagem, consolidando as bases antes de progredir nos temas. Para tal, o aluno encontrará a rubrica "Resumindo", que reforça ideias-chave fundamentais, bem como os exercícios "Para praticar" ao longo de cada tema, através dos quais poderá consolidar e testar os seus conhecimentos.

Com este manual, os estudantes irão adquirir os saberes necessários para progredirem na sua área de interesse.

Índice

Tema 5

Tema 6

Tema 7

Módulo inicial

Introdução

Conhecimentos prévios

Símbolos e notações

Generalidades

Suportes

Riscadores

Material de precisão

Normalizações

Dobragem do papel

Legendas

Elementos do desenho

Tipos de traçado

Módulo inicial

Introdução

A Geometria Descritiva é a disciplina que permite:

"Representar com exatidão, sobre desenhos que só têm duas dimensões, objetos que, na realidade, têm três e que são suscetíveis de uma definição rigorosa."

Gaspard Monge (1746-1818)

Mais do que permitir a representação rigorosa de elementos tridimensionais no papel, em duas dimensões, a Geometria Descritiva é a disciplina que treina o cérebro humano para a apreensão de cenários imaginários. Isto é: a possibilidade de ver no espaço, no abstrato, idealizando formas e relações tridimensionais através do desenho bidimensional.

Neste contexto, a Geometria Descritiva torna-se uma área de saber essencial a muitas vertentes artísticas e científicas, como a arquitetura, o *design*, a engenharia, entre outras.

Ao longo deste manual, serão abordados os diferentes modos de representação das formas presentes na Natureza. A explicação textual, sempre acompanhada de elementos gráficos ilustrativos, permite estabelecer um paralelo permanente entre as duas formas de comunicação, auxiliando na construção de um raciocínio de apreensão mental do espaço tridimensional.

No decorrer dos vários temas, o recurso a alguns exercícios de consolidação de conhecimento são um auxílio importante na verificação das competências adquiridas, assegurando as bases para a progressão no programa letivo.

A abordagem temática é feita do geral para o particular, assegurando um domínio dos conceitos gerais que permita a compreensão de casos específicos da disciplina, aumentando, assim, o grau de complexidade dos problemas propostos.

Conhecimentos prévios

A Geometria Descritiva, presente em inúmeras situações do dia a dia, é uma disciplina que tem vindo a ser abordada nos anos anteriores, associada a outras áreas do saber, como, por exemplo, a Matemática.

Quando fazemos dobragens num papel, de forma a obter um determinado objeto, estamos a construir uma planificação desse mesmo objeto; ou quando observamos a nossa sombra no chão ou numa parede, estamos a interpretar um sistema de projeção. Tudo isto são conceitos relativos à Geometria Descritiva, aplicados à vida prática.

Experimentando colocar um objeto no centro de uma mesa ao redor da qual estão vários alunos, poder-se-á pedir a cada um para descrever o objeto que vê. Certamente, as descrições irão apresentar características e pormenores distintos, próprios daquilo que cada um observa, tendo em conta a sua posição relativamente ao objeto. Este exercício será bastante útil para abordar o conceito de projeção (nomeadamente, do centro de projeção), que irá ser estudado mais à frente.

Numa fase inicial, torna-se importante conhecer algumas nomenclaturas e conceitos utilizados na linguagem da Geometria Descritiva, bem como entender que nesta há elementos concretos e abstratos. Os elementos concretos são todos aqueles que possuem um volume exato (sólidos geométricos). As retas, superfícies e figuras geométricas, porque não possuem dimensão, são abstrações de conceitos concretos (por exemplo, a figura geométrica do quadrado pode ser relativa à base de uma pirâmide quadrangular).

Na figura ao lado, pode observar-se uma sombra projetada de um painel com elementos horizontais e uma silhueta feminina. Trata-se de uma projeção num plano vertical (a parede) de elementos que estão assentes sobre um plano horizontal (o chão).

Também a perspetiva é um tema de estudo na Geometria Descritiva que está sempre presente na nossa visão do Mundo. A forma como os nossos olhos captam a realidade à nossa volta é resumida numa imagem que se apresenta sob a forma de uma perspetiva cónica, em que os elementos que estão mais distantes aparentam ser cada vez menores, e os mais próximos, cada vez maiores. Também as linhas paralelas parecem convergir num qualquer ponto, distante, denominado ponto de fuga.

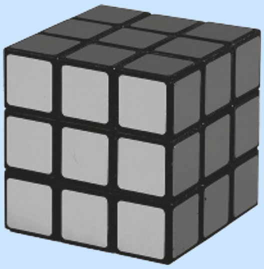
Atenta na fotografia acima e verifica que as montanhas ao longe parecem caber na palma da mão, e que as linhas que definem a estrada se vão aproximando, parecendo convergir num ponto muito distante. Também os postes verticais, à direita, se apresentam sempre paralelos, por serem verticais, mas parecem ficar cada vez mais pequenos, e mais juntos, quando, na realidade, terão todos os mesmo tamanho e serão equidistantes.

Na verdade, a Geometria Descritiva está presente em quase tudo o que faz parte do dia a dia. Desde a superfície da mesa da sala de aula, que é um plano horizontal, paralelo ao chão; ao quadro do professor, que poderá ser um plano vertical, ou uma superfície de projeção, consoante o uso que lhe é dado; até ao formato de uma lata, que poderá corresponder a um cilindro (sólido geométrico), entre muitos outros.

Para praticar

1. Observa os objetos abaixo e identifica com que sólidos geométricos estes se assemelham.



2. Experimenta colocar um objeto no centro de uma sala com pouca luz e ilumina-o com uma lanterna, verificando o resultado na parede. Move a lanterna e verifica as transformações que ocorrem na projeção na parede.
Elabora um pequeno texto descrevendo a tua experiência.

3. Recria uma composição semelhante à da imagem abaixo, com objetos que tenhas à disposição, e faz um registo fotográfico.
Descreve os fatores que consideras mais relevantes na composição fotográfica (luz, sombra, objeto) e justifica.

Símbolos e notações

Com vista a simplificar a linguagem e economizar tempo e recursos, a Geometria Descritiva possui um conjunto de notações e símbolos que têm significados específicos para cada situação. Estes elementos permitem comunicar de forma eficaz e rigorosa, recorrendo o mínimo possível a meios de escrita, preservando o carácter gráfico da disciplina.

$\equiv$	Elementos do espaço ou projeções coincidentes
AB	Reta que contém os pontos **A** e **B**
$\dot{A}B$	Semirreta que tem o seu extremo em **A** e contém o ponto **B**
$\dot{B}A$	Semirreta que tem o seu extremo em **B** e contém o ponto **A**
[AB]	Segmento de reta compreendido entre os pontos **A** e **B**
[ABC]	Polígono cujos vértices são os pontos **A**, **B** e **C** (linha quebrada fechada)
$\overline{AB}$	Distância do ponto **A** ao ponto **B**
$\overset{\frown}{AB}$	Arco de circunferência compreendido entre os pontos **A** e **B**

A notação atribuída aos planos é sempre uma letra minúscula do alfabeto grego.
Por exemplo:

α	alfa
β	beta
δ	delta
π	pi
φ	fi
θ	teta
λ	lambda
μ	miu
ν	niu
ρ	ró
ω	ómega
γ	gama
σ	sigma

Generalidades

Dada a universalidade do desenho, para que este possa ser perfeitamente compreendido, independentemente do contexto cultural, social e geográfico em que é analisado, há um conjunto de convenções que pretendem uniformizar esta forma gráfica de comunicação.

Para que a sua representação seja rigorosa, é importante que seja utilizado material de desenho adequado. A sua utilização ajuda a garantir a precisão necessária para a resolução dos problemas da disciplina.

Podemos subdividir o equipamento de desenho em três tipos:

- Suportes;
- Riscadores;
- Material de precisão.

Suportes

Por suporte entende-se a superfície na qual são efetuados os desenhos.

Tradicionalmente, o papel é o suporte mais utilizado quando se trata de desenho rigoroso.

Contudo, dentro do papel, pode ter-se o papel opaco e o papel transparente (vulgarmente conhecido como papel de engenharia). A escolha do tipo de papel está relacionada com o tipo de material riscador a utilizar: o papel opaco é mais vocacionado para o uso de grafite (lápis ou lapiseira), e o papel transparente para o uso de tinta da China.

Ainda dentro daquilo que são as características do papel, este, sendo opaco ou transparente, pode ser mais ou menos fino – isso dependerá da gramagem do mesmo. Normalmente, em Geometria Descritiva, a gramagem mais comum para o papel opaco varia entre os 65g/m (valores mínimos) e os 300g/m (equivalente a uma cartolina). Os papéis apresentam-se sob formatos normalizados, sendo os mais comuns o A4 e o A3, que são os formatos mais utilizados na Geometria Descritiva.

Riscadores

Os riscadores são os materiais que permitem gravar no suporte (papel) os elementos gráficos (pontos, linhas, sombras, etc.).

Na Geometria Descritiva, os riscadores mais utilizados são a grafite e a tinta (tinta da China).

No caso da grafite, existem os lápis e as lapiseiras. Nestas últimas, há as lapiseiras de minas finas, minas normais e minas grossas. Para o desenho rigoroso, as mais indicadas são as duas primeiras.

Contudo, não é apenas a grossura da mina que deve ser tida em conta, mas também o seu nível de dureza.

Por dureza da mina entende-se a capacidade que esta tem de riscar o papel, independentemente da pressão efetuada pela mão no momento do desenho.

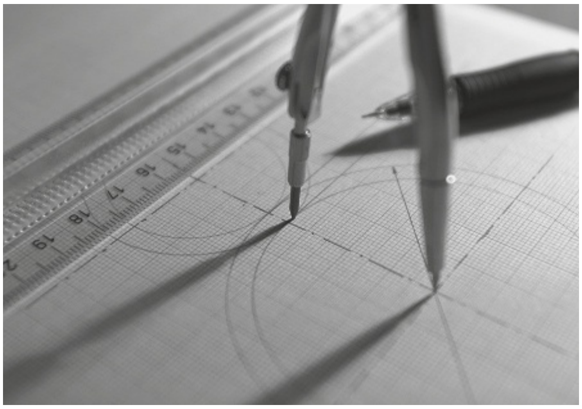
A dureza da mina é identificada por meio de letras (H e B), sendo que H corresponde às minas mais duras e B às minas mais suaves. Dentro desta definição, existem subníveis, que têm a sua correspondência em números (B, 2B, 3B, etc.). No caso das minas B, o prefixo numérico indica um crescendo de suavidade da mina, ou seja: uma mina 3B será mais suave do que uma mina 2B ou B). Isto significa que, exercendo a mesma pressão sobre o material riscador, obtém-se uma linha mais carregada com uma mina 3B do que com uma mina B ou 2B.

Existem, ainda, as minas HB e F, que correspondem a durezas intermédias.

No caso do desenho rigoroso, está desaconselhado o uso de minas suaves, bem como de minas superiores a H.

A vantagem do desenho a grafite é a possibilidade de fazer correções sem rasuras. Neste caso, devem ser utilizadas borrachas brancas, que não danificam o papel.

Material de precisão



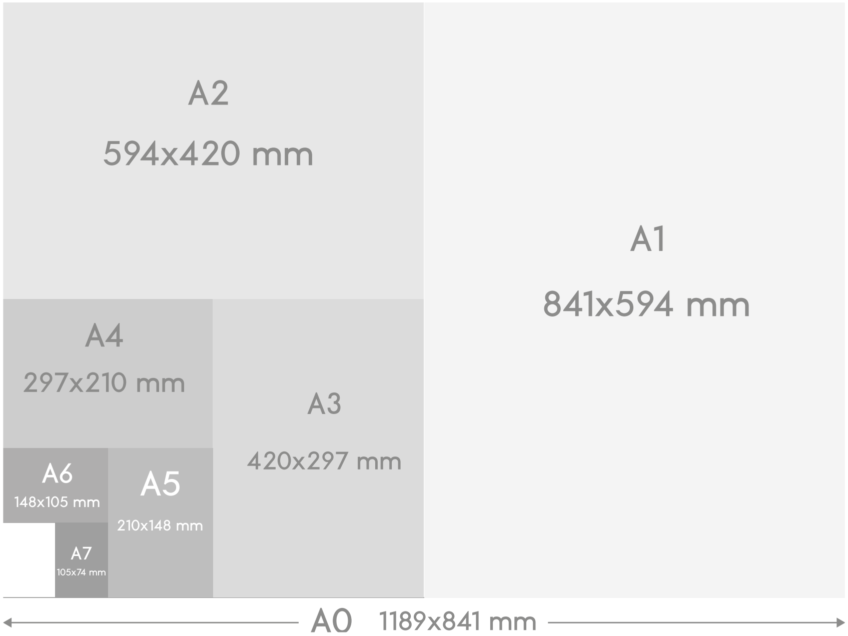
O material de precisão é todo o conjunto de utensílios que permitem conferir maior rigor ao desenho.

Neste grupo incluem-se: réguas, esquadros, transferidores, aristos, compassos, escantilhões de curva, etc.

A utilização deste tipo de material permite representar situações específicas da Geometria Descritiva, que seriam impossíveis de desenhar com rigor sem recurso a estes materiais de precisão, como, por exemplo: linhas paralelas e perpendiculares, circunferências, elipses, ou mesmo a marcação de ângulos.

Normalizações

Vivemos numa realidade cada vez mais global. Este facto implica que a comunicação deva ser cada vez mais universal, nomeadamente no desenho técnico, uma vez que um projeto poderá ter de ser interpretado por várias pessoas, de várias entidades, nas mais variadas partes do Mundo. Assim, para dar resposta a esta necessidade, foram definidas normas que uniformizam os desenhos, tornando-os perfeitamente compreensíveis, independentemente do contexto em que forem executados ou analisados.



Cada país poderá ter o seu próprio sistema de normalização. Contudo, existe um organismo internacional de fiscalização dessas mesmas normas: a Organização Internacional de Normalização. Esta entidade garante a uniformização das normas em vigor, definindo normas internacionais: ISO (*International Organization for Standardization*).

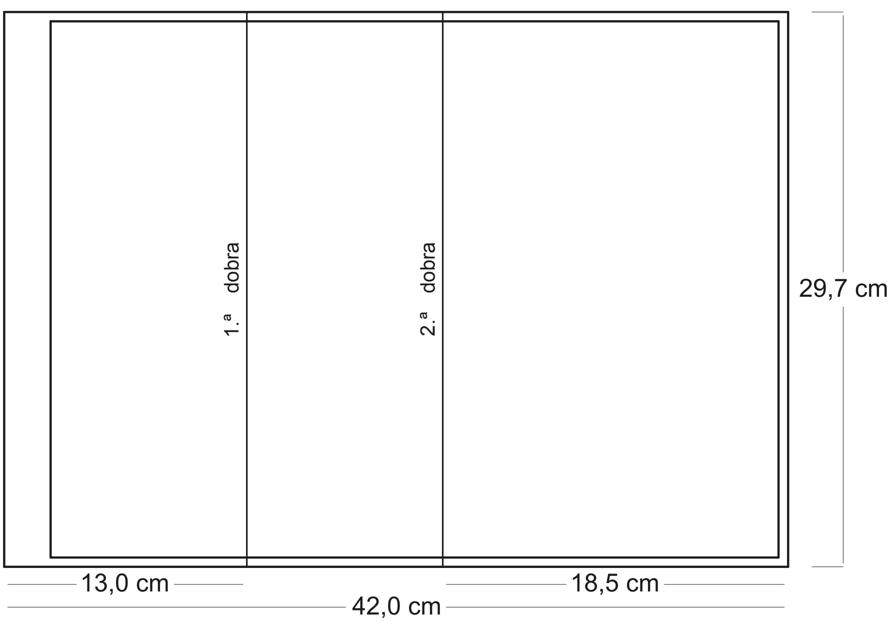
Essas normalizações vão desde a definição das espessuras dos traços a tinta da China, passando pelos formatos de papel utilizados, a forma como este deve ser dobrado, até à forma de cotar e legendar desenhos.

Dobragem do papel

Na generalidade dos desenhos técnicos, são usados formatos de papel maiores do que o tradicional A4. Por isso, e para facilitar o seu transporte e arquivo, garantindo a preservação e o bom estado das folhas, existem normas para a dobragem das mesmas.

Na figura abaixo, podemos ver a dobragem do formato A3.

A norma em vigor para estes casos é:
– Norma NP-49 (1968).



Legendas

As legendas são elementos muito importantes no desenho, pois permitem identificá-lo e registar informações essenciais para a leitura do mesmo.

Devem situar-se no canto inferior direito das folhas, assegurando uma margem de 5 mm em relação ao limite do papel.

Estas são algumas das informações que devem constar da legenda:

- designação ou título do desenho;
- indicações complementares do título;
- data e rubrica do responsável pelo desenho;
- empresa (quando aplicável);
- número e registo do desenho;
- escala do desenho.

A norma em vigor no que respeita a legendas nos desenhos é: ISO 9431 (1990).

Elementos do desenho

No desenho técnico, além da representação bidimensional da realidade, com recurso a linhas e manchas, é necessário identificar os elementos que compõem o desenho. Cada ponto, reta e plano devem ser devidamente identificados. Neste caso, existe também uma convenção para a forma como é designado cada um desses elementos.

Elementos geométricos	**Tipos de designação**	
Pontos	Alfabeto latino – letras maiúsculas	**Ex.:** A, B, C, P, ...
Retas	Alfabeto latino – letras minúsculas	**Ex.:** a, b, r, s, ...
Planos	Alfabeto grego – letras minúsculas	**Ex.:** α, β, δ, φ, ...
Superfícies	Alfabeto grego – letras maiúsculas	**Ex.:** ψ, β, δ, φ, ...

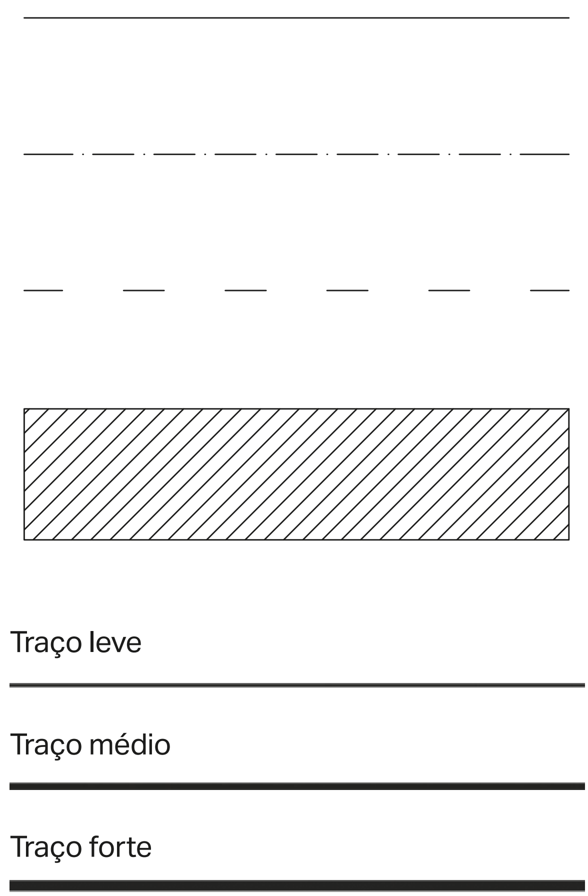
Tipos de traçado

Na resolução dos problemas em Geometria Descritiva, é importante hierarquizar o traçado; ou seja: atribuir aos diferentes tipos de traçado características específicas que os diferenciem e que confiram a devida relevância aos vários elementos gráficos.

O **traço contínuo** é o tipo de traçado mais comum na Geometria Descritiva e é utilizado para a representação de retas, eixos, traços de plano, linhas de chamada, etc.

O **traço interrompido** é utilizado para representar linhas invisíveis e o **traço-ponto** é utilizado essencialmente para representar eixos de sólidos.

O **tracejado** é uma trama, ou seja, é utilizado para preencher uma determinada figura, representando uma superfície. Normalmente, é usado em casos de representação de figuras resultantes de um corte num sólido.



Cada um dos tipos de traçado enumerados anteriormente pode ser representado com diferentes níveis de intensidade. Essa intensidade deve ser obtida sem aumentar consideravelmente a espessura do traço, o que lhe retiraria rigor e iria contra os princípios fundamentais da Geometria Descritiva, em que um ponto ou reta não têm espessura.
A escolha do tipo de intensidade tem que ver com o elemento gráfico que se está a assinalar:

Tipos de traçado	Intensidade recomendada
Linhas de chamada e traçados auxiliares	Traço leve
Representação da charneira (eixo **x**)	Traço médio
Representação da resolução (resultado final)	Traço forte

Dada a complexidade de muitas das representações gráficas em Geometria Descritiva, principalmente quando aplicada a atividades profissionais, nomeadamente na arquitetura e na engenharia, é de grande importância a verificação das normas acima mencionadas, de forma que a leitura do desenho seja mais clara e objetiva.

1

Noções essenciais da Geometria Descritiva

Ponto

Reta

Segmentos de reta

Plano

Ângulos

Diedro e plano bissetor

Posição relativa de retas e de planos

Superfícies

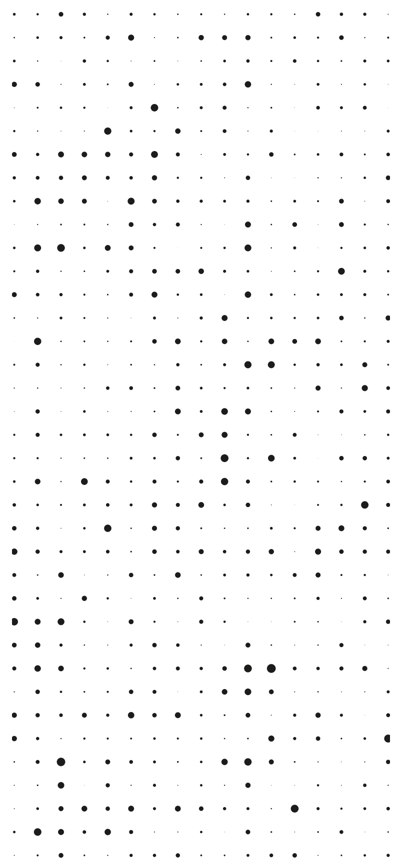
Sólidos

Noções essenciais da Geometria Descritiva

A Geometria Descritiva tem por base conceitos-chave que acompanham a sua abordagem em todo o seu curso, desde os problemas mais simples até aos mais complexos.

O domínio total destes conceitos é fundamental para o sucesso na aprendizagem desta disciplina, razão pela qual será feita uma abordagem completa acerca de cada um deles, ao longo deste módulo.

Ponto



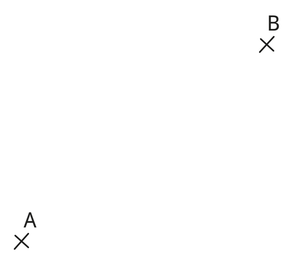
O ponto é um elemento gráfico que se traduz, visivelmente, por uma forma circular, totalmente preenchida (pequena mancha), que pode assumir maior ou menor dimensão.

Este pode ser um elemento de representação, e, por si só, definir outras formas, quando repetido com intensidade e métricas distintas, podendo ser usado para desenhar qualquer tipo de objetos. Para tal, ter-se-á em conta a disposição dos mesmos, podendo estar colocados ao acaso ou ordenados consoante uma regra, a sua dimensão/intensidade (grandes ou pequenos) e a sua concentração (mais concentrados ou mais dispersos).

No caso da Geometria Descritiva, o ponto é o seu elemento central: a origem de qualquer representação.

Sem dimensão real, na Geometria Descritiva, o ponto é uma abstração, indicando uma posição concreta no plano e no espaço.

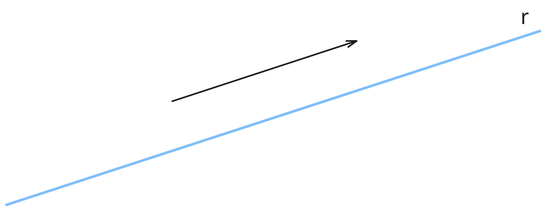
Conclui-se, assim, que o ponto, enquanto elemento geométrico, não tem uma representação específica, por ser uma abstração de dimensão infinitamente pequena.



No entanto, para a sua representação, é necessário fazer a marcação da interseção de duas retas. Assim, no papel, é possível identificar um ponto específico, sendo este o ponto de interseção das duas linhas retas consideradas.

Reta

Uma reta é um conjunto infinito de pontos, dispostos sucessivamente e de forma infinita, localizados proximamente entre si, segundo uma dada direção.



Assim como o ponto não tem dimensão, uma reta não tem espessura, dado ser composta por pontos.

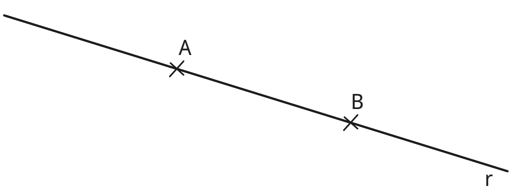
Há, ainda, entendimento de que uma reta é definida por uma sequência de posicionamentos de um dado ponto, ao longo de uma determinada direção. Com base nesta ideia, uma reta pode, também, ser entendida como um percurso.

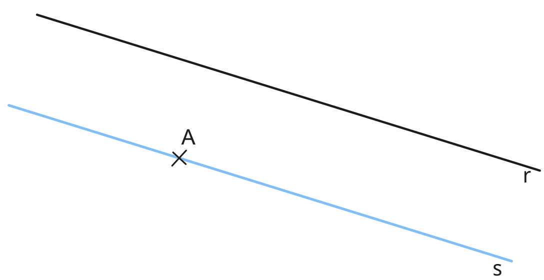
A infinidade inerente aos conceitos de ponto e de reta apresentados é impossível de representar no mundo real, em papel, com todas as condicionantes inerentes, nomeadamente do suporte (papel), cuja dimensão é finita, e do material riscador (ex.: lápis), cujo traço terá sempre uma espessura concreta. Assim, por meio do desenho, apenas é possível representar uma sugestão do que é uma reta, pois esta, na sua génese, não possui espessura nem limites, ou seja, o seu comprimento é infinito.

Direção de uma reta

São infinitas as possibilidades de retas que existem no espaço. No entanto, existem duas formas de distinguir uma só reta, em detrimento de toda a sua infinidade.

- Dois pontos (figura à esquerda);
- Um ponto e uma direção (figura à direita).





Nota que a reta **r** é definida pelos pontos **A** e **B** e contém, por isso, o segmento de reta [**AB**]. Há apenas uma reta que contém, simultaneamente, no espaço geométrico, estes dois pontos.

Noutro exemplo, a reta **s** contém o ponto **A** e é paralela à reta **r**. Diz-se, então, que a reta **s** é definida por um ponto (ponto **A**) e por uma direção (paralela relativamente à reta **r**).

Posição relativa de duas retas

As retas podem estabelecer relações entre si, com base na sua posição relativa, e na sua posição face a um terceiro elemento (plano).

Assim, tem-se os diferentes tipos de posições que podem apresentar entre si:

- Retas complanares (concorrentes ou paralelas);
- Retas não complanares (enviesadas).

Retas complanares

São retas que constam do mesmo plano. Deste modo, quaisquer retas paralelas (que partilham a mesma direção) ou concorrentes (que possuem um ponto comum, o ponto de interseção) são retas complanares.

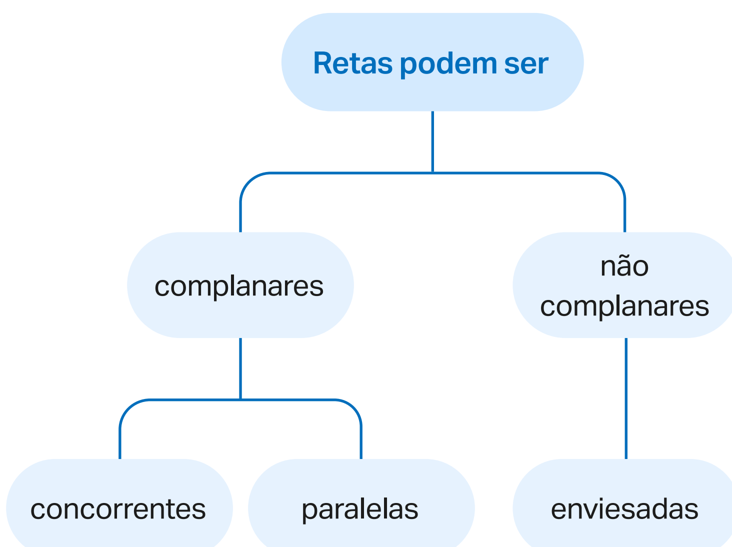
Retas complanares

Concorrentes
São retas complanares que possuem um ponto comum. Ou seja, que se intersetam num determinado ponto, sendo este, simultaneamente, pertencente a ambas, designado como ponto de concorrência (ou de interseção) das mesmas.

Paralelas
São retas com a mesma direção e, por conseguinte, sem pontos em comum. Neste caso, todos os pontos de cada uma das retas estão equidistantes. As retas paralelas apenas são concorrentes num ponto infinito (ponto impróprio), tendo, por isso, a mesma direção.

Resumindo

Uma reta pode ser definida por:
- dois pontos;
- um ponto e uma direção.



Retas não complanares (enviesadas)

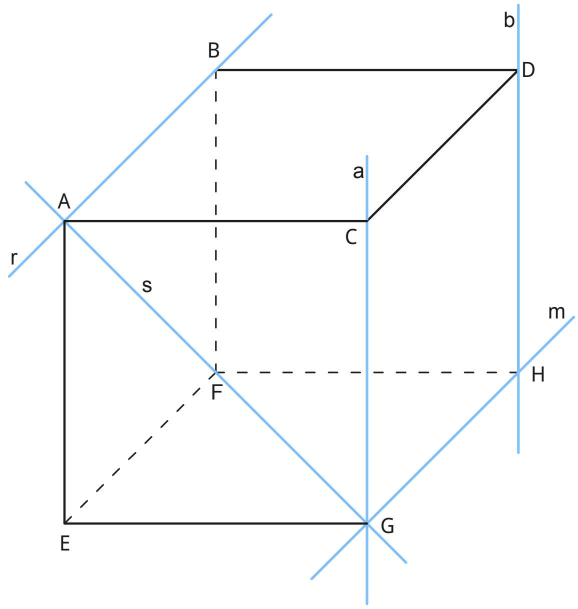
São retas que não possuem qualquer fator comum entre si, ou seja: não são paralelas (não partilham a mesma direção) e não são concorrentes (não partilham um único ponto). Assim, não constam do mesmo plano, logo, são retas não complanares.

Manual Digital

Interatividade
Retas complanares e retas não complanares

O cubo [**ABCDEFGH**] tem, nas suas arestas, várias retas que estabelecem relações entre si.

- A reta **r** é paralela à reta **m** e concorrente com a reta **s** no ponto **A**;
- A reta **s** é concorrente com a reta **m** e com a reta **a**, no ponto **G**;
- As retas **a** e **b** são paralelas;
- A reta **b** é concorrente com a reta **m** no ponto **H**;
- As retas **s** e **b** são enviesadas (não convergem e não são paralelas).



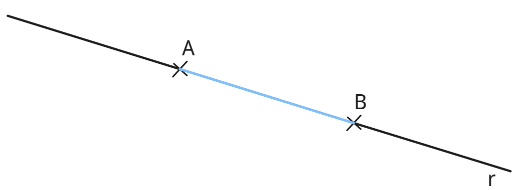
Segmentos de reta

A palavra "segmento" deriva do latim *segmentu* (bocado ou fração de um dado objeto). Assim, um segmento de reta corresponde a uma porção de reta que, como já foi referido, é impossível de medir, pois desenvolve-se infinitamente numa dada direção, não possuindo princípio nem fim.

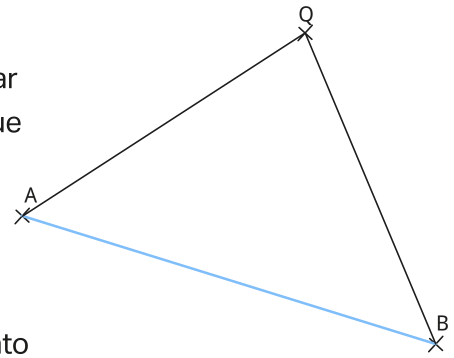
Entende-se, então, que um segmento de reta é uma linha compreendida entre dois pontos, que marcam o seu princípio e o seu fim, de comprimento concreto e mensurável.

Tal como se verifica numa reta, o segmento de reta também não apresenta espessura nem volume, sendo unidimensional.

O segmento [**AB**] é um segmento definido por dois pontos, que marcam os seus extremos. A reta **r** é a reta que contém esse segmento. Entende-se, por isso, ser a sua **reta de suporte**, pois suporta o segmento em questão.



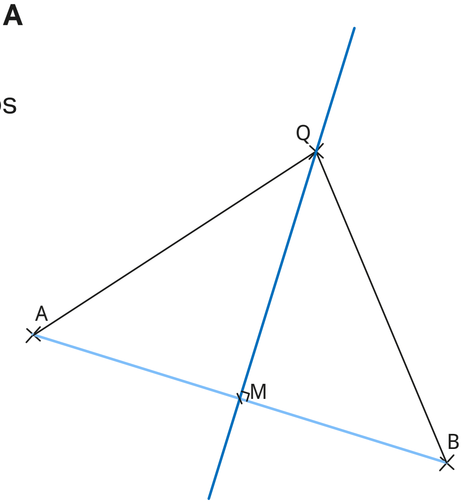
Mediatriz de um segmento de reta



Entende-se por mediatriz de um segmento de reta o lugar geométrico onde se situam todos os pontos do plano que se encontram equidistantes a cada um dos extremos desse segmento.

Ora vejamos:

Num determinado segmento de reta, se acharmos o ponto médio desse segmento (que diste igualmente do ponto **A** e do ponto **B**), e traçarmos uma linha perpendicular ao segmento, que contenha esse ponto médio, achamos a **mediatriz** do segmento.

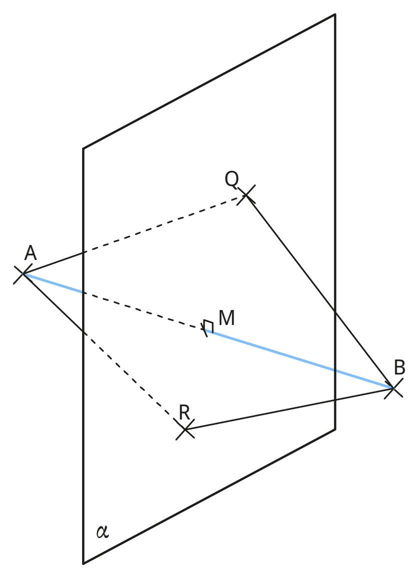


Assim, conclui-se que o lugar geométrico mencionado acima se traduz numa reta complanar com a reta de suporte do segmento [**AB**] e perpendicular a esta, concorrentes entre si no ponto médio **M**.

A **mediatriz** divide o segmento em duas partes iguais.

Plano mediador de um segmento de reta

Um **plano mediador** é o lugar geométrico onde se encontram os pontos do espaço que estão equidistantes dos extremos do segmento.



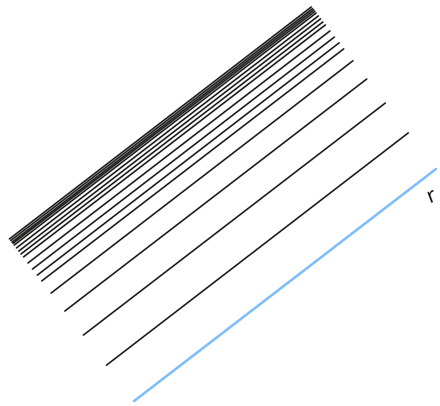
À semelhança dos pontos contidos na mediatriz de um segmento, existe uma infinidade de pontos, também equidistantes aos extremos do segmento e que não constituem a mediatriz.

Estes são parte de um plano que contém a mediatriz e têm uma relação de perpendicularidade com o segmento de reta [**AB**] e, consequentemente, com a sua reta de suporte.

Assim, o **plano mediador** é definido por uma reta (mediatriz) e uma direção (perpendicular ao segmento [**AB**]). Este plano contém, inevitavelmente, o ponto médio **M**, que é o ponto de concorrência entre as duas retas (reta de suporte do segmento [**AB**] e mediatriz).

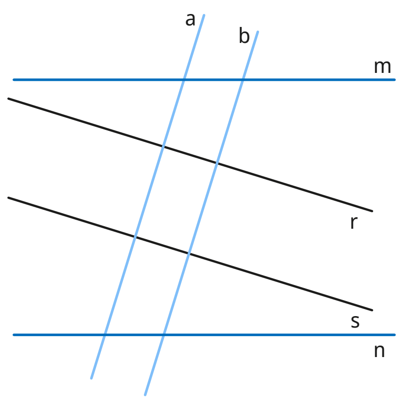
Plano

Um plano é um elemento bidimensional que constitui uma superfície ao longo da qual uma reta se repete infinitamente, paralelamente a si própria, seguindo uma determinada direção, definida por uma outra reta. Assim, um plano é um elemento bidimensional de extensão infinita.



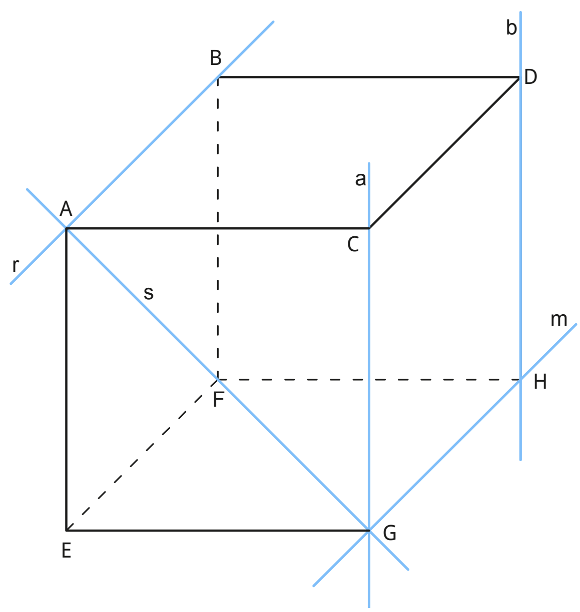
Orientação de um plano

Um plano pode conter retas paralelas e concorrentes. Não poderá conter retas enviesadas, porque, como já foi referido, estas não possuem características comuns entre si que lhes permitam constar do mesmo plano (não têm pontos de concorrência nem a mesma direção).



A cada conjunto de retas com a mesma direção dá-se o nome de **família de retas**. Assim, família de retas é o conjunto infinito de retas que possuem a mesma direção e se repetem infinitamente ao longo do mesmo plano.

Assim, pode entender-se que um plano é um conjunto sem fim de famílias de retas. Todas as retas de uma determinada família são concorrentes com as retas de outra determinada família. Esta condição permite verificar que, num plano, todas as retas nele contidas são paralelas ou concorrentes. Retas da mesma família são paralelas entre si e retas de famílias diferentes são concorrentes entre si.

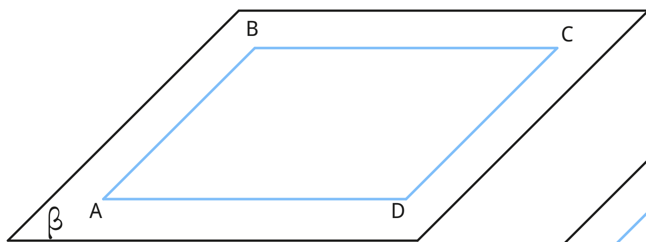


Em suma: um plano não possui uma direção definida, uma vez que consegue conter todo um vasto conjunto de famílias de retas, todas com direções distintas. Um plano possui, sim, uma orientação. Essa orientação corresponde à posição relativa do plano no espaço, podendo este ser vertical, horizontal ou oblíquo.

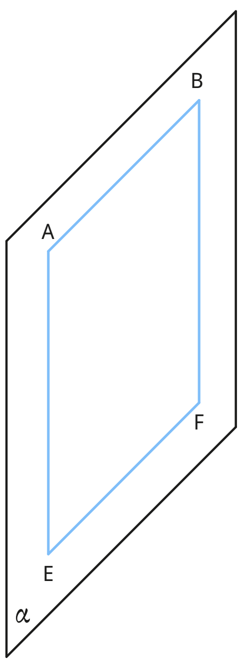
Considerando o cubo [**ABCDEFGH**], percebe-se que todas as suas faces fazem parte de planos.

Na face [**ABCD**], contida num determinado plano, a reta que contém o segmento [**AB**] é da mesma família da reta que contém o segmento [**CD**]. O mesmo acontece nas retas que contêm os segmentos [**AD**] e [**BC**]. Aqui foram enumeradas duas famílias de retas que pertencem ao plano da face [**ABCD**] do cubo. As retas de cada uma dessas famílias são perpendiculares entre si.

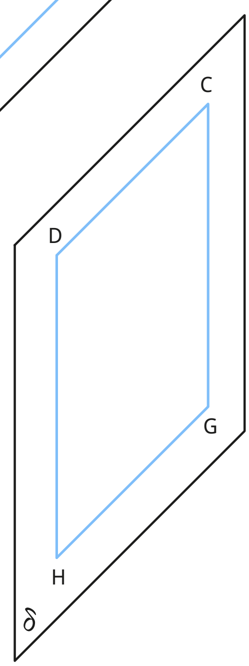
As várias faces do cubo estão contidas em planos paralelos e perpendiculares entre si. A interseção dos mesmos dá origem às arestas do cubo.



O plano β contém a face [**ABCD**] do cubo.



O plano α contém a face [**ABEF**] do cubo.



O plano δ contém a face [**CDGH**) do cubo.

Resumindo

- Uma **reta** possui uma **direção**;
- Um **plano** possui uma **orientação**.

Reta pertencente a um plano

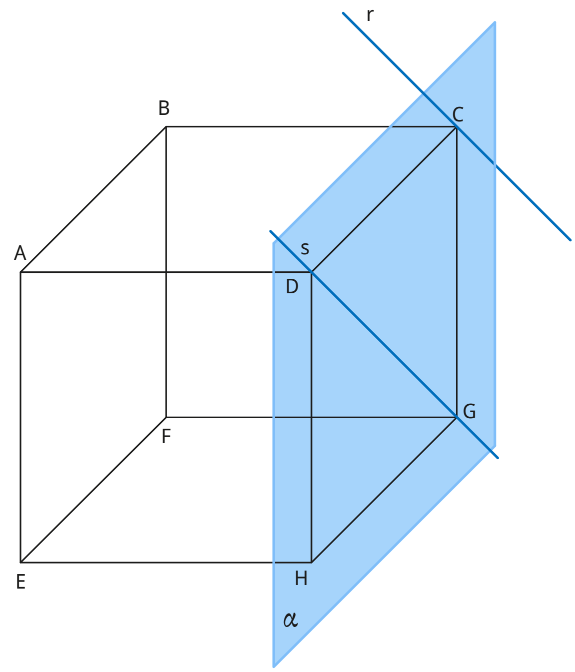
Sendo um plano um conjunto infinito de retas, isso não significa que este possa conter todo o tipo de retas.

Para que uma reta possa pertencer a um plano, esta tem de conter dois pontos desse plano ou, em alternativa, um ponto do plano e ser paralela a uma outra reta desse mesmo plano.

De notar que estas são condições fundamentais de pertença de uma reta a um determinado plano.

Uma vez que uma reta pode ser definida por:

- dois pontos;
- um ponto e uma direção;



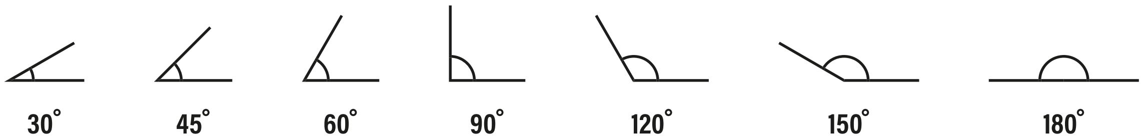
a diagonal do quadrado [**CDHG**] é o segmento [**DG**], contido na reta **s**. A reta **s** pertence ao plano α.

Por sua vez, a reta **r** contém o ponto **C**, que é um ponto do quadrado cuja diagonal é a reta **s**. A reta **r** é paralela à reta **s** e contém um ponto do plano onde está a reta **s**. Ambas as retas são complanares e paralelas entre si, ou seja: pertencem ao mesmo plano.

Conclui-se que, para uma reta pertencer a um plano, deve conter dois pontos desse plano ou, em alternativa, conter um ponto do plano e ser paralela a uma reta do plano.

Ângulos

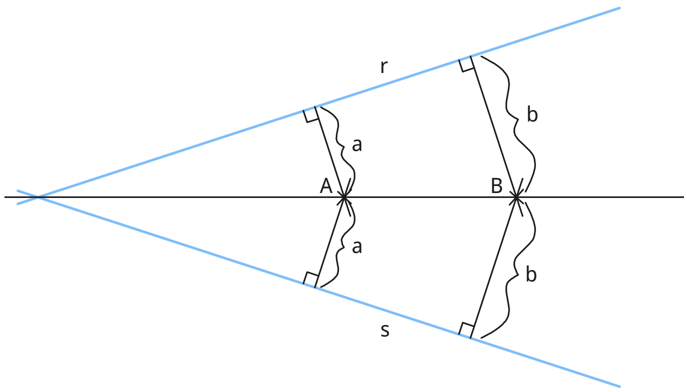
Um ângulo, como entidade bidimensional, corresponde a uma região do plano definida por duas semirretas, de diferentes direções com a mesma extremidade (ponto de concorrência das retas originais), correspondente ao **vértice** do ângulo. O ângulo permite determinar a relação que essas duas retas estabelecem entre si, e é medido em graus.



Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico que contém os pontos do plano que são equidistantes de ambos os lados do ângulo. Assim, a bissetriz divide o ângulo maior em dois ângulos menores, geometricamente iguais.

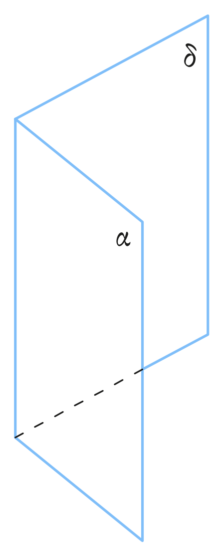
Desta forma, se for dado um dos lados do ângulo e a sua bissetriz, é possível determinar a totalidade do ângulo, usando a bissetriz como eixo de simetria, permitindo, facilmente, traçar o outro lado do ângulo.



Na figura ao lado, pode ver-se que a bissetriz (reta que contém os pontos **A** e **B**) divide o ângulo em duas partes iguais. A distância dos pontos **A** e **B** à reta **r** é igual à distância desses mesmos pontos à reta **s**.

Diedro e plano bissetor

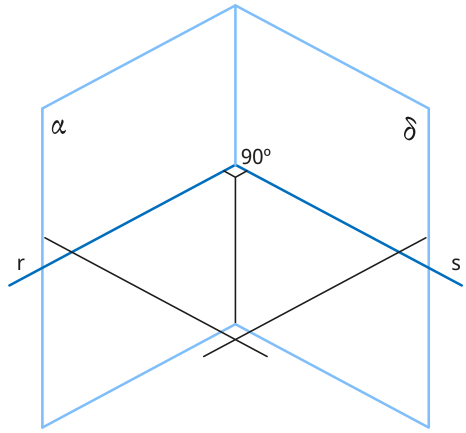
O **diedro** é o espaço tridimensional compreendido entre dois semiplanos de diferentes direções, que se intersetam entre si segundo uma reta de origem (**aresta do diedro**).



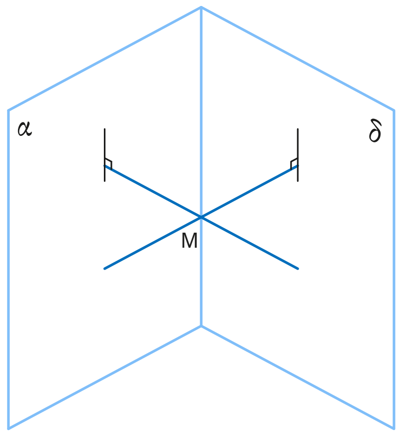
Já o **retilíneo do diedro** corresponde ao ângulo resultante da interseção de um terceiro plano ortogonal à reta de origem (aresta do diedro) com os dois semiplanos que o definem. Essa interseção resulta em duas semirretas, cujo ângulo formado entre si tem o nome de: **retilíneo do diedro**. Assim, estas duas semirretas são, também, perpendiculares à **aresta do diedro**.

Os planos α e δ definem um espaço geométrico denominado **diedro** e são as faces desse diedro. A sua linha de interseção é a **aresta do diedro**.

Considerando o diedro formado pelos planos α e δ, as retas de interseção de um terceiro plano perpendicular aos dois primeiros (faces do diedro) são as retas **r** e **s**. O ângulo que essas retas formam entre si tem o nome de **retilíneo de um diedro**.



Entende-se por **plano bissetor** de um diedro o plano capaz de dividir um diedro em dois diedros geometricamente iguais.



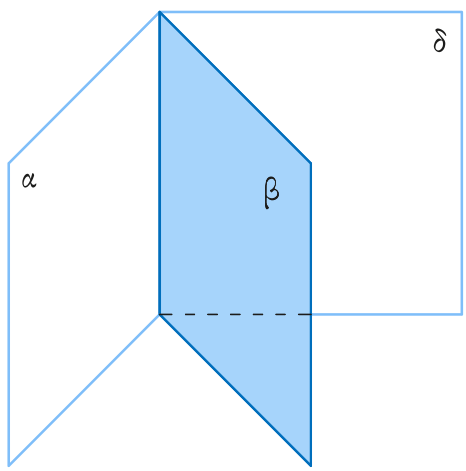
Assim, o **plano bissetor** de um diedro é o lugar geométrico onde constam todos os pontos do espaço equidistantes a cada uma das faces do diedro.

O **plano bissetor** é, por isso, um plano de simetria.

Traçando uma perpendicular a cada uma das arestas do diedro, e achando o ponto de interseção de ambas as perpendiculares (ponto **M**), acha-se o ponto que dista igualmente de ambas as faces do diedro. Esse ponto **M** é um ponto pertencente ao plano bissetor.

O plano bissetor está definido por um ponto e uma reta, pois contém, obrigatoriamente, a aresta do diedro, que é a reta de interseção dos dois planos que contêm as faces do diedro (α e δ).

O plano β é o plano bissetor.



Posição relativa de retas e de planos

No espaço tridimensional, são inúmeras as direções de retas que podemos encontrar, bem como as orientações dos planos.

No entanto, há conceitos-base que permitem sugerir as suas posições relativas.

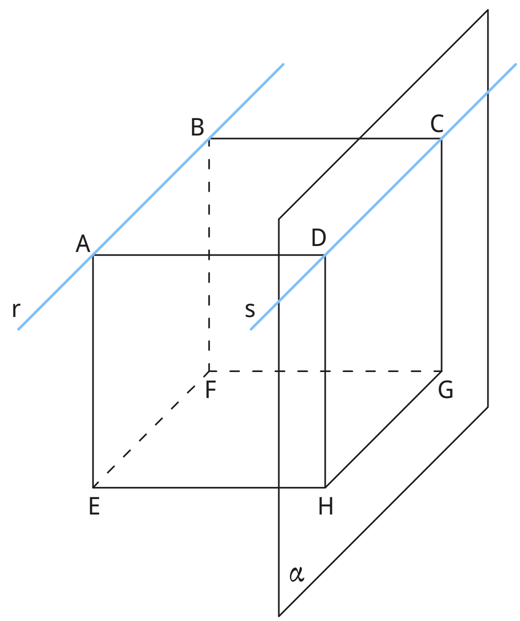
Paralelismo entre retas e planos

As relações de paralelismo entre retas e planos encontram as suas condições fundamentais no critério de paralelismo entre retas e planos.

Esse critério apresenta duas condições:

- Uma reta é paralela a um plano se não for parte integrante desse plano e se for paralela a uma reta pertencente a esse plano;
- Um plano é paralelo a uma reta se não contiver essa reta, mas contiver uma reta paralela a essa.

Uma reta que não seja paralela a um plano é sempre concorrente com este. Algures na sua infinita extensão, haverá sempre um ponto que seja comum a ambos (reta e plano), sendo este o ponto de interseção da reta com o plano.

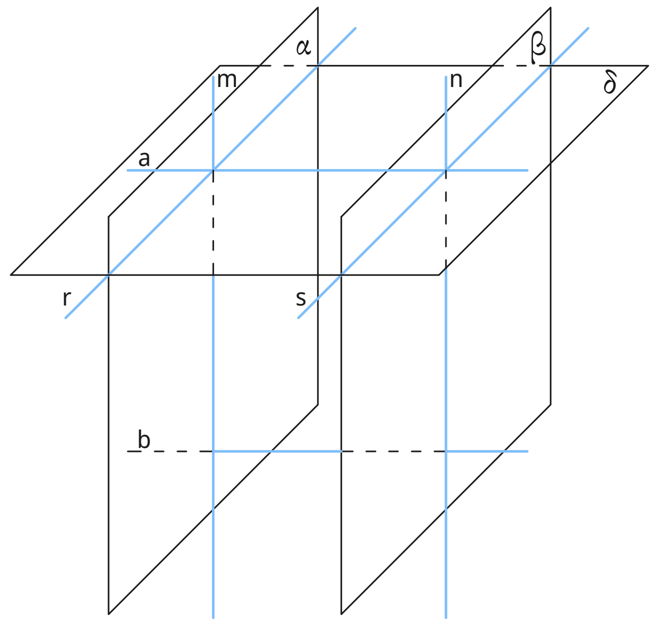


Na imagem acima, pode verificar-se que a reta **r** é paralela à reta **s**, que está contida no plano α. Assim, verifica-se que a reta **r** é paralela ao plano α, pois é paralela a uma reta que pertence a esse plano.

Resumindo

- Uma reta é paralela a um plano se não pertencer a esse plano e se for paralela a uma reta desse plano;
- Um plano é paralelo a uma reta se não contiver essa reta e contiver uma reta paralela a esta.

Paralelismo entre planos



Anteriormente, verificou-se que um plano possui uma orientação. Assim, planos paralelos apresentam a mesma orientação. Isto é, têm a mesma posição relativa no espaço.

Deste modo, dois planos, em que cada um contenha famílias de retas paralelas às famílias de retas constantes do outro plano, são planos paralelos.

Contudo, a existência de duas retas pertencentes a um plano, que sejam paralelas a outras duas retas pertencentes a um outro plano, não valida, por si só, o paralelismo entre ambos os planos. Na verdade, esta condição pode verificar-se entre planos que se intersetam (não paralelos).

Na imagem, o plano α contém a reta **r**, paralela à reta **s**, do plano δ. Podemos imaginar que no plano α existem inúmeras retas paralelas à reta **r**, e o mesmo no plano δ. Contudo, essa condição não valida o paralelismo entre os dois planos. Na verdade, a reta **r** é comum a ambos, por ser a sua reta de interseção. Então, apesar de existirem inúmeras retas, em ambos os planos, paralelas entre si, estes não são paralelos, mas sim perpendiculares. Ou seja: para serem paralelos, os planos têm de possuir famílias de retas paralelas entre si, sem nunca haver retas coincidentes entre os dois.

Contudo, se duas retas concorrentes forem paralelas a outras duas retas concorrentes, constantes de um outro plano, podemos concluir que os dois planos são paralelos entre si. Esta condição pode verificar-se entre o plano α e o plano β. As retas **r** e **m** do plano α são concorrentes, bem como as retas **s** e **n** do plano β. Sendo que as retas **m** e **n** são paralelas, bem como as retas **r** e **s**, pode afirmar-se que os planos α e β são paralelos.

Em suma: para se verificar o paralelismo entre dois planos, é imperativo que duas retas concorrentes de um plano sejam paralelas a outras duas retas concorrentes do outro plano.

Em oposição, planos secantes são planos que se intersetam. Essa interseção resulta sempre numa reta. Deste modo, planos secantes são planos que não possuem a mesma orientação.

Resumindo

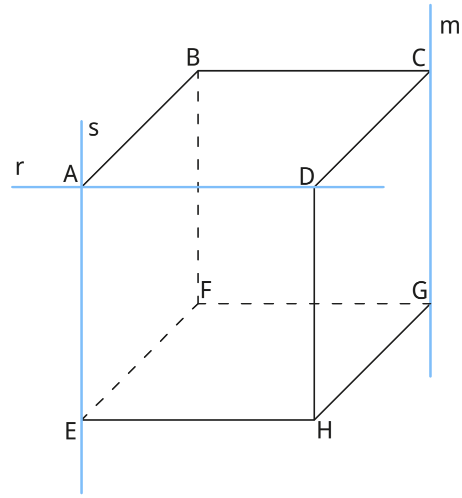
- Planos paralelos têm a mesma orientação.
- Planos secantes têm orientações diferentes.

Retas perpendiculares e retas ortogonais

Duas retas podem ter direções distintas sem se intersetarem. Na verdade, esse é o princípio que distingue retas perpendiculares de retas ortogonais.

Por retas perpendiculares entende-se a interseção de duas retas, segundo um ângulo reto, ou seja, duas retas concorrentes que formam, entre si, um ângulo de 90°.

Já no que respeita a retas ortogonais, não são as retas que formam, entre si, um ângulo de 90°, mas sim as suas direções. Ou seja, retas ortogonais não são concorrentes, não possuindo qualquer ponto comum (não existe ponto de concorrência). Apenas as suas direções são perpendiculares.



Com base na figura acima, pode dizer-se que:

- A reta **r** que contém os pontos **A** e **D** é perpendicular à reta **s** que contém os pontos **A** e **E**, sendo **A** o ponto de concorrência das duas retas;
- A reta **r** que contém os pontos **A** e **D** é ortogonal à reta **m** que contém os pontos **C** e **G**, não havendo qualquer ponto de concorrência.

Resumindo

- Retas perpendiculares são complanares;
- Retas ortogonais não são complanares.

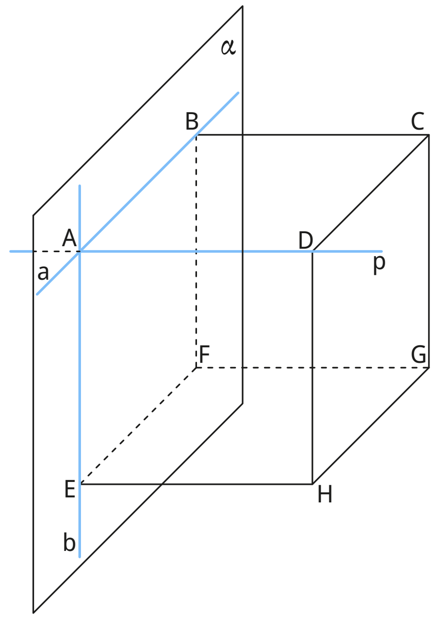
Para praticar

1 Desenha, à mão livre, um cubo em perspetiva, e atribui letras a cada um dos vértices do cubo. Recorrendo aos vértices do cubo, identifica segmentos que correspondam a retas:
– paralelas;
– perpendiculares;
– enviesadas.

2 Define o critério de paralelismo entre retas e planos.

3 Define o critério de paralelismo entre planos.

Retas perpendiculares a um plano



Revisitando alguns conceitos abordados anteriormente, podemos recordar que enquanto as retas têm uma determinada direção, os planos têm uma determinada orientação.

Isto significa que qualquer reta cuja direção seja ortogonal à orientação de um dado plano é perpendicular a este.

Esta associação resulta da infinita dimensão de um plano. Deste modo, uma dada reta ortogonal a um plano terá sempre um ponto de concorrência com esse plano – irá sempre intersetá-lo.

Contudo, para validar a ortogonalidade de uma reta face a um plano, não basta que esta seja ortogonal a duas retas desse mesmo plano. Para tal, é necessário que seja ortogonal (ou perpendicular) a duas retas concorrentes de um plano. Se esta condição de concorrência entre as retas complanares não se verificar, poder-se-á ter, na mesma, uma relação de perpendicularidade de uma reta com duas retas do plano, e serem as três complanares.

A reta **p** é perpendicular às retas **a** e **b**, sendo **A** o seu ponto de concorrência. As retas **a** e **b** pertencem ao plano α, logo, a reta **p** é perpendicular ao plano α.

Resumindo

- Uma reta é ortogonal a um plano apenas se for ortogonal a duas retas concorrentes desse plano;
- Um plano é ortogonal a uma reta apenas se contiver duas retas concorrentes que sejam ortogonais a essa reta;
- Verifica-se, ainda, que qualquer reta que seja ortogonal a um dado plano é, obrigatoriamente, ortogonal ou perpendicular a todas as retas desse plano.

Teorema da ortogonalidade entre planos

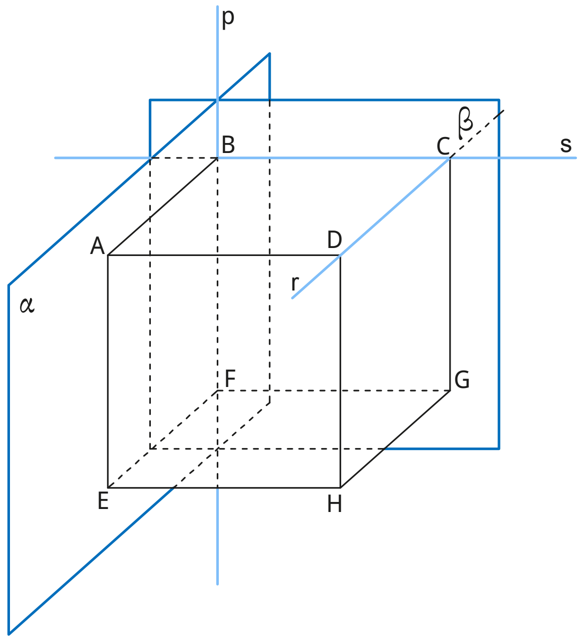
Uma reta ortogonal a um plano é sempre perpendicular ou ortogonal a todas as retas pertencentes a esse plano.

Planos perpendiculares

Planos não paralelos são sempre planos secantes (intersetam-se, algures no espaço, segundo uma reta de interseção).

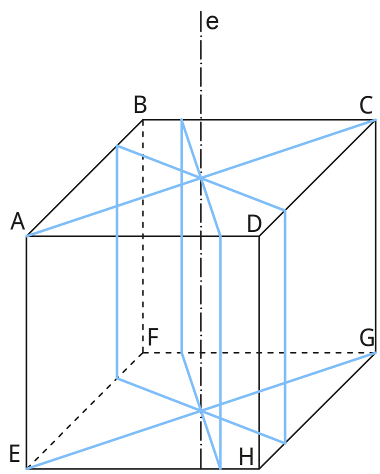
Assim, os planos ortogonais ou perpendiculares pertencem ao grupo de planos secantes.

Para que dois planos sejam ortogonais, é necessário que sejam secantes e que as suas direções sejam perpendiculares entre si. Ou seja, é necessário que esses planos formem diedros de 90°.



Neste caso, o plano α e o plano β formam um ângulo de 90° entre si, tendo a reta **p** como sua reta de interseção. Notando que a reta **s**, contida no plano β, é perpendicular ao plano α, e perpendicular à reta **p** (comum a ambos), conclui-se que α e β são ortogonais.

Por fim, a ortogonalidade entre planos só se verifica quando um dos planos contém uma reta que seja ortogonal ao outro plano.



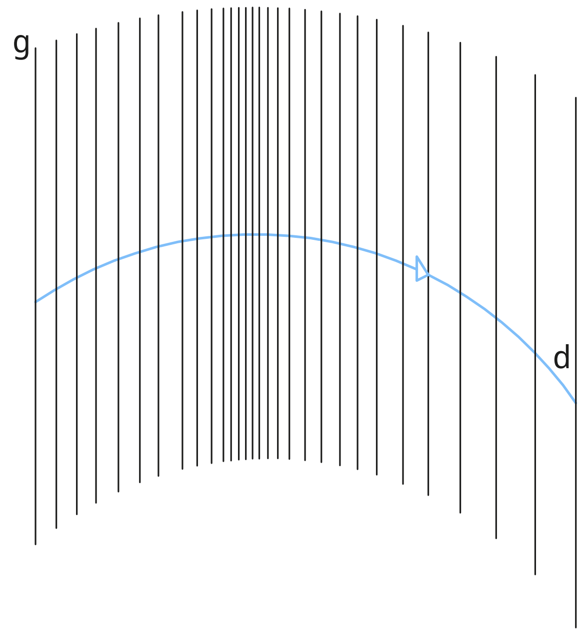
Na figura ao lado, a reta **e** é ortogonal às faces [**ABCD**] e [**EFGH**] do cubo. Todos os planos delineados a azul contêm a reta **e** e são perpendiculares a essas duas faces do cubo.

Resumindo

- Para que dois planos sejam ortogonais, um deles deve conter uma reta ortogonal ao outro.

Superfícies

Por superfície, entende-se o lugar geométrico resultante de uma sucessão de posições que uma determinada reta ocupa no espaço, segundo um determinado percurso.



Esse percurso não é necessariamente retilíneo, podendo obedecer a um padrão.

À linha representativa da reta que se move no espaço, formando a superfície, dá-se o nome de geratriz – **g**.

Já ao nome da linha que desenha o percurso dessa reta, dá-se o nome de diretriz – **d**.

As superfícies podem ser abertas ou fechadas, consoante a sua diretriz seja representada por uma linha fechada ou por uma linha aberta.

Na imagem, podem identificar-se as diversas retas que correspondem à geratriz de uma superfície (**g**), e a diretriz (**d**), que determina a direção pela qual as geratrizes se sucedem, criando a superfície.

As geratrizes podem assumir inúmeras características, desde linhas retas a linhas curvas, a linhas deformáveis ou indeformáveis (podem variar a sua configuração no decorrer do movimento).

As diretrizes também apresentam uma quantidade infinita de possibilidades de apresentação.

Superfície plana

Superfícies planas são regradas, isto é, resultam da deslocação de uma reta.

O exemplo mais óbvio de uma superfície plana é um plano, cuja geratriz se desloca paralelamente a si própria, segundo uma outra reta (diretriz).

Em superfícies planas podem estar representadas figuras geométricas: **polígonos** e **círculos**.

Círculos são superfícies planas limitadas por uma circunferência.

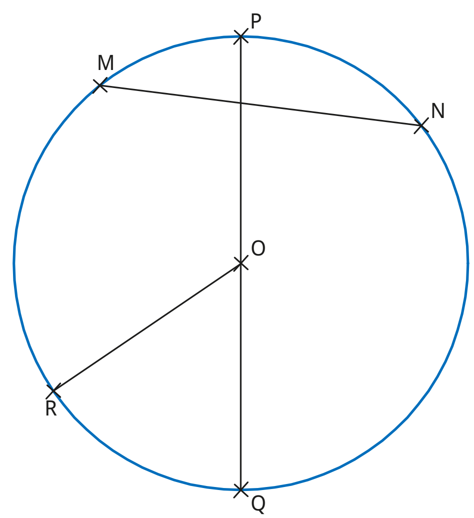
Circunferência é um conceito pertencente à figura plana de forma circular (círculo). Por esta, entende-se a linha curva fechada que delimita o círculo, sendo o lugar geométrico que contém todos os pontos que se encontram a igual distância do centro (ponto **O**).

Assim, a circunferência é a linha plana que delimita a superfície plana (figura plana). Neste caso, a figura delimitada é o círculo, por ser definida por uma linha curva fechada em que todos os seus pontos distam igualmente face ao centro (ponto **O**).

Há vários conceitos relacionados com a circunferência, importantes na Geometria Descritiva.

São eles:

- Raio [**OR**];
- Corda [**MN**];
- Diâmetro [**PQ**].



Por **raio**, entende-se todo o segmento de reta compreendido entre o centro da circunferência e qualquer outro ponto da circunferência.

O conceito de **corda** é definido por um segmento de reta cujos extremos são pontos da circunferência sem conter o centro.

O **diâmetro** é um segmento que une dois pontos opostos da circunferência, passando sempre pelo centro. É o equivalente ao dobro do raio.

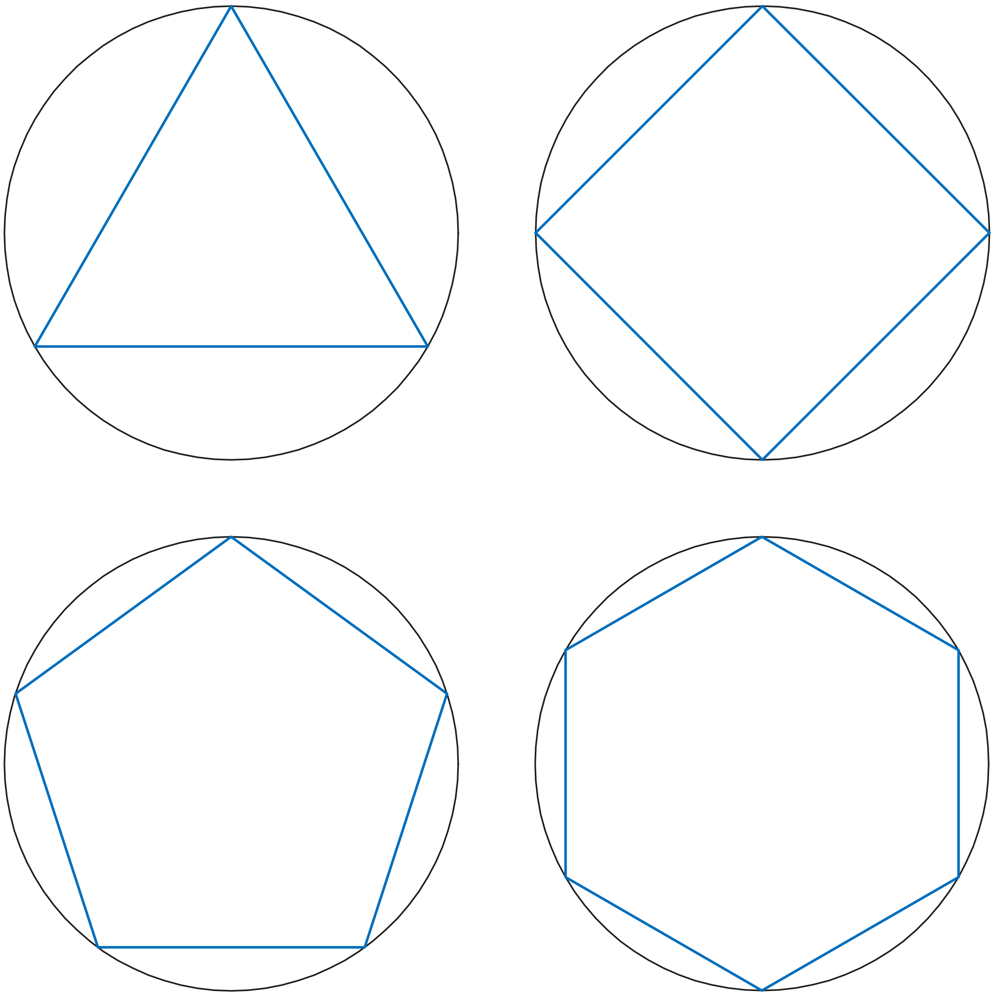
Polígono é toda a figura plana, numa superfície também plana, limitada por linhas quebradas fechadas. Ou seja, designa-se como polígono uma figura plana cujos lados são segmentos de reta.

Estes são definidos consoante o seu número de lados (número de segmentos de reta adjacentes que compõem o contorno fechado).

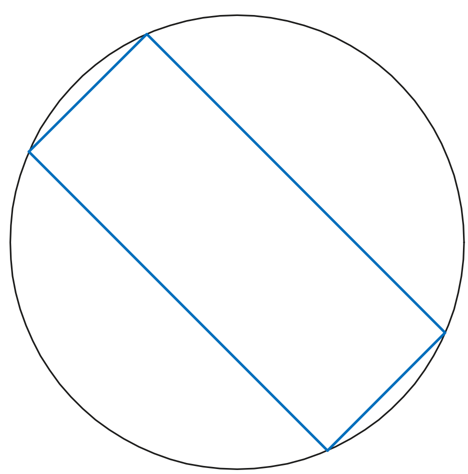
Assim, tem-se: triângulo (três lados), quadrilátero (quatro lados), pentágono (cinco lados), hexágono (seis lados), e assim sucessivamente. Um polígono possui, ainda, um número de ângulos internos igual ao número de lados que o delimita.

Há duas grandes famílias de polígonos:

Polígonos regulares – todos os lados são segmentos de igual dimensão (ângulos internos também iguais). Triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos inscritos numa circunferência são exemplos de polígonos regulares.



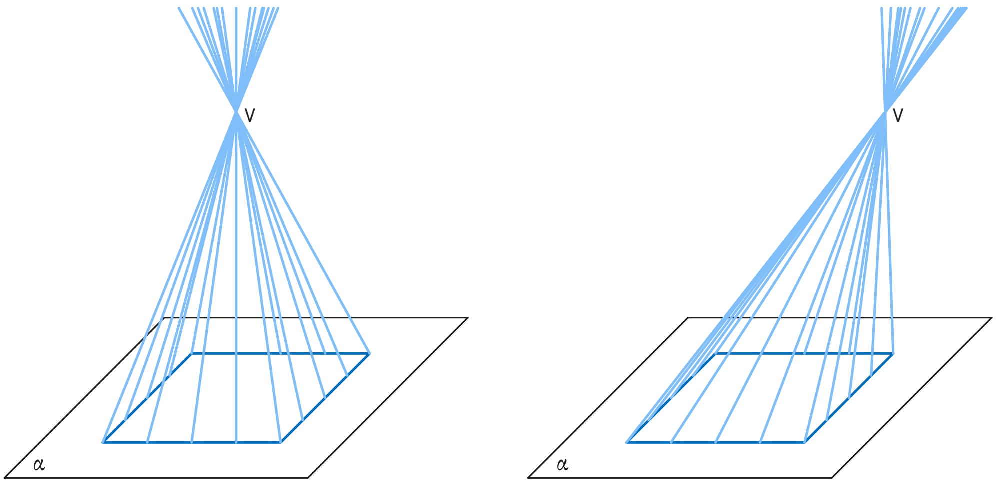
Polígonos irregulares – os lados são segmentos de dimensões distintas (ângulos internos igualmente distintos). O retângulo, apesar de ter os seus ângulos internos todos iguais, não tem os seus lados todos iguais. É, por isso, um polígono irregular.



Superfície piramidal

Numa superfície piramidal, a diretriz é uma linha poligonal, ou seja: corresponde à linha que delimita um polígono. As suas geratrizes deslocam-se ao longo da diretriz e possuem um único ponto de convergência a distância finita (vértice).

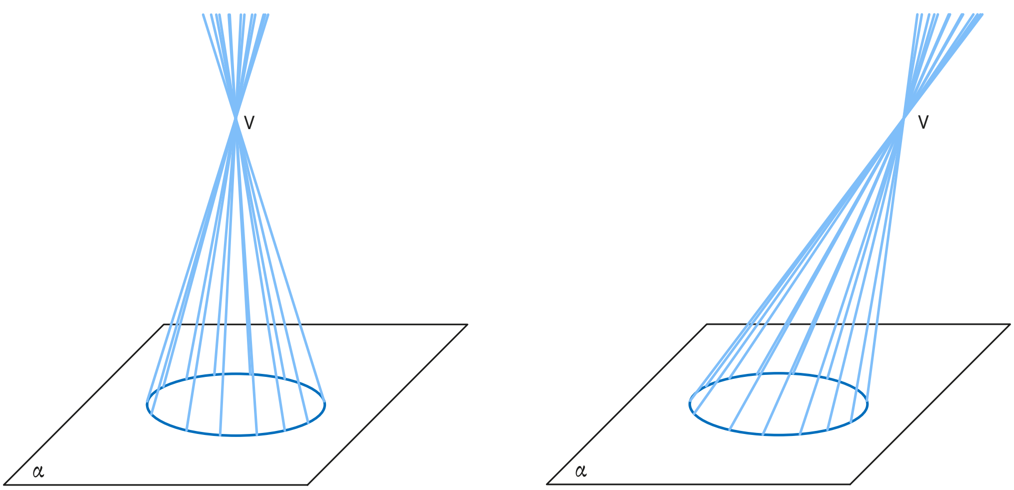
No caso de uma pirâmide quadrangular regular, a sua diretriz corresponde a um quadrado, e o seu vértice pode projetar-se sobre o centro geométrico desse mesmo quadrado (base da pirâmide). Já numa pirâmide oblíqua, essa concordância não existe.



Superfície cónica

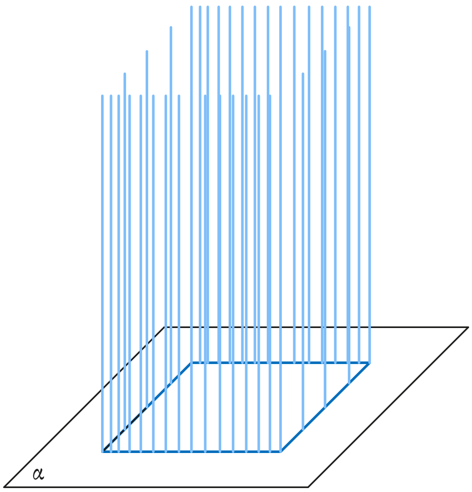
Numa superfície cónica, à semelhança de uma superfície piramidal, as suas geratrizes convergem num ponto único, correspondente ao vértice da superfície, que se encontra a uma distância finita do plano onde se encontra a diretriz.

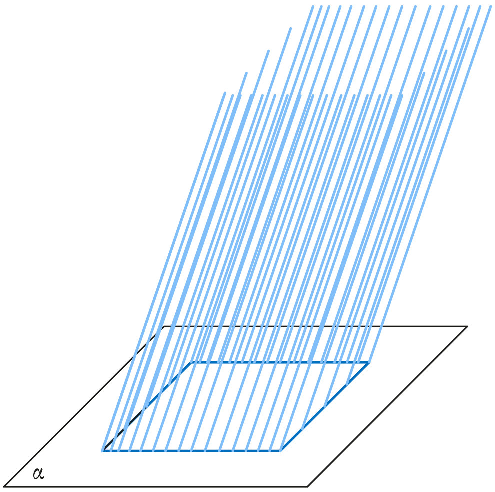
Uma superfície cónica cujo vértice está alinhado com o centro da base é uma **superfície de revolução**.



Superfície prismática

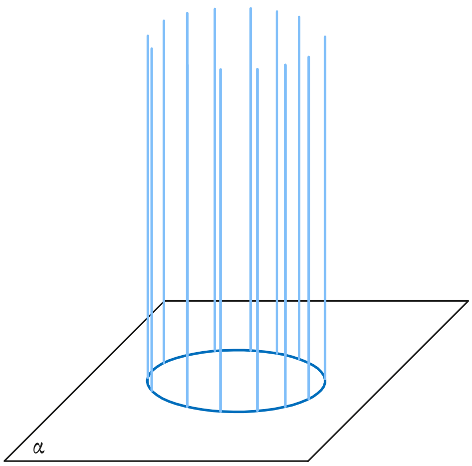
No caso de uma superfície prismática, a sua diretriz é uma linha quebrada que forma um polígono e as suas geratrizes são paralelas, convergindo num ponto infinito.

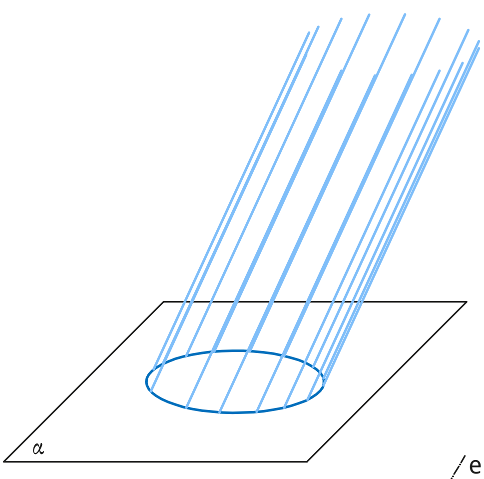




Superfície cilíndrica

A superfície cilíndrica é aquela cuja diretriz é uma linha curva (circunferência) e com geratrizes paralelas entre si, à semelhança das superfícies prismáticas.

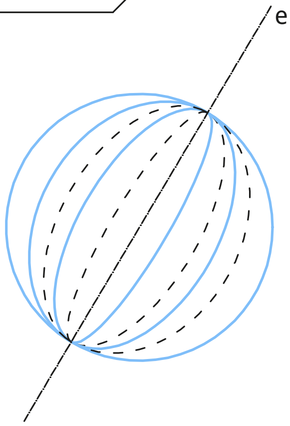




Superfície esférica

Uma superfície esférica resulta da rotação da sua geratriz, que se apresenta sob a forma de circunferência. Essa rotação é feita em torno de um eixo que corresponde à reta de suporte do diâmetro dessa circunferência.

Uma superfície esférica é uma **superfície de revolução**.



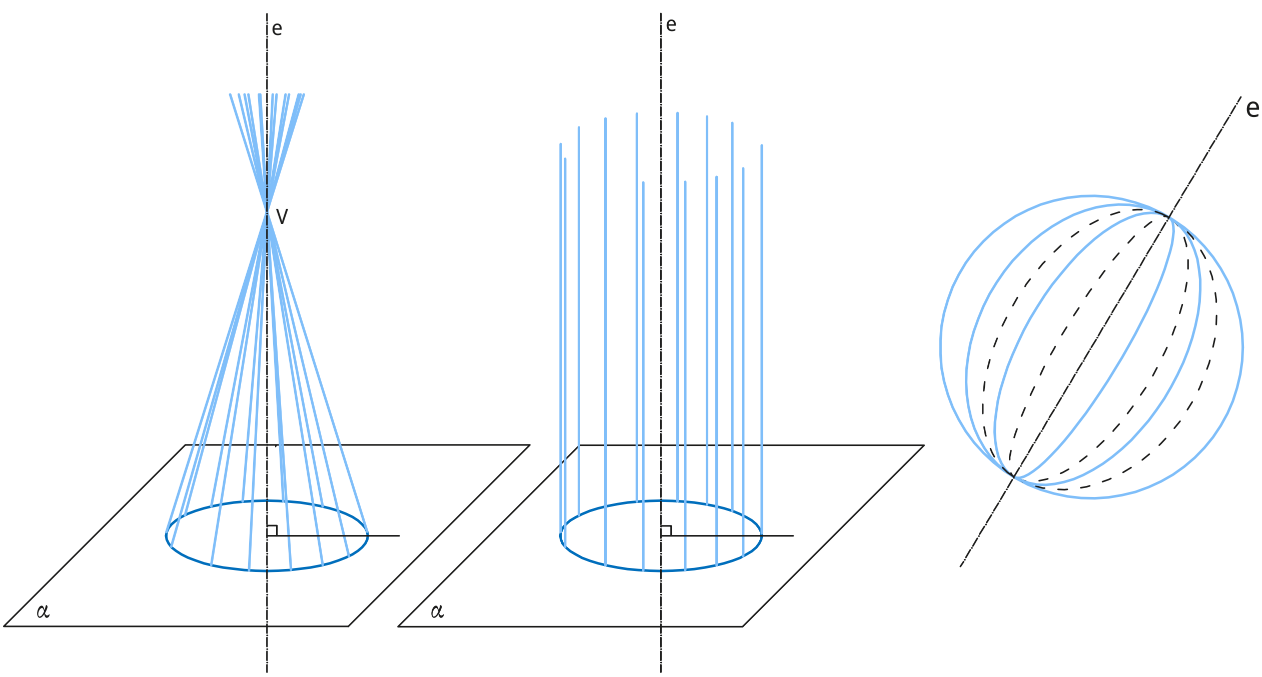
Superfícies de revolução (regradas e não regradas)

Uma **superfície de revolução** é toda a superfície cuja geratriz, que pode ser uma linha reta ou curva, e segue um movimento de rotação em torno de um eixo fixo, isto é, move-se no espaço, descrevendo uma circunferência, cujo centro corresponde à interseção de um eixo, perpendicular a este plano.

As superfícies de revolução podem ser regradas ou não regradas. Esta característica tem que ver com a sua geratriz. Quando se fala em superfície regrada de revolução, a geratriz é uma linha reta. No caso de superfícies não regradas de revolução, a geratriz apresenta-se como uma linha curva. Em ambas as situações, o movimento da geratriz resulta da sua rotação em torno de um eixo. Nas superfícies regradas de revolução, em que a geratriz é uma linha reta, a sua sucessão resulta em linhas paralelas ou convergentes num ponto a distância finita – por exemplo: superfícies cónicas e superfícies cilíndricas. No caso das superfícies não regradas de revolução, a geratriz é uma linha curva, impossibilitando quaisquer vértices ou paralelismos – resultam em superfícies esféricas, tóricas e escócias.

Cones e cilindros retos (eixo forma 90° com o plano da base) são superfícies regradas de revolução (a geratriz é uma linha reta).

Esferas, toros e escócias são superfícies não regradas de revolução (a geratriz é uma linha curva).



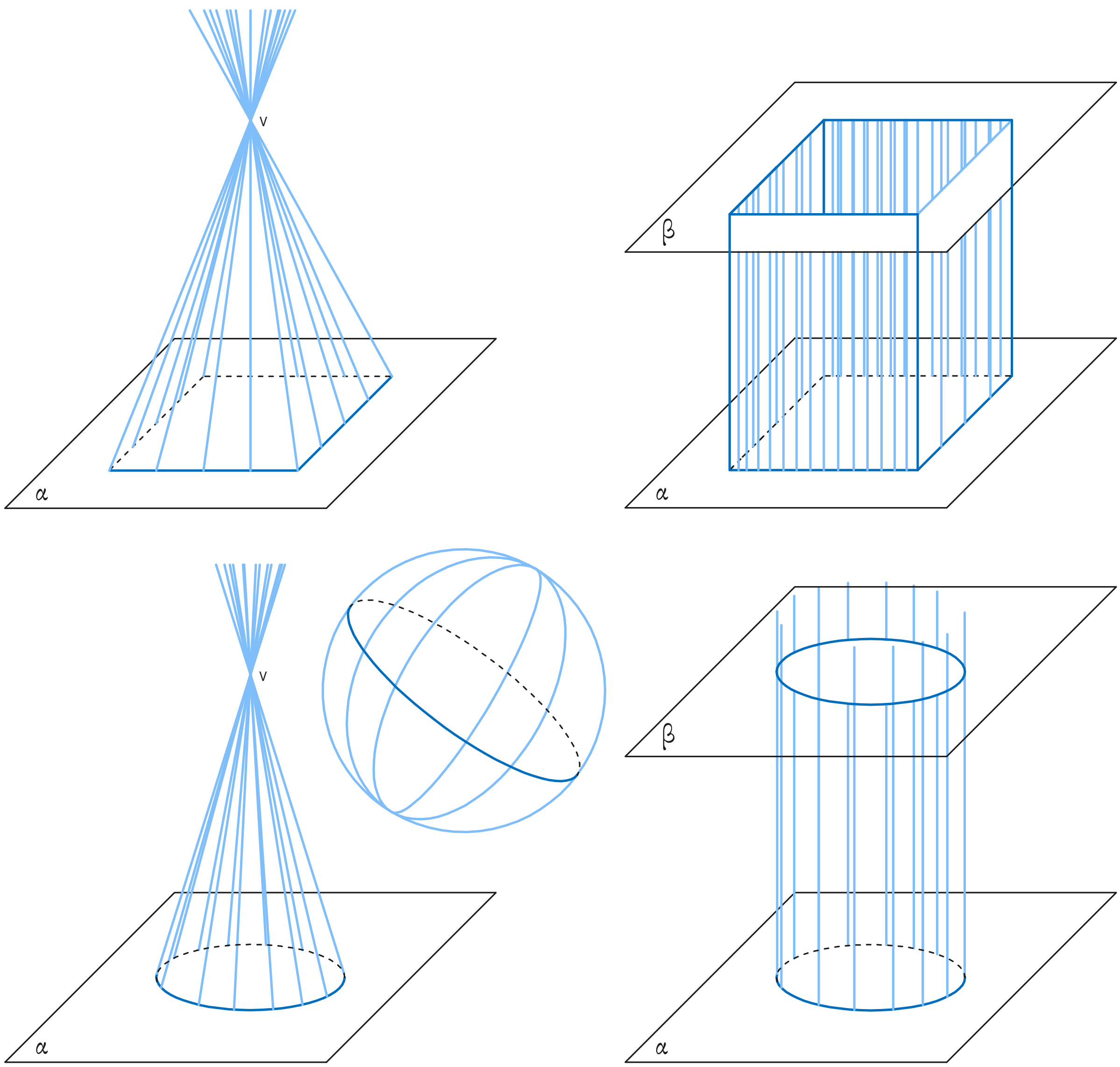
Sólidos

Com base nos conceitos apresentados anteriormente, pode confundir-se aquilo que é uma superfície, por exemplo, piramidal, com uma pirâmide. Na verdade, há uma diferença entre superfície e sólido.

A superfície é uma abstração, enquanto um sólido é uma massa, um corpo concreto, limitado por uma só superfície (no caso da esfera), ou por uma superfície e um ou mais planos.

A esfera é o único sólido definido por uma só superfície (superfície esférica).

Em todos os outros sólidos (pirâmides, prismas, cones e cilindros), a sua definição resulta de uma superfície e de um plano (pirâmides e cones), ou de uma superfície e dois planos (prismas e cilindros). Os planos definidores dos sólidos correspondem às suas bases.



Poliedros

No âmbito dos sólidos geométricos, podemos encontrar subtipos, isto é, categorias de sólidos que apresentam características próprias que as definem. É o caso dos poliedros.

Um poliedro é um sólido geométrico definido apenas por polígonos. Ou seja, todas as suas faces correspondem a figuras geométricas delimitadas por linhas quebradas. Essas linhas são fechadas, sendo compostas por segmentos de reta, todos de igual dimensão, originando figuras cujos lados são equivalentes (polígonos regulares). Assim, um poliedro é um sólido cujas faces se apresentam sempre como polígonos regulares.

Resumindo

Existem dois tipos de poliedros:

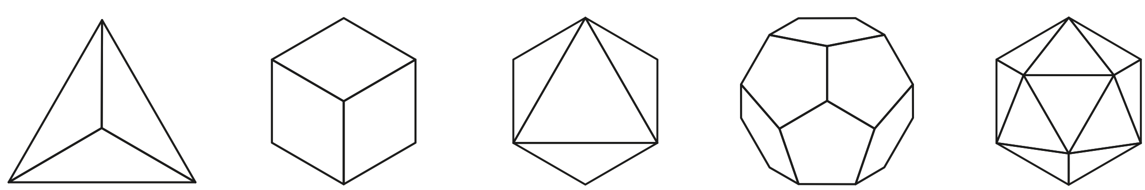
- Poliedros regulares
- Poliedros irregulares

Poliedros regulares

Poliedros regulares são sólidos cujas faces são sempre apresentadas sob a forma do mesmo polígono regular. Na verdade, para um sólido ser um poliedro, este apenas tem de ter as suas faces sob a forma de polígonos regulares, mas não é necessário que se trate sempre do mesmo polígono (ex.: pirâmide quadrangular). Contudo, para um poliedro ser regular, não basta que as suas faces sejam polígonos regulares – todas as faces têm de corresponder ao mesmo polígono (ex.: cubo).

São estes os tipos de poliedros regulares que existem:

- tetraedro (3 faces);
- cubo (6 faces);
- octaedro (8 faces);
- dodecaedro (12 faces);
- icosaedro (20 faces).



Poliedros irregulares

Poliedros irregulares são poliedros cujas faces não são todas iguais, ao contrário dos poliedros regulares.

Estes podem ser retos ou oblíquos, dependendo da posição do seu eixo relativamente à base.

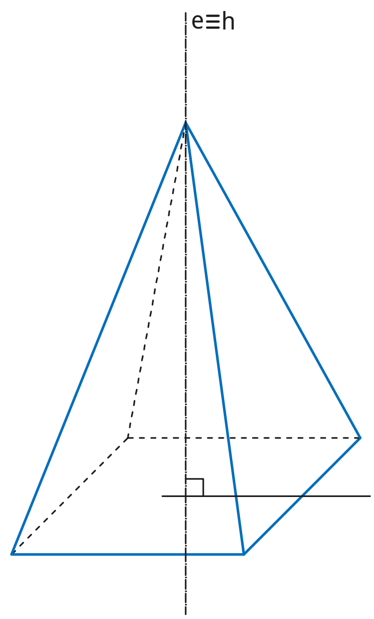
Pirâmides e prismas são poliedros irregulares.

Resumindo

- Poliedros retos têm o seu eixo perpendicular à base.
- Poliedros oblíquos têm o seu eixo oblíquo relativamente à base.

Pirâmides

Uma **pirâmide** é um poliedro que se caracteriza por ter uma base poligonal e um vértice. O número de faces varia consoante o polígono que constitui a sua base. Se for um polígono de quatro lados (quadrado), a pirâmide apresentará cinco faces (uma por cada lado do polígono, somando-se a base). No caso de o polígono da base ser, por exemplo, um triângulo, a pirâmide apresentará quatro faces (uma por cada lado do polígono, somando-se a base).

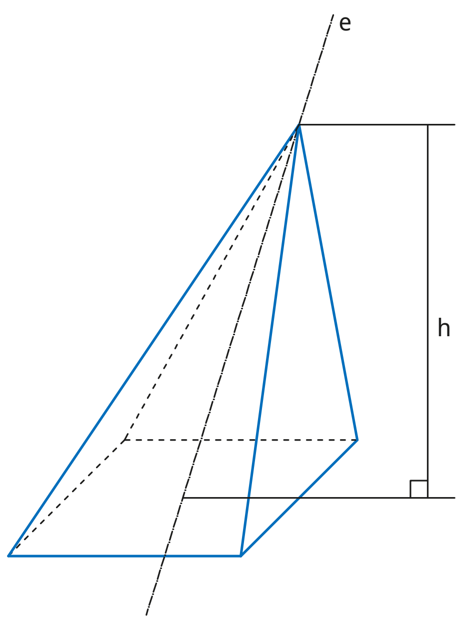


As pirâmides podem ser retas ou oblíquas.

Pirâmides retas têm o seu vértice alinhado com o centro geométrico da base (o seu eixo é perpendicular ao plano da base).

Pirâmides oblíquas não têm o seu vértice alinhado com o centro geométrico da base (o seu eixo é oblíquo ao plano da base).

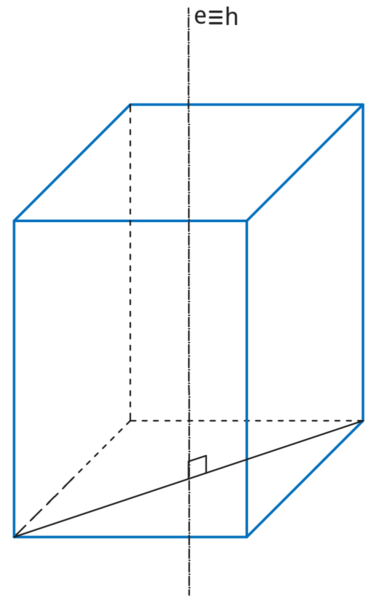
Independentemente da posição do eixo relativamente ao plano da base, a altura de uma pirâmide é sempre medida perpendicularmente à base. No caso de pirâmides regulares, a altura poderá ser medida diretamente sobre o segmento do eixo compreendido entre a base e o vértice. No caso de uma pirâmide oblíqua, a altura deverá ser medida sob uma linha reta, perpendicular à base, até ao ponto de interseção de uma reta que contém o vértice e é paralela ao plano da base.



Prismas

Prismas são poliedros que também apresentam um número variável de faces, consoante o número de arestas do polígono das bases (um prisma possui duas bases, paralelas entre si). Todas as faces laterais de um prisma são quadriláteros que se intersetam, formando as arestas laterais do sólido. Essas faces laterais, quando intersetam as bases, formam as arestas da base do sólido.

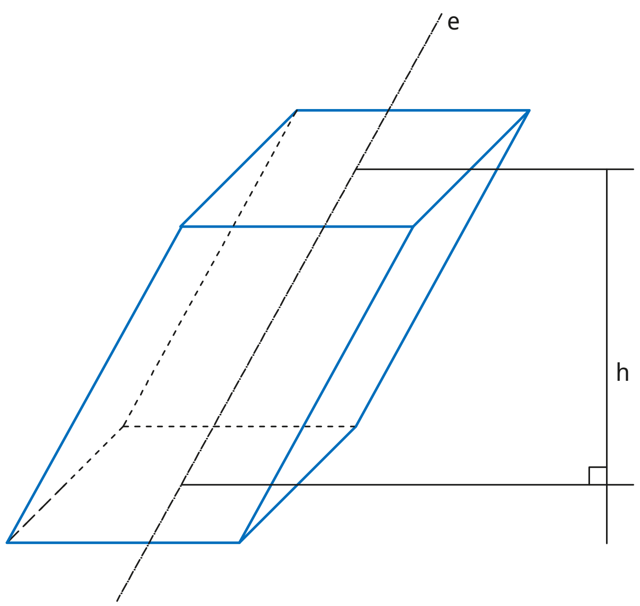
No caso de **prismas retos**, as faces laterais são perpendiculares às bases. Neste caso, o eixo do sólido é um segmento de reta compreendido entre os centros geométricos de ambas as bases e perpendicular a estas.



Um **prisma oblíquo** continua a ter as bases paralelas entre si. No entanto, e apesar de o seu eixo continuar a ser um segmento de reta compreendido entre os centros geométricos de ambas as bases, este deixa de ser perpendicular à base, passando a ser oblíquo.

Prismas retos cujas bases sejam polígonos regulares são denominados prismas regulares.

A altura de um prisma corresponde à distância compreendida entre as bases.

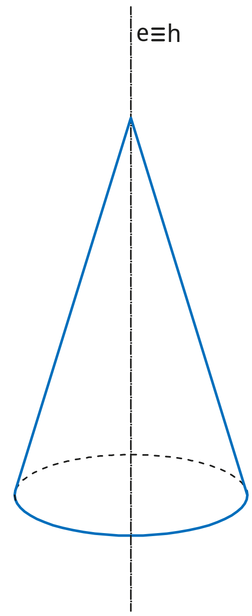


Cones

Embora os cones não sejam poliedros, pois a sua base jamais poderá apresentar-se sob a forma de um polígono (serão sempre figuras geométricas delimitadas por linhas curvas fechadas), estes podem ser caracterizados como "retos" ou "oblíquos".

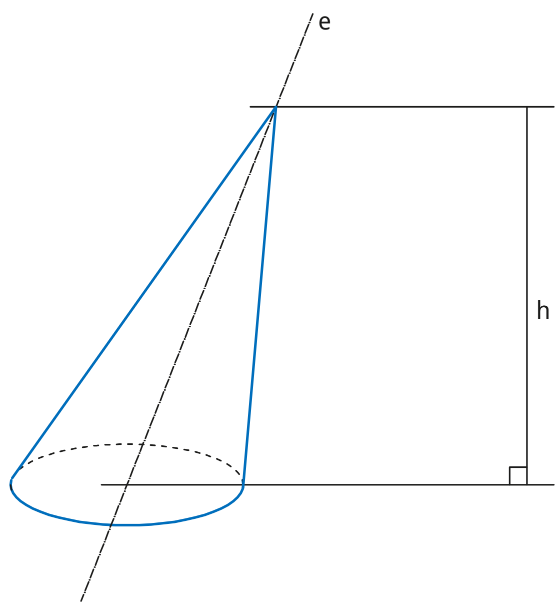
Um **cone reto** é todo aquele cujo eixo (segmento de reta compreendido entre o vértice do cone e o centro geométrico da base) é perpendicular ao plano da base.

Um cone reto é denominado cone de revolução, pois é definido lateralmente por uma superfície de revolução (na qual o eixo é sempre perpendicular ao plano da diretriz).

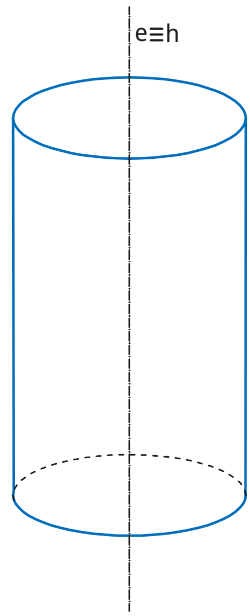


Um **cone oblíquo** é aquele cujo eixo é oblíquo face ao plano da base, não fazendo coincidir a projeção horizontal do seu vértice com o centro da base.

Aqui, tal como nas pirâmides, a altura do cone é sempre medida perpendicularmente à base, independentemente de se tratar de um cone reto ou oblíquo.



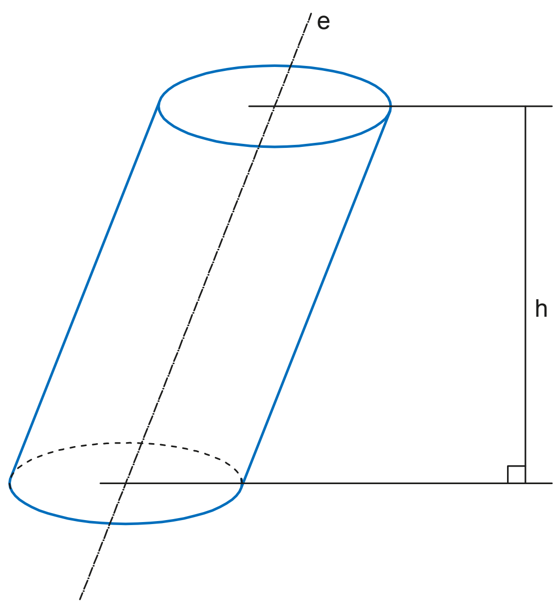
Cilindros



Nos cilindros, à semelhança do que acontece com os prismas, ambas as bases são sempre paralelas entre si.

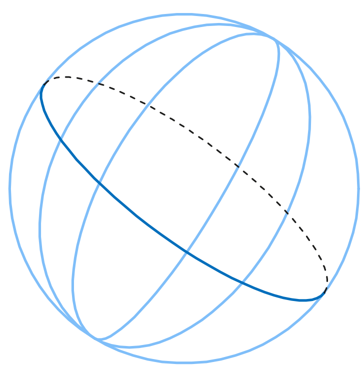
No caso dos cilindros, as bases não são poligonais, e estes são delimitados lateralmente por uma superfície cilíndrica, não possuindo, assim, arestas.

Podem ser retos, se o eixo que contém os centros de ambas as bases for perpendicular às mesmas, ou oblíquos, se essa for a posição do eixo relativamente às bases.



Tal como nos prismas, tratando-se de um cilindro reto ou de um cilindro oblíquo, a sua altura é sempre medida entre bases, e segundo um segmento de reta perpendicular às mesmas, ou seja, medindo a distância entre os planos das bases.

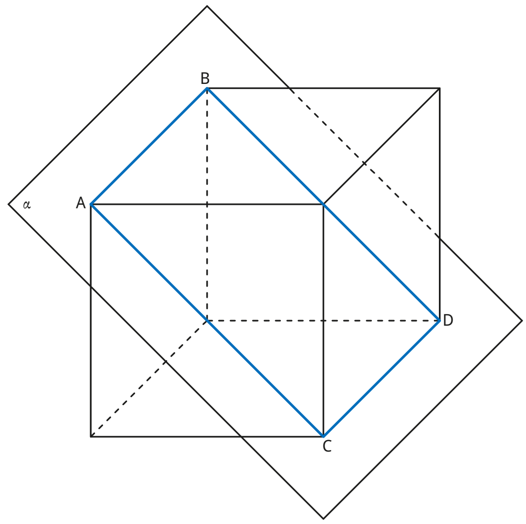
Esfera



A esfera é o único sólido geométrico que não apresenta qualquer face, sendo constituído por uma só superfície (superfície esférica).

Secções planas de sólidos e truncagem

Secções e truncagens são fenómenos transformadores de um sólido. Contudo, cada um destes conceitos tem definições próprias que vale a pena esclarecer:



Secção plana – figura plana que resulta da interseção de um plano com um sólido.

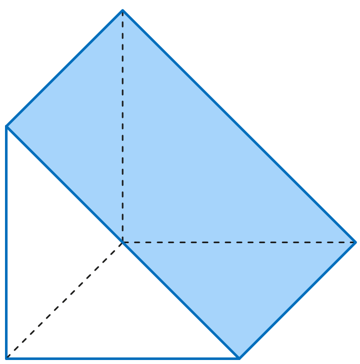
Sólido truncado – parte resultante do corte de um sólido.

Uma secção plana resulta da interseção de um plano secante com um determinado sólido geométrico. A interseção desse plano com as faces do sólido origina figuras planas, contidas no plano secante. A essas figuras dá-se o nome de **secção plana**. Estas figuras podem variar consoante o tipo de sólido seccionado.

O cubo representado na figura acima é intersetado pelo plano α. A figura plana que resulta dessa interseção (retângulo [**ABCD**]) está contida no plano α.

Resumindo

- Uma secção plana está sempre contida no plano secante.

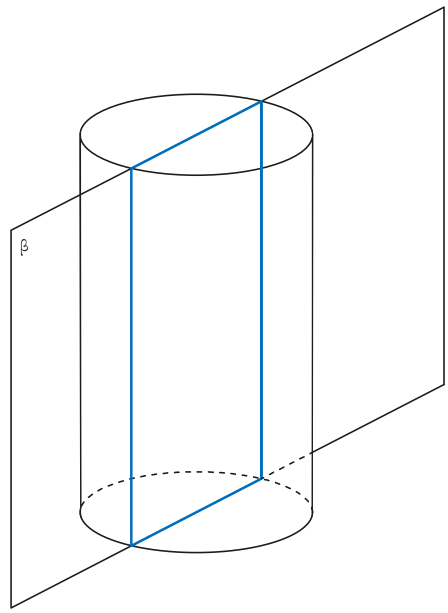


Na truncagem, há igualmente um plano secante que interseta o sólido. No entanto, o resultado obtido não se centra na figura plana desenhada por essa secção, mas sim no novo sólido resultante dessa secção. Neste caso, dá-se o nome de **sólido truncado**.

Resumindo

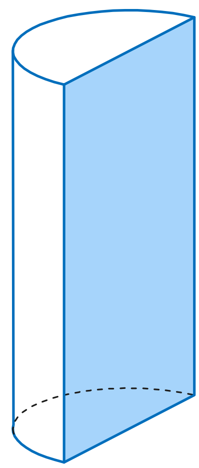
- Um sólido truncado é um sólido compreendido entre o plano secante e a base, ou o sólido compreendido entre o plano secante e o vértice.

Nestes casos, apenas é considerada uma parte do sólido, sendo eliminada a outra. Ou seja, numa truncagem considera-se apenas um novo sólido, em vez de dois.



Resumindo

- Quando se trata de uma secção plana, considera-se apenas a figura resultante da interseção do plano secante com o sólido, não havendo divisão do mesmo.



Na truncagem, essa secção implica uma separação física, dividindo o sólido em duas partes.

Para praticar

1. Refere dois exemplos de superfícies de revolução.
2. Explica a diferença entre uma pirâmide regular e uma pirâmide oblíqua.
3. Numa superfície prismática, identifica a diretriz e a geratriz. Explica a diferença entre uma superfície prismática e uma superfície piramidal, recorrendo aos conceitos identificados anteriormente.

2

Introdução à disciplina de Geometria Descritiva

Resenha histórica

Objeto e finalidade

Noções de projeção

Superfície de projeção

Retas projetantes

Sistemas de projeção – Método de planos ortogonais

Descrição do sistema

Tipos de projeção

Mecanismos de projeção

Métodos e sistemas de representação

Introdução à disciplina de Geometria Descritiva

Resenha histórica

A procura de uma forma de representação da realidade por via da arte remonta às antigas civilizações, que comunicavam através do desenho os acontecimentos marcantes do quotidiano. Desde a Pré-História que os povos sentiram a necessidade de registarem o seu dia a dia e os princípios da sua civilização por intermédio de elementos gráficos, como pinturas. Contudo, é no período do Renascimento, com a descoberta da perspetiva, que se conseguiu obter uma verdadeira aproximação entre a realidade e a sua representação.

A perspetiva é uma representação gráfica de objetos sobre um qualquer suporte regular (normalmente o papel), que procura representar uma visão global e realista de algo.
Na pintura romana, começou a ser abordada a perspetiva de forma empírica, que foi experimentada e estudada no Renascimento por grandes nomes florentinos, como Filippo Brunelleschi (1377-1446), com demonstrações daquilo que é a perspetiva linear.

O primeiro grande teórico da perspetiva terá sido Leon Battista Alberti (1404-1472), através do seu tratado *Della Pittura* (1435).

Objeto e finalidade

A Geometria Descritiva é a disciplina que permite representar, na abstração, uma forma concreta. Num projeto de uma casa, por exemplo, é necessário representar de forma rigorosa e detalhada algo que ainda não existe, que ainda vai ser construído. A Geometria dota o indivíduo de uma capacidade que, podendo já ser inata, será melhorada e trabalhada com o exercício de visualização e perceção do espaço tridimensional. Só assim é possível projetar no vazio aquilo que poderá vir a ser algo concreto, como uma casa, no caso da arquitetura.

Além de ser determinante na capacidade de antever o que ainda não existe, a Geometria Descritiva é, também, essencial na representação dessa nova realidade, para que esta possa ser executada e perfeitamente compreendida por terceiros, através de métodos e normas de representação universais, como já foi referido anteriormente. Também a possibilidade de representar no papel algo que é tridimensional, com volume e espaço próprios, é uma das principais características desta disciplina.

Na verdade, a Geometria Descritiva é a principal ferramenta de muitas profissões que dependem, na sua atividade, da compreensão do espaço, das formas e dos volumes, como a arquitetura, a escultura, o *design* e várias variantes da engenharia, entre outras.

Podemos dizer que o objetivo da Geometria Descritiva é representar rigorosamente, de forma bidimensional, formas tridimensionais, de modo que seja perfeitamente possível compreendê-las, mesmo sem nunca as termos visto.

Na verdade, qualquer representação é sempre bidimensional, independentemente de ser uma representação de elementos bidimensionais ou tridimensionais. Um sólido, sendo um elemento tridimensional, pode ser representado, sendo sugerida essa tridimensionalidade. Contudo, essa representação é bidimensional, pois encontra-se circunscrita a um plano, do desenho, com duas dimensões.

Manual Digital

Interatividade
Projeção cónica

Em suma: a Geometria Descritiva permite representar rigorosamente uma realidade existente, através do desenho rigoroso, para que aquela possa ser documentada, como também uma realidade que ainda não existe (um projeto), e possa ser concretizada.

Noções de projeção

Na Geometria Descritiva, a possibilidade de representar, no plano (papel), formas tridimensionais é conseguida através de projeções. Para entender melhor o que é uma projeção, iremos recorrer a exemplos do dia a dia:

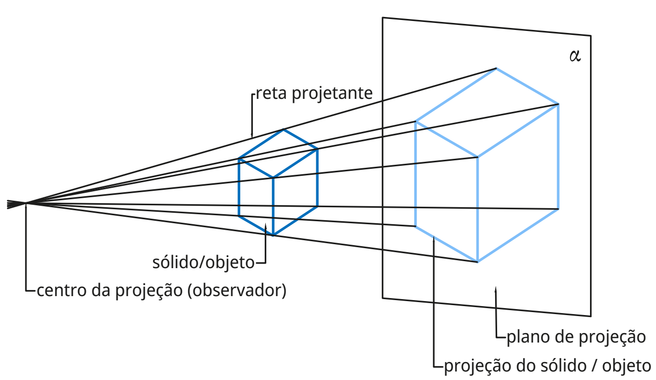
Num projetor de imagem, temos o **centro de projeção** no próprio aparelho (a partir do qual é feita a projeção), com uma película que contém a imagem que se pretende projetar, e que vai ser representada numa tela, localizada a uma distância finita do aparelho. Essa tela será o **plano de projeção**. Todas as formas que se encontram projetadas nessa tela são definidas por inúmeras retas, que partem do **centro de projeção** e vão incidir sobre o **plano de projeção**. Quando o intersetam, desenham a figura projetada.

De um ponto de vista mais abstrato e científico, entende-se por **projeção numa superfície plana** toda a imagem que resulta da interseção de retas projetantes que tocam os vários pontos do objeto a representar. A figura resultante da união de todos esses pontos no plano de projeção é a **projeção do objeto no plano**. Há, assim, três conceitos-chave a reter:

Plano de projeção: superfície plana sobre a qual se projeta qualquer objeto.

Reta projetante: reta que passa pelo centro de projeção e por qualquer outro ponto do espaço, projetando-o no plano de projeção quando se interseta com este.

Centro de projeção: é o ponto comum a todas as retas projetantes. Pode ser entendido como o ponto de partida da projeção.



Superfície de projeção

Tal como foi referido anteriormente, uma projeção necessita sempre de um plano para a mesma, ou seja: de uma superfície onde se irá projetar a imagem de qualquer objeto.

No dia a dia, podemos encontrar vários tipos de superfícies de projeção, nos mais variados contextos. Por exemplo, na rua, quando vemos a nossa sombra projetada no chão, o chão é a superfície de projeção do nosso corpo.

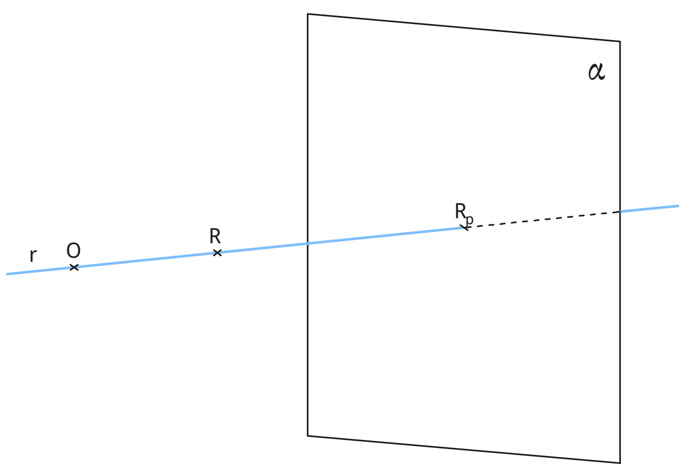
Na imagem ao lado, o **centro de projeção** corresponderá ao Sol; as **retas projetantes** aos raios de luz; e o **plano de projeção** será o chão.

Num contexto mais abstrato, como o da Geometria Descritiva, a superfície de projeção é o plano que é intersetado pelas retas projetantes.

Retas projetantes

As retas projetantes correspondem a um dos três conceitos que constituem uma projeção. Estas são elementos abstratos (retas) que convergem num único ponto (centro de projeção) e que contêm um ponto do objeto ou figura projetados, acabando a intersetar a superfície de projeção. A junção de todos os pontos de interseção de todas as retas projetantes dá origem à projeção em si.

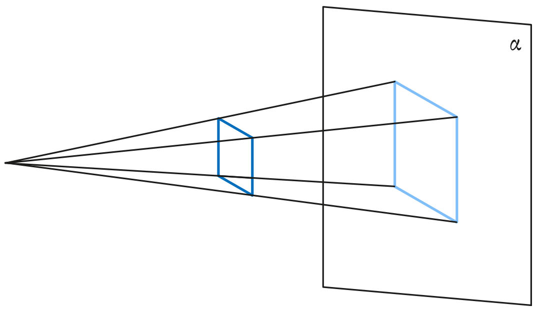
Neste exemplo, podemos observar uma reta projetante **r**, que contém os pontos **O** e **R**. O ponto **O** corresponde ao centro da projeção. Quando a reta interseta o plano α, dá-se a projeção do ponto **R** (interseção da reta **r** com o plano).
O plano α é o plano de projeção.

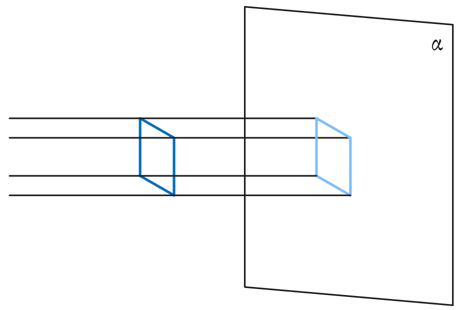


Sistemas de projeção – Método de planos ortogonais

Descrição do sistema

Recordando o que foi estudado anteriormente, uma projeção é uma representação bidimensional de um dado objeto. É o resultado da conjugação de vários aspetos, relativos à posição do centro de projeção e à posição das retas projetantes face ao plano de projeção. Com base nestes aspetos, o mesmo objeto pode apresentar projeções diferentes, como se pode verificar nas imagens.





Tipos de projeção

Já referimos anteriormente que as diferentes relações estabelecidas entre os três conceitos que constituem um sistema de projeção geram projeções diferentes de um dado objeto.

Na verdade, essas variantes geram diferentes tipos de projeção:

- **projeção central** ou **cónica**;
- **projeção paralela** ou **cilíndrica**.

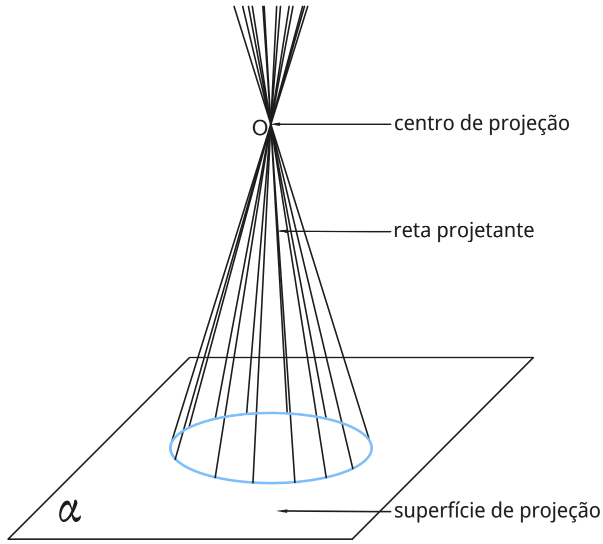
O que diferencia cada um destes tipos de projeção é a posição do centro de projeção e a relação das retas projetantes com o plano de projeção.

Resumindo

- **Sistema de projeção cónica:** as retas projetantes são concorrentes num ponto, que corresponde ao centro de projeção – a distância finita do plano de projeção;
- **Sistema de projeção cilíndrica:** as retas projetantes são paralelas entre si, convergindo num ponto (centro de projeção) – a distância infinita do plano de projeção.

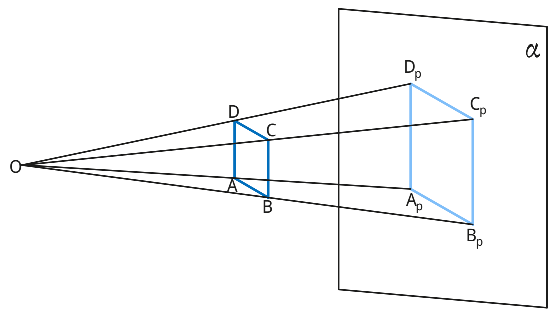
Projeção central ou cónica

Uma **projeção central ou cónica**, como o próprio nome indica, pode ser resumida através do estudo de uma **superfície cónica**, em que: o **centro da projeção** é o **vértice da superfície**, as **retas projetantes** são as **geratrizes**, e o **plano de projeção** é o **plano da base**, no qual é traçada a **diretriz** (união de todos os pontos de interseção das geratrizes com o plano).



Assim, podemos considerar que, numa projeção cónica, o centro de projeção é o ponto de convergência de todas as retas projetantes dessa projeção, que se encontra a uma distância finita do plano de projeção.

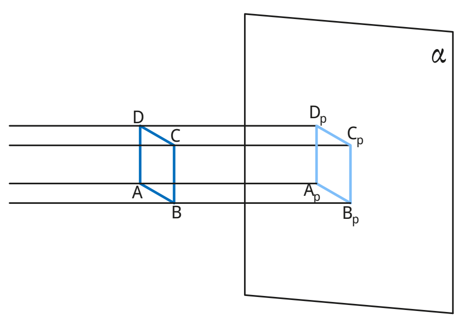
Observa a projeção do quadrado **[ABCD]** no plano α. As retas projetantes são concorrentes no ponto **O** e contêm os vértices do quadrado. Os quatro pontos de interseção das retas com o plano α correspondem à projeção de cada um desses vértices.



Projeção paralela ou cilíndrica

No caso de uma **projeção paralela ou cilíndrica**, o **centro de projeção** está localizado a uma distância infinita do plano de projeção, ou seja: as retas projetantes são paralelas entre si. Esta condição assemelha-se a uma **superfície cilíndrica**, em que **as geratrizes** são todas paralelas, convergindo apenas num ponto infinito (ponto impróprio).

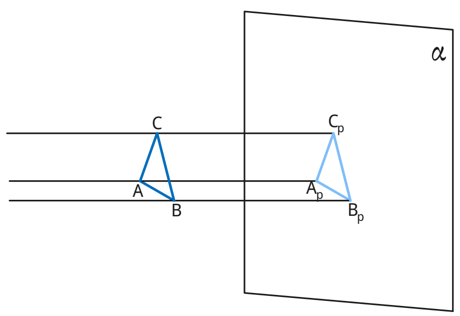
Observa a projeção do quadrado **[ABCD]** no plano α. As retas projetantes são paralelas entre si, sendo concorrentes num ponto a distância infinita, e contêm os vértices do quadrado. Os quatro pontos de interseção das retas com o plano α correspondem à projeção de cada um desses vértices.



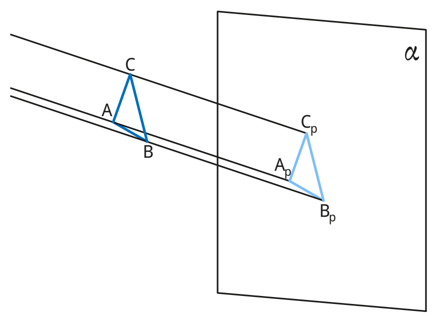
Contudo, há dois tipos de projeções paralelas, dependendo da posição das retas projetantes relativamente ao plano de projeção:

- **Projeção ortogonal** – se as retas projetantes forem perpendiculares ao plano de projeção;
- **Projeção oblíqua** ou **clinogonal** – se as retas projetantes forem oblíquas ao plano de projeção.

Verifica os dois exemplos:



Projeção ortogonal



Projeção oblíqua ou clinogonal

Mecanismos de projeção

As projeções fazem parte do dia a dia, sobretudo as projeções cónicas. Estas geram aquilo a que se chama a perspetiva cónica (ou perspetiva linear).

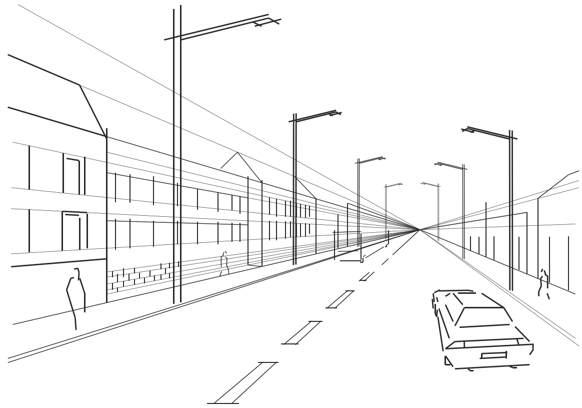
Na verdade, o nosso primeiro contacto visual com o mundo em redor é feito através de uma perspetiva cónica ou linear. A nossa visão funciona sob um sistema cónico, em que existe um centro (o observador), um plano intersetado pelas retas projetantes e o objeto que visualizamos.

Esta sucessão de elementos compõe a perspetiva, que deforma os objetos que visualizamos relativamente ao seu tamanho. Isto explica o facto de um objeto nos parecer tanto mais pequeno quanto mais longe se encontrar da nossa localização. Neste caso concreto, as retas projetantes correspondem aos raios visuais, e aquilo que seria a projeção do objeto é a perspetiva do objeto. Também na fotografia está presente a projeção cónica, em que o plano de projeção corresponde à película sobre a qual a imagem é projetada, desde o centro de projeção, correspondente ao olhar do fotógrafo. A imagem resultante na fotografia está representada em perspetiva cónica.

Seguem-se alguns exemplos de perspetivas cónicas:

Nota que os elementos constantes nos desenhos aparentam ser mais pequenos à medida que se afastam na imagem.

Os candeeiros de rua que estão em primeiro plano são consideravelmente maiores do que os restantes. Esta deformação é uma característica própria da perspetiva cónica ou linear.



Também os edifícios vão diminuindo de tamanho e as linhas horizontais das fachadas parecem convergir num ponto a distância finita, situado numa linha vulgarmente designada por **linha de horizonte**.

Em suma, a perspetiva cónica está presente na grande parte das representações do mundo real, tentando reproduzir a forma como a vemos. Esta visão é paradoxal porque, na verdade, tendo em consideração os exemplos acima, todos os candeeiros de rua terão o mesmo tamanho. Contudo, em perspetiva cónica, estes assumem tamanhos diferentes, consoante a sua distância face ao observador. Esta distorção é o que nos permite ter uma visão abrangente do que está ao nosso redor. Assim, embora não seja a representação que ilustra os objetos da forma mais rigorosa, é aquela que mais se assemelha à forma como vemos o que nos rodeia.

Sombras

A sombra é o resultado de uma projeção. Neste caso, é simples identificar os três conceitos que constituem uma projeção. Quando vemos uma sombra projetada, numa parede, temos a seguinte relação:

Parede – **superfície de projeção**;

Sol – **centro da projeção**;

Raios luminosos – **retas projetantes**.

Quando a luz incide sobre o objeto (cuja sombra está projetada na parede), os raios que são tangentes ao objeto, ao tocarem a parede, desenham o seu contorno.

Neste caso, considera-se que o Sol é uma fonte luminosa a distância finita, pois, numa sombra, o sistema de projeção será sempre cónico, uma vez que a fonte luminosa é sempre algo concreto (Sol, lâmpada, etc.), o que implica sempre uma distância finita, possível de ser medida.

No quotidiano, uma sombra é sempre o resultado de uma projeção cónica, pois depende de uma fonte luminosa, que, sendo algo concreto, estará sempre a uma distância finita.

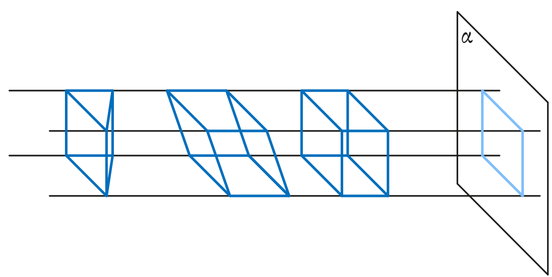
Métodos e sistemas de representação

Por **método de representação** entende-se o resultado de um sistema de projeção.
Ou seja: um sistema de projeção é a base de um método de representação, na medida em que, de acordo com o sistema de projeção adotado, haverá diferentes projeções no plano de projeção. A imagem resultante dessa projeção (representação bidimensional de uma forma tridimensional) é conseguida através de métodos de representação, que variam nas suas características, originando representações diferentes do mesmo objeto.

Embora um sistema de representação se baseie em representar bidimensionalmente uma forma tridimensional, existe a aplicabilidade do critério de reversibilidade. Isto é: deverá ser possível, também, reconstruir mentalmente o objeto tridimensional através da observação da sua representação bidimensional. Para isto, os métodos de representação deverão seguir critérios específicos que facilitem a análise das representações, desconstruindo o processo de representação, e sugerindo a sua forma original.

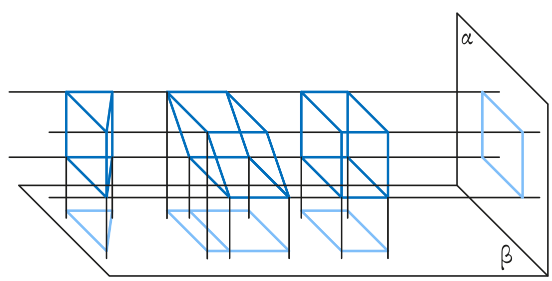
Há situações em que uma única projeção não permite uma leitura real do objeto em questão, sendo necessário haver informação complementar, nomeadamente, uma outra projeção, ou informação numérica, por exemplo, no caso das projeções cotadas, que serão abordadas mais adiante.

Deste modo, poder-se-á observar a projeção de diferentes objetos e concluir que a mesma projeção se refere a sólidos com características distintas, concluindo que, neste caso, a projeção ortogonal sobre o plano α é insuficiente para ilustrar de forma fiel os objetos em estudo.



Para cumprir o critério de reversibilidade, torna-se necessário complementar os métodos de representação, tal como já foi referido.

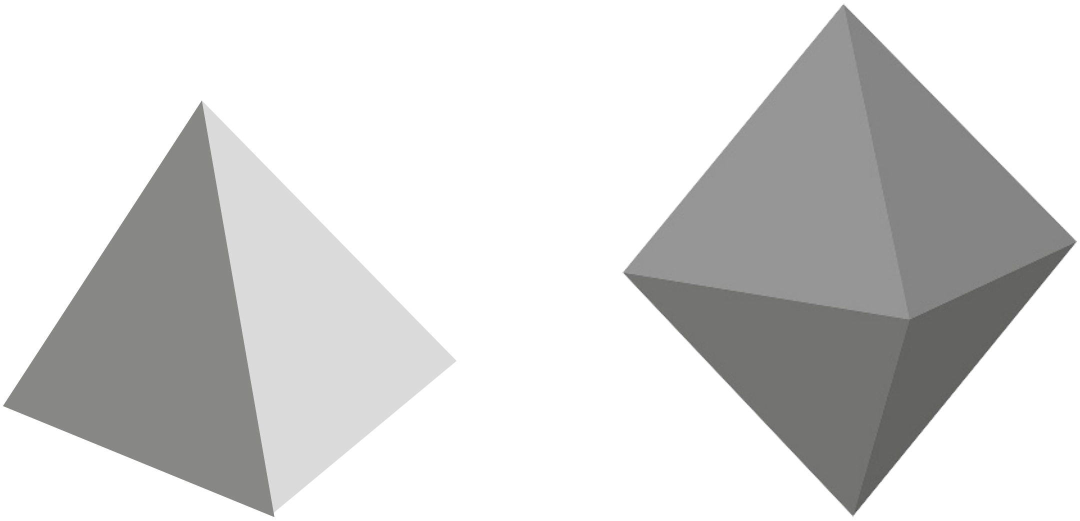
Observa o exemplo da figura à direita em que se considera um segundo plano de projeção, conseguindo, assim, ter duas representações que se complementam entre si e facilitam a compreensão do objeto tridimensional em questão.



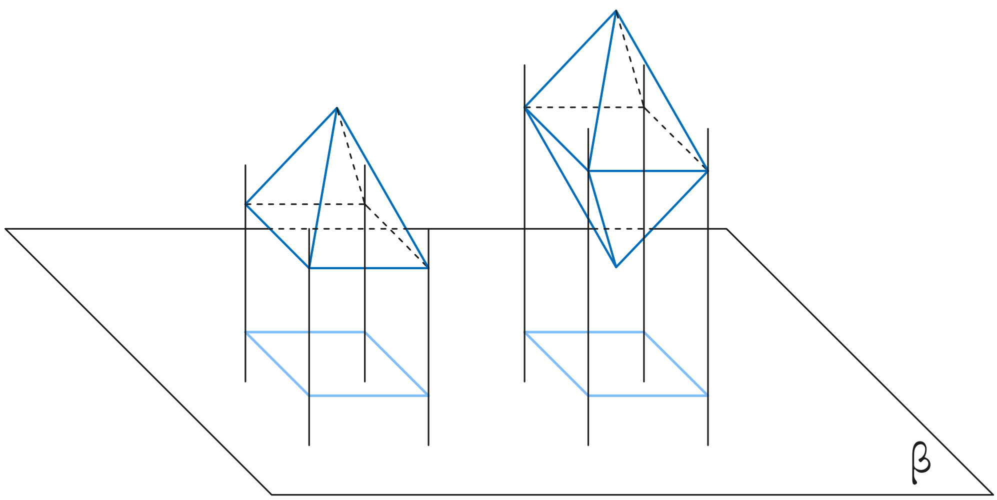
Método das projeções cotadas

O método das projeções cotadas é um método de representação que resulta da combinação de uma projeção com dados informativos (de natureza numérica) que complementam a informação que seria insuficiente unicamente com a representação da projeção.

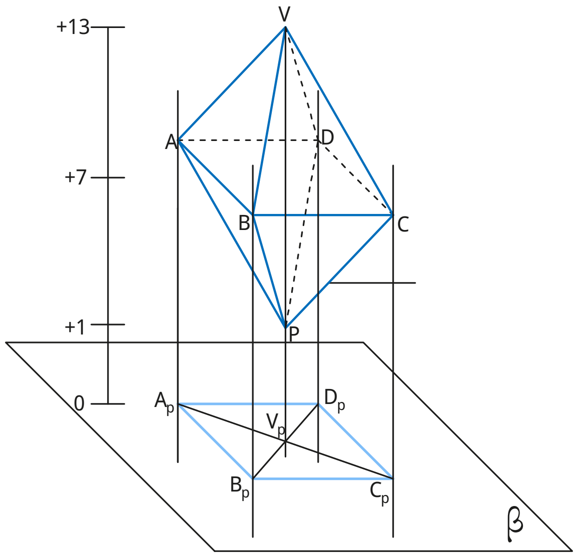
Considera os seguintes sólidos (pirâmide quadrangular e octaedro):

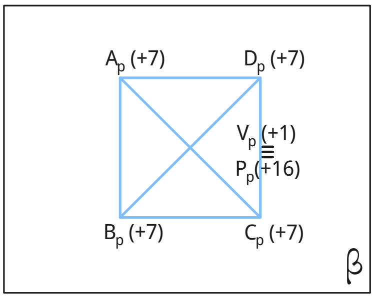


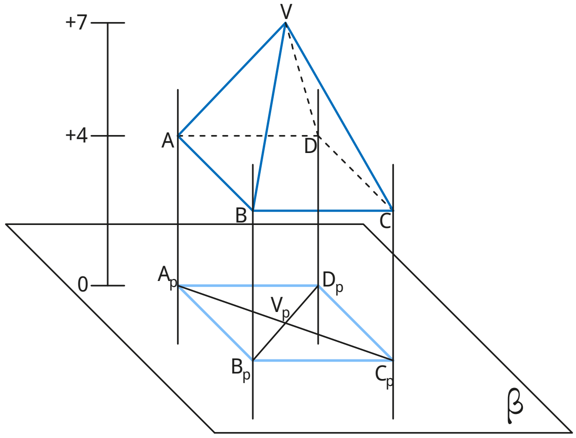
Ao observá-los, é possível concluir que têm características diferentes. Contudo, as projeções representadas são exatamente iguais, o que revela que este método (projeção ortogonal) é insuficiente para os representar.

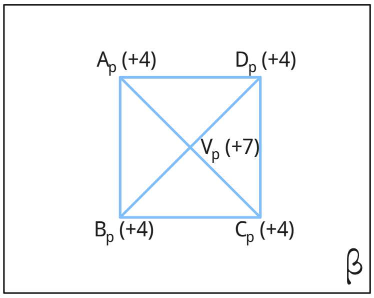


No entanto, se combinarmos dados numéricos relativos aos vértices dos sólidos, é possível retirar conclusões que, na ausência desta informação, seriam impossíveis de conhecer.
Ao verificar que o vértice central, no caso da representação do octaedro, possui dois pontos cuja projeção é coincidente, mas apresentam valores distintos, com igual distância aos vértices do quadrado, é possível entender que se trata de um octaedro. No caso da pirâmide quadrangular, verifica-se que não existe qualquer projeção coincidente, havendo apenas um vértice alinhado com o centro do quadrado.





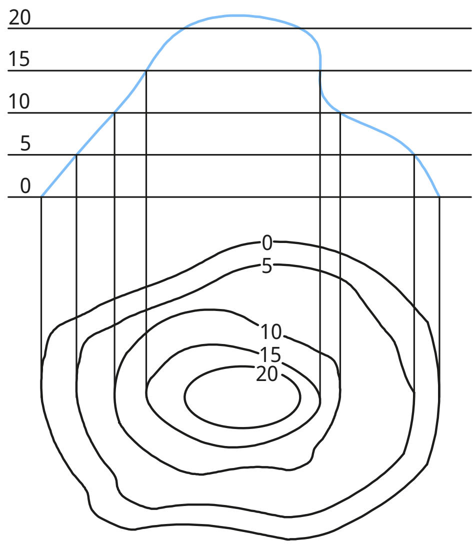




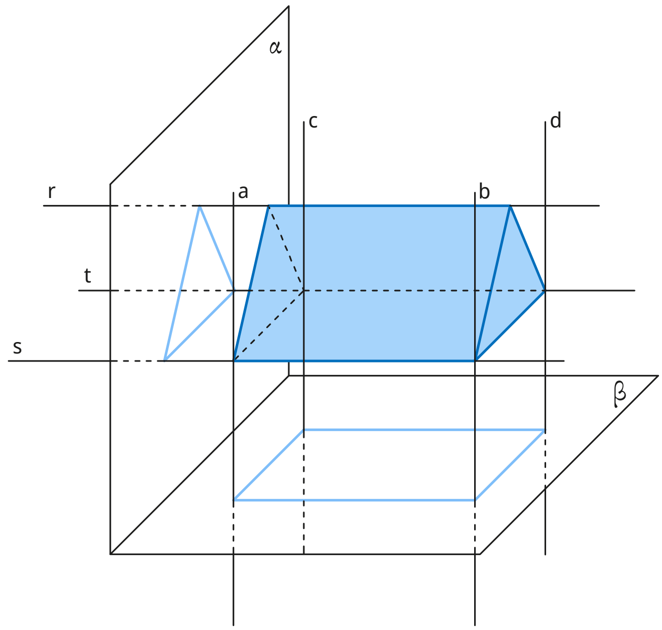
O método das projeções cotadas é o método utilizado nas plantas topográficas, que traduzem a morfologia de um terreno, fundamental no trabalho de engenheiros e arquitetos quando estudam os locais onde se irão projetar os edifícios.
Estas plantas resultam de uma sucessão de secções horizontais, equidistantes entre si, e representam-se, no papel, segundo as linhas de interseção do terreno com esses planos. A estas linhas dá-se o nome de **curva de nível**.

Assim, as curvas de nível são projetadas ortogonalmente num plano horizontal de projeção (cuja referência é o nível médio das águas do mar – com cota 0). A cada curva corresponde um valor numérico que poderá ser positivo ou negativo. Sendo positivo, significa que se situa acima do nível médio das águas do mar. Por oposição, se for negativo, significa que está abaixo do nível médio das águas do mar. Em suma, o método das projeções cotadas é de grande utilidade, dada a sua simplicidade e clareza na tradução bidimensional de uma realidade tridimensional. Contudo, há situações de maior complexidade que exigem a conjugação de outros sistemas de projeção.

Maquete representativa de uma superfície topográfica.

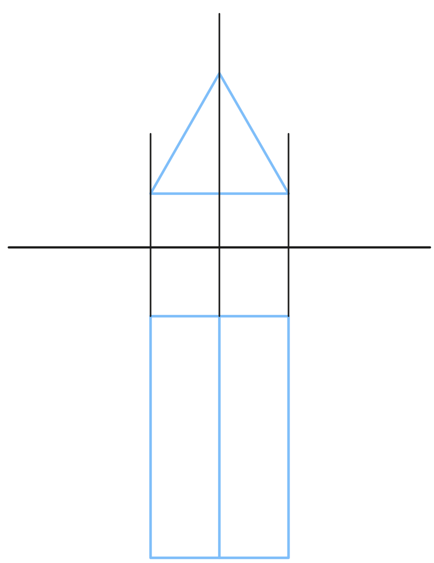


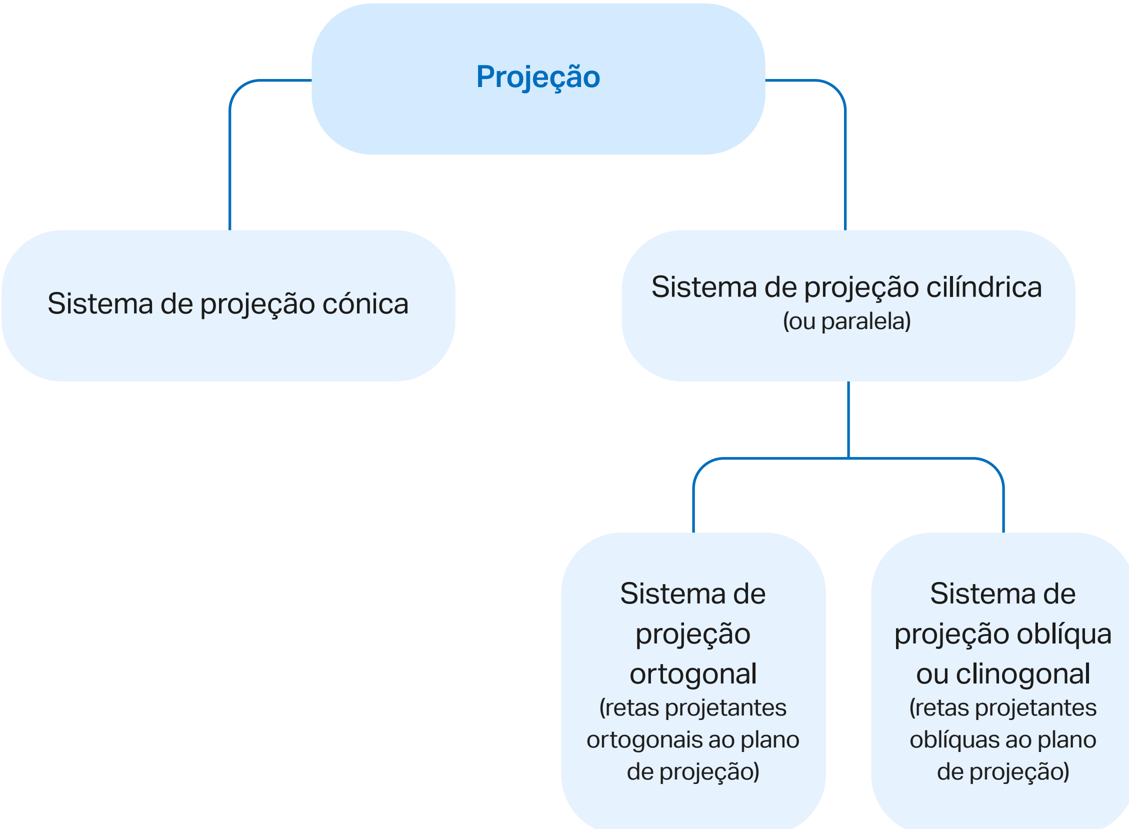
Método da dupla projeção ortogonal (método de Monge)



No método da dupla projeção ortogonal (vulgarmente conhecido como método de Monge), há a conjugação de duas projeções, sobre dois planos de projeção ortogonais entre si. Isto permite ter uma projeção horizontal e uma projeção frontal. Este método permite ter uma representação de duas faces adjacentes de um sólido, facilitando a compreensão da sua forma original. Neste sistema, existem dois tipos de retas projetantes, ortogonais entre si. Considera os planos α e β, que são planos de projeção ortogonais entre si. O prisma triangular está representado nos planos α e β, segundo as suas projeções. No plano α consegue entender-se a base do sólido e no plano β uma das suas faces laterais. Neste caso, observando apenas estas duas representações, é possível reconstruir mentalmente o sólido em questão. Verifica que as retas projetantes **r**, **s** e **t** são paralelas entre si e ortogonais ao plano α. Já as retas **a**, **b**, **c** e **d** são paralelas entre si e ortogonais ao plano β. As retas projetantes são paralelas entre si em cada uma das projeções, pois está a ser representada uma projeção paralela ou cilíndrica, em que o centro da projeção (observador) está localizado a uma distância infinita (ver página 54).

A figura ao lado corresponde ao rebatimento do plano α sobre o plano β e reduz a representação do sólido da tridimensionalidade para a bidimensionalidade. Em suma, o método da dupla projeção poderá ser de grande utilidade tendo em conta a rapidez e economia de meios que lhe estão inerentes. Contudo, em casos de maior complexidade, este método pode ser igualmente insuficiente, sendo necessário recorrer a outros sistemas.





Resumindo

- **Sistema de projeção cónica:** as retas projetantes são concorrentes num ponto, que corresponde ao centro de projeção, a distância finita do plano de projeção;
- **Sistema de projeção cilíndrica:** as retas projetantes são paralelas entre si, convergindo num ponto (centro de projeção) a distância infinita do plano de projeção;

Todos os sistemas de representação têm forças e fraquezas. Nesse sentido, é importante analisar o que se pretende representar e, assim, escolher o melhor sistema para essa representação. Um sistema de representação que seja suficiente para um determinado caso, pode ser deficitário para outro.

Para praticar

1 Num espetáculo de sombras chinesas, identifica que elementos correspondem a cada um dos elementos que constituem um sistema de projeção:

a) Centro de projeção;

b) Retas projetantes;

c) Plano de projeção.

2 Representa, por meio do desenho, uma projeção oblíqua e uma projeção ortogonal, refletindo sobre as principais diferenças entre ambas.

3 Indica as diferenças entre o Método de Monge e o Método das Projeções cotadas.

4 Recorrendo a material existente na tua sala de aula, regista, por meio do desenho, um exemplo de projeção cónica, identificando o centro de projeção, o objeto e a superfície da projeção.

5 Explica, por palavras tuas, a semelhança entre um sistema de projeção cónica e uma superfície cónica.

3

Sistema de múltipla projeção ortogonal

Projeção triédrica

Projeção hexaédrica

Noções de planta e alçado

Método europeu e método americano

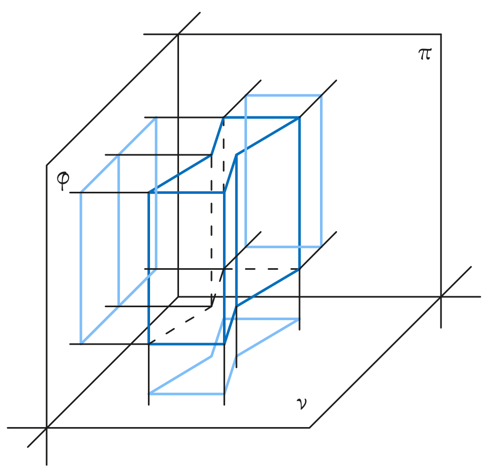
Sistema de múltipla projeção ortogonal

Como já foi referido no capítulo anterior, por vezes, são necessárias várias projeções para se conseguir obter uma representação bidimensional que descreva o objeto tal qual ele é.

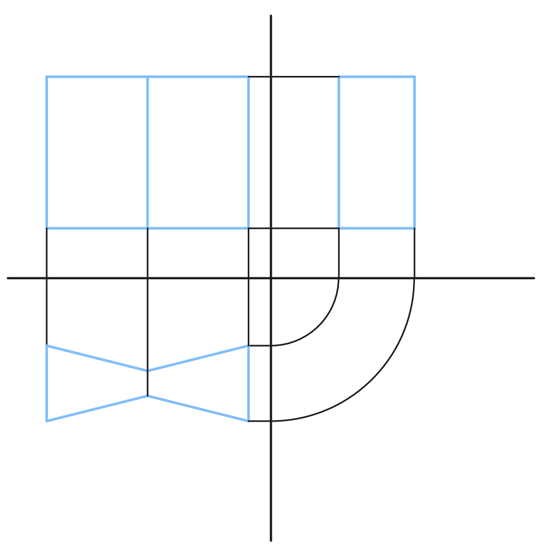
O sistema de múltipla projeção ortogonal consiste na projeção de um dado objeto em três ou mais planos ortogonais entre si (até um máximo de seis). O número de planos de projeção poderá variar consoante a complexidade do que se pretende representar.

Projeção triédrica

A projeção triédrica, tal como o nome indica, é um tipo de múltipla projeção ortogonal com recurso a três planos de projeção, ortogonais entre si. Permite obter três vistas do objeto, sendo estas uma vista horizontal (plano horizontal ν), uma vista frontal (plano frontal φ) e uma vista lateral (plano de perfil π).



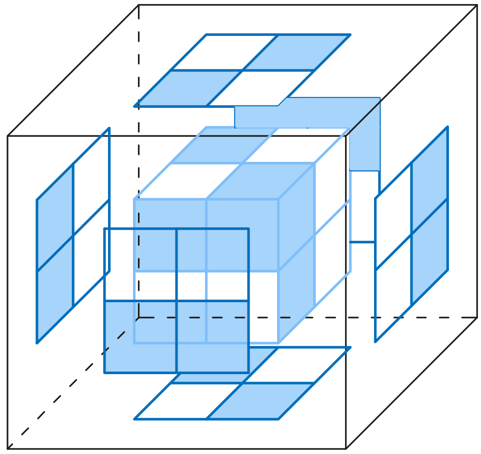
A representação do objeto é obtida através do rebatimento do plano de perfil para o plano frontal. Posteriormente, dá-se o rebatimento do plano frontal sobre o plano horizontal. Este processo resulta na representação bidimensional do objeto segundo três vistas.



No exemplo ao lado, pode verificar-se que as características do objeto em estudo eram impossíveis de representar apenas com duas vistas, sendo necessário recorrer a um terceiro plano de projeção. Desde modo, através da projeção triédrica, é possível fazer uma representação fiel da realidade do objeto.

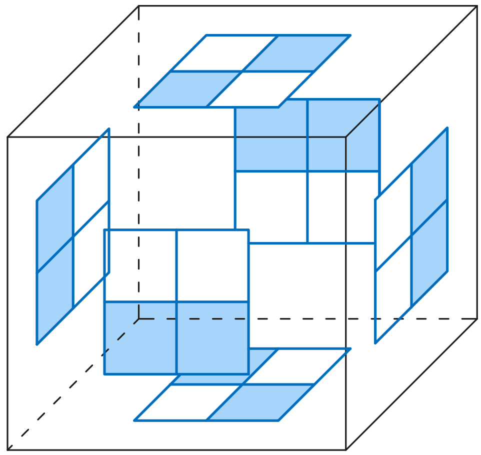
Projeção hexaédrica

A projeção hexaédrica é a projeção em seis planos de projeção, que são paralelos dois a dois entre si. Poder-se-á imaginar um conjunto de três planos de projeção triédrica perpendicular a um outro conjunto, também de três planos, de projeção triédrica, e o resultado será um sistema de projeção hexaédrica, que se traduz num paralelepípedo (ou cubo) que envolve o objeto.



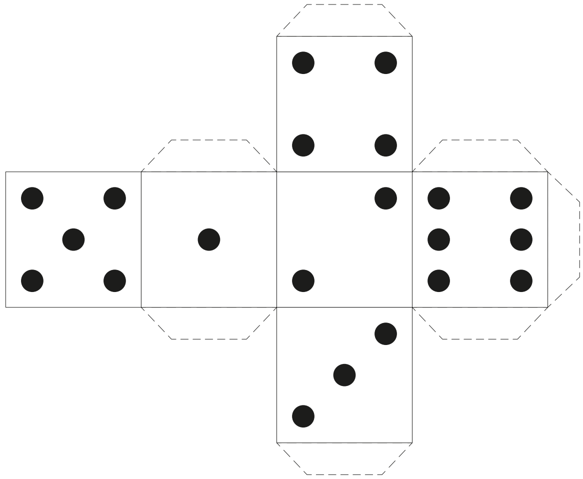
Por essa razão, este método é também conhecido como **método do cubo envolvente**.

Nas imagens, é possível identificar um cubo cujas faces apresentam diferentes padrões, envolvido por um outro cubo, maior, que vê nas suas faces as projeções dos padrões do cubo localizado no seu interior. As faces do cubo envolvente são planos de projeção (seis planos): projeção hexaédrica.

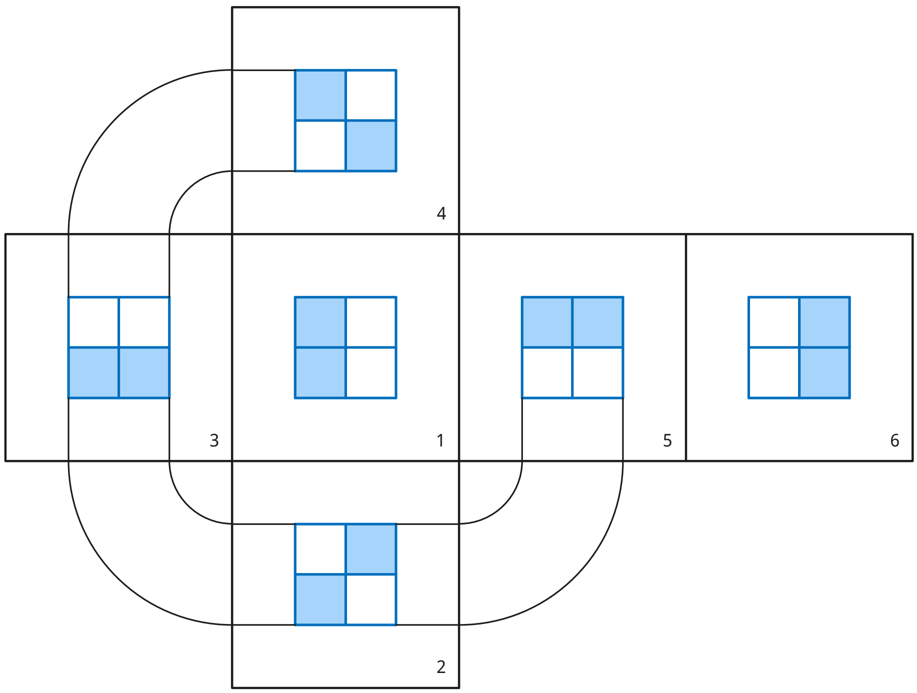


Um exemplo prático de projeção hexaédrica é a planificação de um cubo ou de uma caixa.

No exemplo ao lado, podes observar a planificação de um dado. Com base nesta imagem, a reconstrução mental do dado é imediata, permitindo identificar e imaginar o objeto no seu estado normal (como sólido).



A representação do objeto é obtida através da planificação do cubo, ou seja, rebatendo cinco das seis faces do cubo sobre o plano de uma das suas faces. Este processo é, habitualmente, verificado no quotidiano, quando, por exemplo, montamos uma caixa. A caixa vem com todas as suas faces planificadas, sobre o mesmo plano, e através de sucessivos rebatimentos (dobras) consegue-se construir a mesma. No caso da planificação do cubo, o processo é o mesmo, mas na ordem inversa.



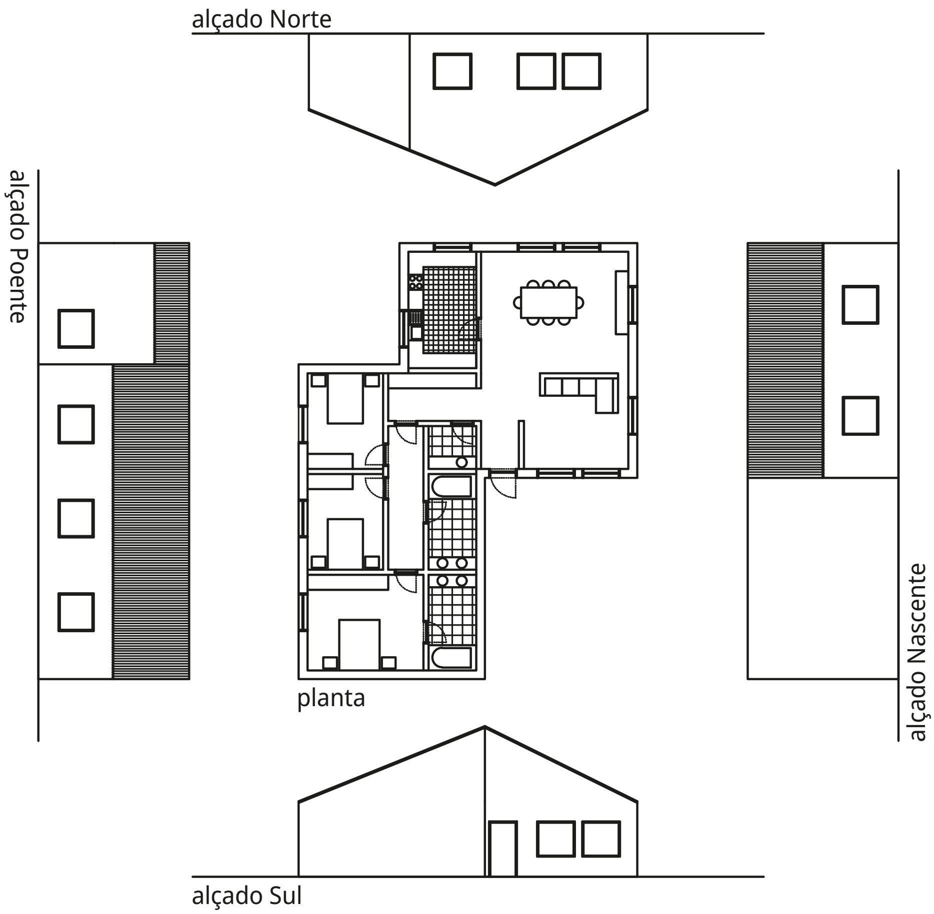
Nota que nem na projeção triédrica, nem na projeção hexaédrica há deformação da realidade – as dimensões e o aspeto não se alteram, qualquer que seja a posição do objeto relativamente aos planos de projeção. Deste modo, estes são sistemas muito utilizados no desenho técnico, no qual é necessário um elevado nível de rigor, uma vez que estes desenhos são, geralmente, utilizados em projetos de engenharia ou arquitetura.

Em oposição, a perspetiva cónica confere um carácter mais sensorial da apreensão do mundo, embora não menos importante, para facilitar a imaginação daquele que vai ser o impacto de um determinado projeto no mundo real.

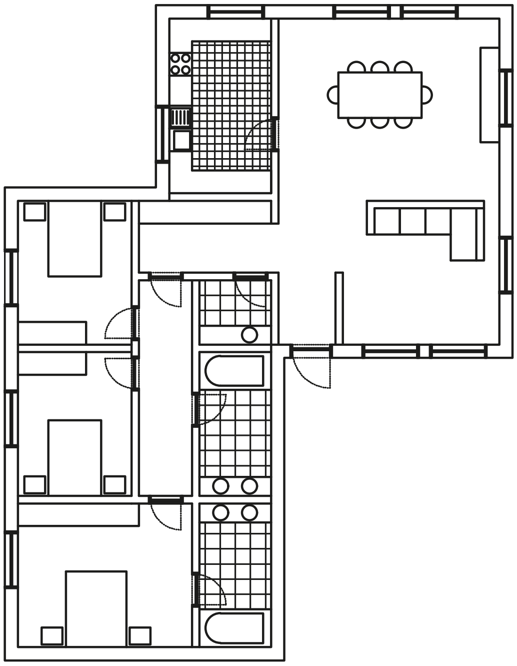
Noções de planta e alçado

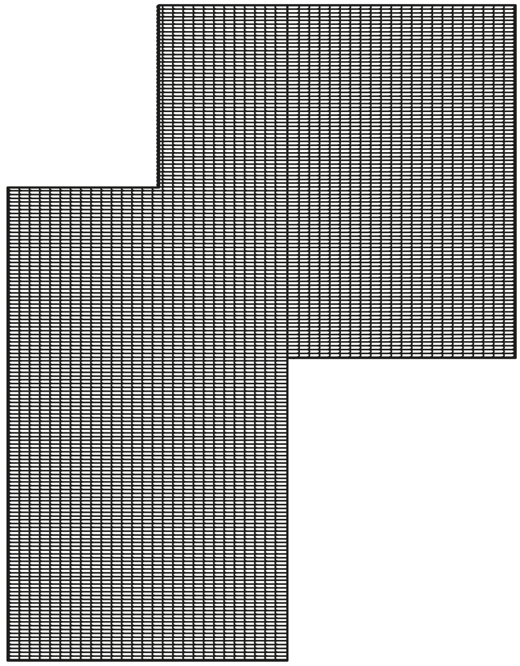
Na arquitetura e na engenharia, é muito comum recorrer-se à múltipla projeção ortogonal para a representação dos edifícios. Na verdade, este é o principal método utilizado nos projetos de arquitetura.

No caso da representação de uma casa, esta é feita através de plantas e alçados, que correspondem a representações bidimensionais, como se pode verificar na imagem.
O sistema de projeção poderá ter tantos planos quantas as representações necessárias para ilustrar o edifício em questão.



Neste caso, a representação é habitualmente complementada com dados numéricos (cotagem), de forma a garantir a informação completa acerca do projeto, uma vez que estes são os elementos a apresentar às autoridades competentes (câmaras municipais e demais entidades), para se obter autorização de construção. Toda a informação que é possível recolher com este método permite, com relativa facilidade, fazer uma reconstrução mental do edifício, imaginando-o de forma muito fiel.


planta de piso


planta de cobertura

A planta é uma vista horizontal, que pode, ou não, intersetar o objeto (neste caso, o edifício). Quando o interseta, permite visualizar o interior da habitação e a sua organização espacial. Quando não o interseta, permite visualizar a sua cobertura: se é feita com telha, se é plana ou inclinada, etc. Os alçados são vistas que não intersetam o edifício e que permitem perceber a altura e o desenho do edifício, a localização de janelas e portas exteriores, entre outras características. Estas vistas verticais são projetadas em planos perpendiculares aos planos que contêm as vistas em planta. Os cortes são projeções verticais, mas que intersetam o edifício e permitem conhecer com mais detalhe o edifício no seu todo, evidenciando pormenores que não seriam visíveis apenas com recurso a plantas e alçados (nomeadamente: pé-direito, escadas interiores, etc.).

Para praticar

1. Imagina uma pequena casa e representa, à mão livre, a sua planta, os seus alçados, um corte e uma planta de cobertura. Identifica cada uma das representações.

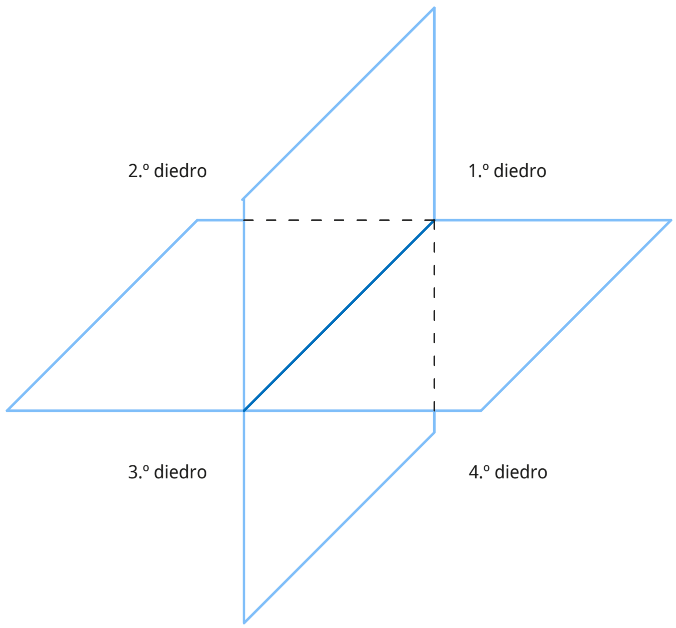
2. Em grupo, recolhe os dados que consideras necessários e desenha a planta da tua sala de aula à escala 1:50. Compara a planta do teu grupo com a dos teus colegas e verifica se todas se assemelham.

Método europeu e método americano

Na projeção hexaédrica, existem dois métodos para a sua representação. Estes diferem, essencialmente, na forma como o cubo envolvente é planificado; na posição sequencial de objeto, plano e observador, e, consequentemente, na organização das vistas.

A opção por cada um destes métodos está relacionada com fatores geográficos. Num mundo tão globalizado como o nosso, é de extrema importância conhecer ambos os métodos.

O **método europeu** e o **método americano** são formas de representar o mesmo objeto, sob o mesmo sistema de projeção. No entanto, há ligeiras diferenças que serão analisadas.



Por convenção, a representação que consta da página 68 foi feita tendo em conta o método europeu, uma vez que é o mais utilizado. Contudo, os dois métodos são considerados e utilizados em todo o mundo, sendo essencial conhecer as características de cada um.

Os métodos diferem, essencialmente, na posição do plano de projeção face ao objeto.

No método europeu, o plano está localizado posteriormente ao objeto, enquanto no método americano o plano está localizado anteriormente ao objeto.

Resumindo

- **Método europeu** – projeção pelo 1.º diedro.
- **Método americano** – projeção pelo 3.º diedro.

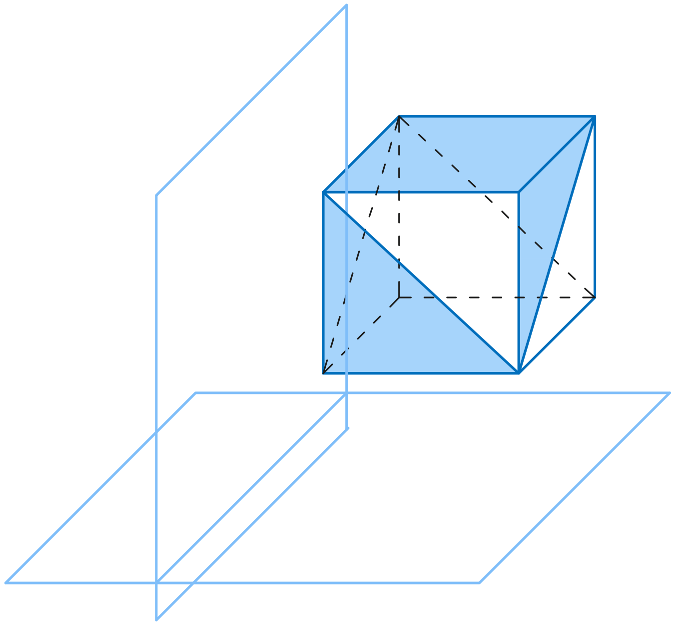
No continente europeu e no Brasil, o método adotado é o método europeu. Contudo, em representações oriundas dos Estados Unidos, Reino Unido, Japão, entre outros, é utilizado o método americano, sendo, por isso, importante conhecer ambos e as suas especificidades.

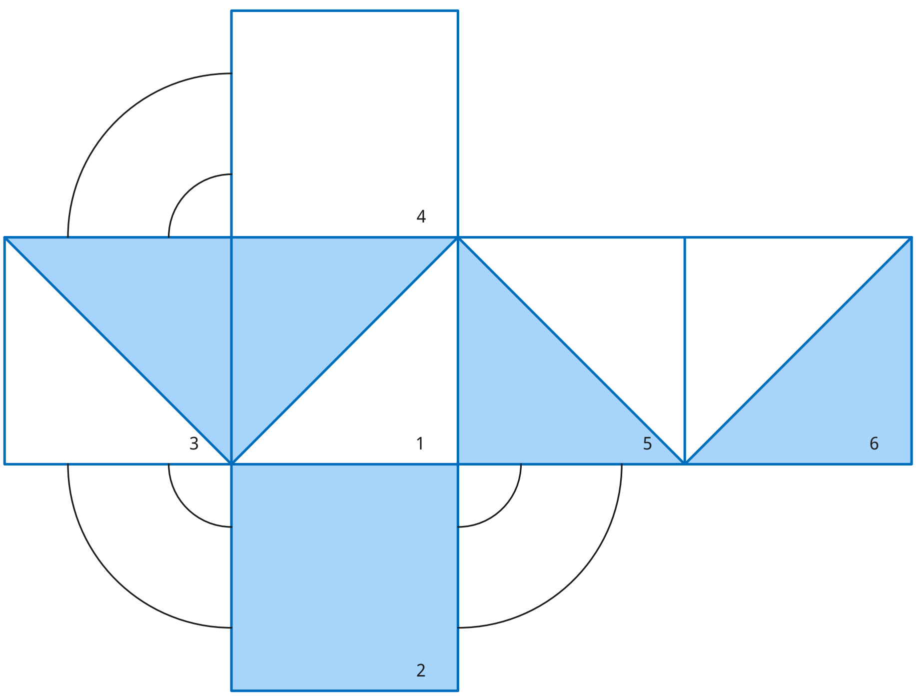
Método europeu

No método europeu, a projeção é feita no 1.º diedro, isto é: o objeto encontra-se entre o observador e o plano de projeção. Neste caso, a vista principal é a vista sobre o plano frontal do diedro e é sobre este que se planifica o cubo envolvente (rebatimento dos restantes cinco planos de projeção).

Conforme podemos ver na imagem abaixo, esta sequência origina uma determinada hierarquia de vistas:

1. Alçado principal (ou vista principal);
2. Planta (ou vista superior);
3. Alçado lateral direito
   (ou vista lateral direita);
4. Vista inferior;
5. Alçado lateral esquerdo
   (ou vista lateral esquerda);
6. Alçado posterior (vista posterior).





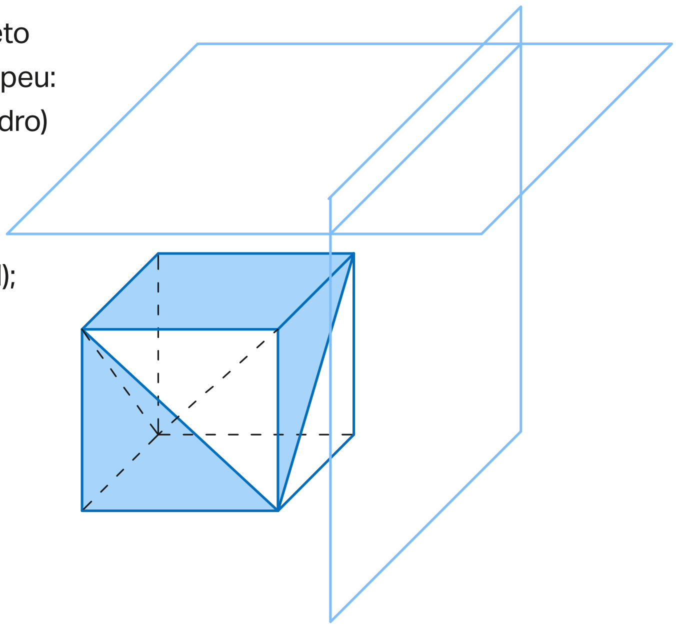
Método americano

No método americano, o plano de projeção está entre o objeto e o observador. Assim, será como se o objeto estivesse envolvido por uma caixa de vidro. A sua projeção é feita no 3.° diedro, o que obriga a que o plano frontal se imponha entre o observador e o objeto em estudo. Neste caso, o rebatimento dos restantes cinco planos, que não o plano frontal, é feito sobre este, tal como no método europeu.

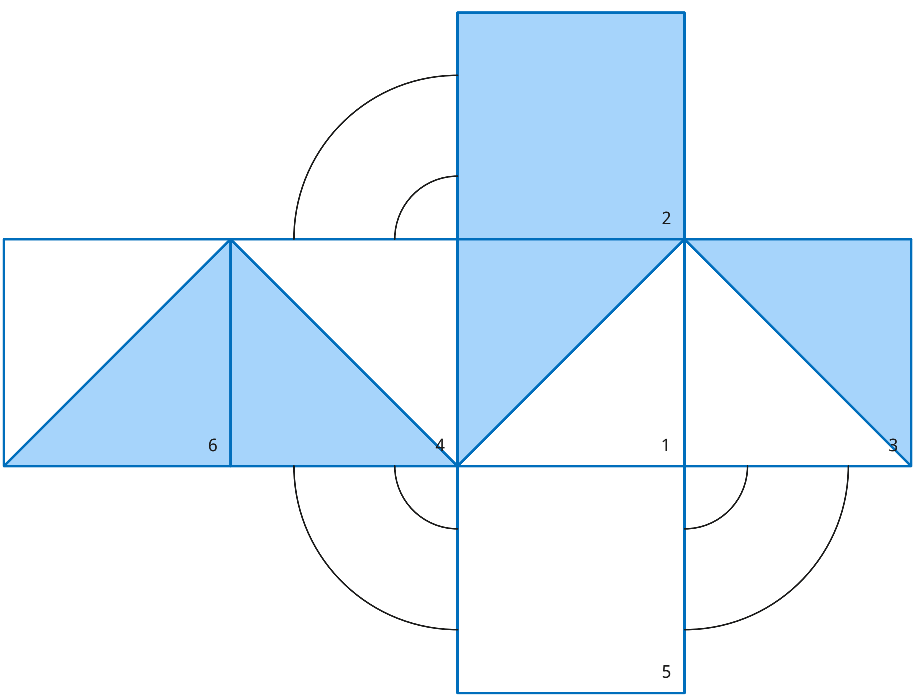
Manual Digital

Interatividade
Método europeu e método americano

Contudo, a diferente posição do objeto no espaço geométrico (método europeu: 1.° diedro; método americano: 3.° diedro) originará diferente distribuição e hierarquização das vistas:



1. Alçado principal (ou vista principal);
2. Planta (ou vista superior);
3. Alçado lateral direito (ou vista lateral direita);
4. Alçado lateral esquerdo (ou vista lateral esquerda);
5. Vista inferior;
6. Alçado posterior (vista posterior).



Para praticar

Assinala com verdadeiro (V) ou falso (F) cada uma das afirmações seguintes:

1. Numa projeção triédrica, a representação de um dado objeto é feita através de três vistas, projetadas em três planos de projeção, ortogonais entre si.
2. Na projeção triédrica, a representação obtida do objeto é uma representação tridimensional.
3. O método de projeção triédrica é, também, conhecido como método do cubo envolvente.
4. Na projeção hexaédrica, o objeto é representado tridimensionalmente segundo seis vistas.
5. A planificação de um cubo ilustra uma projeção hexaédrica.
6. Dá-se o nome de planta a uma representação frontal de um dado objeto ou edifício.
7. Plantas e alçados são as representações mais comuns num projeto de arquitetura.
8. Na projeção hexaédrica existem dois métodos distintos: o método europeu e o método americano.
9. Em projeção hexaédrica, no método europeu, a projeção do objeto dá-se a partir do 3.° diedro.
10. Em ambos os métodos (europeu e americano), na hierarquia das suas vistas, a primeira é sempre a planta.

4

Sistema axonométrico

Axonometria ortogonal

Axonometria oblíqua

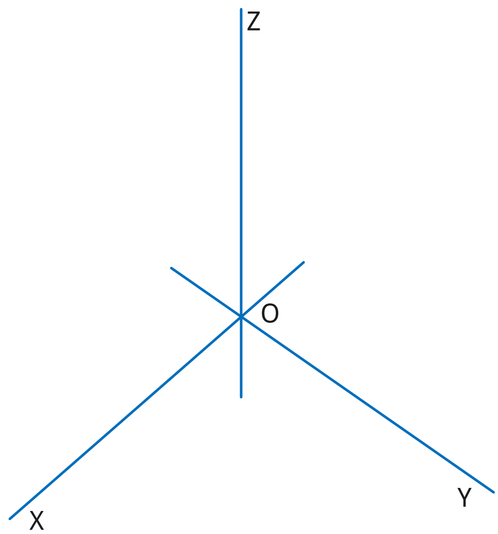
Axonometria ortogonal:
isometria, dimetria e trimetria

Axonometrias oblíquas:
cavaleira e planométrica

Sistema axonométrico

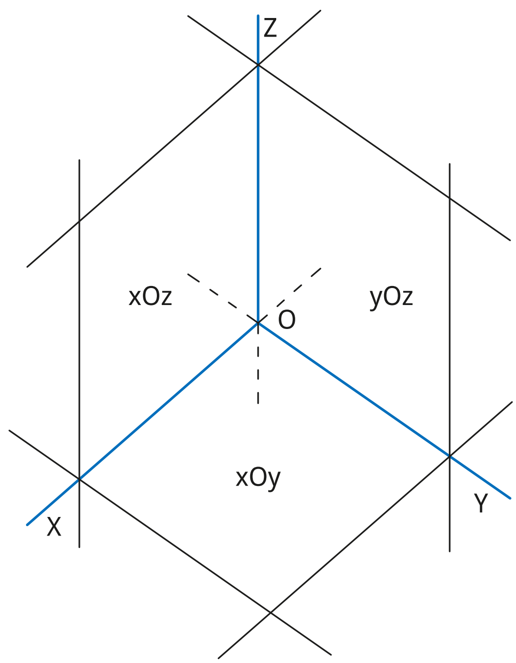
O sistema axonométrico é um sistema de representação mais intuitivo do que os restantes sistemas anteriormente abordados.

Na verdade, o sistema de representação axonométrica baseia-se numa só vista do objeto, embora mais fiel à sua realidade, designada por **perspetiva**.



Assim, a representação é feita através da projeção sobre o plano axonométrico dos três eixos: **x**, **y** e **z**. Estes são eixos coordenados, perpendiculares entre si dois a dois, contendo um ponto em comum: o ponto de origem (**O**). Estes eixos definem as três dimensões do objeto a representar e formam três planos coordenados: **xOy**, **xOz** e **yOz**.

Uma **perspetiva axonométrica** pode ser **oblíqua** ou **ortogonal**. Esta condição depende da posição do referencial (**xyz**) face ao plano axonométrico.

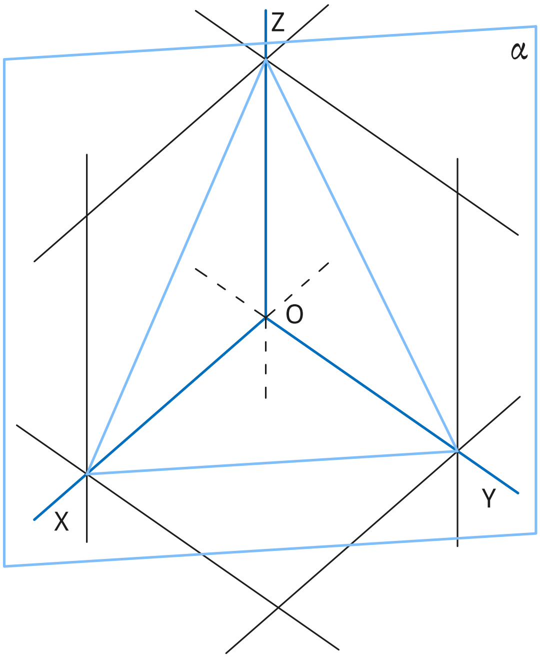


O **plano axonométrico** é o plano de projeção (ou quadro) sobre o qual se projeta o objeto. Este pode ser **oblíquo** aos planos coordenados ou **paralelo** a um destes e, consequentemente, perpendicular aos dois restantes. Numa **axonometria ortogonal**, o **plano de projeção é oblíquo** aos três planos coordenados. Já numa a**xonometria oblíqua (ou clinogonal)**, o **plano de projeção** é obrigatoriamente **paralelo** a um dos planos coordenados.

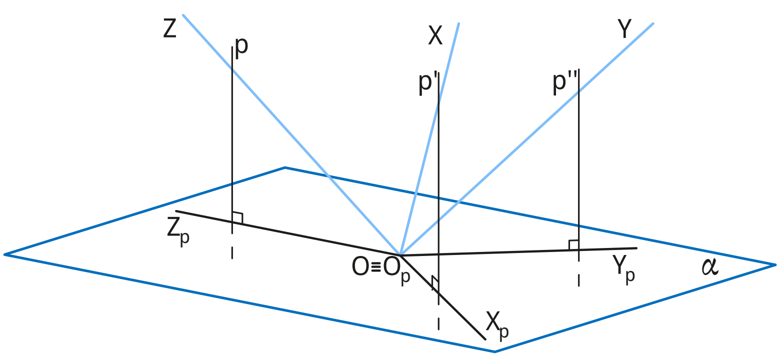
Em suma, uma perspetiva axonométrica assemelha-se a uma perspetiva cónica, representando um dado objeto de forma intuitiva e próxima da realidade tridimensional. Contudo, a diferença entre ambos os sistemas reside no facto de, no sistema axonométrico, a projeção do objeto no quadro não variar com a distância entre este e o ponto de origem dos eixos coordenados.

Axonometria ortogonal

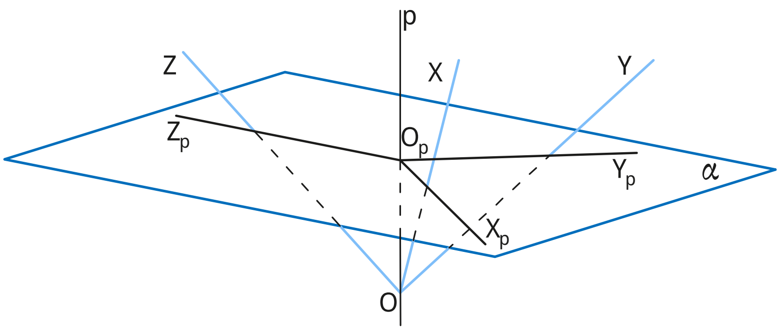
Numa axonometria ortogonal, o plano de projeção é sempre oblíquo aos planos coordenados. Contudo, as retas projetantes são ortogonais ao quadro (plano de projeção).



Observando a figura ao lado, pode verificar-se que o plano axonométrico α é oblíquo aos três planos coordenados que compõem o triedro. Neste caso, o plano interseta os três planos coordenados segundo três retas. No entanto, é comum que o plano axonométrico contenha o ponto **O** (ponto comum aos três planos coordenados (ponto de origem do referencial), como é possível observar na figura ao centro.

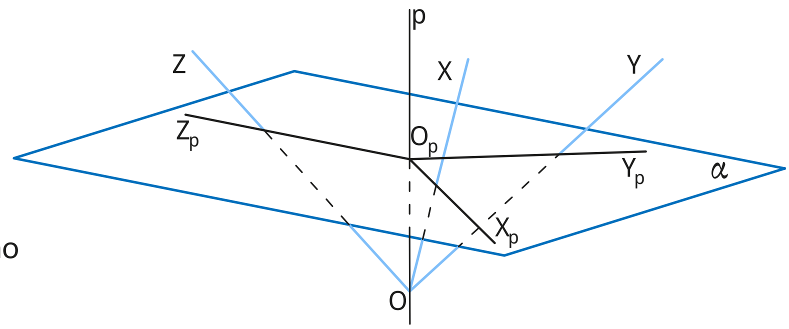


Quando esta realidade é transportada para o papel, recorre-se a uma rotação, para que o plano de projeção fique numa posição horizontal. Assim, a projeção do triedro e de quaisquer elementos que dele constem é feita através de retas projetantes (**p**, **p'** e **p''**) perpendiculares ao plano de projeção. Neste caso, serão retas verticais, uma vez que o plano de projeção se encontra na posição horizontal.



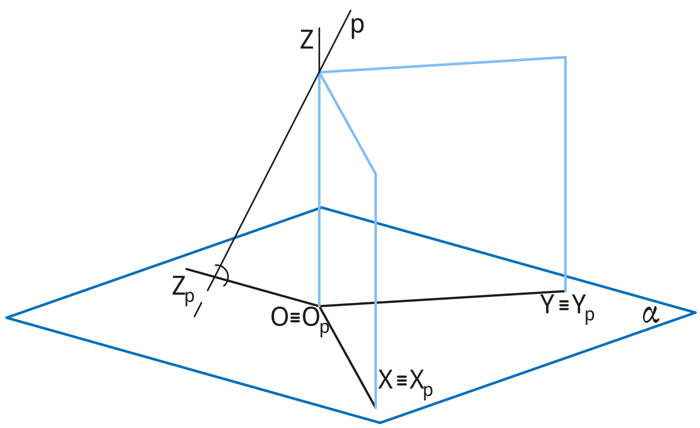
A ortogonalidade entre as retas projetantes e o plano de projeção determina que se trata de uma axonometria ortogonal.

Observando os dois exemplos, pode verificar-se que, apesar da posição do plano de projeção (contendo ou não a origem do referencial), a representação obtida não sofre qualquer alteração. Isto permite concluir que o resultado da projeção não varia com a posição relativa do observador ou do plano de projeção, ao invés da perspetiva cónica.

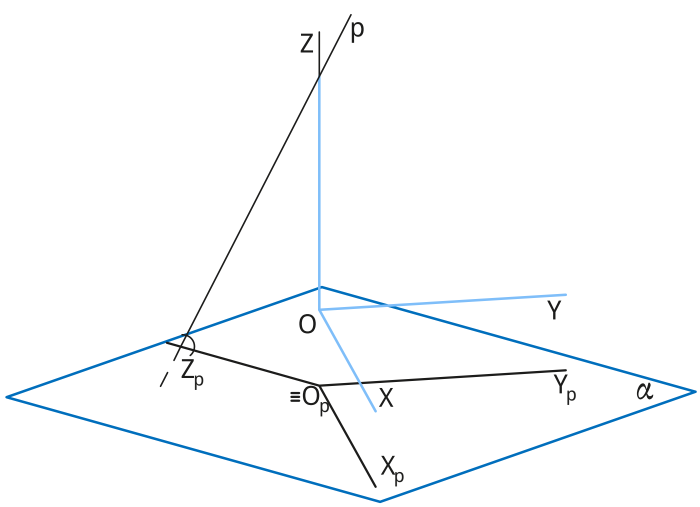


Axonometria oblíqua

Numa axonometria oblíqua, o plano de projeção contém um dos planos coordenados, sendo, necessariamente, ortogonal aos restantes.



A projeção dos elementos contidos no triedro é feita com recurso a retas oblíquas ao plano de projeção, como ilustrado na imagem: reta **p**. Isto deve-se ao facto de se perder a terceira dimensão, caso as retas projetantes sejam perpendiculares ao plano de projeção, uma vez que resultariam num único ponto.



Tal como numa axonometria ortogonal, a posição do plano de projeção não é fixa, podendo este ser coincidente com um dos planos de coordenadas, ou somente paralelo a um destes, não havendo alterações no resultado final da projeção.

Contudo, embora nas axonometrias oblíquas a projeção não sofra alterações se o plano axonométrico for coincidente ou paralelo ao plano coordenado, haverá, sim, alterações, dependendo do plano coordenado em questão.

Na verdade, o plano de projeção pode ser paralelo ou coincidente ao plano coordenado **xOy**, o que dá origem a uma axonometria planométrica (ou militar); ou aos planos **xOz** ou **yOz**, dando origem a uma axonometria cavaleira.

Resumidamente, uma vez que a representação axonométrica é feita sobre o papel, considera-se que o plano axonométrico deve estar sempre na posição horizontal.
Para isso, recorre-se à rotação necessária do sistema de projeção, para que tal resulte na horizontalidade do plano de projeção, independentemente da sua posição face aos planos coordenados e do tipo de axonometria em questão.

Axonometria ortogonal

Plano axonométrico **oblíquo** aos três planos coordenados;

Retas projetantes **perpendiculares** ao plano de projeção.

Axonometria oblíqua

Plano axonométrico **paralelo** a um dos planos coordenados;

Retas projetantes **oblíquas** ao plano de projeção.

Axonometria ortogonal: isometria, dimetria e trimetria

No caso das axonometrias ortogonais, estas podem dividir-se em três tipos: **isometrias**, **dimetrias** e **trimetrias**. Estas três variantes resultam da diferente posição que o plano de projeção pode ter relativamente aos planos coordenados.

Tal como estudado anteriormente, numa axonometria ortogonal, o plano de projeção é sempre oblíquo aos planos coordenados. Contudo, dentro dessa obliquidade, há várias inclinações que poderão influenciar o tipo de axonometria em questão.

Isometria

Os ângulos entre os eixos coordenados são **iguais**.

Dimetria

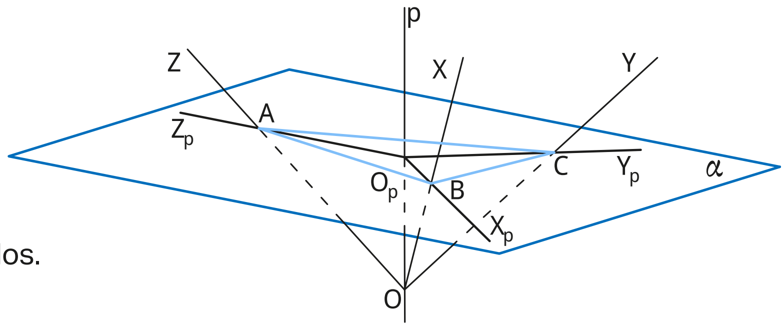
Dois ângulos entre os eixos coordenados são **iguais**, sendo o **outro diferente**.

Trimetria

O três ângulos entre os eixos coordenados são **diferentes**.

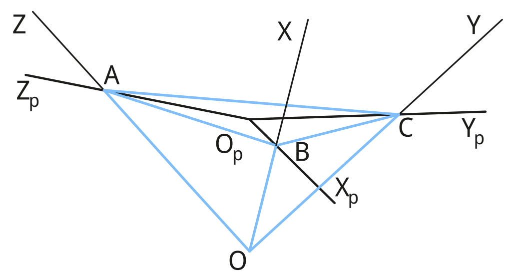
Triângulo fundamental

Uma **pirâmide axonométrica** é uma pirâmide com vértice na origem do referencial (ponto **O**), cuja base é o triângulo resultante da união dos três pontos de interseção do plano de projeção com cada um dos eixos coordenados. A esse triângulo dá-se o nome de **triângulo fundamental**.

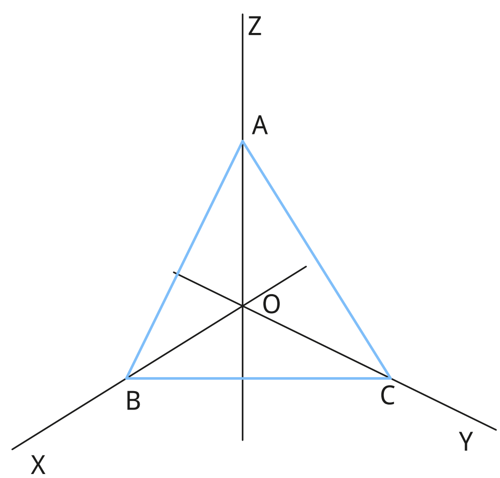


Neste caso, os pontos **A**, **B** e **C** são os pontos de interseção do plano de projeção (plano axonométrico) com cada um dos eixos coordenados.

A união da projeção do ponto **O** com a projeção de cada um dos pontos **A**, **B** e **C** resulta na perspetiva de cada um dos eixos coordenados. Ou seja: a perspetiva de cada um dos eixos coordenados é a reta de interseção de cada plano projetante de um eixo com o plano de projeção (plano axonométrico), como se pode verificar na figura ao lado.



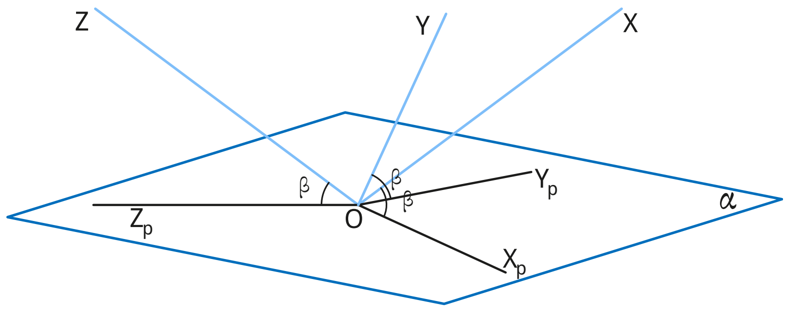
Uma vez que o plano projetante de cada eixo é simultaneamente perpendicular ao plano axonométrico e ao plano coordenado constituído pelos dois eixos restantes, e que cada um dos lados do triângulo fundamental está contido na reta de interseção do plano axonométrico com cada um dos planos coordenados, pode atribuir-se o princípio da ortogonalidade. Assim, é possível concluir que a perspetiva de cada eixo é perpendicular ao lado oposto do **triângulo fundamental**.



Com base neste princípio, é possível, através do **triângulo fundamental**, chegar à representação dos eixos coordenados no plano axonométrico.

Perspetiva isométrica (axonometria isométrica)

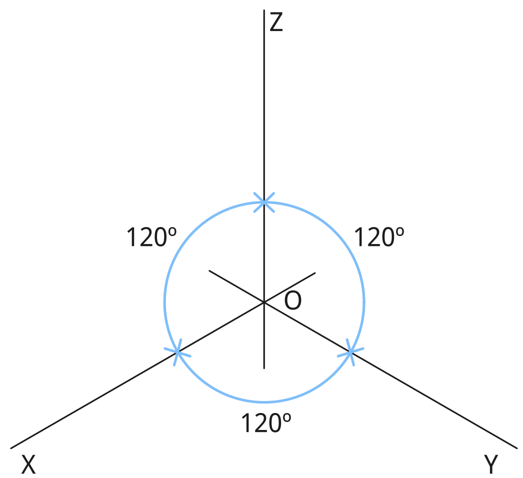
Numa perspetiva isométrica, os três eixos de coordenadas formam o mesmo ângulo relativamente ao plano axonométrico, resultando, quando se trata do triângulo fundamental, em três pontos (vértices do triângulo) equidistantes do vértice do triedro (ponto **O**, origem do referencial).



Uma vez que o ponto **O**, ou a sua projeção, correspondem ao centro geométrico do triângulo fundamental, trata-se de um triângulo equilátero, em que todos os seus lados são iguais, bem como os seus ângulos internos.

Neste caso, as perspetivas dos eixos axonométricos formam, entre si, ângulos iguais.

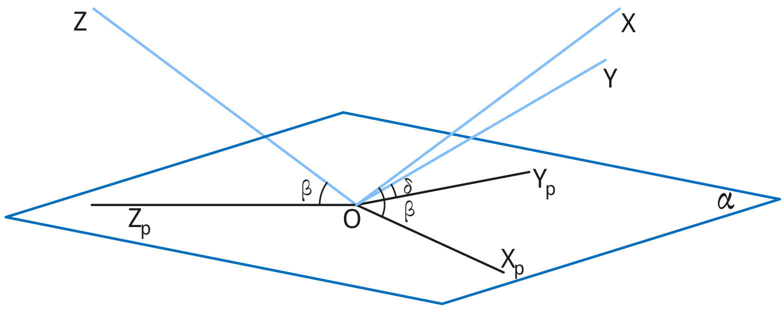
Isometria significa "mesma medida". Por isso, quando os ângulos entre as perspetivas dos eixos coordenados são iguais, estamos perante uma **perspetiva isométrica**.



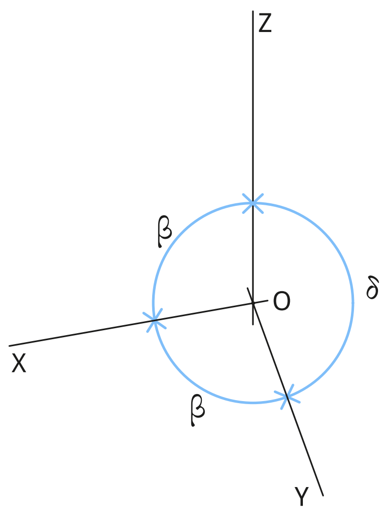
Nota que, sendo os três ângulos iguais, estes assumem uma amplitude de 120°, perfazendo um total de 360°. Numa isometria, o ângulo entre eixos é sempre o mesmo e são sempre iguais entre si.

Perspetiva dimétrica (axonometria dimétrica)

Numa perspetiva dimétrica, apenas dois dos três ângulos são iguais, sendo o terceiro diferente. Deste modo, com base no triângulo fundamental, pode verificar-se que dois dos pontos são equidistantes do vértice do triedro, mas o terceiro não. Esta condição resulta da posição do plano axonométrico face aos planos coordenados.



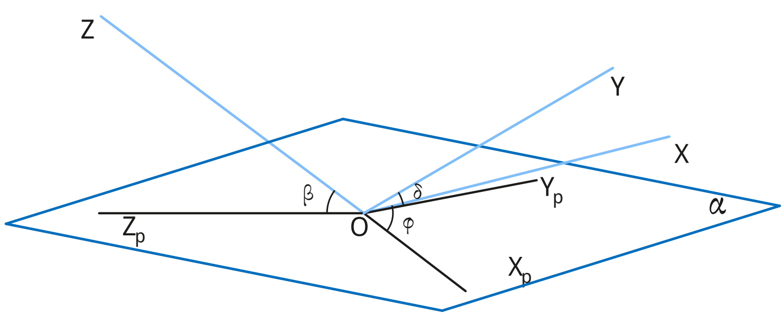
Neste caso, nenhum dos ângulos pode apresentar uma amplitude fixa. Ou seja: se o ângulo entre **x** e **z** for de 100° e este for igual ao ângulo formado por **y** e **z**, o ângulo diferente, formado por **x** e **y**, terá 160°. No entanto, se o ângulo entre **x** e **y** for de 140°, os dois restantes serão, obrigatoriamente, de 110°. Em qualquer caso, a soma dos ângulos deverá fazer 360°.

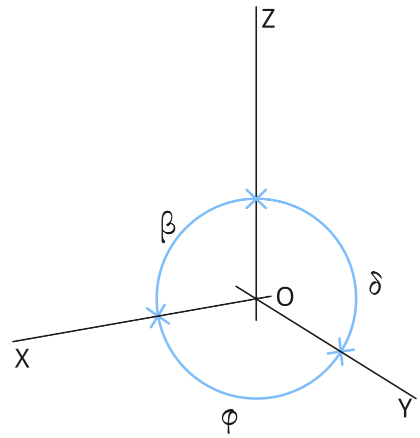


No que respeita ao triângulo fundamental, este apresenta-se na forma de um **triângulo isósceles**.

Perspetiva trimétrica (axonometria trimétrica)

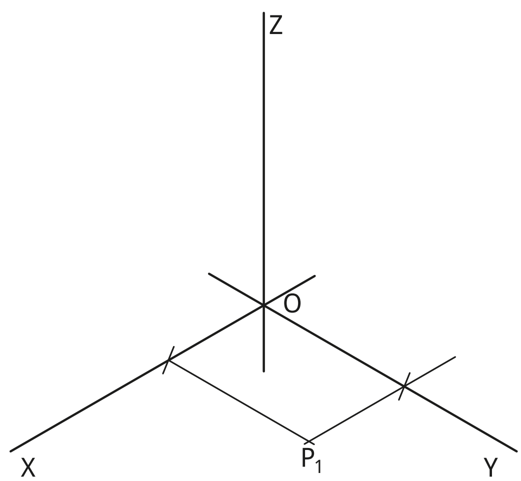
Numa perspetiva trimétrica, todos os ângulos entre as projeções dos eixos coordenados são diferentes, e, consequentemente, os vértices do triângulo fundamental estão a diferentes distâncias face ao ponto **O**.





Assim, além de se tratar de um **triângulo escaleno**, os eixos coordenados representados no plano axonométrico também formam ângulos diferentes entre si, havendo três amplitudes diferentes, dependentes entre si, de forma a completar 360°. Ou seja, dada a amplitude de dois dos ângulos, é possível determinar a amplitude do terceiro ângulo.

Ponto na axonometria ortogonal



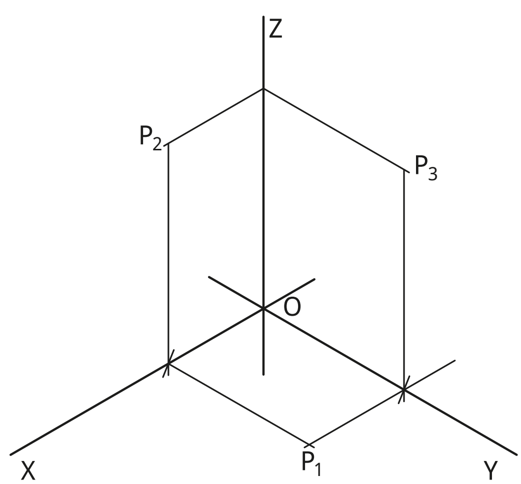
Sendo a axonometria um sistema de representação tridimensional, torna-se claro que cada ponto a representar neste sistema é definido por três dimensões. A cada uma das dimensões são atribuídos os seguintes conceitos: **abcissa**, **afastamento** e **cota**.

Cada uma destas dimensões é medida em cada um dos eixos coordenados:

Abcissa: eixo **x**;

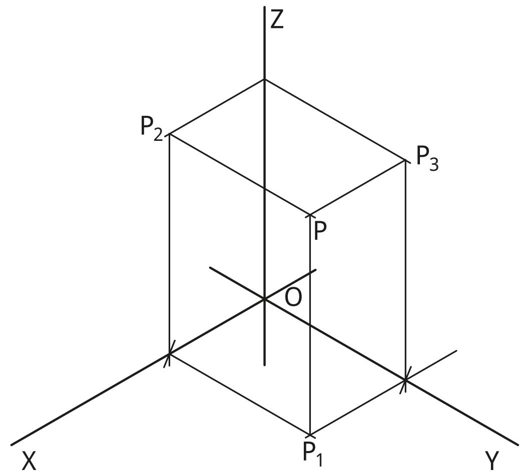
Afastamento: eixo **y**;

Cota: eixo **z**.



Neste caso, o paralelogramo contido no plano **xOy** tem nos seus lados a abcissa e o afastamento do ponto **P**. Já o paralelogramo contido no plano **xOz** tem nos seus lados a abcissa e a cota desse mesmo ponto. Considerando que se trata de um paralelepípedo que contém os vértices **O** e **P**, considera-se que os paralelogramos contidos nos planos coordenados correspondem às perspetivas das faces do paralelepípedo.

Tendo as perspetivas das três projeções do ponto **P**, é possível chegar à perspetiva do próprio ponto.

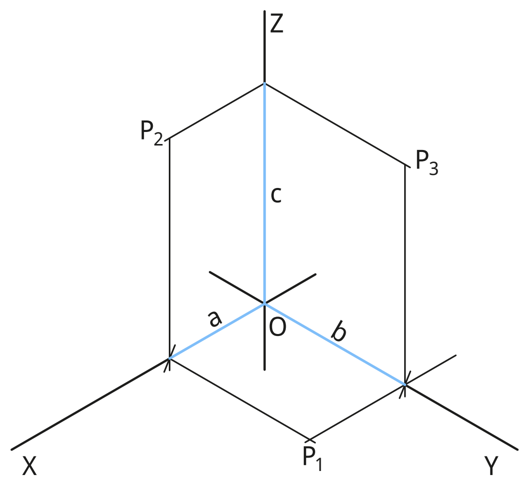


Por **P$_1$**, traça-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **P**, paralela à perspetiva do eixo **z**.

Por **P$_2$**, traça-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **P**, paralela à perspetiva do eixo **y**.

Por **P$_3$**, traça-se a perspetiva da reta projetante lateral, paralela à perspetiva do eixo **x**.

O ponto de concorrência das perspetivas das três retas projetantes do ponto **P** resulta na perspetiva axonométrica do próprio ponto.



No entanto, é importante salientar que nenhuma das medidas designadas por **a**, **b** e **c** corresponde às verdadeiras coordenadas do ponto **P**. Isto deve-se ao facto de, neste caso, o plano axonométrico não ser paralelo a nenhum dos planos coordenados, e, por isso, as coordenadas não se projetarem em **verdadeira grandeza**.

A esta condição dá-se o nome de **coeficiente de redução** ou **coeficiente de deformação**. Estes coeficientes variam conforme o ângulo que os eixos coordenados formam com o plano axonométrico. Deste modo, numa isometria, os coeficientes de redução são iguais nas três coordenadas, enquanto, na trimetria, são todos diferentes.

Os coeficientes de redução podem ser determinados geometricamente ou através do cálculo matemático, e existem algumas predefinições, para os casos mais recorrentes. Por exemplo, numa isometria, em que os ângulos entre eixos são de 120°, tem-se um coeficiente de redução de 0,81. Isto significa que, em cada coordenada, devemos multiplicar esse valor por 0,81 e tem-se a medida, em perspetiva, das diferentes coordenadas de determinado ponto.

Por exemplo:
Considera o ponto **A**, cujas coordenadas (abcissa, afastamento e cota) são as seguintes: (4; 4; 3). Multiplicando essas coordenadas pelo seu coeficiente de redução (considerando uma axonometria isométrica), tem-se:

$4 \times 0{,}81 = 3{,}24$

$4 \times 0{,}81 = 3{,}24$

$3 \times 0{,}81 = 2{,}43$

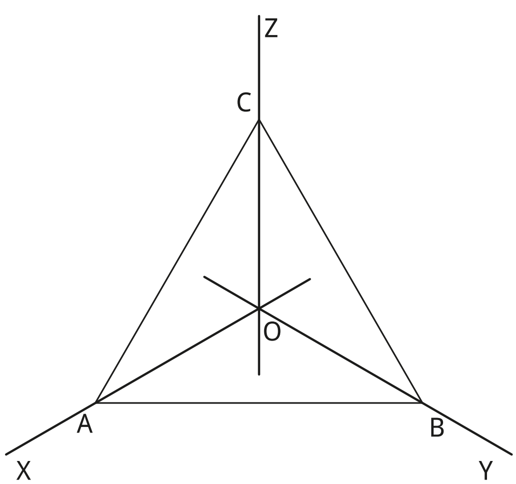
Conclui-se que, em perspetiva, as coordenadas do ponto **A** são: (3,24; 3,24; 2,43), respetivamente, **abcissa**, **afastamento** e **cota**.

Esta é a determinação de coeficientes de redução sob a forma matemática. No entanto, o mesmo poderá ser determinado pela via gráfica, através do rebatimento dos planos projetantes dos eixos.

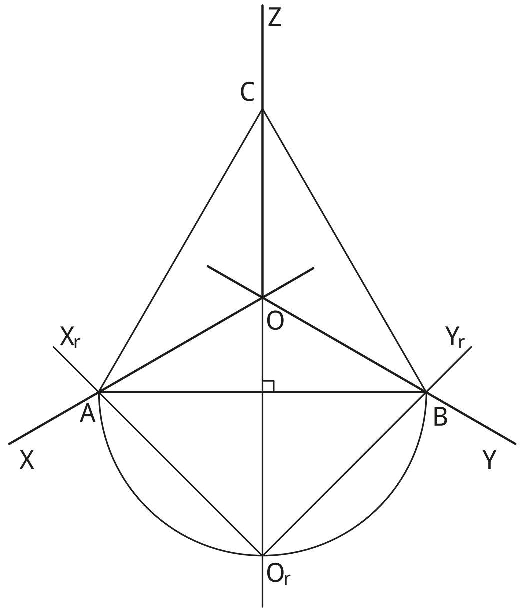
Determinação de pontos pelas suas coordenadas – isometrias

Apesar de, nas axonometrias ortogonais, existirem três variantes: isometrias, dimetrias e trimetrias, como já foi analisado anteriormente, neste módulo apenas será aprofundado o estudo das isometrias. Assim, embora o coeficiente de redução numa isometria esteja fixado num só valor (0,81), estudar-se-á a forma de determinar a verdadeira grandeza, ou a projeção de determinada coordenada, através de um método gráfico, garantindo a capacidade de solucionar problemas de representação apenas com recurso ao desenho.

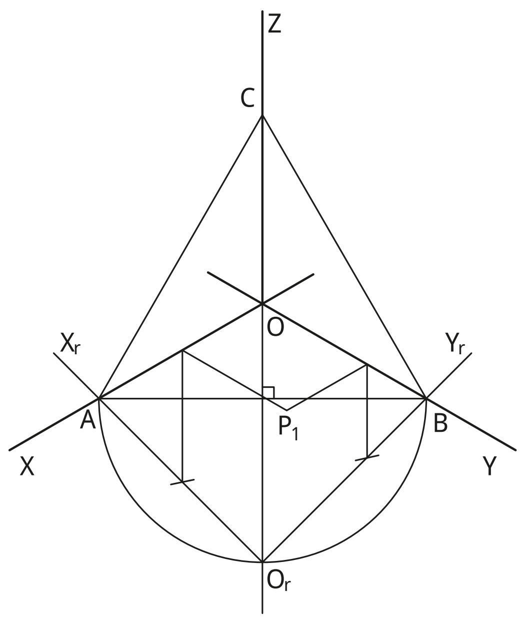
Observando o triângulo [**ABC**], e tratando-se de um triângulo fundamental, este é paralelo ao plano de axonométrico. Deste modo, quaisquer medidas constantes no segmentos [**AB**], [**BC**] e [**AC**] estão em verdadeira grandeza. Como se trata de uma isometria, bastaria rebater um dos planos coordenados, pois o coeficiente será igual em todos os eixos. No entanto, como se pretende usar métodos exclusivamente gráficos, será necessário obter o rebatimento dos três eixos coordenados. Para isto, basta rebater dois dos planos coordenados, uma vez que cada plano contém dois eixos.



Neste caso, opta-se, primeiro, pelo rebatimento do plano coordenado **xOy**. Isto permitirá, no mesmo processo, rebater dois eixos coordenados (eixo **x** e eixo **y**), usando como eixo de rebatimento (charneira) o lado [**AB**] do triângulo fundamental.



Ao determinar o ponto médio do segmento [**AB**], traça-se uma semicircunferência, com centro nesse ponto médio e com os pontos **A** e **B** nos seus extremos. Ao traçar uma perpendicular ao segmento [**AB**] que contenha o ponto **O**, encontramos **O**$_r$, que, quando unido a **A** e a **B**, dá origem, simultaneamente, ao rebatimento do eixo **x** e ao rebatimento do eixo **y**. Assim, obtendo **x**$_r$ e **y**$_r$, tem-se os eixos coordenados em verdadeira grandeza, sendo possível assinalar as verdadeiras coordenadas de um ponto.

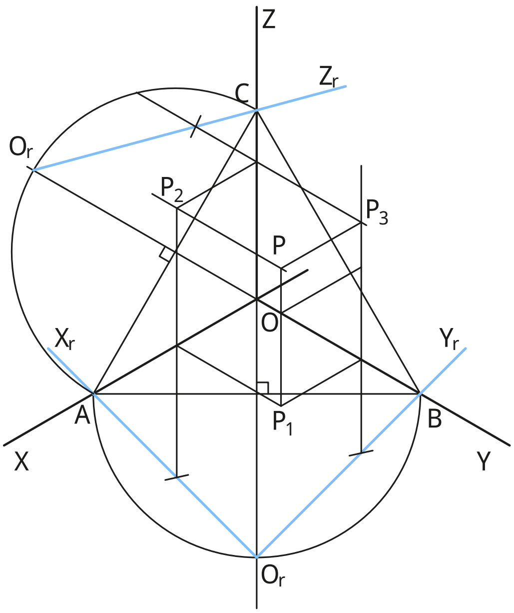


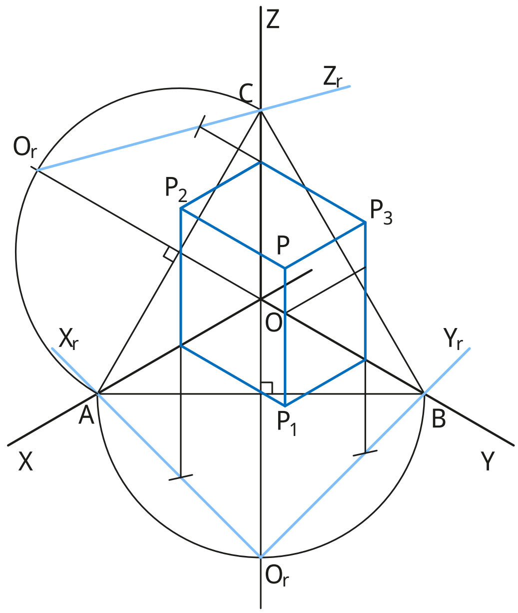
Neste caso, para determinar a perspetiva do ponto **A**, cujas coordenadas são (3, 4, 6), é possível marcar diretamente em **x**$_r$ o valor da abcissa (3) e em **y**$_r$ o valor do afastamento (4). Ambas as medidas deverão ser marcadas a partir de **O**$_r$. Posto isto, deverá ser traçada uma perpendicular à charneira que passe pela marcação das coordenadas. Quando esta perpendicular (que é paralela à projeção do eixo **z**) interseta as projeções dos eixos **x** e **y**, tem-se a marcação dessas coordenadas em perspetiva. Assim, chega-se à marcação da abcissa e do afastamento, em perspetiva, nos respetivos eixos, ficando a faltar a marcação da cota.

Para isto, basta repetir o processo, mas rebatendo um dos planos coordenados que contenha o eixo **z**. Ao optar-se, por exemplo, pelo rebatimento do plano **xz** sobre o plano axonométrico, usar-se-á como charneira o lado [**AC**] do triângulo fundamental, e o processo é idêntico ao praticado anteriormente, mas com o segmento [**AC**] como eixo, conforme representado no desenho.

Manual Digital

Interatividade
Representação de figura plana em axonometria isométrica





Para praticar

1 Representa, em axonometria isométrica, o ponto **A** segundo as suas coordenadas, sabendo que: **A** (3; 3; 5).

2 Representa, sobre o desenho anterior, o ponto **B** (3; 6; 5).

3 Sabendo que o segmento [**AB**] pertence a um quadrado cujo lado oposto ao segmento traçado dista 2 cm do plano **xOy**, representa o quadrado em axonometria isométrica.

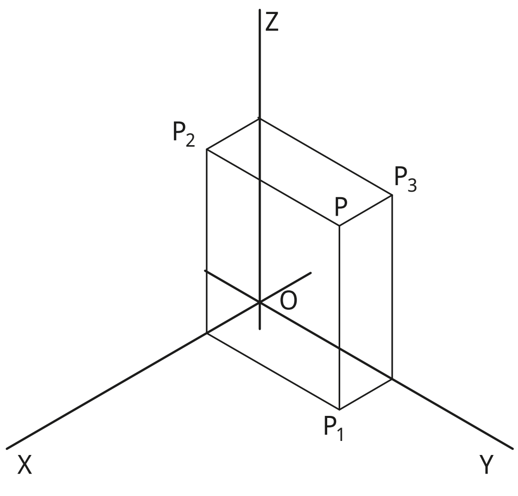
Perspetivas isométricas normalizadas

Numa perspetiva isométrica, como já foi referido, os ângulos entre eixos são todos iguais, devendo perfazer 360°. Deste modo, sabe-se que o ângulo entre eixos será de 120°.
Tal como os ângulos estão preestabelecidos, também os coeficientes de redução o estão, fixando-se em 0,81 (ver página 85).

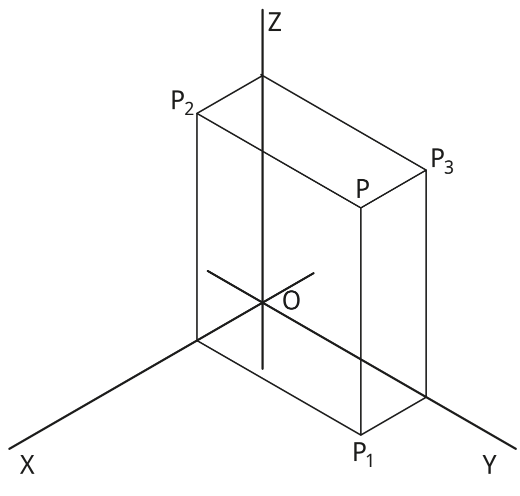
Porém, sendo a perspetiva axonométrica uma ferramenta muito útil na representação tridimensional, proporcionando uma imagem muito intuitiva e de fácil compreensão, surgem as perspetivas normalizadas.

Uma perspetiva isométrica normalizada é uma perspetiva cujo processo foi simplificado, de forma a torná-lo mais rápido e eficiente, facilitando, inclusive, o desenho à mão livre para uma rápida comunicação gráfica. Deste modo, o coeficiente de redução é arredondado às unidades, e, neste caso, a 1. Isto significa que numa perspetiva isométrica normalizada não há deformação e que as coordenadas podem ser marcadas diretamente nos eixos **x**, **y** e **z**.

Observa os dois exemplos de representação do ponto **P** (2; 5; 6) em axonometria isométrica e em axonometria isométrica normalizada.



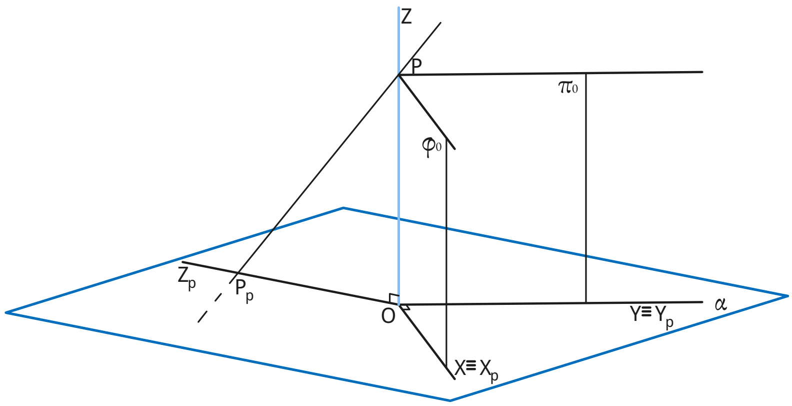
Perspetiva isométrica



Perspetiva isométrica normalizada

Axonometrias oblíquas: cavaleira e planométrica

Contrariamente às axonometrias ortogonais, em que o plano axonométrico é oblíquo aos planos coordenados, numa axonometria oblíqua (ou clinogonal), o plano axonométrico é um dos planos coordenados, ou paralelo a um destes. Consequentemente, o plano axonométrico contém ou é paralelo a dois dos eixos coordenados do triedro, podendo ser marcadas as coordenadas diretamente, em verdadeira grandeza, nos dois eixos que são parte ou paralelos ao plano axonométrico.



Nas axonometrias oblíquas, as retas projetantes não são ortogonais ao plano axonométrico, mas sim oblíquas. Esta condição determina que as retas projetantes formem um ângulo de valor variável com o plano axonométrico. Assim, ao contrário do que acontece com as axonometrias ortogonais – em que existe sempre deformação, e, por isso, coeficiente de redução na perspetiva – nas axonometrias oblíquas, esse facto nem sempre se verifica. Tal depende da inclinação das retas projetantes e do ângulo que estas formam com o plano axonométrico. Se essa inclinação for de 45°, não existe qualquer tipo de coeficiente de redução, uma vez que a perspetiva corresponde ao valor real do ponto.

Existem dois tipos de axonometrias oblíquas: **cavaleira** e **planométrica** (ou militar). Nos pontos seguintes, irão ser abordadas as principais características de cada uma.

Perspetiva cavaleira

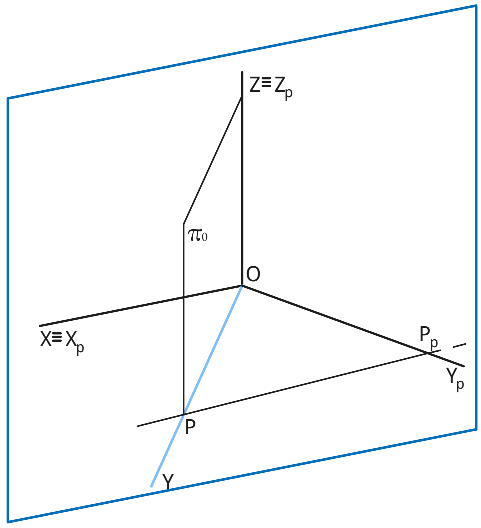
Plano axonométrico é paralelo ou coincidente ao plano coordenado **xOz**.

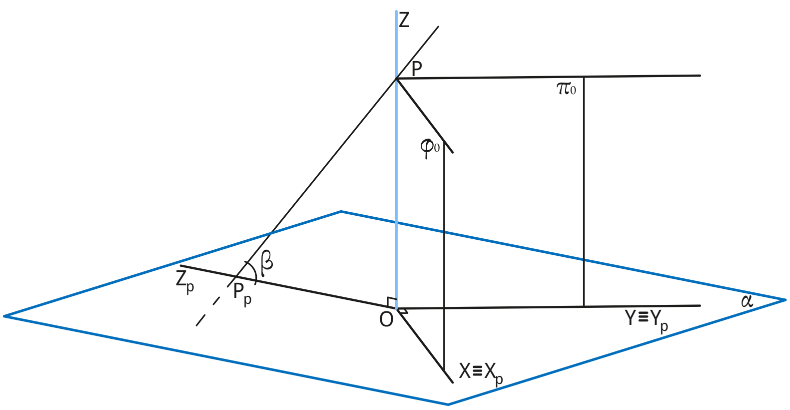
Perspetiva planométrica (ou militar)

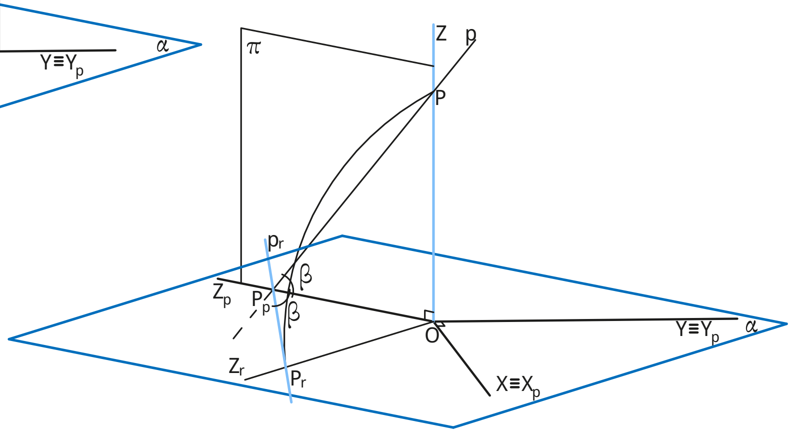
Plano axonométrico é paralelo ou coincidente ao plano coordenado **xOy**.

Axonometrias oblíquas – perspetiva planométrica

As axonometrias oblíquas distinguem-se através da posição dos seus planos coordenados face ao plano axonométrico. Como já foi referido, nestes casos, um dos planos coordenados é sempre coincidente ou paralelo ao plano axonométrico.
O que determina se é uma perspetiva planométrica ou cavaleira é o plano coordenado em causa. Se for o plano **xOy** (plano horizontal), paralelo ou coincidente com o plano axonométrico, então, trata-se de uma **perspetiva planométrica** (ou militar).

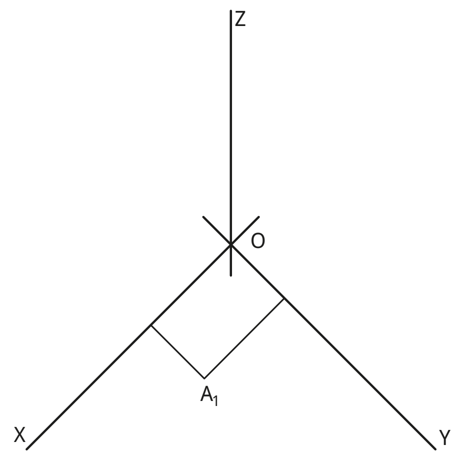




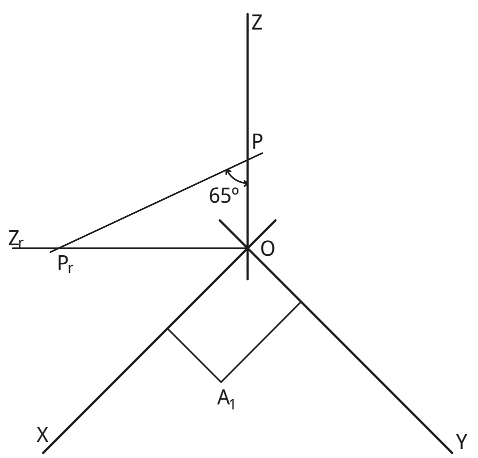


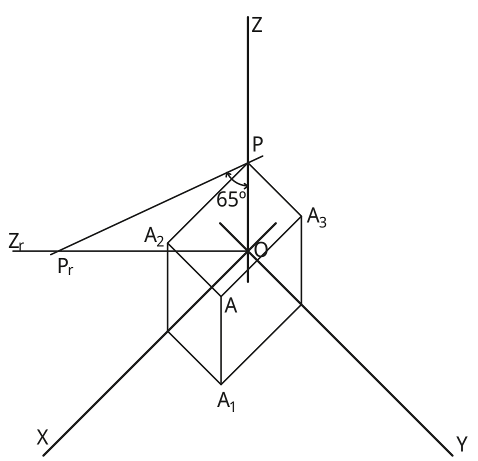
Esta nomenclatura deve-se ao facto de a representação tridimensional resultante deste tipo de axonometria se assemelhar a uma planta, uma vez que os elementos, no plano horizontal, estão todos representados em verdadeira grandeza. Este método era muito usado em cartas militares, daí ser também conhecido como **perspetiva militar**.

Neste tipo de perspetivas, as coordenadas dos eixos **x** e **y** podem ser marcadas diretamente, uma vez que estes eixos se encontram em verdadeira grandeza, coincidentes com as suas perspetivas. Neste caso, apenas a cota poderá sofrer deformações, dependendo dos ângulos que as retas projetantes formem com o plano axonométrico. De salientar que, devido à condição de paralelismo do plano **xOy** com o plano axonométrico, os eixos **x** e **y**, no desenho, formam sempre 90° entre si (ângulo reto). Também a posição do eixo **z** se apresenta sempre, por convenção, na vertical.



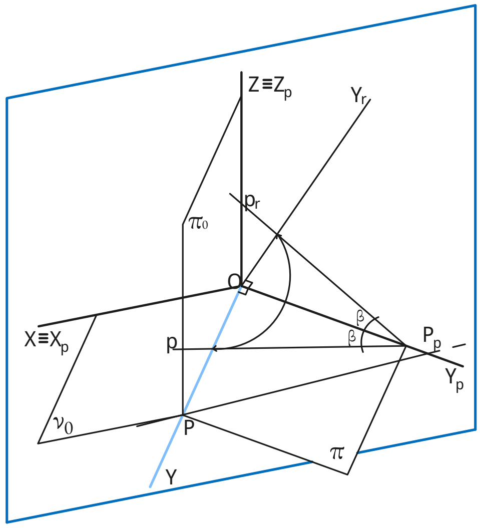
Considerando o plano **xOy** como o plano axonométrico, repara que o plano projetante que contém o eixo **z** é ortogonal ao plano axonométrico. Para determinar o ângulo que as retas projetantes (neste caso, 65°) contidas nesse plano formam com o plano axonométrico, deve rebater-se o plano projetante do eixo **z** sobre o plano **xOy** (plano axonométrico). Para tal, é usada como charneira a perspetiva do eixo **z**, que corresponde à reta de interseção do plano projetante com o plano axonométrico. Deste modo, o eixo **z_r** (rebatimento do eixo), deverá ser representado perpendicularmente à perspetiva do eixo **z**. A partir daí, é possível representar em verdadeira grandeza a inclinação das retas projetantes e a cota de um determinado ponto.



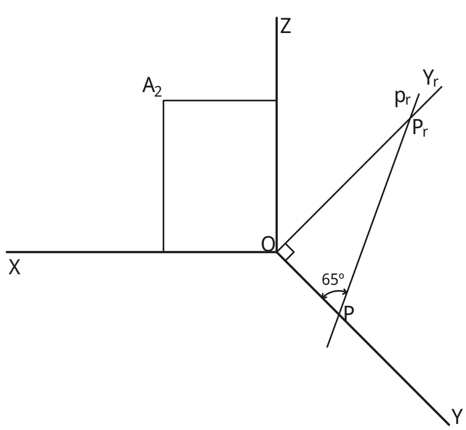


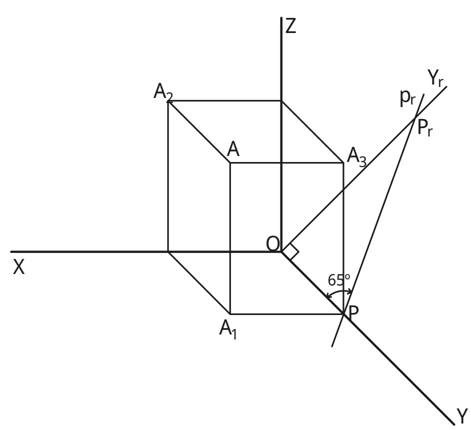
Axonometrias oblíquas – perspetiva cavaleira

Na perspetiva cavaleira, é o plano **xOz** que estabelece a relação de paralelismo com o plano axonométrico, podendo, também, ser coincidente com este. Neste caso, são os eixos **x** e **z** que se encontram em verdadeira grandeza e, por isso, a abcissa e a cota de um determinado ponto podem ser marcadas diretamente nas perspetivas dos eixos coordenados. No caso do afastamento, o procedimento é semelhante ao enunciado para a perspetiva planométrica.



No entanto, neste caso, o plano a rebater é o plano projetante que contém o eixo **y**, segundo uma charneira que corresponde à perspetiva desse mesmo eixo (reta de interseção do plano projetante com o plano axonométrico). Assim, tem-se o eixo **y** rebatido, traçando uma perpendicular à perspetiva do eixo **y**. A partir daí, é possível representar em verdadeira grandeza uma reta projetante, marcando o ângulo desta diretamente sobre a perspetiva do eixo **y**, prolongando-a até ao eixo $\mathbf{y_r}$. Quando a reta o interseta, tem-se o ponto rebatido e o respetivo valor do seu afastamento em verdadeira grandeza ao eixo $\mathbf{y_r}$.

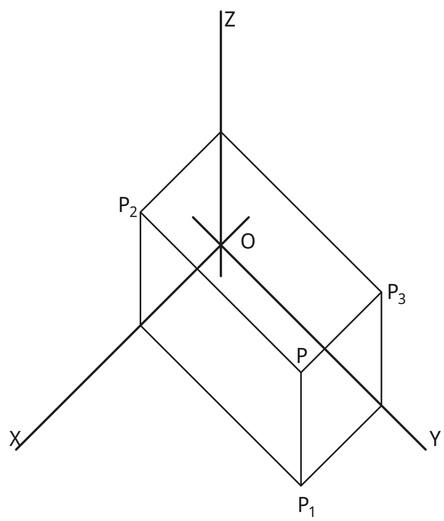




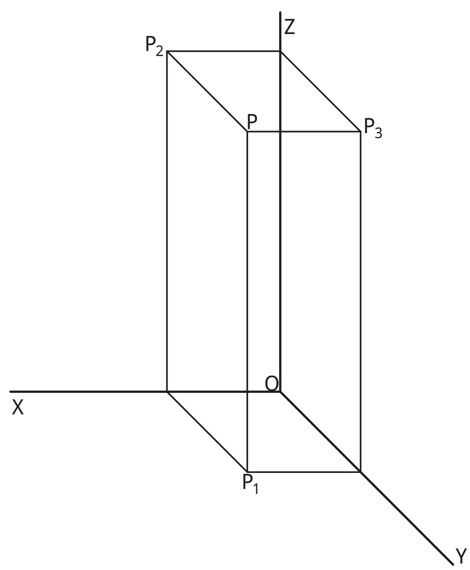
Axonometrias oblíquas normalizadas

Tal como nas axonometrias ortogonais normalizadas, nas axonometrias oblíquas a normalização tem o mesmo objetivo: tornar o método de representação mais expedito e simples, de forma a poder ser aplicado à mão livre, para uma fácil e rápida comunicação gráfica. No entanto, enquanto numa perspetiva isométrica (axonometria ortogonal) o coeficiente de redução é arredondado às unidades, ficando anulado (todas as medidas são marcadas em verdadeira grandeza), no caso das axonometrias oblíquas estes continuam a existir. Porém, são predefinidos e de simples representação.

No caso da perspetiva planométrica, determina-se que o coeficiente de redução se fixa em 2/3. Isto significa que, nas coordenadas do eixo **z**, estas devem sofrer uma redução de 2/3 face ao seu valor real. Considerando o ponto **P** (3; 6; 9), este deve ser marcado diretamente nos eixos **x** e **y**, pois estes estão em verdadeira grandeza. Já no eixo **z**, este deve ser reduzido em 2/3. Assim, o valor assinalado no eixo **z** deverá ser de 3.



No caso da perspetiva cavaleira, determina-se que o coeficiente de redução é 0,5 (1/2). Assim, as coordenadas são marcadas diretamente nos eixos **x** e **z**. No eixo **y**, o valor deverá ser reduzido para metade. Considerando o mesmo ponto **P** (3; 6; 9), os valores da abcissa e da cota (3 e 9, respetivamente) deverão ser marcados diretamente nos eixos coordenados. No eixo **y**, o valor a assinalar deverá ser 3 (redução para metade do valor em verdadeira grandeza do afastamento).



As axonometrias normalizadas permitem representar com rapidez e relativo rigor figuras e formas geométricas de forma muito fiel à realidade, facilitando métodos de projeto e de comunicação através do meio gráfico.

Para praticar

1. Considerando uma axonometria isométrica, representa o quadrilátero **[ABCD]** através das coordenadas dos seus vértices: **A** (6; 3; 8), **B** (2; 3; 8), **C** (6; 6; 8) e **D** (2; 6; 8).

2. Considerando que este quadrilátero corresponde à face superior de um prisma retangular, cuja altura é 6 cm, representa o sólido.

3. Representa, numa axonometria cavaleira normalizada, um prisma hexagonal cuja face **[ABCDEF]**, de 3 cm de lado, está contida no plano coordenado **xOz**. O seu vértice **A**, mais próximo do eixo **z**, tem 1 cm de abcissa e 5 cm de cota. O seu vértice oposto, mais afastado do eixo **z**, tem 7 cm de abcissa. A outra face hexagonal, com 8 cm de afastamento, tem como vértices os pontos **[GHIJKL]**.

4. Numa axonometria planométrica, cujas retas projetantes formam um ângulo de 55° com o plano axonométrico, representa um cilindro com 10 cm de altura, cuja base é uma circunferência de 2 cm de raio e o centro geométrico é o ponto **P** (6; 6; 2).

5. Representa os pontos **A** (1; 2; 1) e **B** (1; 6; 1) em axonometria cavaleira, cujas retas projetantes têm 50° de inclinação. Considerando que os pontos **A** e **B** são vértices de um triângulo isósceles com 6 cm de altura, determina o ponto **C**, o outro vértice do triângulo, sabendo que este está inserido num plano perpendicular ao plano coordenado **xOy**.

6. Representa um outro triângulo, semelhante ao triângulo **[ABC]** do exercício anterior, paralelo a este, cujo vértice **C'** possui 5 cm de abcissa e 3 cm de cota.

7. Numa axonometria planométrica, cujas retas projetantes têm 60° de inclinação, representa os pontos **A** (1; 3; 5) e **B** (4; 3; 5). Sabendo que **A** e **B** são vértices de um quadrado, um dos lados pertence ao plano coordenado **xOz** determina os vértices **C** e **D** desse quadrado, paralelo ao plano **xOy**.

8. Considera o quadrado, em axonometria planométrica, do exercício anterior. Sabe-se que este pertence a uma face de um cubo com 3 cm de aresta. Representa o cubo, sabendo que **[EFGH]** é a outra face do cubo, paralela a **[ABCD]**, em que **[EF]** pertence ao plano coordenado **xOz** e tem 2 cm de cota.

5

Dupla projeção ortogonal

Descrição do sistema: passagem do espaço ao plano do desenho

Projeções de uma reta

Alfabeto da reta

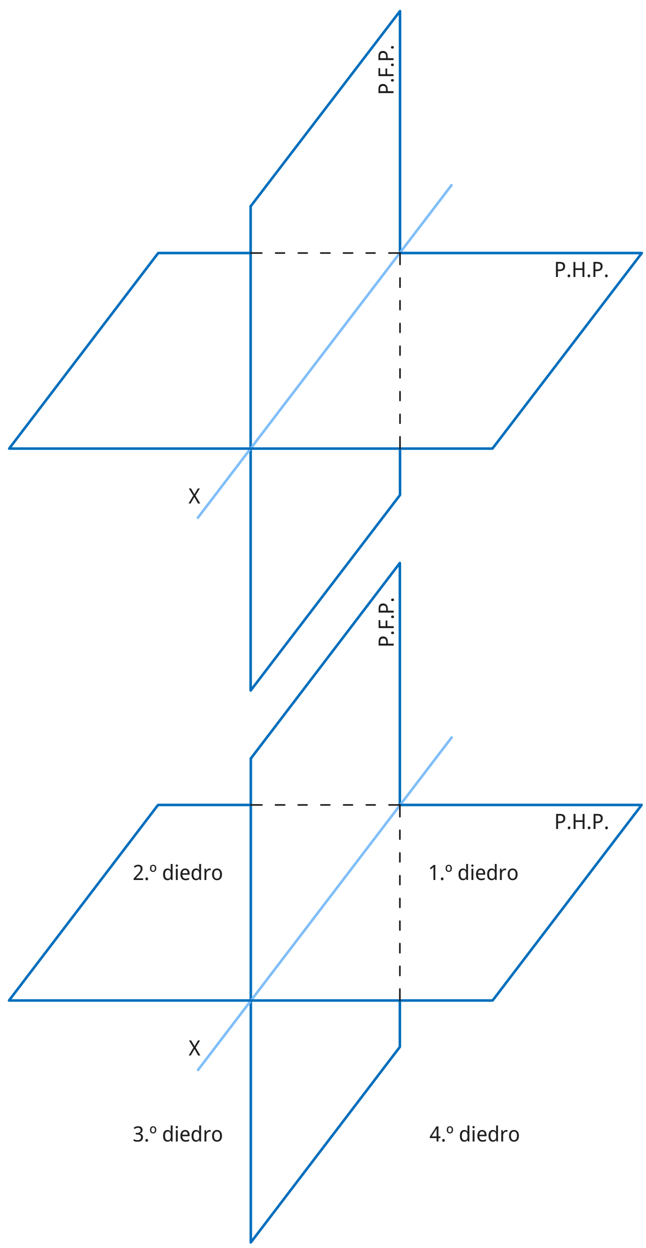
Elementos definidores de um plano

Alfabeto do plano

Dupla projeção ortogonal

Descrição do sistema: passagem do espaço ao plano do desenho

O **sistema de dupla projeção ortogonal**, também conhecido como **método de Monge**, por ter sido desenvolvido por Gaspard Monge (1746-1818), é um método que consiste na projeção dos elementos no espaço em dois planos (um horizontal e outro frontal). Estes planos de projeção são perpendiculares entre si, intersetando-se segundo um eixo, denominado eixo **x**. Esta condição origina quatro regiões do espaço, denominadas **diedros**, e que são definidas pelos planos de projeção e pelo eixo **x** (1.° diedro, 2.° diedro, 3.° diedro e 4.° diedro).

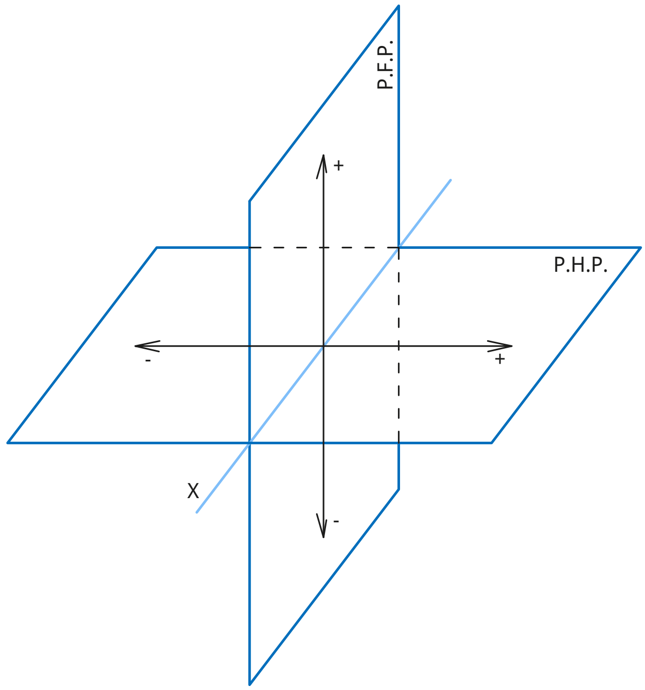


Na figura ao lado, pode observar-se os dois planos de projeção (Plano Frontal de Projeção – P.F.P. e Plano Horizontal de Projeção – P.H.P.), perpendiculares entre si. O eixo **x** é, também, a reta de interseção entre os dois planos de projeção.

Quando os dois planos de projeção se intersetam, dividem o espaço geométrico em quatro regiões: **diedros**.
A representação de um ponto no espaço geométrico é obtida através das suas coordenadas (**afastamento** e **cota**), sendo o **afastamento** a distância do ponto ao P.F.P. e a **cota** a distância do ponto ao P.H.P.
Deste modo, se um ponto estiver situado abaixo do P.H.P., este terá uma cota negativa. Se se situar acima do P.H.P., a sua cota já será positiva. No afastamento, o raciocínio é idêntico. Se o ponto estiver atrás do P.F.P., o seu afastamento é negativo, que, por sua vez, será positivo, se o ponto estiver à frente do P.F.P.

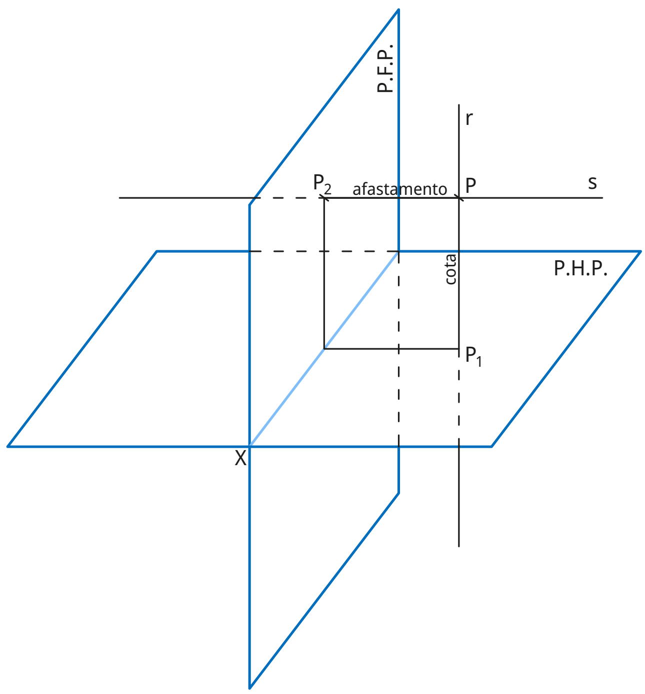
Deste modo, pode concluir-se que:

- Pontos situados no **1.° diedro** têm afastamento e cota positivos;
- Pontos situados no **2.° diedro** têm afastamento negativo e cota positiva;
- Pontos situados no **3.° diedro** têm afastamento e cota negativos;
- Pontos situados no **4.° diedro** têm afastamento positivo e cota negativa.



Considera o ponto **P** e as duas retas projetantes **r** e **s**. A reta **s**, perpendicular ao plano frontal de projeção, é uma reta projetante frontal que contém o ponto **P**, e a reta **r**, perpendicular ao plano horizontal de projeção, é uma reta projetante horizontal que contém o ponto **P** (**r** e **s** são concorrentes no ponto **P**).

Quando ambas as retas intersetam os planos de projeção, obtêm-se as projeções do ponto **P**. **P_1** é a sua projeção horizontal e **P_2** é a sua projeção frontal. O segmento de reta compreendido entre **P_1** e **P** corresponde à **cota** do ponto **P** e o segmento de reta entre **P_2** e **P** corresponde ao **afastamento** do ponto **P**.



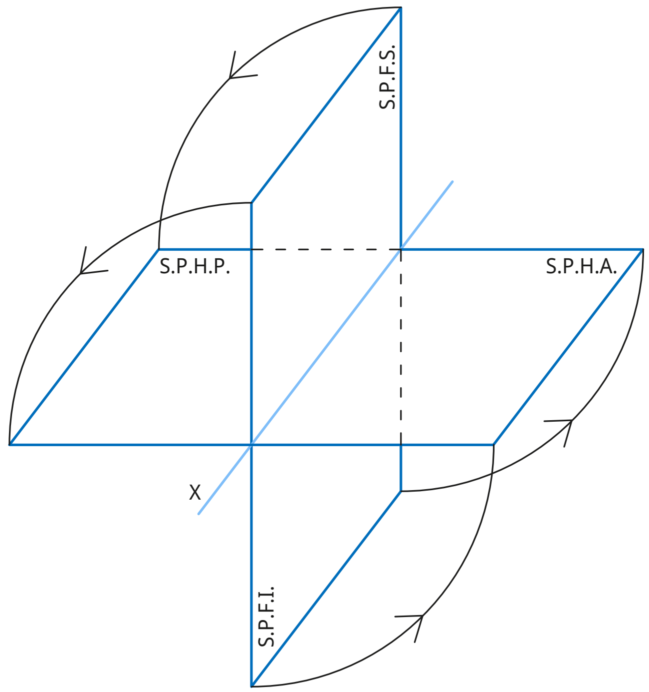
Resumindo

- **Afastamento** é a **distância** de um dado ponto ao **Plano Frontal de Projeção.**
- **Cota** é a **distância** de um dado ponto ao **Plano Horizontal de Projeção**.

Compreendido o sistema no espaço geométrico, é importante entender como é feita a transição para o plano do desenho.

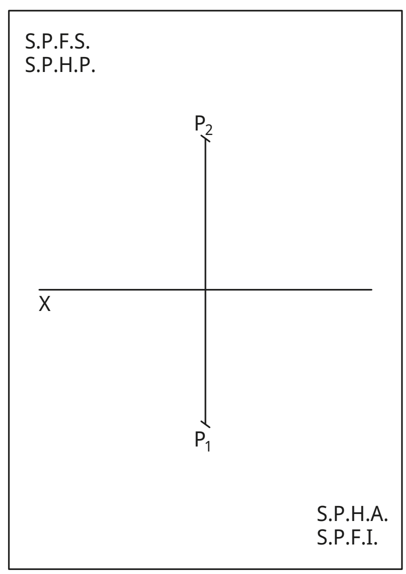
Esta passagem é conseguida através do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção, tendo como charneira o eixo **x**.

Como pode ser observado no esquema, o **Semiplano Frontal Superior** é rebatido sobre o **Semiplano Horizontal Posterior**, e o **Semiplano Frontal Inferior** é rebatido sob o **Semiplano Horizontal Anterior**.



Este rebatimento resulta numa representação bidimensional, onde é marcado o **eixo x**, e **acima** deste marcam-se as **cotas positivas** e **afastamentos negativos**. Ao invés, **abaixo** deste, marcam-se as **cotas negativas** e os **afastamentos positivos**.

Considerando o ponto **P**, apresentado anteriormente, no plano do desenho, as suas duas projeções são representadas através de uma interseção com duas linhas de chamada, perpendiculares ao eixo **x**. O **comprimento da linha de chamada** que parte do **eixo x** até **P_1** corresponde ao **afastamento** do ponto **P**; e o **comprimento da linha de chamada** que parte do **eixo x** até **P_2** corresponde à **cota** do ponto **P**.



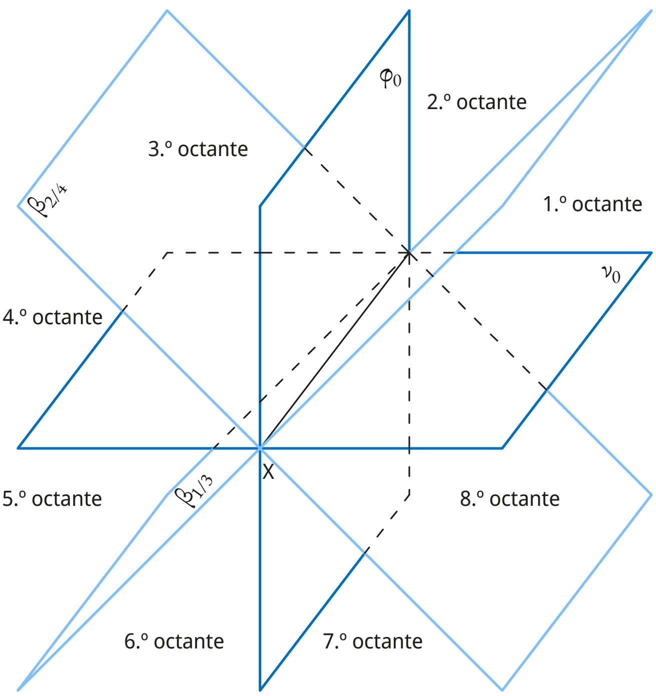
Planos bissetores

Como já foi referido, no sistema de dupla projeção ortogonal, o espaço geométrico encontra-se dividido em quatro partes iguais, denominadas **diedros**. Estes diedros são definidos pelos planos de projeção e o eixo **x**, ou seja, cada diedro está compreendido entre dois **semiplanos de projeção**.

No entanto, os diedros poderão, ainda, ser divididos em duas partes iguais, por planos oblíquos aos planos de projeção, concorrentes com estes no eixo **x**. A estes planos dá-se o nome de **planos bissetores**.

Os **planos bissetores** formam ângulos de **45°** com os planos de projeção e dividem o espaço geométrico em **oito** partes iguais, denominadas de **octantes**. Assim:

- O **1.° diedro** subdivide-se em **dois octantes** (1.° e 2.°);
- O **2.° diedro** subdivide-se em **dois octantes** (3.° e 4.°);
- O **3.° diedro** subdivide-se em **dois octantes** (5.° e 6.°);
- O **4.° diedro** subdivide-se em **dois octantes** (7.° e 8.°).

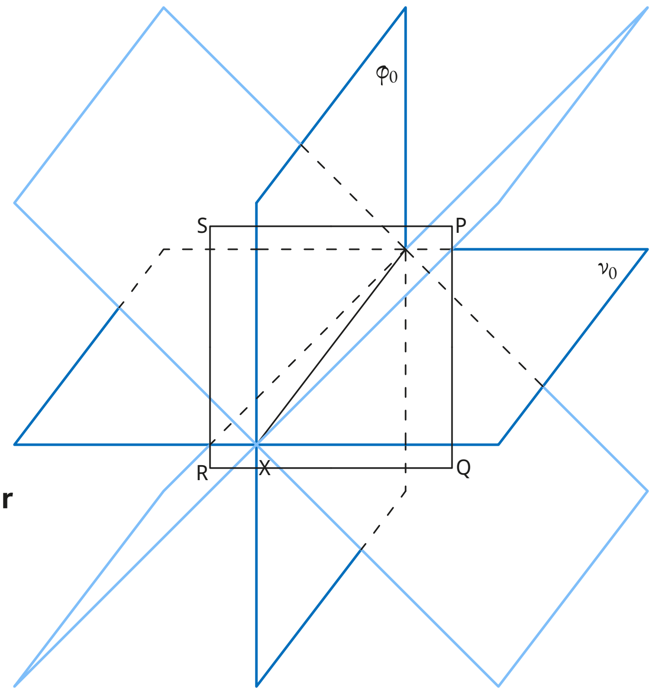


Resumindo

- Os planos bissetores são denominados $\beta_{1/3}$ e $\beta_{2/4}$, consoante atravessam o 1.° e 3.° diedros, ou o 2.° e 4.° diedros, respetivamente.

Pontos situados nos planos bissetores

Considerando os pontos **P**, **Q**, **R** e **S**, todos têm um fator comum: estão contidos nos planos bissetores, sendo que **P** e **R** estão contidos no plano $\beta_{1/3}$ e **Q** e **S** estão contidos no plano $\beta_{2/4}$.

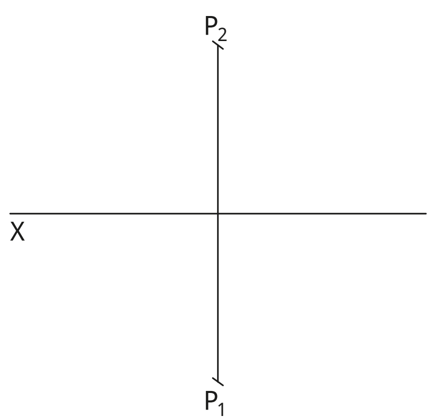


Os pontos situados nos planos bissetores são objeto de estudo porque possuem características próprias, relacionadas com os próprios planos bissetores.

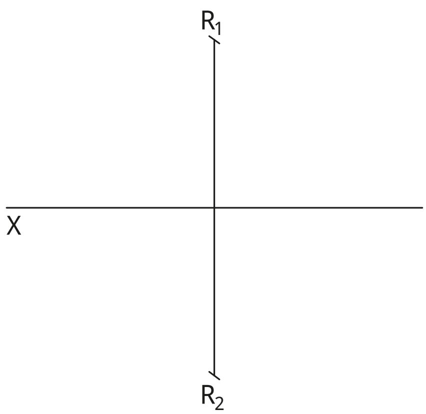
Tendo em conta que um plano bissetor divide um diedro em duas partes iguais, compreende-se que **qualquer ponto que esteja contido num plano bissetor irá distar igualmente do plano frontal de projeção e do plano horizontal de projeção**. Isto implica que o seu afastamento e cota assumam o mesmo valor, podendo apenas variar entre positividade e negatividade, consoante o diedro em que se encontram.

Pontos situados no plano bissetor 1/3

O ponto **P**, sendo um ponto do plano $\beta_{1/3}$, situado no **1.° diedro**, apresenta afastamento e cota positivos. Por conseguinte, a sua representação em dupla projeção ortogonal é feita através de $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_1}$, que distam igualmente do eixo **x**. Na verdade, qualquer ponto situado no 1.° diedro e contido no plano $\beta_{1/3}$ terá uma representação semelhante, com a sua projeção frontal acima do eixo **x** (cota positiva), e a sua projeção horizontal abaixo do eixo **x** (afastamento positivo). Ambas as projeções estarão sempre à mesma distância do eixo **x**, sendo simétricas relativamente a este.

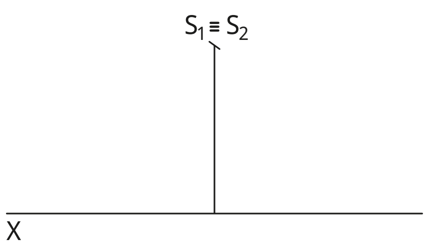


O ponto **R**, por sua vez, também está situado no plano $\beta_{1/3}$, mas no **3.º diedro**. Assim, o ponto **R** está situado abaixo do Plano Horizontal de Projeção e atrás do Plano Frontal de Projeção. Tal significa que o ponto **R** tem coordenadas negativas. Assim, a sua projeção horizontal estará representada acima do eixo **x** (afastamento negativo), e a sua projeção frontal estará representada abaixo do eixo **x** (cota negativa). No entanto, as suas projeções são simétricas relativamente ao eixo **x**.



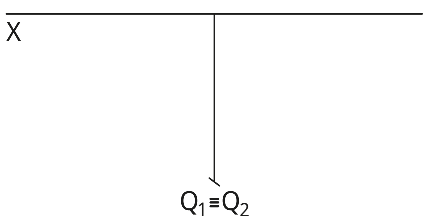
Pontos situados no plano bissetor 2/4

O ponto **S**, sendo um ponto do plano $\beta_{2/4}$, situado no **2.º diedro**, apresenta afastamento negativo e cota positiva, uma vez que está situado acima do Plano Horizontal de Projeção, mas atrás do Plano Frontal de Projeção. Isso implicará que as suas projeções, no plano do desenho, serão representadas coincidentemente, uma vez que afastamentos negativos são representados acima do eixo **x**, bem como as cotas positivas.



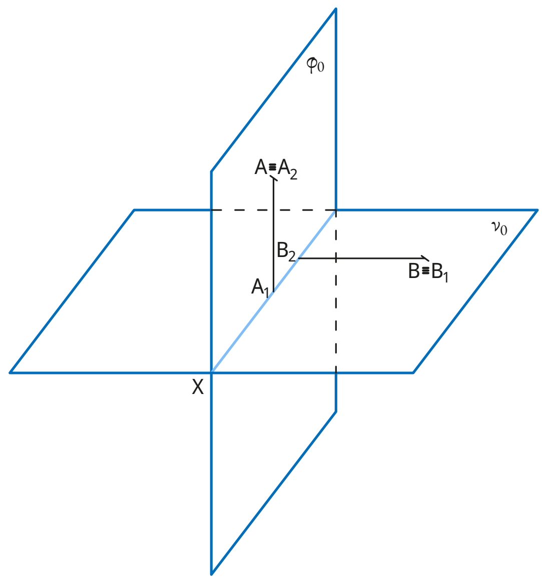
Assim, as projeções $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são coincidentes, representadas acima do eixo **x**.

Por fim, o ponto **Q**, localizado no **4.º diedro**, possui afastamento positivo e cota negativa, uma vez que se situa abaixo do Plano Horizontal de Projeção, mas à frente do Plano Frontal de Projeção. Tal como no exemplo do ponto **S**, as projeções do ponto **Q** são coincidentes, mas abaixo do eixo **x**, uma vez que se trata de cotas negativas e afastamentos positivos.



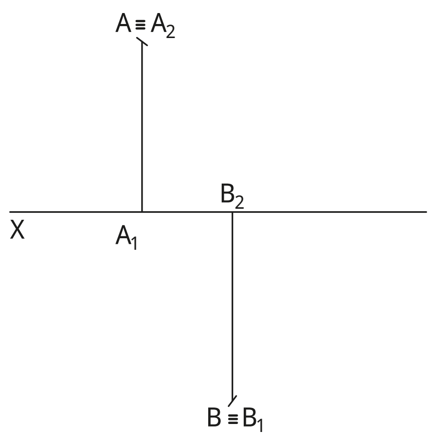
Pontos situados nos planos de projeção

Outro caso particular são os pontos situados nos planos de projeção. Podem existir pontos contidos no Plano Frontal de Projeção ou no Plano Horizontal de Projeção. Tendo em conta que as coordenadas de um ponto correspondem à distância entre estes e os planos de projeção, nestes casos antevê-se que uma das suas coordenadas apresentará um valor nulo, não se verificando qualquer distância ao plano de projeção que contém o ponto.



Observemos o ponto **A**. Este está situado no Plano Frontal de Projeção, a uma determinada cota. Podemos verificar que não possui afastamento, pois não regista qualquer distância ao Plano Frontal de Projeção, uma vez que está contido neste. Assim, a sua projeção horizontal – $\mathbf{A_1}$ – situa-se sobre o eixo **x**.

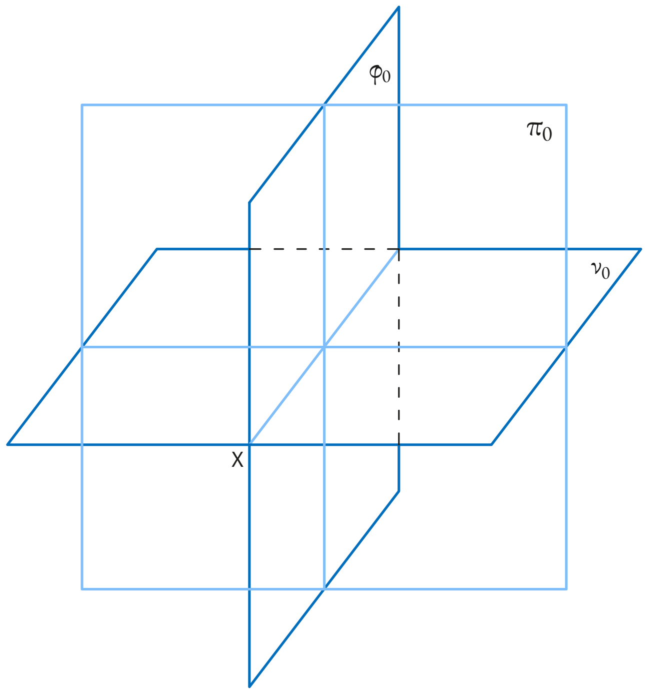
Já o ponto **B**, situado no Plano Horizontal de Projeção, possui afastamento positivo, mas cota nula. Assim, a sua projeção frontal ($\mathbf{B_2}$) é assinalada sobre o eixo **x**.



Em ambos os casos, uma das suas projeções é coincidente com o próprio ponto. No caso de um ponto localizado no Plano Frontal de Projeção, a sua projeção frontal é coincidente com o próprio ponto. Por sua vez, no caso de um ponto localizado no Plano Horizontal de Projeção, a sua projeção horizontal é coincidente com esse ponto.

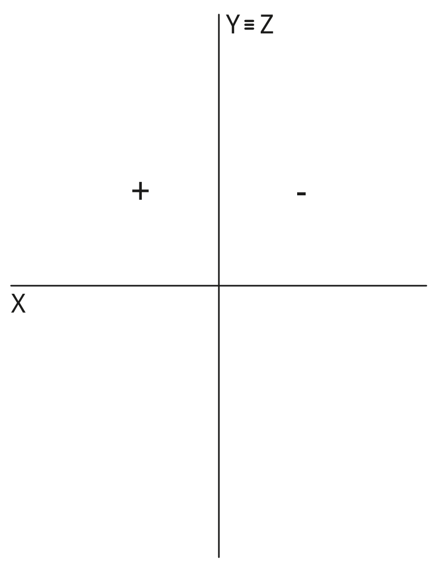
Abcissa de um ponto

Até agora foram abordadas duas coordenadas de um ponto: **afastamento** e **cota**. Contudo, para determinar a localização exata de um ponto no espaço, é necessária uma terceira coordenada denominada **abcissa**.



Na verdade, se considerarmos um ponto com um determinado afastamento e cota, apenas conhecemos a sua posição face aos planos de projeção. Contudo, poderá haver uma infinidade de pontos com as mesmas características, mas com localizações diferentes, dependendo se estão localizados mais à esquerda ou mais à direita.

Para determinar a localização exata de um ponto, é considerado um plano de referência, perpendicular aos planos de projeção. Assim, este plano permite determinar a abcissa de um ponto, dependendo se o ponto se encontra à esquerda do referencial ou à direita do referencial. Esse plano é vulgarmente conhecido como π_0 e corresponde à abcissa zero.



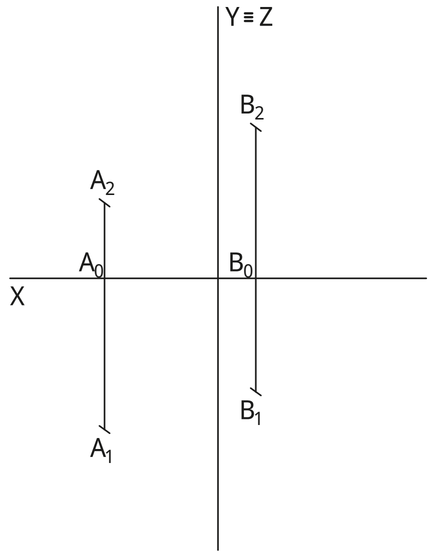
No plano do desenho, é representado através de uma reta perpendicular ao eixo **x**.

As três coordenadas de cada ponto são apresentadas sob a seguinte ordem: **abcissa**, **afastamento** e **cota**.

Considera os pontos **A** e **B** definidos pelas suas coordenadas:

- **A** (3; 4; 2) e **B** (–1; 3; 4).

Nota que **A** tem abcissa positiva, por isso, a representação das suas projeções está situada à esquerda do eixo das abcissas, distando 3 cm deste. Já o ponto **B**, com abcissa negativa, tem a sua representação bidimensional à direita do eixo das abcissas, distando 1 cm deste.
(Escala 1:2)



Para praticar

1 Que nome se dá aos espaços geométricos compreendidos entre os planos de projeção? E quantos são?

2 Assinala as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou valsas (F).

a) Um ponto com cota e afastamento positivo é um ponto situado no 1.° diedro.

b) Os pontos do plano $\beta_{2/4}$ têm sempre duas projeções coincidentes.

c) Quando um ponto tem ambas as projeções acima do eixo x, trata-se de um ponto situado no 4.° diedro.

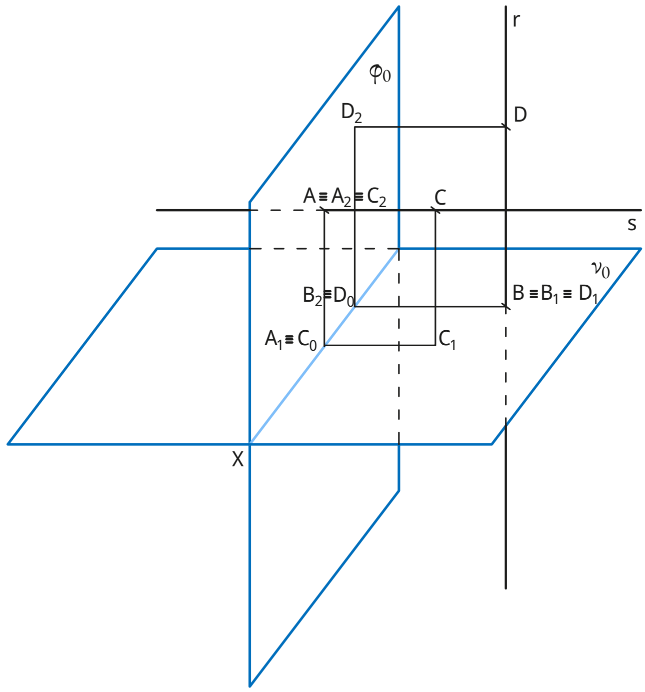
d) Os planos bissetores formam ângulos de 45° com os planos de projeção e dividem os diedros em duas partes geometricamente iguais.

3 Representa, em dupla projeção ortogonal, o ponto P (–3; 4; 6).

4 Considerando o ponto P do exercício anterior, determina as coordenadas de um ponto P′, simétrico a P, relativamente ao plano de perfil de abcissa 0, e representa-o em dupla projeção ortogonal.

Projeção de pontos da mesma reta projetante

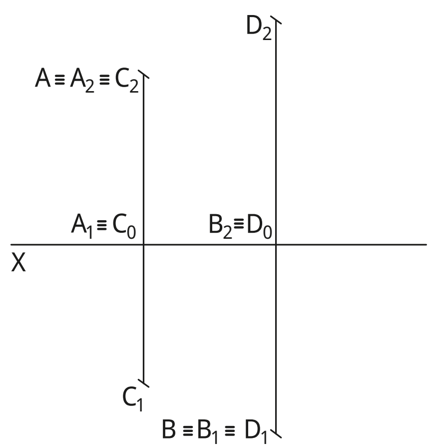
Como já foi referido, **retas projetantes** são **retas perpendiculares aos planos de projeção**. Assim, no caso de uma reta projetante horizontal (perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção), todos os pontos dessa mesma reta terão as suas projeções coincidentes num único ponto (interseção da reta projetante com o Plano Horizontal de Projeção).
No caso de retas projetantes frontais, o processo é equivalente, mas relativamente ao Plano Frontal de Projeção.



Neste caso, a reta **r** é uma reta projetante horizontal, que contém os pontos **B** e **D**, sendo que **B** corresponde ao ponto de interseção da reta **r** com o Plano Horizontal de Projeção. Poderá verificar-se que as projeções horizontais dos pontos são coincidentes.

Já a reta **s** é uma reta projetante frontal, que contém os pontos **A** e **C**, sendo que **A** é um ponto contido no Plano Frontal de Projeção, correspondendo à interseção deste com a reta **s**. Neste caso, as projeções frontais dos pontos são coincidentes.

No desenho ao lado, podemos ver a representação das projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**.

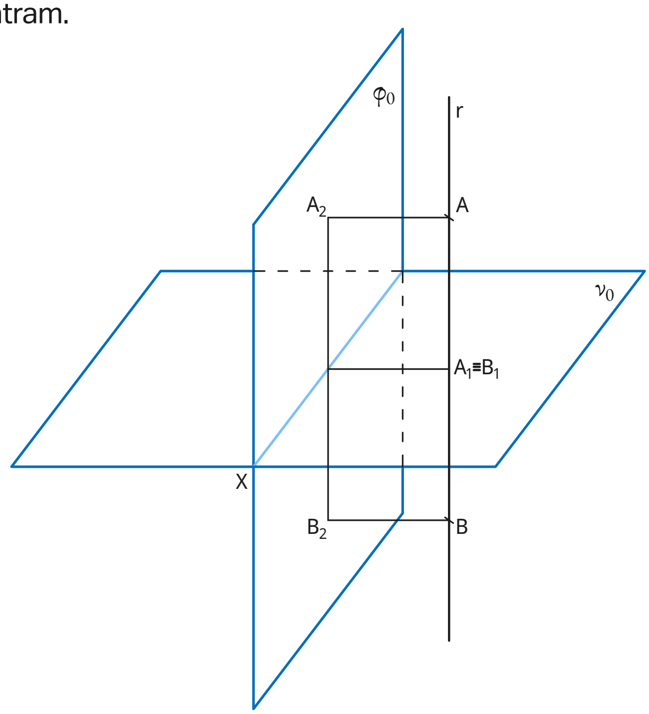


Pontos simétricos

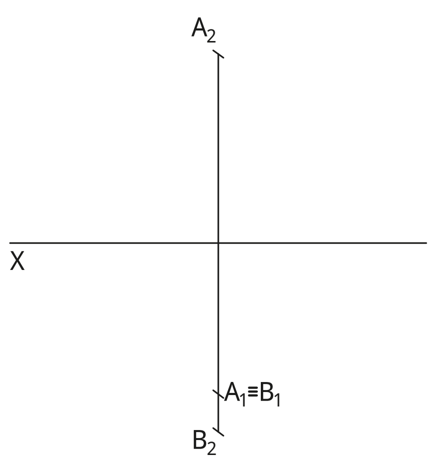
Pontos simétricos, como o próprio nome indica, são pontos que apresentam distâncias equivalentes face ao mesmo referencial. No caso da dupla projeção ortogonal, os principais referenciais são os planos de projeção (frontal e horizontal). Deste modo, pontos simétricos deverão ser pontos cujo valor associado ao afastamento e à cota é igual, podendo, contudo, adquirir valor negativo ou positivo, consoante o diedro em que se encontram.
De referir que pontos simétricos devem possuir sempre a mesma abcissa, e esta não varia entre positivo e negativo. Pontos simétricos à direita do plano de perfil de referência terão sempre abcissa negativa, e pontos situados à esquerda terão sempre abcissa positiva, qualquer que seja o diedro em que se encontram.

Considerando o exemplo dos pontos **A** e **B**:

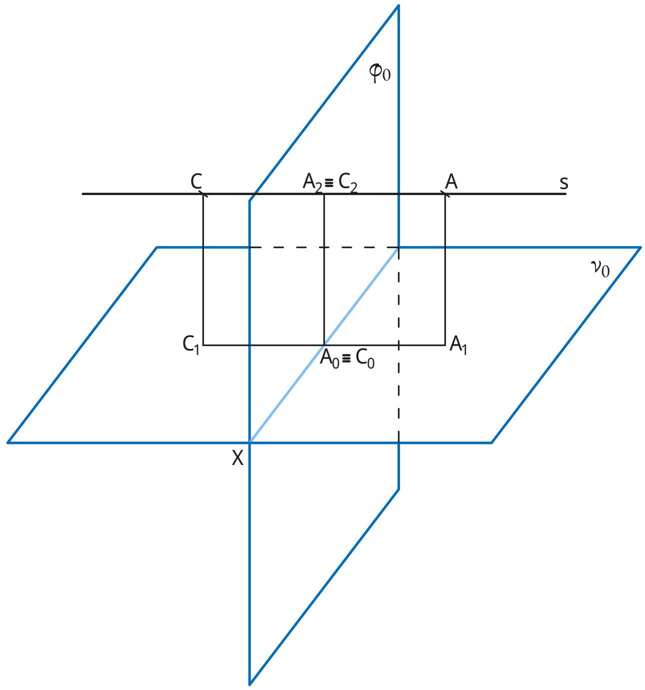
O ponto **A** está situado no 1.º diedro e o ponto **B** está situado no 4.º diedro. Ambos são pontos da mesma reta projetante **r**, o que significa que possuem a mesma abcissa, uma vez que, tratando-se de uma reta perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção, todos os seus pontos são equidistantes face ao plano φ_0.



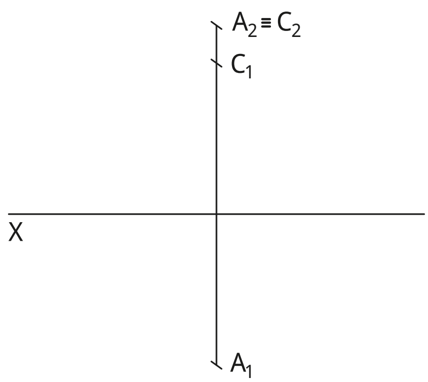
No plano do desenho, a projeção frontal do ponto **A**, uma vez que a sua cota é positiva, está acima do eixo **x**, e a sua projeção horizontal, tratando-se de afastamento positivo, está abaixo do eixo **x**.
No caso do ponto **B**, o afastamento é positivo, e, por isso, a sua projeção horizontal é coincidente com a projeção horizontal do ponto **A**.
Já a projeção frontal do ponto **B**, sendo a cota negativa, é marcada abaixo do eixo **x**.
Uma vez que o valor numérico é igual, a distância ao eixo **x** é igual, e por isso a sua projeção é simétrica à projeção frontal do ponto **A**, tendo como eixo de simetria o eixo **x**.



Este exemplo foi para pontos simétricos relativamente ao plano horizontal de projeção. Contudo, poderá haver pontos simétricos relativamente ao Plano Frontal de Projeção. É o caso dos pontos **A** e **C**. Estes estão contidos numa reta projetante frontal, **s**, e apresentam, ambos, a mesma cota. A simetria é dada pelo afastamento que assume um valor numérico idêntico, embora no ponto **C** este seja negativo, e no ponto **A**, positivo.



Deste modo, no plano do desenho, as projeções frontais dos pontos **A** e **C** são coincidentes, e as projeções horizontais são simétricas relativamente ao eixo **x**. No caso do ponto **C**, dado o afastamento negativo, este é marcado acima do eixo **x**, ao contrário do afastamento do ponto **A**, que, sendo positivo, é assinalado abaixo do eixo **x**.



Pontos simétricos

relativamente ao Plano Horizontal de Projeção
Pontos situados na mesma reta projetante horizontal com cotas simétricas.

relativamente ao Plano Frontal de Projeção
Pontos simétricos na mesma reta projetante frontal com afastamentos simétricos.

Para praticar

1. Representa o ponto **A**, em dupla projeção ortogonal, e descreva-o segundo as suas coordenadas, sabendo que este é um ponto situado no plano $\beta_{1/3}$ e pertencente a uma reta projetante frontal que contém o ponto **B**, cujas coordenadas são: (1, 3, 5).

2. Representa em dupla projeção ortogonal e situa nos diedros e octantes os seguintes pontos:

   A (5; 5; 7)

   B (1; 6; 2)

   C (0; –4; 6)

   D (–5; –7; 2)

   E (–5; –2; –8)

   F (–3; –6; –3)

   G (–1; 2; –8)

   H (3; 5; –3)

3. Determina as coordenadas e representa em dupla projeção ortogonal os pontos **P** e **Q**, sabendo que ambos pertencem ao Plano Frontal de Projeção, e **P** simétrico a **Q**, cuja cota é –4.

4. Determina as projeções de um ponto **A**, sabendo que tem –4 cm de cota e é um ponto do plano bissetor 2/4.

5. Determina o ponto **B**, simétrico a **A**. Considera que a simetria é relativamente ao Plano Frontal de Projeção.

6. Considera uma reta projetante horizontal, que contém o ponto **A**. Representa um ponto C, pertencente a essa reta, com 3 cm de cota. Em que diedro se situa o ponto **C**?

7. Determina dois pontos pertencentes à mesma reta projetante frontal, **t**, que contém o ponto **A**, pertencente ao plano frontal de projeção (1; 0; 4). Representa-os em dupla projeção ortogonal e enuncia as suas coordenadas.

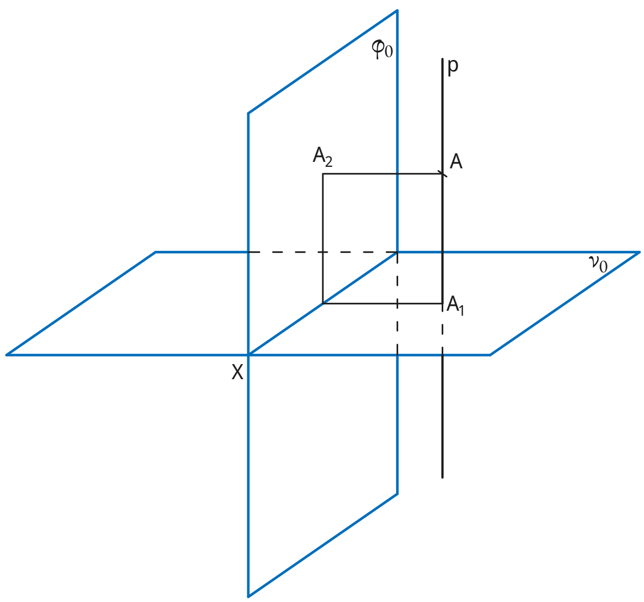
Projeções de uma reta

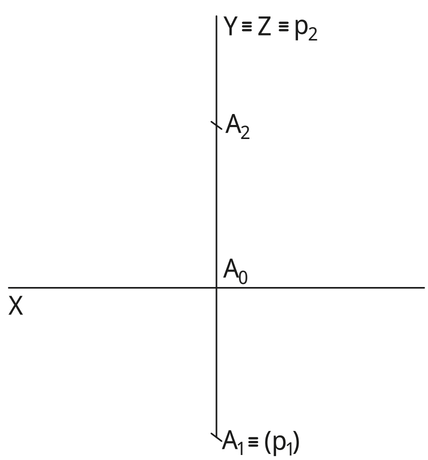
Reta definida por um ponto e uma direção

Recordando os conceitos estudados no início deste manual, sabemos que uma reta é um conjunto infinito de pontos, dispostos sucessivamente numa determinada direção.
Sabemos, também, que para definir uma reta são necessários **dois pontos**, ou **um ponto e uma direção**. A partir daqui, entende-se que, em dupla projeção ortogonal, a projeção de uma reta é conseguida dados dois pontos dessa reta, que, quando unidas as duas projeções frontais e as duas projeções horizontais desses pontos, originam as projeções homólogas da reta em questão, ou então, através de um ponto e de uma direção.
Por exemplo: dado um ponto da reta, e sabendo que essa reta é perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção, a sua representação no plano do desenho passará pela marcação de uma reta que contenha o ponto em questão e que seja perpendicular ao eixo **x**.

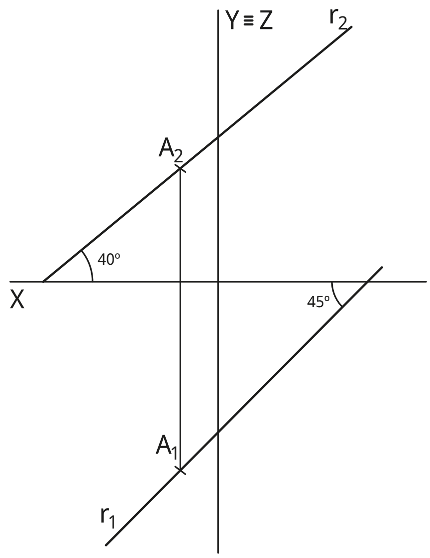
Contudo, considere-se a imagem ao lado:

É dado o ponto **A**, como pertencente a uma reta **p**, da qual se sabe ser perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção. Deste modo, a reta **p** está definida por um ponto e uma direção (pelo ponto **A** e pela sua posição relativamente ao Plano Horizontal de Projeção). Em dupla projeção ortogonal, a reta **p** tem a sua projeção frontal segundo uma reta perpendicular ao eixo **x**. Por sua vez, a sua projeção horizontal está concentrada num único ponto (ponto de interseção da reta com o Plano Horizontal de Projeção). Todas as projeções horizontais de todos os pontos contidos na reta **p** estão coincidentes. Observando a imagem ao lado, verifica-se que a projeção frontal da reta **p** está coincidente com o traço do plano das abcissas, uma vez que está situada na abcissa 0. A sua projeção horizontal está representada entre parênteses, o que significa que está reduzida a um único ponto, coincidente com toda as projeções horizontais de todos os pontos que nela se encontram.



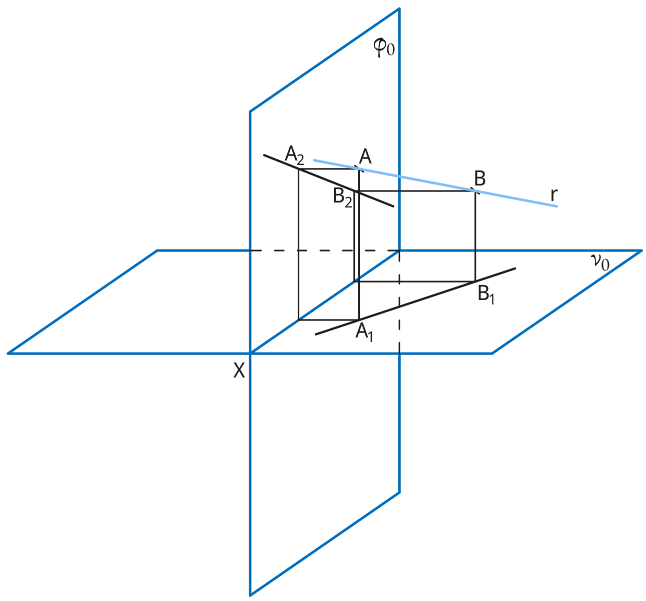


No entanto, uma reta pode ser definida por um ponto e uma direção, e essa direção ser alusiva à relação das suas projeções com o eixo **x**, e não à sua posição no espaço geométrico. Observando o exemplo da reta **r**, sabe-se que contém o ponto **A** e que a sua projeção frontal forma um ângulo de 40°, de abertura à direita com o eixo **x**, e a sua projeção horizontal, um ângulo de 45°, de abertura à esquerda, com o eixo **x**.

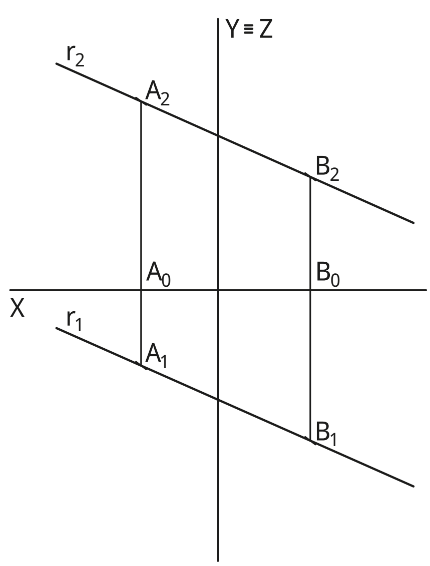


Reta definida por dois pontos

Enquanto, no exemplo acima, temos uma reta definida por um ponto e uma direção, neste exemplo está representada uma reta **r**, definida por dois pontos **A** e **B**.
Neste caso, a projeção frontal da reta **r** é dada pela união das projeções frontais dos pontos que a definem (**A** e **B**).
O mesmo acontece na sua projeção horizontal, que resulta da união de $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{B_1}$ (projeções horizontais dos pontos).



Assim, em dupla projeção ortogonal, dados dois pontos, e representadas as projeções destes, é imediatamente possível determinar as projeções de uma reta por estes definida.



Resumindo

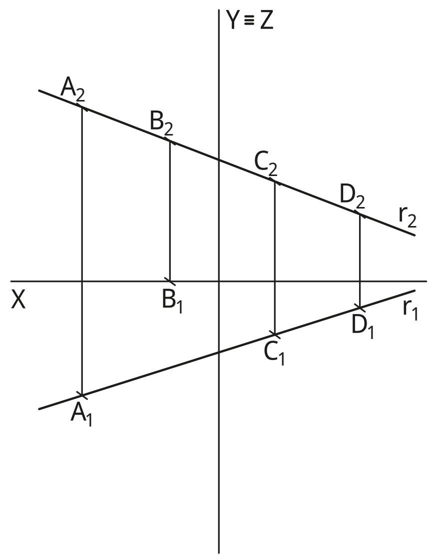
- $\mathbf{r_2}$ está definida por $\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{B_2}$;
- $\mathbf{r_1}$ está definida por $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{B_1}$.

Pontos pertencentes a uma reta

As projeções de uma reta são definidas pelas projeções dos seus pontos. Ou seja, qualquer ponto pertencente a uma reta tem, obrigatoriamente, as suas projeções sobre a projeção homónima da reta a que pertence. Isto é, todas as projeções frontais dos pontos pertencentes a uma determinada reta devem estar sobre a projeção frontal dessa mesma reta e todas as projeções horizontais desses mesmos pontos devem estar sobre a projeção horizontal da reta.

Observando o exemplo da reta **r**, é possível verificar que as projeções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**, estão sobre a projeção frontal da reta **r** – $\mathbf{r_2}$.

Na projeção horizontal, apenas os pontos **A**, **C** e **D** têm as suas projeções sobre a projeção horizontal da reta **r** – $\mathbf{r_1}$. Deste modo, conclui-se que o ponto **B** não é um ponto pertencente
à reta **r**, tendo, apenas, por casualidade, a sua projeção frontal sobre a projeção homónima da reta **r**.



Resumindo

- Para que um ponto pertença a uma reta, este tem de ter ambas as projeções sobre as projeções homónimas da reta a que pertence.
- Se esta condição se verificar apenas numa projeção, então o ponto não pertence à reta.

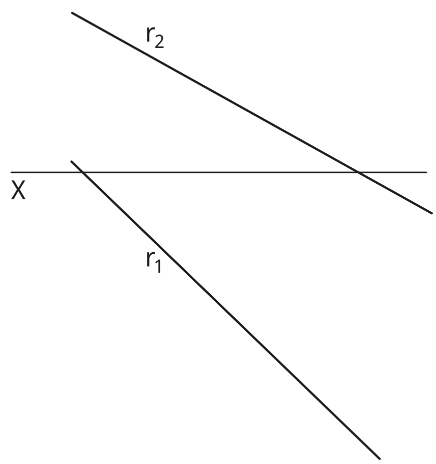
Pontos notáveis de uma reta

São denominados como pontos notáveis de uma reta os seus pontos de interseção (traços de uma reta) com os planos de projeção e com os planos bissetores. Estes pontos possuem características próprias, e por isso são importantes na definição de uma reta.

Traços de uma reta nos planos de projeção

Observa a reta **r**, representada pelas suas projeções.

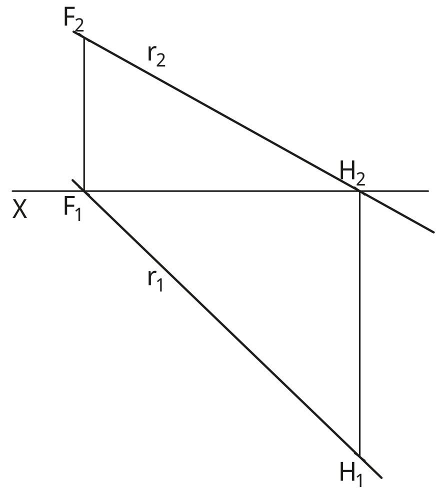
Inicialmente, vamos determinar os seus traços nos planos de projeção. Sabendo que, sendo pontos pertencentes à reta, têm as suas projeções sobre as projeções homónimas da reta, e uma vez que correspondem à interseção da reta com os planos de projeção, isso significa que são, simultaneamente, pontos pertencentes aos planos de projeção. No caso do traço frontal, pertence à reta e ao Plano Frontal de Projeção, e no caso do traço horizontal, pertencerá à reta e ao Plano Horizontal de Projeção.



Começando pelo traço frontal, e sabendo que qualquer ponto pertencente ao Plano Frontal de Projeção tem afastamento nulo, sabe-se que a sua projeção horizontal tem de estar, obrigatoriamente, sobre o eixo **x**. Ora, se o ponto também pertence à reta **r**, isso significa que, além de a sua projeção horizontal estar sobre o eixo **x**, também deve estar sobre a projeção horizontal da reta.

Assim, basta procurar o ponto em que $\mathbf{r_1}$ encontra o eixo **x** e tem-se a projeção horizontal do ponto **F** (traço frontal). A partir daí, deverá traçar-se uma linha de chamada até $\mathbf{r_2}$, de forma a determinar a projeção frontal do ponto – $\mathbf{F_2}$.

No caso do traço horizontal, o procedimento é o mesmo, mas num ponto de cota nula. Ou seja, quando a projeção frontal da reta cruza o eixo **x**, tem-se a projeção frontal de $\mathbf{H_2}$. Traçando-se uma linha de chamada até $\mathbf{r_1}$, tem-se a projeção horizontal de $\mathbf{H_1}$. Assim são determinados os traços de uma reta nos planos de projeção.



Traços de uma reta nos planos bissetores

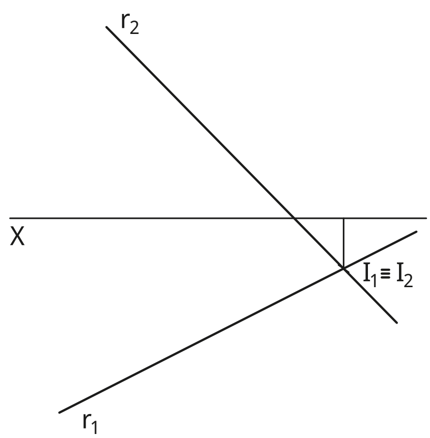
Tal como os traços nos planos de projeção, os traços nos planos bissetores são pontos de interseção da reta com os planos bissetores.

À semelhança dos traços frontal e horizontal, também os traços nos dois planos bissetores têm características específicas.

O traço de uma reta no plano **bissetor 1/3** tem as suas **projeções simétricas** face ao eixo **x**, pelo facto de ser um ponto situado ou no 1.° ou no 3.° diedros, cujas cotas e afastamentos são ou ambos positivos, ou ambos negativos. Uma vez que são pontos pertencentes ao plano bissetor, também o valor numérico das suas coordenadas é igual, o que origina projeções simétricas.

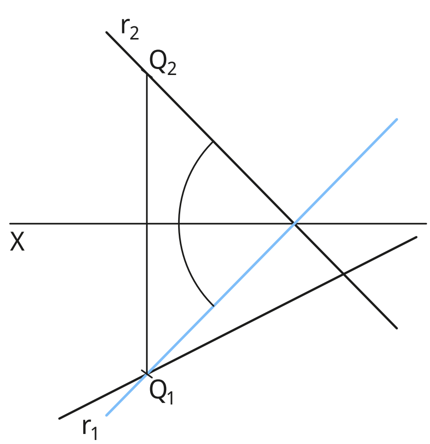
No caso do traço de uma reta no plano **bissetor 2/4**, o valor numérico das coordenadas também é igual, mas uma coordenada será positiva e outra negativa, como se verifica nos 2.° e 4.° diedros. Assim, as duas **projeções** desse ponto são **coincidentes**.

Para determinar o traço de uma reta no plano $\beta_{2/4}$, o procedimento consiste em encontrar o ponto em que as projeções da reta em questão se cruzam. Neste caso, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_1}$ cruzam-se em **I**, cujas projeções $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$ são coincidentes. Tem-se, assim, o traço da reta **r** no plano $\beta_{2/4}$.

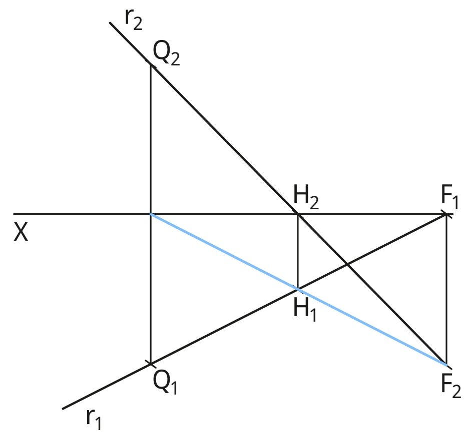


Já na determinação do traço de uma reta no plano $\beta_{1/3}$, existe um processo gráfico associado, que pode ser feito segundo dois métodos.

Uma das formas para determinar o traço no plano bissetor 1/3 é através do traçado de uma reta simétrica a uma das projeções da reta dada. Quando esta reta auxiliar cruzar a outra projeção da reta, tem-se uma das projeções do ponto **Q** (traço no $\beta_{1/3}$). No exemplo dado, optou-se por traçar uma reta simétrica a $\mathbf{r_2}$, relativamente ao eixo **x**. Quando esta intersecta $\mathbf{r_1}$, tem-se a projeção horizontal do ponto $\mathbf{Q_1}$. A determinação de $\mathbf{Q_2}$ é feita traçando uma linha auxiliar perpendicular a **x**, com origem em $\mathbf{Q_1}$, terminando em $\mathbf{r_2}$.



O segundo método utiliza as projeções de outros pontos notáveis da reta. Tal como o exemplo ilustra, as projeções do ponto **Q** também podem ser determinadas através de uma reta que contém a projeção horizontal e frontal dos traços da reta **r** com os planos de projeção. Assim, unindo $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{F_2}$, e prolongando essa reta até ao eixo **x**, temos $\mathbf{Q_0}$. A partir daí, traça-se uma linha auxiliar perpendicular ao eixo **x**, e quando cruzar as projeções da reta **r**, tem-se as projeções homónimas do ponto **Q** – $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$.

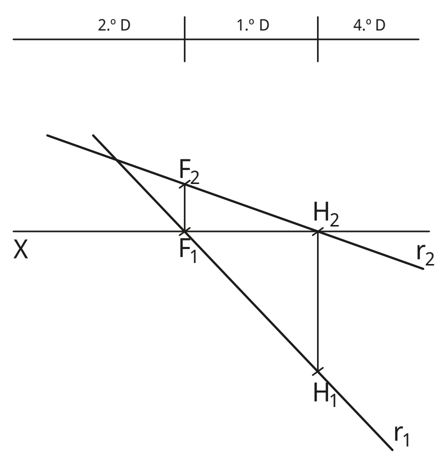


Percurso de uma reta no espaço

Sendo uma reta um conjunto infinito de pontos, dispostos sucessivamente numa determinada direção, esta não tem início nem fim, prolongando-se no espaço. Como tal, é importante entender o seu percurso no espaço, para que, mentalmente, seja possível visualizar a mesma. Essa determinação é feita identificando os diedros que a reta atravessa, e, para isso, são analisadas as coordenadas dos pontos constantes nessa reta. Nos segmentos de reta em que os pontos que lhe pertencem têm coordenadas positivas, sabe-se que se trata de um segmento existente no 1.° diedro. Contudo, num segmento em que as cotas são negativas e os afastamentos positivos, sabe-se que se trata de um segmento da reta que se encontra no 4.° diedro.

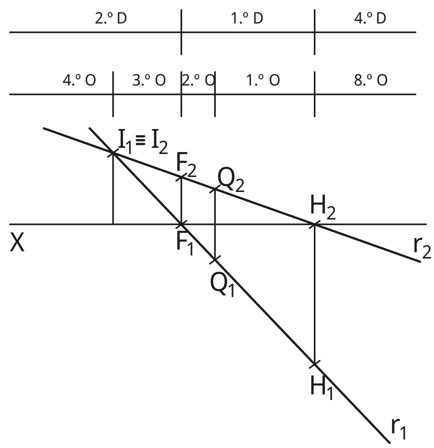
Observa a reta **r** definida pelos seus traços.

O segmento **[FH]** está situado no 1.° diedro, pois contém todos os pontos que contêm cota e afastamento positivos. Após a interseção da reta **r** com o Plano Frontal de Projeção, a reta passa para um diedro em que os afastamentos se tornam negativos, enquanto as cotas continuam positivas. Essa condição corresponde ao 2.° diedro. Já no troço que se segue ao traço horizontal, as cotas passam a negativas e os afastamentos continuam positivos, tratando-se, por isso, do 4.° diedro. Assim, pode dizer-se que a reta **r** percorre os 2.°, 1.° e 4.° diedros.



Considerando a mesma reta **r**, mas aprofundando o estudo do seu percurso no espaço, é, também, possível determinar que partes da reta se situam em cada octante. Para isso, é importante assinalar os traços da reta **r** nos planos bissetores. Estes vão marcar os pontos de viragem na relação das coordenadas. Isto é: vão determinar quando é que o afastamento passa a assumir um valor numérico superior ao da cota de determinado ponto e vice-versa.

Tendo como exemplo o 1.° diedro, e relembrando o que já foi estudado anteriormente, sabe-se que este está dividido em dois octantes. O 1.°, que contém todos os pontos de afastamento de valor superior à cota, e o 2.°, que contém todos os pontos de cota de valor superior ao do afastamento. Isto acontece porque a divisão é feita através do plano bissetor, neste caso, o $\beta_{1/3}$, que divide o diedro em dois espaços geometricamente iguais e onde estão situados todos os pontos que assumem igual valor tanto na cota como no afastamento.



Deste modo, no troço de reta que se situa no 2.° diedro, esta atravessa dois octantes, 4.° e 3.°. O ponto **I** assume-se como ponto de viragem, e, portanto, entre o ponto **I** e o traço frontal da reta, está o segmento da reta que atravessa o 3.° octante. Após o ponto **I**, a reta passa a estar no espaço geométrico correspondente ao 4.° octante. No 1.° diedro, a reta também atravessa dois octantes, e tem a sua transição no ponto **Q**. O segmento compreendido entre **F** e **Q** corresponde ao 2.° octante, uma vez que regista todos os pontos da reta cuja cota é superior ao afastamento. Já o segmento compreendido entre **Q** e **H** corresponde ao 1.° octante, uma vez que todos os seus pontos apresentam afastamento superior à cota.

Posição relativa de duas retas no espaço

Conforme já foi estudado anteriormente, duas retas podem ser complanares ou não complanares (ou enviesadas).

Retas

Complanares (paralelas ou concorrentes)
Quaisquer retas situadas no mesmo plano, podendo ser paralelas ou concorrentes num determinado ponto – ponto de concorrência.

Não complanares (ou enviesadas)
Quaisquer retas, com direções diferentes e não concorrentes.

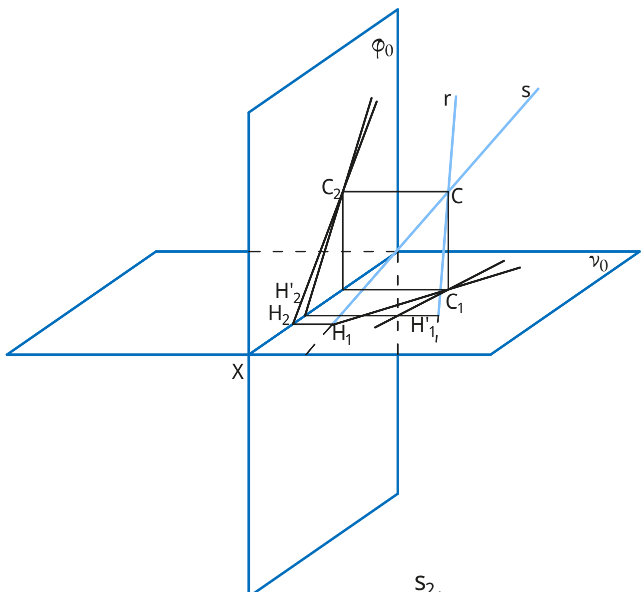
Retas concorrentes

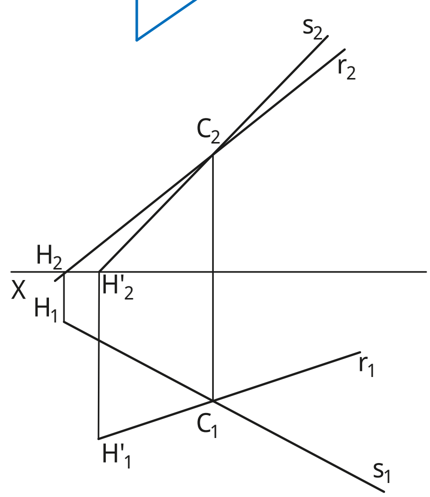
Observa o exemplo das retas **r** e **s**.

Ambas as **retas** são **concorrentes** num ponto (o ponto **C**), denominado ponto de concorrência.
Tendo em conta as projeções das retas, verifica-se que as projeções frontais de **r** e **s** são concorrentes na projeção frontal do ponto **C** – $\mathbf{C_2}$ –, e as projeções horizontais são concorrentes na projeção horizontal do ponto **C** – $\mathbf{C_1}$. Analisando o exemplo, agora em dupla projeção ortogonal, verifica-se que $\mathbf{s_2}$ e $\mathbf{r_2}$ são concorrentes em $\mathbf{C_2}$.

Em projeção horizontal, $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{s_1}$ são concorrentes em $\mathbf{C_1}$.

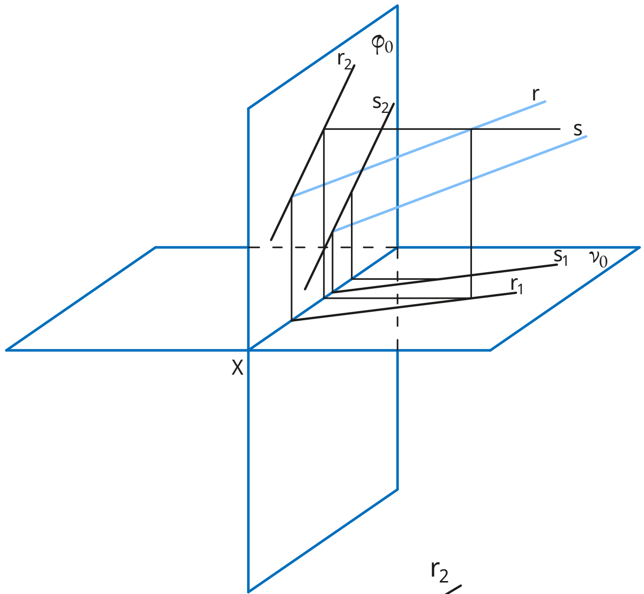
Neste caso, pode dizer-se que a reta **r** está definida pelo ponto **C** e pelo seu traço horizontal – **H'** –, e que a reta **s** está, também, definida pelo ponto **C** e pelo seu traço horizontal – **H**.





Retas paralelas

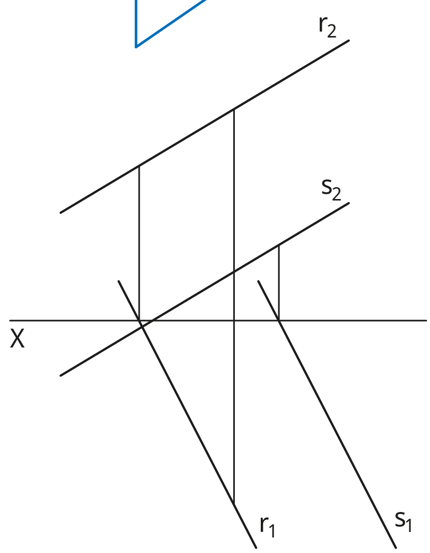
Retas paralelas têm a mesma direção e intersetam-se num ponto a distância infinita, denominado ponto impróprio. Assim, no plano do desenho, duas retas paralelas não possuem qualquer ponto de concorrência.



Considera as retas **r** e **s**.

As retas são paralelas, bem como as suas projeções:

- $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{s_2}$ são paralelas entre si;
- $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{s_1}$ são paralelas entre si.

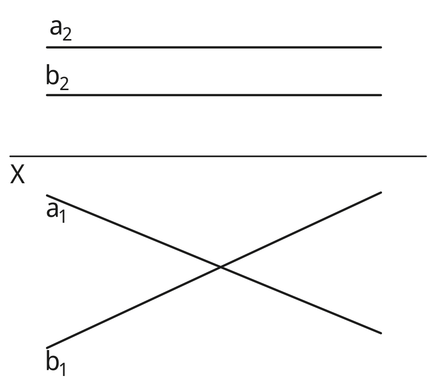


Em conclusão, retas paralelas têm as suas projeções homónimas paralelas entre si.

Esta condição é suficiente para comprovar o paralelismo entre duas retas.

Retas não complanares (enviesadas)

Retas **não complanares** são retas que não se situam no mesmo plano e, por isso, não são paralelas nem concorrentes. Na verdade, são retas que não possuem a mesma direção ou qualquer ponto de concorrência.

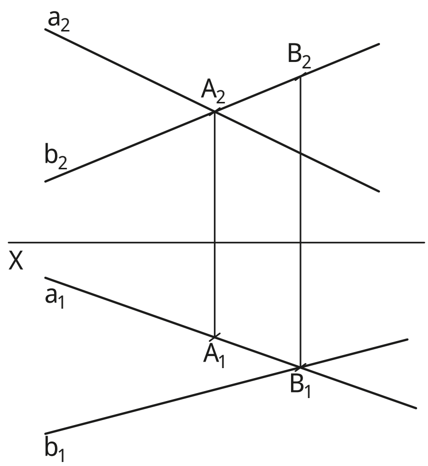


Considera o exemplo das retas **a** e **b**. As suas projeções frontais são paralelas. Contudo, as projeções horizontais são concorrentes. Esta dualidade revela que as retas não são paralelas, pois as projeções homónimas não são paralelas entre si, mas também não são concorrentes, porque, embora as projeções horizontais sejam concorrentes, em projeção frontal pode verificar-se que as retas não se intersetam.

Manual Digital

Documento
Alfabeto da reta

Este exemplo mostra duas retas, **a** e **b**, cujas projeções frontais e horizontais são concorrentes. No entanto, as projeções horizontais e frontais não são concorrentes no mesmo ponto. O ponto **A**, de concorrência entre $\mathbf{a_2}$ e $\mathbf{b_2}$, não tem correspondência no ponto de concorrência de $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{b_1}$. Assim, conclui-se que **a** e **b** não são retas concorrentes, uma vez que **não possuem um ponto em comum**.



Alfabeto da reta

Cada reta, consoante a sua posição no espaço, tem uma denominação. Isto é, existem vários tipos de retas, e cada reta é atribuída a cada um desses tipos, tendo em conta a sua relação com os planos de projeção. Podemos ter retas paralelas ao Plano Horizontal de Projeção, ao Plano Frontal de Projeção, bem como retas perpendiculares a cada um destes planos, ou oblíquas aos mesmos. De seguida, serão abordados todos os tipos de retas que podem existir no espaço geométrico, separando-as em três grandes grupos:

- retas paralelas ao Plano Horizontal de Projeção (P. H. P.);
- retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção (P. F. P.);
- retas oblíquas a ambos os planos de projeção (P. P.).

Resumindo

Retas paralelas ao P. H. P.:
- retas horizontais (de nível);
- retas de topo;
- retas fronto-horizontais.

Retas paralelas ao P. F. P.:
- retas frontais (de frente);
- retas verticais;
- retas fronto-horizontais.

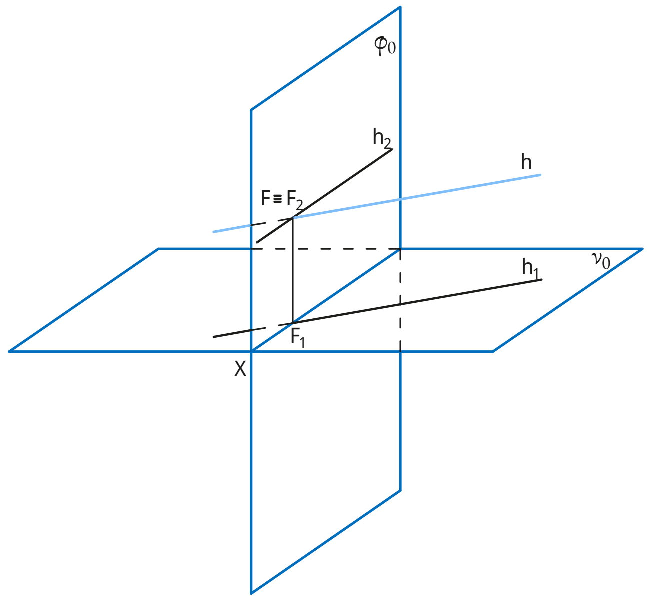
Retas oblíquas aos P. P.:
- retas oblíquas;
- retas de perfil;
- retas passantes.

Retas paralelas ao Plano Horizontal de Projeção

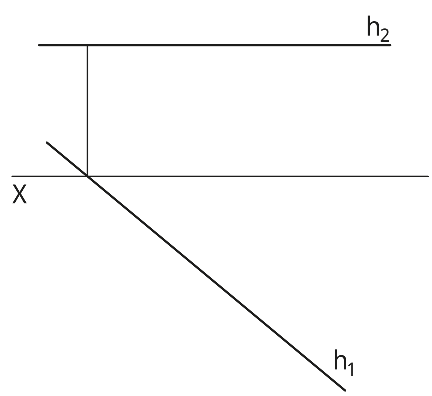
Retas horizontais (ou de nível)

Em Geometria Descritiva, uma **reta horizontal** é uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção e oblíqua face ao Plano Frontal de Projeção.

Observa o exemplo à direita.

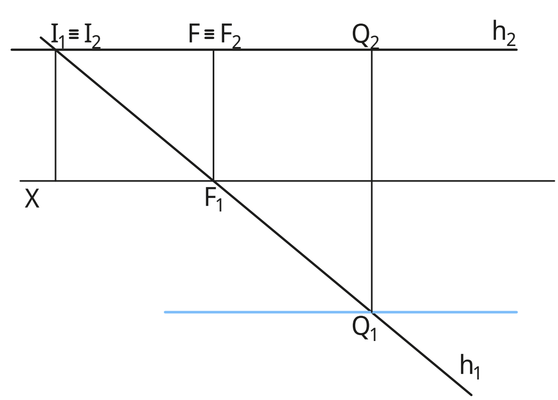


A reta **h** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e a sua projeção frontal resulta numa reta paralela ao eixo **x**. Esta condição confirma que todos os pontos pertencentes à reta **h** possuem a mesma cota, uma vez que se trata de uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (todos os pontos da reta estão a igual distância do Plano Horizontal de Projeção). Contudo, a reta **h** forma um determinado ângulo com o Plano Frontal de Projeção, não sendo perpendicular a este. Assim, a reta **h** é oblíqua face ao Plano Frontal de Projeção. Em dupla projeção ortogonal, a representação da reta **h** é feita através de uma projeção da reta, no Plano Frontal de Projeção, paralela ao eixo **x**, e no Plano Horizontal de Projeção, através de uma reta de ângulo variável (conforme o caso), com o eixo **x**.

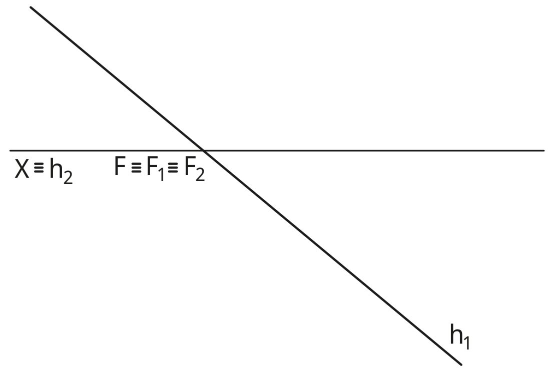


Determinando os pontos notáveis da reta **h**:

- O traço frontal da reta **h** – **F** é determinado a partir da interseção da projeção horizontal da reta – $\mathbf{h_1}$ – com o eixo **x**. Neste caso, $\mathbf{F_2}$.
- O traço da reta no plano bissetor 1/3 é obtido através do traçado de uma reta auxiliar paralela a $\mathbf{h_2}$, simétrica a esta relativamente ao eixo **x**. Aí é determinada a projeção horizontal do ponto **Q** (traço da reta **r** no plano $\beta_{1/3}$).



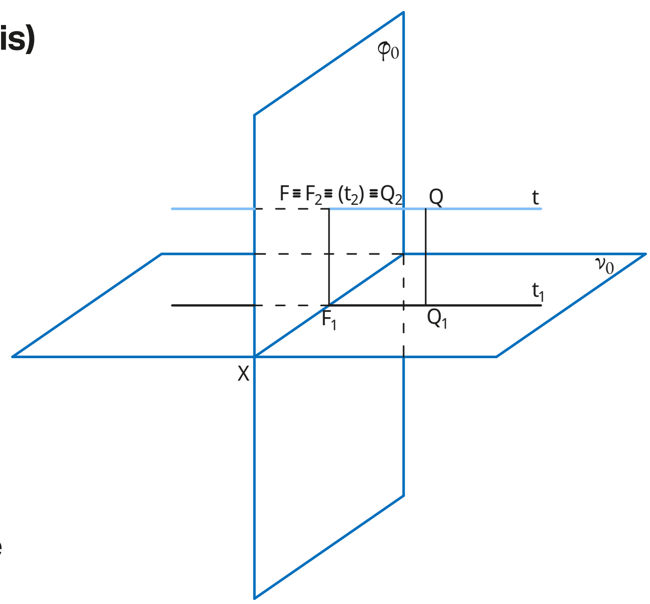
- A projeção frontal do ponto é obtida através da linha de chamada sobre a projeção frontal da reta **h** – $\mathbf{h_2}$.
- O traço da reta no plano bissetor 2/4 é obtido através da interseção das duas projeções. Esse ponto é o ponto **I** (interseção da reta **h** com o plano $\beta_{2/4}$).



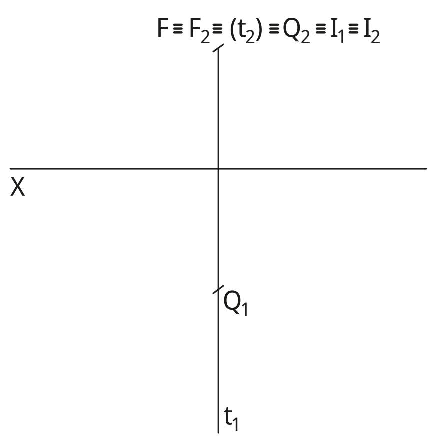
No exemplo ao lado, está representada uma reta horizontal de cota nula. Ou seja, está representada uma reta pertencente ao Plano Horizontal de Projeção. Neste caso, a sua projeção frontal está coincidente com o eixo **x**. Todos os seus traços estão coincidentes e localizam-se no eixo **x**.

Retas de topo (ou projetantes frontais)

Uma **reta de topo** é, também, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção. Porém, o que a distingue de uma reta horizontal (ou de nível) é a sua posição face ao Plano Frontal de Projeção. Todas as retas de topo são, simultaneamente, paralelas ao Plano Horizontal de Projeção e perpendiculares ao Plano Frontal de Projeção. Por isto, são consideradas retas projetantes frontais, pois, devido à perpendicularidade face ao Plano Frontal de Projeção, todas as projeções frontais dos seus pontos estão coincidentes. Assim, a própria projeção frontal da reta de topo é apenas um ponto. Diz-se que, na projeção frontal, a reta **t** está em deformação máxima.

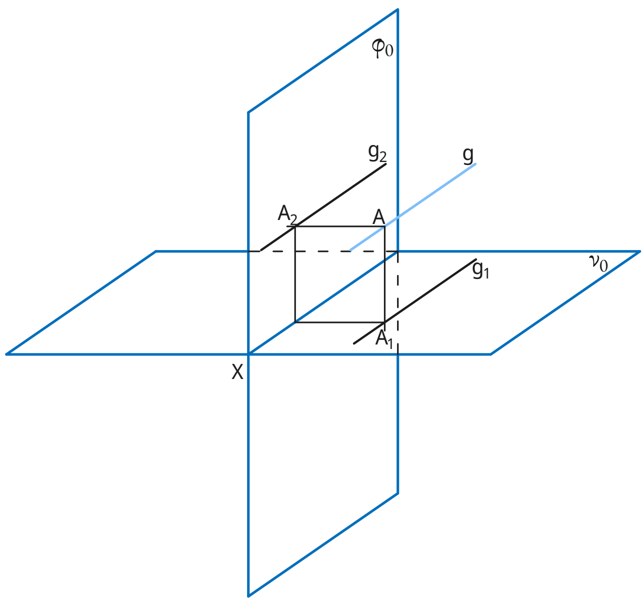


Observando a reta **t** em dupla projeção ortogonal, verifica-se que todos os seus traços têm projeções frontais coincidentes. A projeção horizontal da reta é perpendicular ao eixo **x**, uma vez que a reta **t** é perpendicular ao Plano Frontal de Projeção.

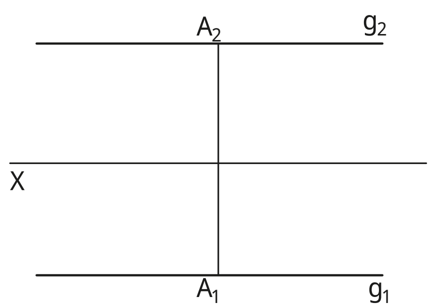


Repara que retas horizontais e retas de topo não possuem traço no Plano Horizontal de Projeção – **H**, pois são paralelas a este. Uma reta horizontal ou de topo só interseta o Plano Horizontal de Projeção num ponto a distância infinita (ponto impróprio).

Retas fronto-horizontais



Tal como o nome indica, uma reta fronto-horizontal é uma reta que é paralela a ambos os planos de projeção (paralela ao Plano Horizontal de Projeção e ao Plano Frontal de Projeção). Deste modo, para além de não possuir traço no P. H. P., também não possui traço no P. F. P. Relativamente aos planos bissetores, também não apresentam, pois são retas que se prolongam por apenas um diedro. No entanto, podem pertencer ao próprio plano bissetor, se forem equidistantes relativamente a ambos os planos de projeção.



Em dupla projeção ortogonal, uma reta fronto-horizontal tem as suas projeções paralelas ao eixo **x**, pois são retas paralelas à interseção dos dois planos de projeção (que corresponde ao eixo **x**).

Neste caso, a reta **g** situa-se no 1.° diedro, uma vez que regista cota positiva e afastamento positivo (**g_2** está acima do eixo **x** e **g_1** está abaixo do eixo **x**).

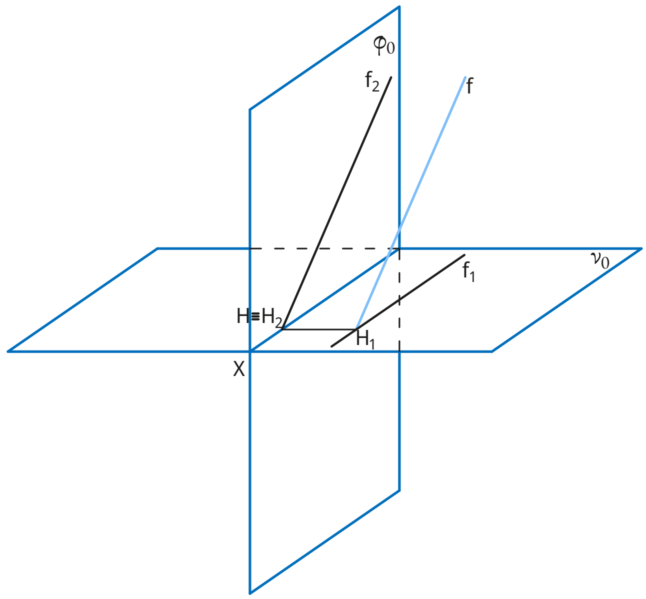
Uma reta fronto-horizontal com cota e afastamento nulos é uma reta coincidente com o eixo **x**, como se pode verificar na representação ao lado.

Retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção

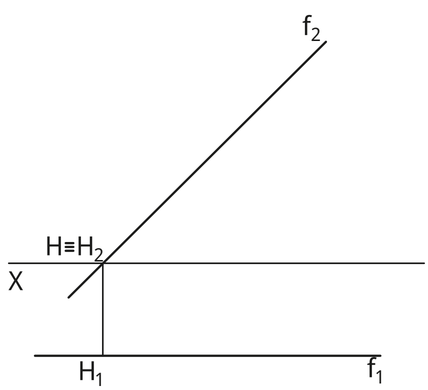
As **retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção** são um conjunto de tipos de retas que cumprem o requisito de paralelismo com o P. F. P., apresentando sempre afastamento igual, em qualquer um dos seus pontos. Estas são conhecidas como retas frontais ou de frente. Contudo, tal como acontece nas retas horizontais, há características que as diferenciam. Assim, de modo particular, uma reta frontal é apenas um dos tipos de reta paralela ao Plano Frontal de Projeção.

Retas frontais (ou de frente)

Retas frontais (ou de frente) são retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção e oblíquas face ao Plano Horizontal de Projeção. O ângulo que estas formam com o plano horizontal é projetado em verdadeira grandeza (sem qualquer deformação) no Plano Horizontal de Projeção. Assim, projeção frontal da reta **f** é paralela à própria reta. Já a projeção horizontal encontra-se deformada e apresenta-se sob a forma de uma reta paralela ao eixo **x**, devido ao afastamento constante (consequência do paralelismo face ao Plano Frontal de Projeção).



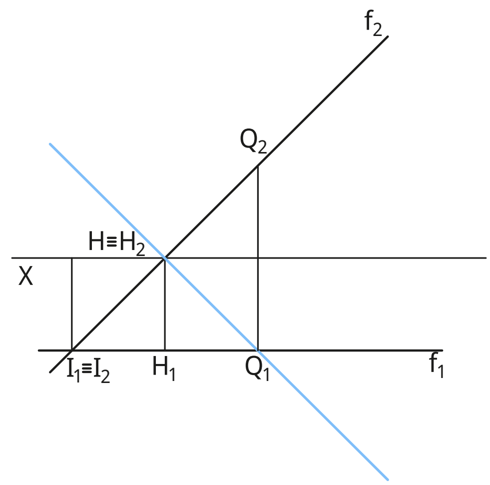
Em dupla projeção ortogonal, a projeção frontal da reta **f** – $\mathbf{f_2}$ – forma um determinado ângulo com o eixo **x** (o mesmo ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção) e a projeção $\mathbf{f_1}$ é paralela a **x**.



Determinando os pontos notáveis da reta **f**:

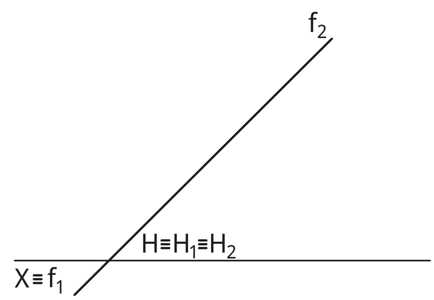
- O traço horizontal da reta **f** é determinado a partir da interseção da projeção frontal da reta – $\mathbf{f_2}$ – com o eixo **x**. Neste caso, o ponto **H**.

- O traço da reta no plano bissetor 1/3 é obtido através do traçado de uma reta auxiliar paralela a $\mathbf{f_1}$, simétrica a esta, face ao eixo **x**. Aí é determinada a projeção horizontal do ponto **Q** (traço da reta **f** no plano $\beta_{1/3}$). A projeção frontal do ponto é obtida através da linha de chamada, sobre a projeção frontal da reta **f** – $\mathbf{f_2}$.



Nota que, neste caso, traçou-se uma reta simétrica a $\mathbf{f_2}$. Porém, poderia ter-se traçado uma simétrica a $\mathbf{f_1}$, à semelhança do que foi apresentado anteriormente,
no caso de uma reta horizontal.

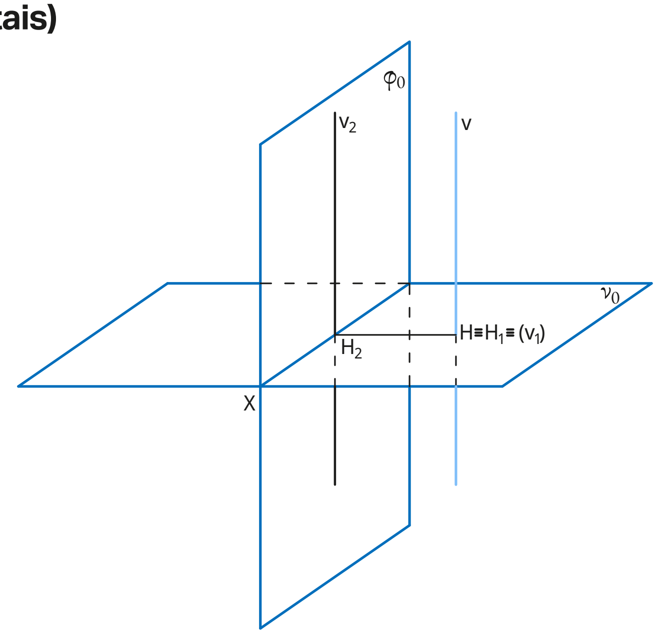
- O traço da reta no plano bissetor 2/4 é obtido através da interseção das duas projeções. Esse ponto é o ponto **I** (interseção da reta **h** com o plano $\beta_{2/4}$).



Quando uma reta frontal possui afastamento nulo, esta tem a sua projeção horizontal coincidente com o eixo **x**.
É uma reta pertencente ao Plano Frontal de Projeção. Todos os seus pontos notáveis estão sobre o eixo **x**.

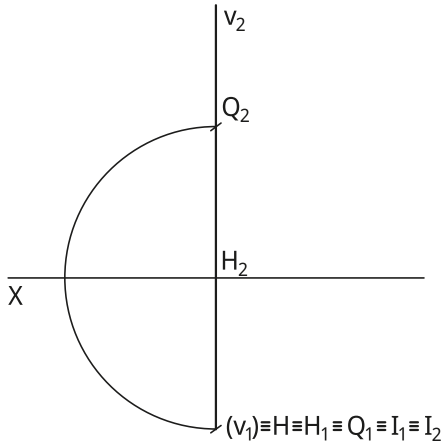
Retas verticais (ou projetantes frontais)

Uma **reta vertical**, além de ser paralela ao Plano Frontal de Projeção, é perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção. Deste modo, é uma reta projetante horizontal, uma vez que a sua projeção horizontal resulta num só ponto, que concentra todas as projeções horizontais de todos os pontos pertencentes à reta **v**. Assim, diz-se que a reta **v**, em projeção horizontal, está em deformação máxima, estando reduzida à sua dimensão mínima (ponto).



A sua projeção frontal está em verdadeira grandeza, ou seja, não sofre qualquer alteração, devido ao paralelismo face ao Plano Frontal de Projeção.

Determinando os pontos notáveis da reta **v**, conclui-se que todas as projeções horizontais dos seus pontos notáveis estão coincidentes na projeção horizontal da reta **v** – **(v_1)**. O seu traço no plano bissetor 1/3 tem a sua projeção frontal simétrica à sua projeção horizontal sobre **v_2**.



Retas fronto-horizontais

Apesar de já terem sido abordadas no grupo de retas paralelas ao Plano Horizontal de Projeção, as **retas fronto-horizontais** também pertencem ao grupo de retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção, uma vez que são paralelas a ambos os planos de projeção. É, por isso, correto inserir este tipo de retas em cada um dos dois grupos.

Retas oblíquas aos planos de projeção

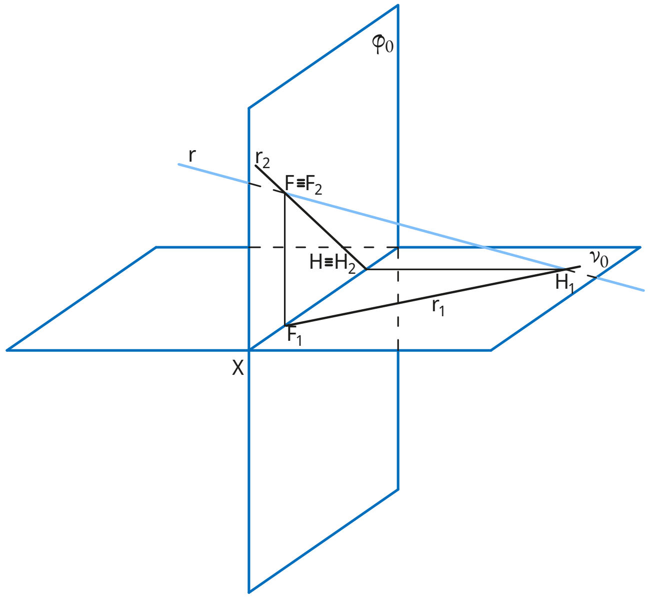
As **retas oblíquas aos planos de projeção** são retas que não são paralelas nem perpendiculares a qualquer um dos planos de projeção. Deste modo, é possível antever que nenhuma das suas projeções estará em verdadeira grandeza ou em deformação máxima.

Tal como nos outros grupos de retas, as retas oblíquas podem dividir-se em dois subtipos:

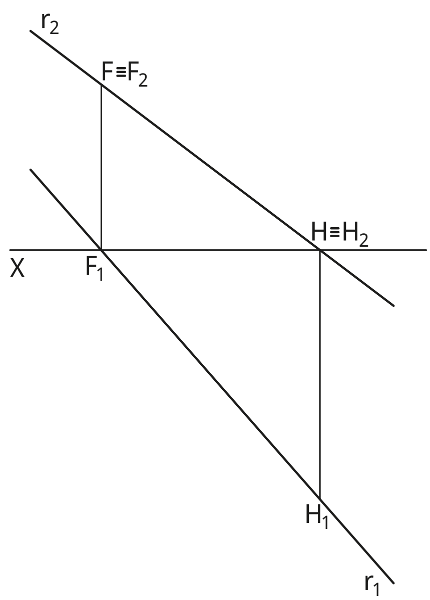
- retas oblíquas ao eixo **x** (reta oblíqua);
- retas ortogonais ao eixo **x** (reta de perfil).

Retas oblíquas

Como já foi referido, uma **reta oblíqua** é oblíqua face aos planos de projeção. Neste caso, a reta **r** é oblíqua ao eixo **x**, tratando-se de uma reta oblíqua na sua particularidade.



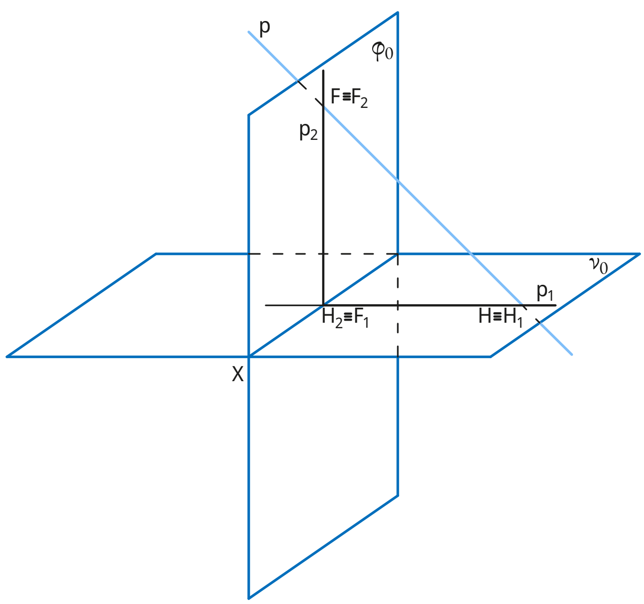
Observando a reta **r**, representada pelas suas projeções, verifica-se que as suas projeções são ambas oblíquas face ao eixo **x**, e nenhuma delas representa a reta **r** de forma totalmente fiel, uma vez que estão sujeitas a deformação face à posição da reta **r** no espaço.



Uma reta oblíqua pode atravessar três diedros, em oposição às retas paralelas a planos de projeção, que, por força dessa condicionante, atravessarão, no máximo, dois diedros.

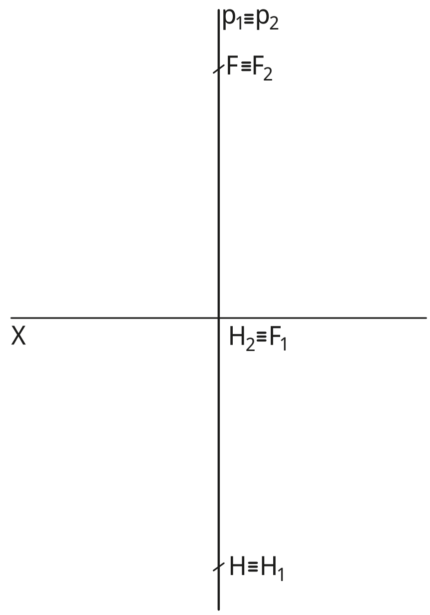
Retas de perfil

Uma **reta de perfil** é uma reta oblíqua aos planos de projeção e ortogonal ao eixo **x**.



Ao contrário de uma reta oblíqua, uma reta de perfil tem uma das suas coordenadas constante: a abcissa. Assim, uma reta de perfil pertence, sempre, a um qualquer plano de perfil, cuja abcissa seja a mesma dos pontos pertencentes à reta **p**.

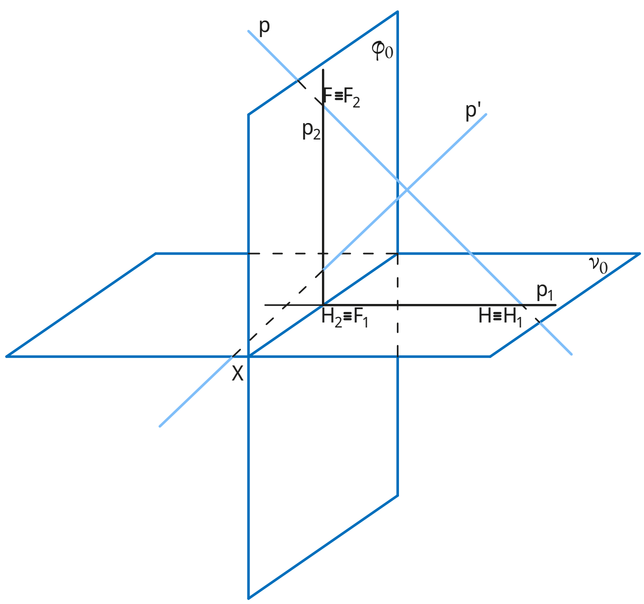
Tal como qualquer reta oblíqua, uma reta de perfil atravessa três diedros, possuindo todos os pontos notáveis, uma vez que interseta todos os planos de projeção e bissetores (o mesmo poderá não acontecer numa reta de perfil passante, como irá ser abordado mais à frente).



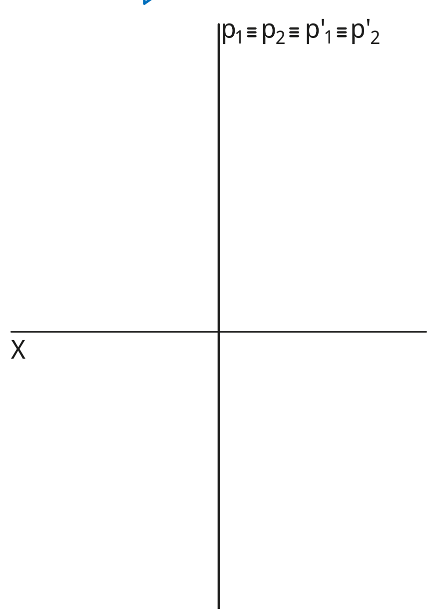
Em dupla projeção ortogonal, as projeções da reta de perfil representam-se coincidentemente, sob uma perpendicular ao eixo **x**, em que $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ estão coincidentes.

Ambas as projeções estão deformadas, não representando as verdadeiras dimensões de segmentos contidos na reta.

As retas de perfil são as retas que, representadas sob o sistema de dupla projeção ortogonal, possuem informação mais incompleta. Assim, é impossível imaginar com algum rigor a posição da reta no espaço, uma vez que, duas retas de perfil, contidas no mesmo plano de perfil, possuem projeções idênticas qualquer que seja a relação entre ambas.



Observa as retas **p** e **p'**, concorrentes no espaço. As suas posições no espaço são completamente distintas.
No entanto, observando as suas projeções no plano do desenho, estas são iguais, não permitindo entender, por si só, a sua posição no espaço.



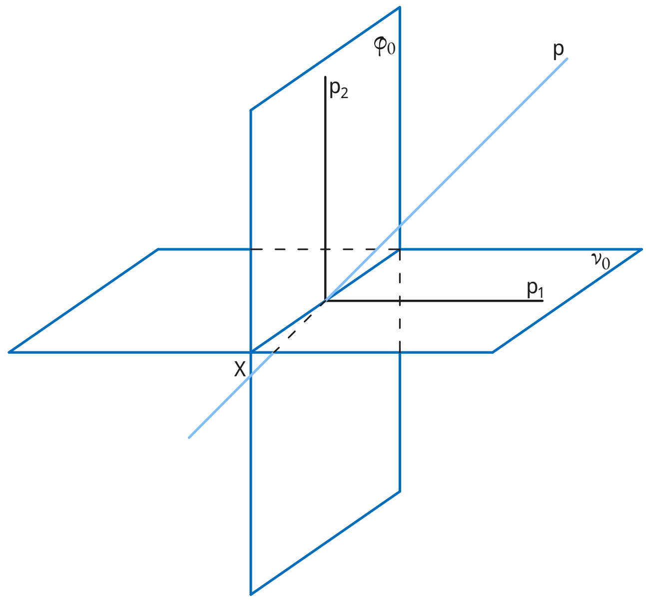
Se fosse tida em conta apenas a representação bidimensional de ambas as retas, era impossível determinar se estas são concorrentes ou paralelas.

Este é o único tipo de reta em que o princípio de condição de pertença de um ponto a uma reta (as projeções do ponto estão sobre as projeções homónimas da reta) não se aplica.

Retas passantes

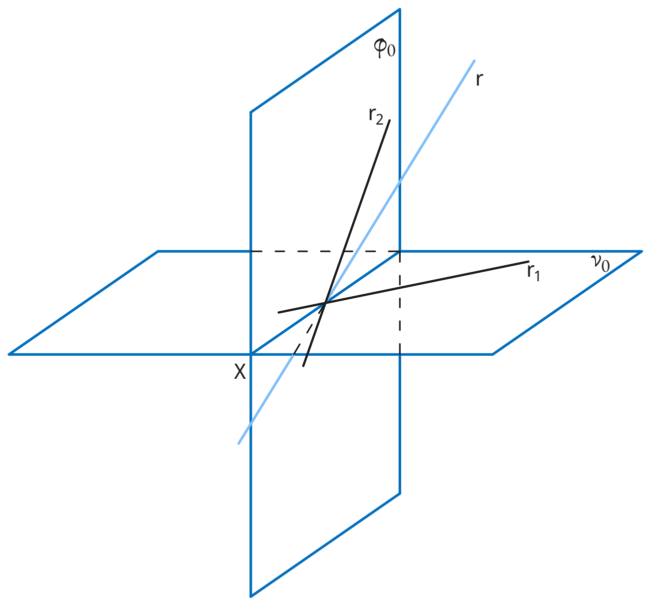
Retas passantes são retas concorrentes com o eixo **x**. Têm, por isso, todos os seus traços coincidentes num único ponto, situado no eixo **x**.

As retas passantes podem ser oblíquas ou de perfil. Nestes casos, as retas atravessam apenas dois diedros, sendo estes opostos. Isto é, ou atravessam o 1.° e 3.° diedros, ou o 2.° e 4.° diedros.



As **retas de perfil passantes** são retas oblíquas face aos planos de projeção, mas perpendiculares ao eixo **x** e concorrentes com este.

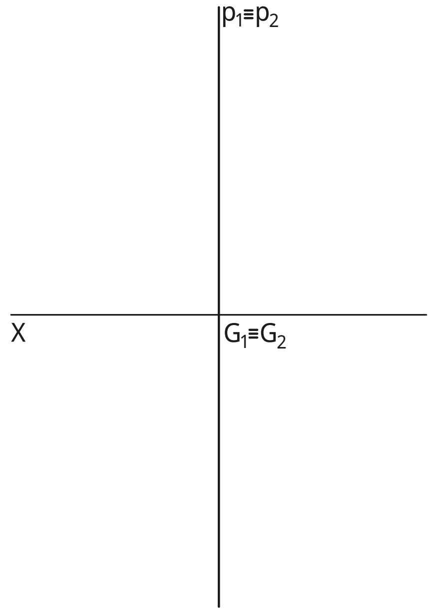
Observando a reta **p**, verifica-se que se trata de uma reta de perfil passante, uma vez que todos os seus pontos apresentam a mesma abcissa, resultando em projeções perpendiculares ao eixo **x**. A reta **p** é concorrente com o eixo **x** num ponto onde estão coincidentes todos os seus pontos notáveis, ou seja, a interseção da reta com os planos de projeção e os planos bissetores.



No caso da reta **r**, trata-se de uma **reta oblíqua passante**, uma vez que é oblíqua relativamente aos planos de projeção e ao eixo **x**, e possui um ponto de concorrência com o eixo **x**. Também aqui, todos os pontos notáveis estão concentrados num só ponto – ponto de concorrência da reta **r** com o eixo **x**.

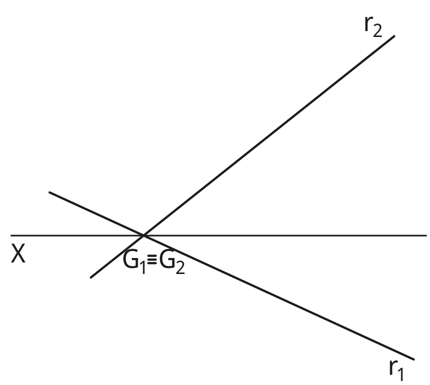
Analisando a dupla projeção ortogonal da reta **p**, constata-se que, como em todas as retas de perfil, as suas projeções são coincidentes e perpendiculares ao eixo **x**. O ponto **G** é o ponto de concorrência da reta com o eixo **x**, tendo, por isso, as suas projeções coincidentes.

Neste caso, apenas as projeções da reta não permitiriam entender que se trata de uma reta passante. Assim, torna-se fundamental saber que o ponto **G** pertence à reta **p**, para que seja possível a apreensão da reta **p** como uma reta de **perfil passante**.



Observando a reta **r** a partir das suas projeções, constata-se que não seria necessário conhecer as projeções do ponto **G** como um ponto pertencente à reta **r**, uma vez que $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ intersetam o eixo **x** no mesmo ponto. Neste caso, as suas projeções são suficientes para entender que se trata de uma **reta oblíqua passante**.

Apesar da deformação própria que as retas oblíquas sofrem nas suas projeções, os seus pontos de concorrência com o eixo **x**, sendo coincidentes, demonstram que a reta interseta o Plano Horizontal de Projeção e o Plano Frontal de Projeção no mesmo ponto. Assim, significa que a reta **r** interseta uma outra reta comum a ambos os planos de projeção – o eixo **x**.



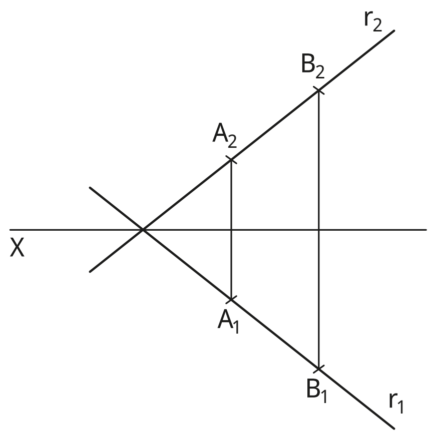
Retas situadas nos planos bissetores

As retas situadas nos planos bissetores são, obrigatoriamente, ou retas passantes, ou retas fronto-horizontais, uma vez que a reta de interseção desses planos com os planos de projeção é o eixo **x**. Assim, qualquer reta que pertença a um dos planos bissetores deverá ser:

- paralela ao eixo **x** (reta fronto-horizontal);
- concorrente com o eixo **x** (reta passante).

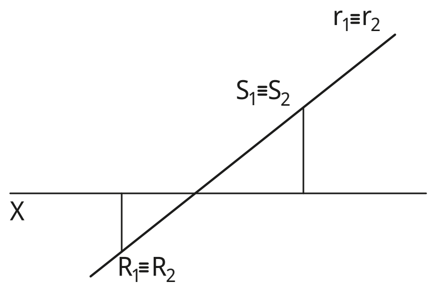
Além disto, os seus pontos deverão ter projeções simétricas, relativamente ao eixo **x** (se for uma reta pertencente ao plano bissetor 1/3) ou coincidentes (se for uma reta situada no plano bissetor 2/4).

Observa a reta **r** representada pelas suas projeções. Ambas concorrem com o eixo **x** no mesmo ponto. As suas projeções são simétricas relativamente ao eixo **x**, o que demonstra que todos os seus pontos também terão as suas projeções simétricas, como é o caso de **A** e **B**.



Considerando a reta **s**, representada pelas suas projeções, que são coincidentes, constata-se que se trata de uma reta pertencente ao plano bissetor 2/4.

Toda a reta que tenha as suas projeções coincidentes, desde que não se trate de uma reta de perfil, é uma reta do plano bissetor 2/4.



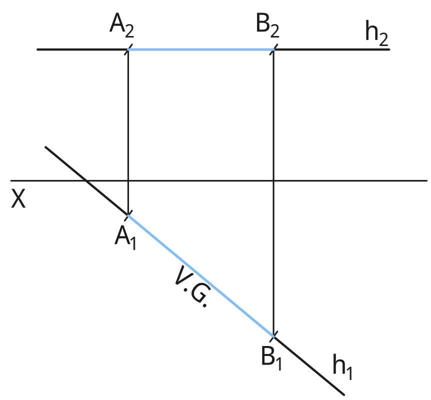
Projeção de segmentos de reta

Por segmento de reta, entende-se uma porção de linha reta compreendida entre dois pontos. Ao contrário de uma reta, um segmento é mensurável, tendo princípio e fim (delimitados pelos pontos definidores do segmento). Qualquer segmento de reta está sobre uma dada reta, denominada reta de suporte.

A noção de verdadeira grandeza é importante quando se fala de segmentos de reta, pois uma vez que estes são possíveis de medir, é fundamental conhecer a verdadeira grandeza de um segmento, de modo a conhecer o seu real comprimento.

Verdadeira grandeza

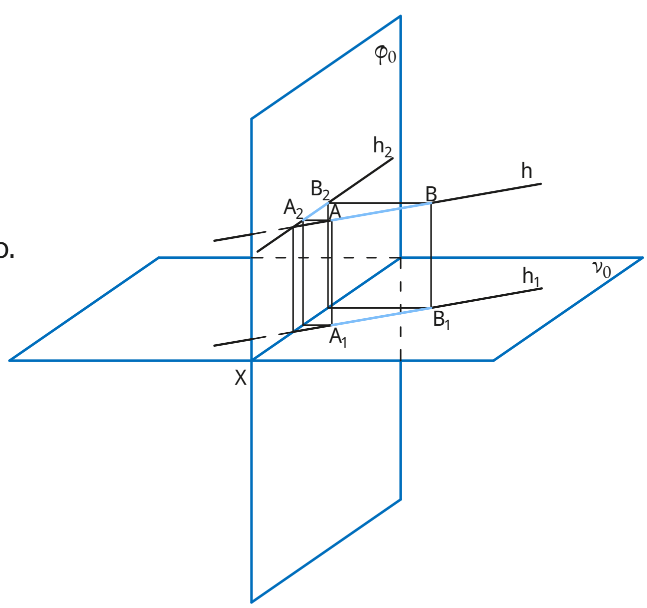
Por **verdadeira grandeza** de um segmento entende-se a sua real dimensão no espaço. Assim, em dupla projeção ortogonal, é possível obter uma verdadeira grandeza em todas as projeções em que o elemento projetado está paralelo ao plano de projeção em questão.



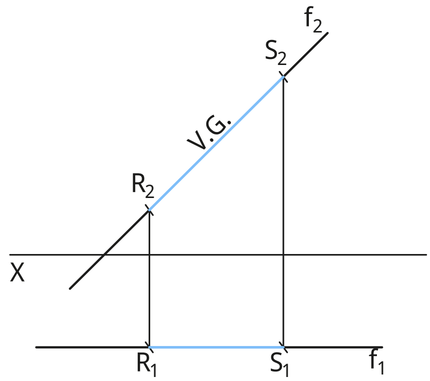
Por exemplo: numa reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a sua projeção horizontal está em verdadeira grandeza. Assim, qualquer segmento situado numa reta horizontal pode ser representado na sua medida real em projeção horizontal.

Repara na representação da reta **h** no espaço.

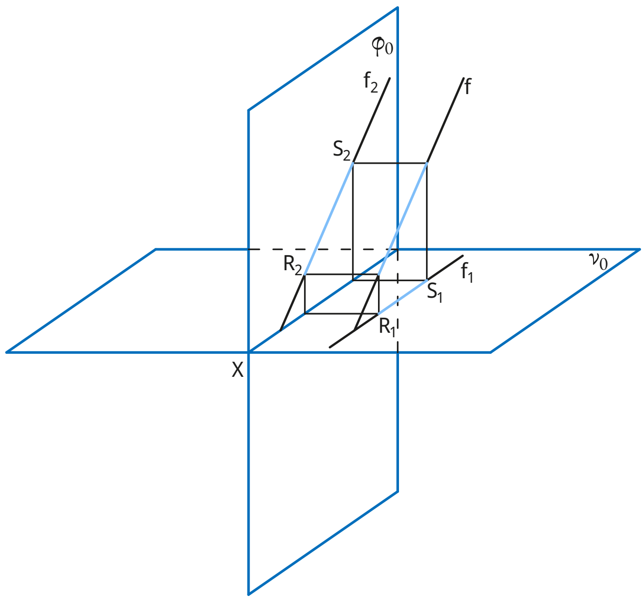
A sua projeção horizontal não sofre qualquer deformação, graças ao seu paralelismo com o Plano Horizontal de Projeção.



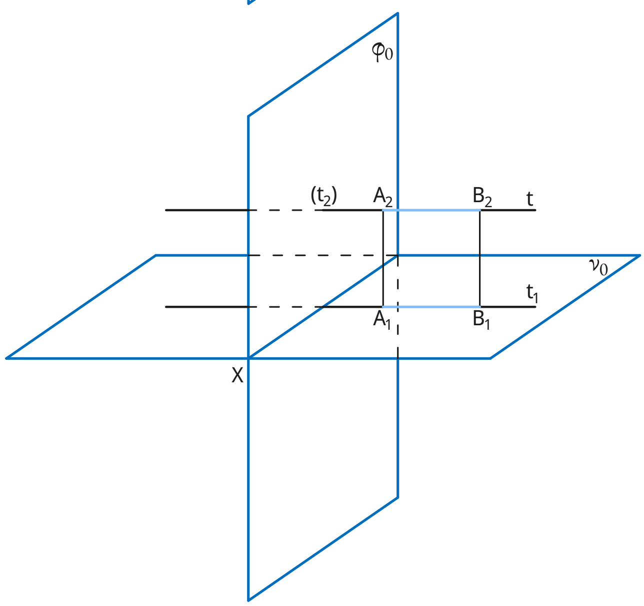
O mesmo acontece em retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção. Nestes casos, é a sua projeção frontal que está em verdadeira grandeza. A projeção frontal do segmento – **[R_2S_2]** – é a representação fiel da real dimensão desse segmento de reta.



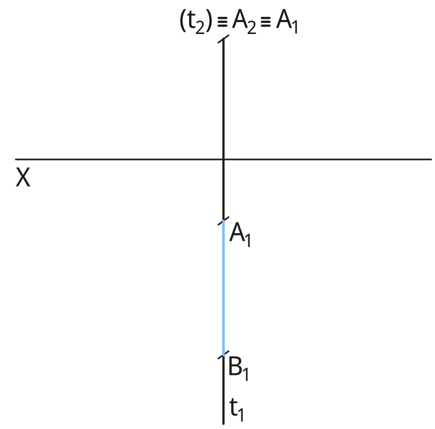
Ao observar a reta **f** no espaço, constata-se que a sua projeção frontal não sofre qualquer deformação, estando representada em verdadeira grandeza. Já a sua projeção horizontal está deformada, não sendo possível fazer uma real medição do segmento na sua projeção horizontal – **[R_1S_1]**.



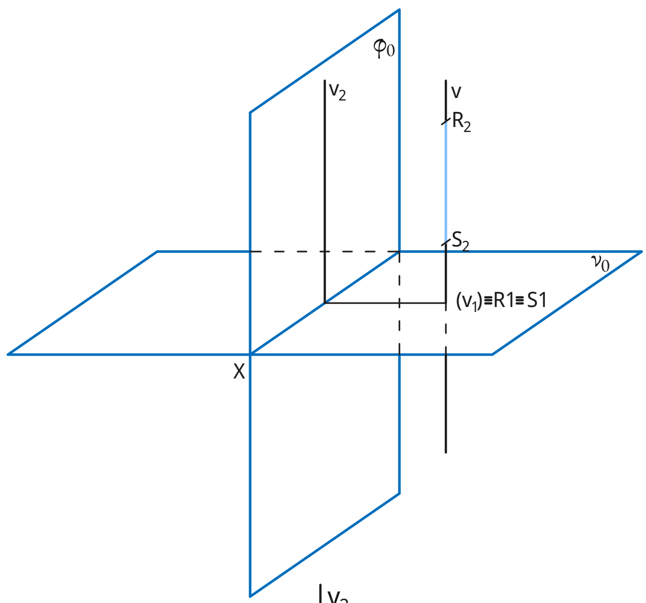
Retas de topo também têm uma das suas projeções em verdadeira grandeza. Neste caso, a projeção horizontal.



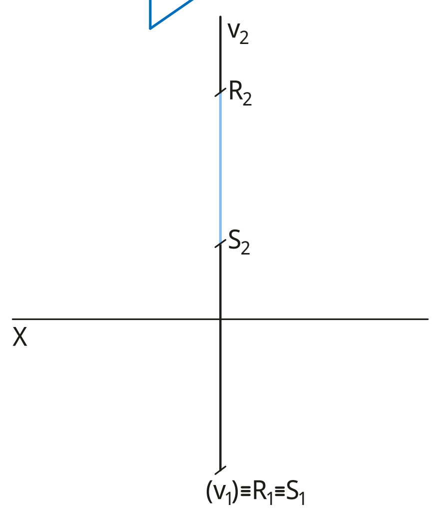
Notemos que a projeção horizontal do segmento **[AB]** está em verdadeira grandeza.



No caso de uma reta vertical, é a sua projeção frontal que se encontra em verdadeira grandeza.



Em dupla projeção ortogonal, o comprimento real do segmento **[RS]** pode ser medido, diretamente, na sua projeção frontal.



Resumindo

- Retas paralelas ao Plano Horizontal de Projeção – Projeção horizontal em verdadeira grandeza
- Retas paralelas ao Plano Frontal de Projeção – Projeção frontal em verdadeira grandeza

Manual Digital

Documento
Famílias de retas

Elementos definidores de um plano

Em Geometria Descritiva, um plano corresponde a uma região do espaço, sob a forma de uma superfície plana.

Um plano é originado pela deslocação sucessiva de uma determinada reta numa dada direção (ver página 25).

No contexto quotidiano, há diversos elementos que correspondem à materialização do que é um plano, por exemplo: o tampo de uma mesa, o chão, se este for nivelado, uma folha de papel, etc.

No contexto da Geometria Descritiva, uma reta pode ser definida por dois pontos, ou um ponto e uma direção, como já foi abordado anteriormente.

Resumindo

Planos são predefinidos por:

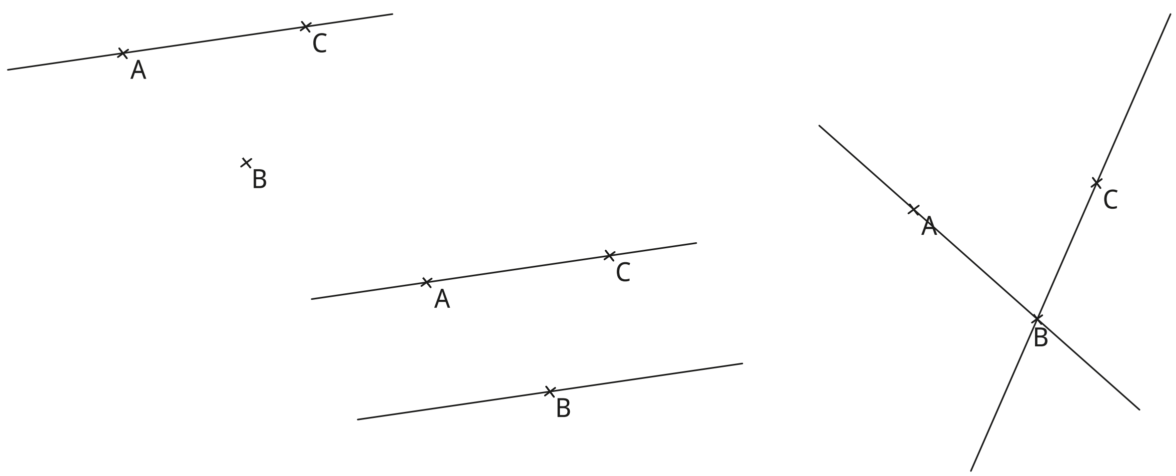
- duas retas (paralelas ou concorrentes);
- uma reta e um ponto exterior à reta;
- três pontos não colineares.

No exemplo abaixo, podemos observar os pontos **A**, **B** e **C**, não colineares. Traçando uma reta por **A** e **C**, poder-se-á traçar uma segunda reta, que contém **B** e é paralela à reta que contém **A** e **C**.

No entanto, podem traçar-se duas retas, concorrentes, por exemplo, em **B**, uma contendo **A** e outra contendo **C**.

As três situações abaixo representadas são suficientes para definir um plano.

Com isto, conclui-se que a existência de três pontos não colineares é a base para qualquer um dos outros critérios no que respeita à definição de planos em Geometria Descritiva.

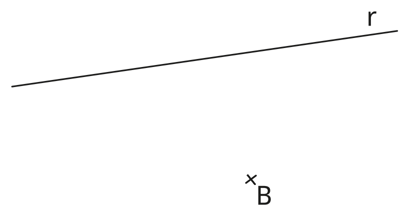


Resumindo

- Um **plano** é um elemento bidimensional que corresponde a uma superfície, ao longo da qual uma reta se repete infinitamente, paralelamente a si própria, seguindo uma determinada direção.
- Um plano não possui uma direção, uma vez que pode conter retas de variadas direções.
- Um plano possui uma **orientação**.

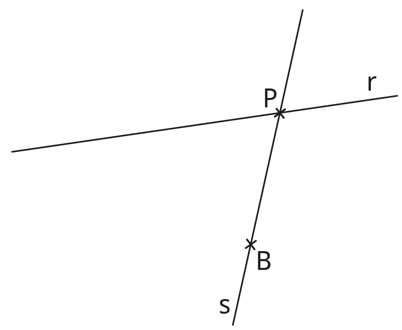
Também a definição de um plano por uma reta e um ponto exterior à reta está na base dos outros critérios já enumerados, que consistem em duas retas paralelas ou duas retas concorrentes.

Considera a reta **r** e o ponto **B**, exterior à reta **r**.

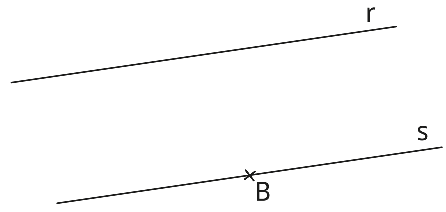


Neste caso, já é possível definir um plano, pois apenas existe uma região no espaço, de superfície plana que contenha, em simultâneo, a reta **r** e o ponto **B**.

Contudo, o ponto **B** pode ser encarado, não apenas como um ponto exterior à reta **r**, mas também como um ponto pertencente a uma outra reta, concorrente com **r** num determinado ponto.



No exemplo ao lado, podes verificar que a reta **s** contém o ponto **B** e concorre com **r** no ponto **P**. Aqui, estamos também perante um critério de definição de um plano, com recurso a duas retas concorrentes.



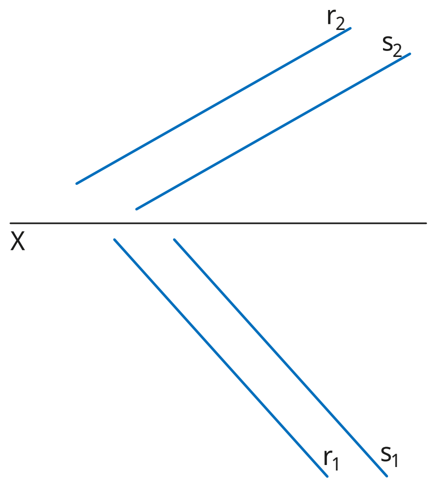
Por fim, também é possível traçar, passando pelo ponto **B**, uma reta paralela a **r**. As duas retas são paralelas e definem um plano.

Em conclusão, o mesmo plano pode ser definido de várias formas, quer através de pontos, de retas complanares, ou retas e direções.

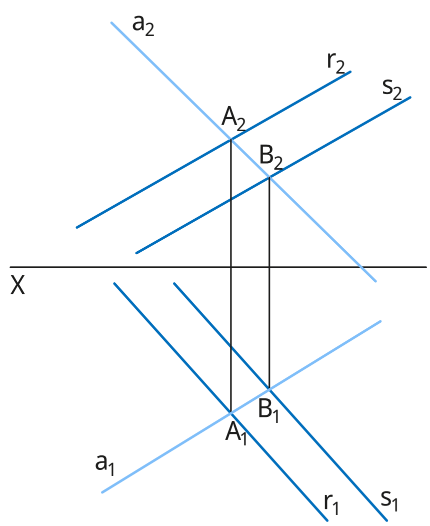
Planos definidos por duas retas

Duas retas são complanares se forem paralelas ou concorrentes. Assim, conclui-se que, para definir um plano através de duas retas, estas devem ser paralelas ou concorrentes, uma vez que pertencem ao plano que definem.

Considerando as retas **r** e **s**, representadas através das suas projeções, estas representam um plano. Assim, qualquer ponto de cada uma das retas é um ponto do plano em questão.



Pretende-se traçar uma outra reta, também pertencente ao plano. Para tal, traça-se a projeção frontal de uma qualquer reta, concorrente com **r** e **s**, obtendo as projeções frontais desses dois pontos de concorrência **A** e **B**. Nas projeções horizontais de **r** e **s**, determinam-se as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**. A partir daí, é possível traçar a projeção horizontal da reta **a**, concorrente com **r** e **s**, e pertencente ao plano por estas definido.

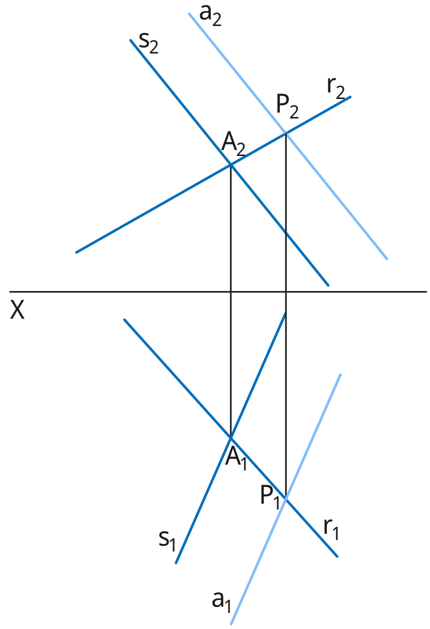


Resumindo

- Para que um ponto pertença a uma reta, deve ter as suas projeções sobre as projeções homónimas da reta.
- Para que uma reta pertença a um plano, deve conter dois pontos desse plano.

Analisando, agora, duas retas concorrentes **r** e **s**, estas são complanares, pelo que definem um plano. A reta **s** tem as suas projeções paralelas às projeções homónimas da reta **a**. Sendo que duas retas cujas projeções homónimas sejam paralelas entre si são retas paralelas, conclui-se que a reta **a** é complanar com a reta **s**, que, por sua vez, é complanar com a reta **r**. Assim, as três retas são complanares, ou seja, pertencem ao mesmo plano.

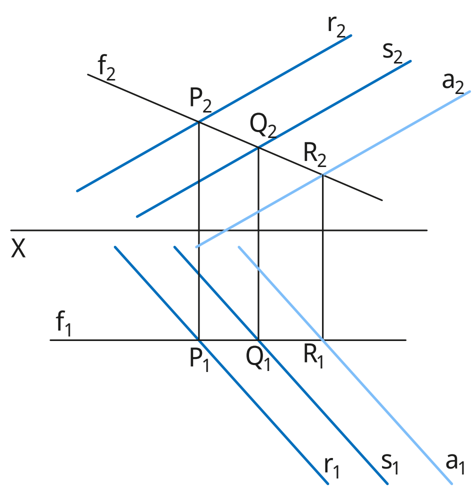
Notemos que se apenas fossem dadas as retas **s** e **r**, e fosse pedida uma outra reta do plano (reta **a**), o procedimento poderia ser traçar a projeção horizontal ou frontal de uma nova reta, paralela à projeção homónima de uma das outras retas dadas (**s** ou **r**). Na interseção com a reta **r**, ter-se-ia o ponto de concorrência. A outra projeção da reta **a** seria paralela à projeção homónima da reta paralela (reta **s**) e passaria pelo ponto de concorrência com **r** (ponto **P**).



Condição de pertença de uma reta a um plano

Abordando um plano definido por duas retas paralelas **r** e **s**, pretende-se uma outra reta, pertencente ao plano, oblíqua, paralela às retas dadas.

Para tal, opta-se por traçar uma reta auxiliar, neste caso, uma reta frontal. A reta **f**, frontal, na sua projeção horizontal, interseta as projeções horizontais das retas **r** e **s** nos pontos **P** e **Q**. As projeções frontais desses pontos encontram-se nas projeções frontais das retas **r** e **s**. Uma vez que a reta **f** é concorrente com as retas **r** e **s**, e por isso,



complanar com estas, qualquer reta cujas projeções sejam paralelas a **r** e **s** e que seja concorrente com a reta **f** é uma reta do plano paralela às retas **r** e **s**. Assim, a partir de um qualquer ponto da reta **f** (por exemplo, o ponto **R**), traça-se a reta **a**, concorrente com **f** e paralela a **r** e **s**. As quatro retas pertencem ao mesmo plano.

Resumindo

Uma reta pertence a um plano quando:

- possui dois pontos desse plano (reta definida por dois pontos);
- possui um ponto do plano e a direção de uma reta desse plano (reta definida por um ponto e uma direção).

Para praticar

1 Sendo dado um plano definido por duas retas paralelas **r** e **s**, em que r contém os pontos **A** (4; 2; 6) e **B** (–1; 5; 2), e **s**, paralela a **r**, tem o seu traço horizontal no ponto **H** (–1, 3, 0), determina os traços de ambas as retas nos planos de projeção e determina as projeções de uma reta **h**, horizontal, pertencente ao plano, com 2 cm de cota.

2 O plano α está definido por duas retas concorrentes em **P** (0; 4; 6). Ambas são oblíquas, a reta **r** contém o ponto **A** (2; 3; 3) e a reta **s** interseta o Plano Frontal de Projeção no ponto F (–3; 0; 4). Determina a projeção de uma reta horizontal, do plano, que é concorrente com as retas **r** e **s**.

3 Considerando o plano anterior, determina uma outra reta oblíqua do plano, paralela a **r**, que intersete a reta **s** num ponto com 2 cm de cota.

4 Ainda sobre o plano, determina as projeções de uma reta frontal, que contém o ponto **A**, e que pertence ao plano.

5 Considera um plano oblíquo φ definido por duas retas paralelas **a** e **b**. A reta **a** está definida pelos pontos **A** (3; 4; 2) e **P** (0; 6; 3). A reta **b** contém o ponto **B** (–1; 4; 5). Determina as projeções de uma reta **r**, oblíqua, pertencente ao plano.

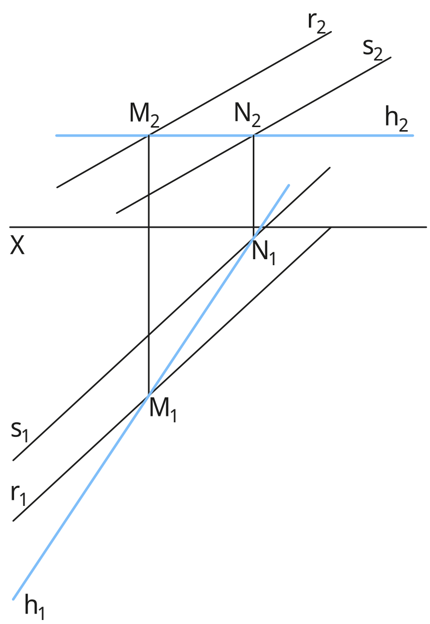
6 Sobre o mesmo plano, determina uma outra reta oblíqua, **s**, pelas suas projeções, pertencente ao plano e paralela às retas **a** e **b**.

Retas horizontais de um plano

As retas horizontais de um plano fazem parte de uma família de retas particulares de um plano. Estas serão determinantes no estudo dos planos, como irá ser visto mais à frente.

Considerando um plano definido pelas retas paralelas **r** e **s**, pretende-se traçar uma reta horizontal, pertencente ao plano.

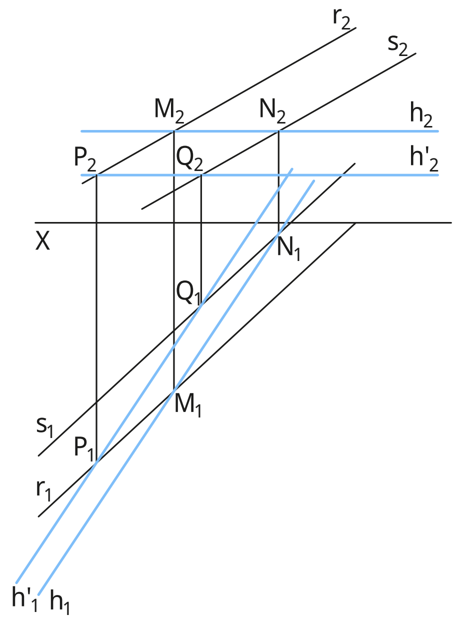
Relativamente às retas horizontais, sabe-se que a sua projeção frontal é sempre representada paralelamente ao eixo **x**. Assim, pode traçar-se imediatamente a projeção frontal de uma qualquer reta horizontal – $\mathbf{h_2}$. De seguida, é necessário fazer com que essa reta pertença ao plano definido por **r** e **s**. Para tal, deve achar-se os pontos de concorrência dessas retas com $\mathbf{h_2}$.



As projeções frontais de **M** e **N** estão sobre as projeções frontais de **r** e **s**, respetivamente, e ambas sobre $\mathbf{h_2}$.
As projeções horizontais estão sobre as respetivas projeções horizontais das retas a que pertencem, e a união de ambos resulta na projeção horizontal da reta **h**. Ou seja, $\mathbf{h_1}$ fica definida por $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{N_1}$.

Assim são determinadas as projeções de uma reta **h**, horizontal, complanar com as retas **r** e **s**, paralelas entre si.

A determinação de quaisquer outras retas horizontais do plano fica agora dependente de um ponto e uma direção, uma vez que **todas as retas horizontais de um dado plano são paralelas entre si**. Deste modo, basta traçar uma das projeções e determinar a sua interseção com a projeção homónima de outra reta do plano. Neste caso, optou-se pela reta **s**. O ponto **Q** é o ponto de concorrência da reta **s** com a reta horizontal **h’**. A projeção horizontal de **h’** passará por $\mathbf{Q_1}$ e será paralela a $\mathbf{h_1}$.

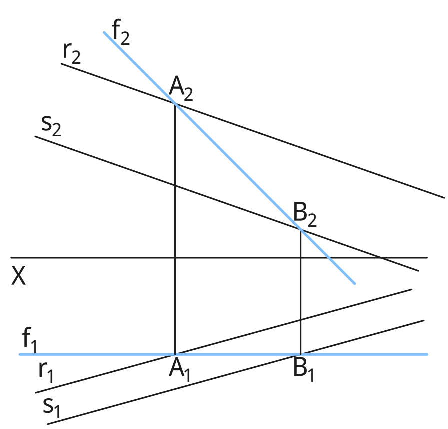


Retas frontais de um plano

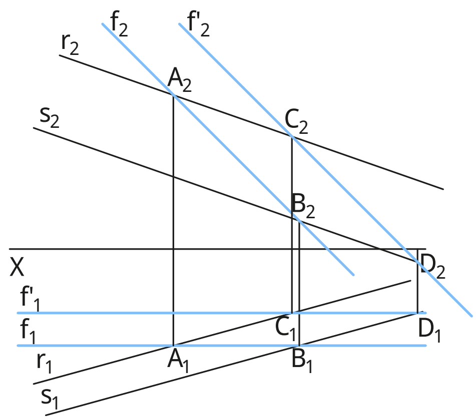
Tal como as retas horizontais, também as retas frontais fazem parte de um conjunto particular de retas determinante no estudo dos planos.

A forma de determinação de uma reta frontal, pertencente a um plano definido por duas retas é em tudo semelhante à determinação de uma reta horizontal, mas na projeção inversa. Ou seja:

Dado um plano definido por duas retas paralelas, deverá ser traçada uma projeção horizontal de uma qualquer reta frontal – **f** –, e determinadas as projeções horizontais dos pontos de concorrência com as retas paralelas definidoras do plano (**r** e **s**), neste caso, **A** e **B**. Sobre as projeções frontais das retas **r** e **s**, encontram-se as projeções frontais de **A** e **B**. Essas duas projeções definem a projeção frontal da reta frontal **f** – $\mathbf{f_2}$. Assim, a reta **f** está definida por dois pontos, pertencentes ao plano, logo, a reta **f** pertence ao plano.



No caso de se pretender traçar mais retas frontais do plano, estas passam a estar definidas por um ponto e uma direção, uma vez que todas as retas frontais de um dado plano são paralelas entre si. Assim, é suficiente traçar qualquer uma das duas projeções de uma segunda reta frontal – **f'** –, e determinar um ponto de concorrência com qualquer outra reta do plano (neste caso, determinou-se o ponto **C**, de concorrência com a reta **r**). As projeções de **f'** devem conter o ponto **C** e ser paralelas às projeções da reta **f**.



Para praticar

1 Determina as projeções de duas retas frontais de um plano que se encontra definido por duas retas paralelas, **r** e **s**, sabendo que **r** contém o ponto **A** (2; 5; 7) e que a sua projeção frontal forma um ângulo de 50° (a.d.) com o eixo **x** e a projeção horizontal um ângulo de 60° (a.d.) com o eixo **x**. A reta **s** é paralela a **r** e contém o ponto **B** (–2; 3; 4). Sobre as retas frontais, sabe-se que a reta **f** tem 2 cm de afastamento e que a reta **f'** tem 6 cm de afastamento.

2 Sobre o mesmo plano, determina as projeções de duas retas de nível, uma com 3 cm de cota e outra com 5 cm de cota.

3 Considera um plano definido por uma reta frontal, **f**, que contém os pontos A (–2; 3; 5) e o ponto **B** (1; 3; 2) e por uma reta horizontal, **h**, concorrente com **f** no ponto **B** e que contém o ponto **C** (0; 1; 2). Determina as projeções de uma outra reta do plano, concorrente com a reta **f** no ponto A e que seja paralela à reta h.

Resumindo

- Num mesmo plano, todas as retas frontais são paralelas entre si. Portanto, todas as suas projeções são paralelas entre si.
- Num mesmo plano, todas as retas horizontais são paralelas entre si. Portanto, todas as suas projeções são paralelas entre si.

Retas notáveis de um plano

Tal como existem os pontos notáveis de uma reta, existem, também, as **retas notáveis de um plano**.

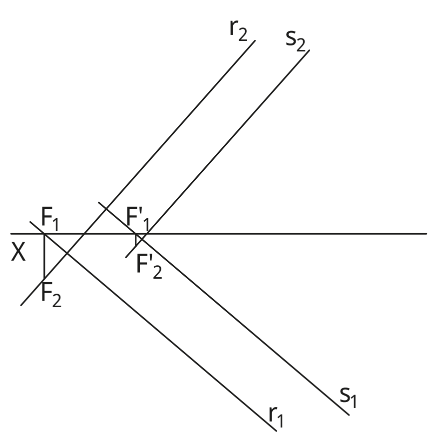
Tal como os pontos notáveis, que são os pontos de interseção de uma reta com os planos de projeção e com os planos bissetores, as retas notáveis são as retas resultantes da interseção de um dado plano com os planos de projeção e planos bissetores.

Estas retas podem ser definidas por dois pontos (que serão dois pontos notáveis de duas retas do plano) ou por um ponto e uma direção (um ponto notável e uma direção).

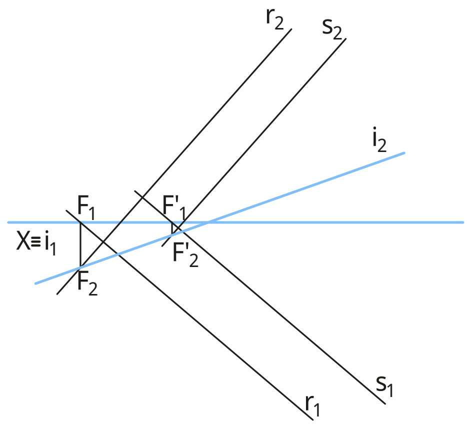
Retas de interseção de um plano com o Plano Frontal de Projeção

A reta de interseção de um plano com o Plano Frontal de Projeção, também conhecida como **traço frontal do plano**, estará definida pelos traços frontais de retas desse plano.

Considerando o plano definido pelas retas **r** e **s**, e determinados os seus traços frontais, neste caso, com cotas negativas (as retas **r** e **s** atravessam o Plano Frontal de Projeção no 4.° diedro), o traço frontal do plano ficará definido por $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F'_2}$.

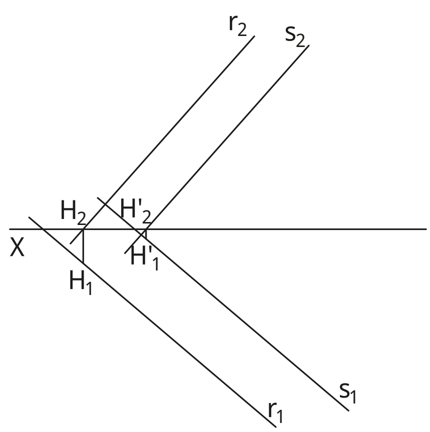


Assim, determina-se a reta **i**, de interseção do plano com o Plano Frontal de Projeção, pelas suas projeções. A sua projeção frontal resulta das projeções frontais dos pontos notáveis **F** e **F'**, e a sua projeção horizontal resulta das projeções horizontais de **F** e **F'**, ou seja, é coincidente com o eixo **x**.
Em resumo, a reta de interseção de um plano é uma reta frontal de afastamento nulo. É uma reta frontal que pertence, em simultâneo, ao plano dado e ao Plano Frontal de Projeção.

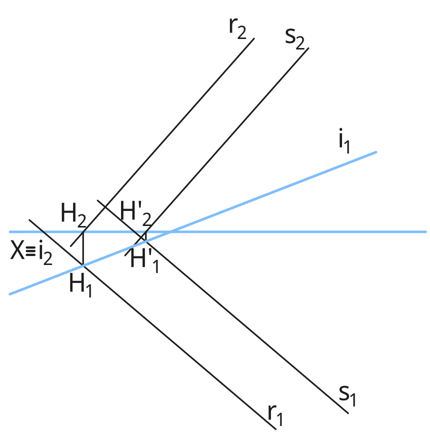


Retas de interseção de um plano com o Plano Horizontal de Projeção

A reta de interseção de um plano com o Plano Horizontal de Projeção é, naturalmente, o **traço horizontal do plano**. É, portanto, uma reta que pertence, simultaneamente, ao plano dado e ao Plano Horizontal de Projeção. É uma reta horizontal do plano com cota nula.



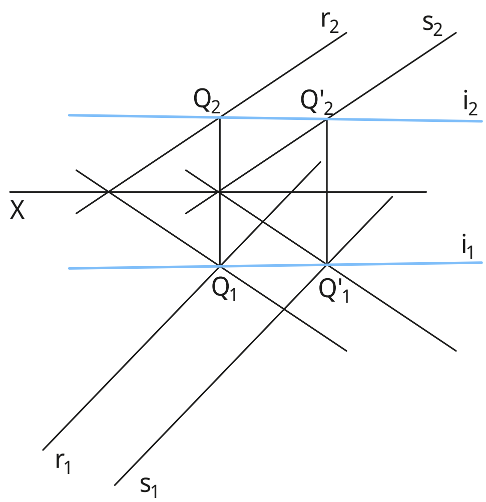
Observa as retas **r** e **s** que definem o plano. Determinados os traços horizontais de ambas as retas, a reta de interseção do plano com o Plano Horizontal de Projeção fica definida por dois pontos (**H** e **H'**). Unindo $\mathbf{H_1}$ a $\mathbf{H'_1}$, obtém-se a projeção horizontal da reta **i**. A sua projeção frontal resulta de $\mathbf{H_2}$ e $\mathbf{H'_2}$, ou seja, é coincidente com o eixo **x**, uma vez que é uma reta horizontal de cota nula.



Retas de interseção de um plano com o $\beta_{1/3}$

Tal como acontece na determinação das retas de interseção de um dado plano com os planos de projeção, em que estas são determinadas a partir dos pontos de interseção de retas que definem esse plano com os planos de projeção, as retas de interseção com os planos bissetores são determinadas através dos traços das retas que definem o plano com os planos bissetores.

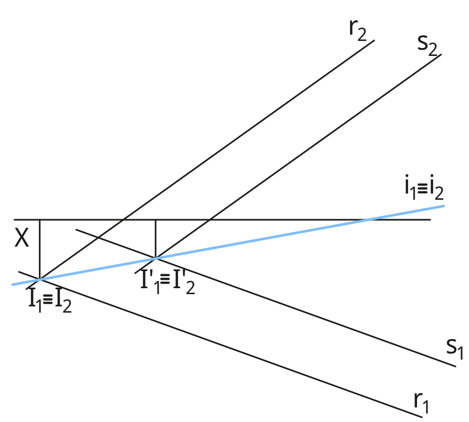
Considerando as retas **r** e **s** que definem um plano, os seus traços no $\beta_{1/3}$ são determinados através de uma linha auxiliar, simétrica a uma das projeções de cada reta (ver página 114). A partir daí, é possível determinar o traço da reta no plano bissetor 1/3. Neste caso, poderia ser suficiente determinar apenas uma das projeções dos pontos **Q** e **Q’**, uma vez que os traços de um plano com o $\beta_{1/3}$ são sempre simétricos.



Na reta **i** estão todos os pontos do plano que pertencem ao $\beta_{1/3}$, e que, portanto, têm as suas projeções simétricas.

Retas de interseção de um plano com o $\beta_{2/4}$

A reta de interseção de um plano com $\beta_{2/4}$ é a reta do plano cujos pontos pertencem ao plano bissetor 2/4. Assim, e conhecendo as características deste plano bissetor, sabe-se que todos esses pontos possuem projeções coincidentes. Deste modo, sabe-se que a reta de interseção de um plano com o $\beta_{2/4}$ terá as suas projeções também coincidentes.



Observando as retas **r** e **s** definidoras do plano, e determinados os seus traços no $\beta_{2/4}$, é possível traçar as projeções da reta **i**, de interseção do plano com o bissetor 2/4.

Para praticar

1 Determina as retas notáveis de um plano definido por duas retas **r** e **s**, concorrentes no ponto **P** (2; 4; 3). A reta **r** contém o ponto **A** (4; 2; 5) e a reta **s** contém o ponto **B** (0; 1; 2).

– Que tipo de reta é a reta de interseção com o Plano Frontal de Projeção? Porquê?

– Que tipo de reta é a reta de interseção com o Plano Horizontal de Projeção? Porquê?

– Que tipo de retas são as de interseção com os planos bissetores? Porquê?

2 Considerando o mesmo plano, determina a projeção de duas retas paralelas às retas de interseção com os planos de projeção, simultaneamente concorrente com as retas **r** e **s**.

3 Descreve, pelas suas características, uma reta de interseção de um plano com o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$.

Resumindo

Retas notáveis de um plano são as retas resultantes da interseção de um dado plano com os planos de projeção e planos bissetores.

- À reta de interseção de um plano com o Plano Frontal de Projeção dá-se o nome de **traço frontal do plano** – corresponde a uma **reta frontal** de plano de **afastamento nulo**;
- À reta de interseção de um dado plano com o Plano Horizontal de Projeção dá-se o nome de **traço horizontal do plano** – corresponde a uma **reta horizontal** do plano com **cota nula.**

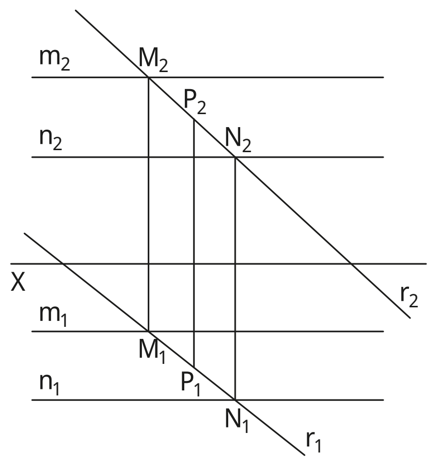
Uma reta de interseção de um dado plano com os planos bissetores terá sempre as suas projeções simétricas, se se tratar do plano bissetor 1/3, ou coincidentes, se se tratar do plano bissetor 2/4.

Pontos pertencentes a planos

Para que um ponto pertença a um plano, este tem de pertencer a uma reta desse plano.

Assim, para determinar um qualquer ponto de um plano, este deverá ser determinado sobre uma reta pertencente a esse plano.

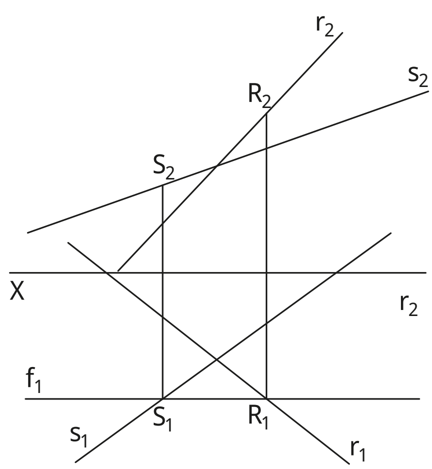
Observa as retas **m** e **n**, fronto-horizontais, que definem um plano. Pretende-se a determinação de um ponto **P**, que não pertença às retas **m** e **n**, mas que pertença ao plano por estas definido. Para tal, recorre-se a uma reta oblíqua, **r**, pertencente ao plano. O ponto **P** pode ser marcado sobre a reta **r**, uma vez que esta pertence ao plano. Os pontos **M** e **N** também pertencem ao plano, mas são pontos das retas **m** e **m**, não cumprindo os requisitos do ponto **P** pretendido.



Pontos pertencentes a planos segundo as suas coordenadas

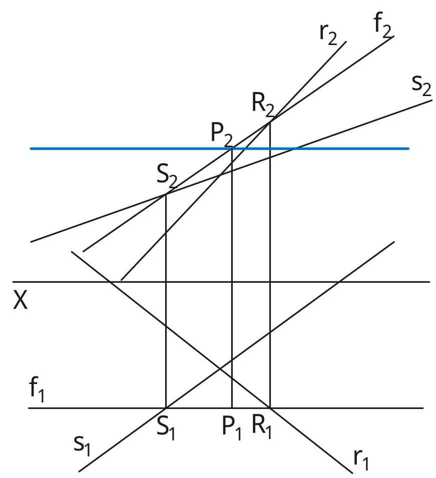
Como já foi referido, para um ponto pertencer a um plano, deve pertencer a uma reta desse plano. No caso de se pretender um ponto com determinadas coordenadas, deve ser determinada uma reta pertencente ao plano que apresente uma das coordenadas constante: reta horizontal ou reta frontal.

Dadas as duas retas concorrentes **r** e **s**, que definem um plano, pretende-se determinar um ponto desse plano, o ponto **P** (y; z).



Para tal, deverá recorrer-se a uma reta auxiliar, frontal, que contenha dois pontos do plano. Traçando a projeção horizontal da reta **f**, com o afastamento devido, determina-se a interseção da projeção com as projeções homónimas.
A partir daí, chega-se às projeções dos pontos de concorrência (**S** e **R**) que definem a reta frontal, **f**, e por isso, à projeção frontal da reta **f**. O ponto **P** é um ponto da reta **f** e o seu afastamento é igual ao de qualquer outro ponto da reta.

Através de uma reta auxiliar com a cota do ponto **P**, onde esta intersetar a reta **f**, são determinadas as projeções do ponto, pertencente ao plano, pelas suas coordenadas.



Resumindo

- Um ponto pertence a um plano se pertencer a uma reta desse plano.
- Para que um ponto pertença a uma reta deve ter as suas projeções sobre as projeções homónimas dessa mesma reta.

Para praticar

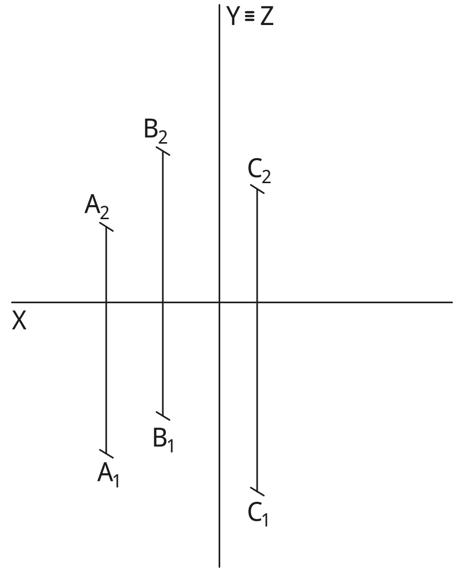
1 Determina as projeções de um ponto **P**, pertencente a um plano definido por duas retas paralelas, **r** e **s**. A reta **r** está definida pelo seu traço frontal, com 3 cm de abcissa e 4 cm de cota, e pelo ponto **A** (1; 2; 3). A reta **s** é paralela a **r** e contém o ponto **B** (–2; 2; 4). Do ponto **P**, sabe-se que tem 5 cm de afastamento e 2 cm de cota.

2 Num plano definido por duas retas concorrentes, sendo que **h** é uma reta horizontal com 3 cm de cota e cujo traço frontal tem 3 cm de abcissa, e que **f** é uma reta frontal, de 2 cm de afastamento, e que o seu traço horizontal tem –2 cm de abcissa, determina a projeção dos pontos **A** (1; 2) e **B** (3; –2).

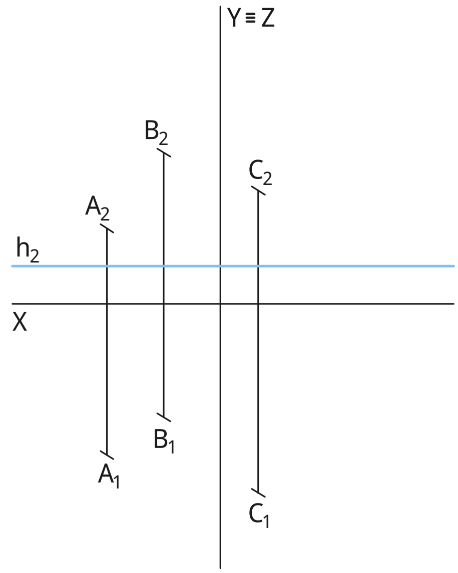
3 No plano do enunciado anterior, determina as projeções de um ponto pertencente ao $\beta_{1/3}$ com 3 cm de cota.

Planos definidos por três pontos não colineares

Conforme já foi abordado, um plano pode, também, ser definido por três pontos não colineares. Na verdade, o estudo de planos definidos por duas retas está relacionado com as situações em que este se encontra definido por três pontos não colineares ou por uma reta e um ponto exterior à reta. Porém, no caso de um plano estar definido por três pontos não colineares, o processo para determinação de retas e pontos do plano é distinto, recorrendo a métodos auxiliares.

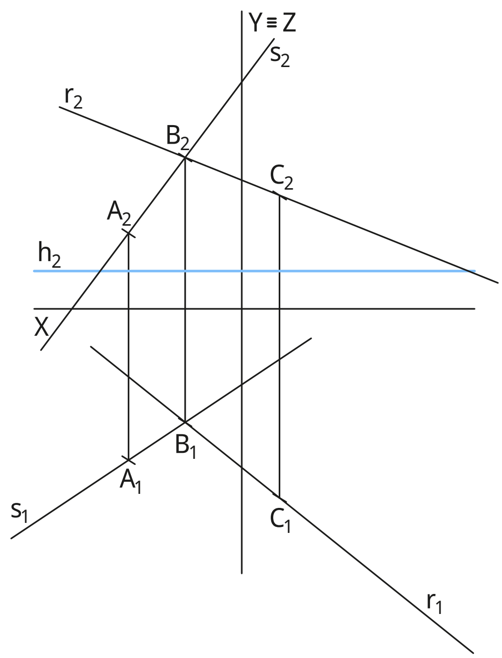


Considera os pontos **A**, **B** e **C**. Os pontos não são colineares, pois apresentam coordenadas com valores distintos. São, por isso, definidores de um plano.



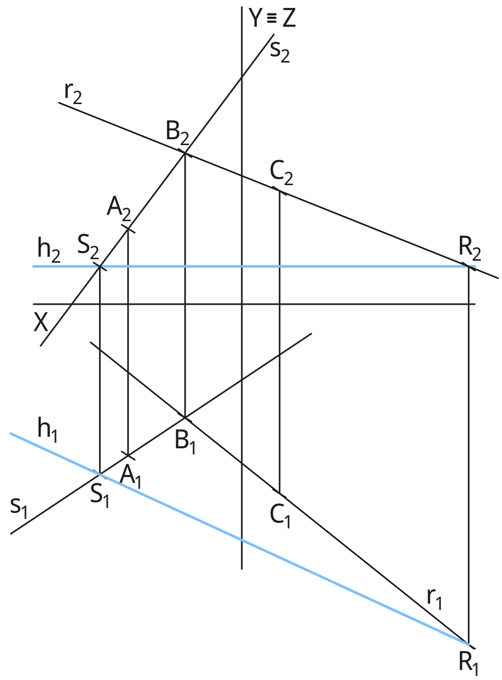
Para determinar as projeções de uma reta horizontal do plano, com uma determinada cota, o processo consistirá em:

- Traçar a projeção frontal da reta **h**, com a cota pretendida (uma vez que a projeção de qualquer reta horizontal é sempre paralela ao eixo **x**, este passo será imediato).
- Conduzir duas retas complanares (concorrentes ou paralelas), que contenham os pontos (neste caso, optou-se pelo ponto **B** como ponto de concorrência das retas **r** e **s**).
- Determinando os pontos de concorrência (**R** e **S**) das retas **r** e **s** com a projeção frontal da reta **h**, tem-se as projeções horizontais de dois pontos da reta horizontal, sendo possível traçar a projeção horizontal desta.



Assim, chegamos à reta **h**, do plano, representada através das suas projeções. A reta **h** tem a cota pretendida e pertence ao plano, pois é concorrente com outras duas retas do plano, nos pontos **R** e **S**.

Deste modo, torna-se evidente que, quando um plano está definido por três pontos, é necessário recorrer a retas auxiliares desse plano para a determinação de elementos geométricos que deste façam parte.

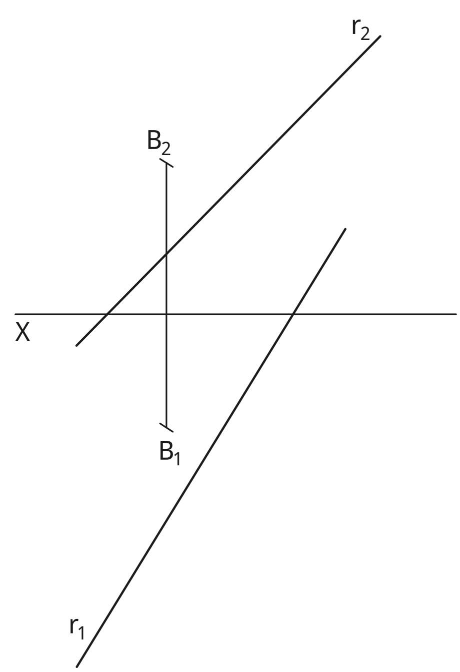


Planos definidos por uma reta e um ponto exterior à reta

Outra forma de definir um plano é através de uma reta e de um ponto exterior à reta.

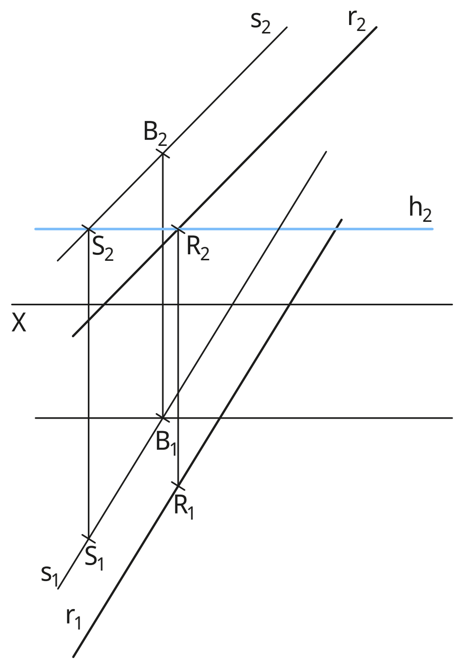
A reta **r** e o ponto **B** definem um plano, sobre o qual se pretende determinar uma reta horizontal pertencente a este.

O processo é semelhante ao utilizado quando se trata de um plano definido por três pontos não colineares, sendo que, neste caso, há recurso a apenas uma reta auxiliar, uma vez que já é dada uma reta do plano (reta **r**).

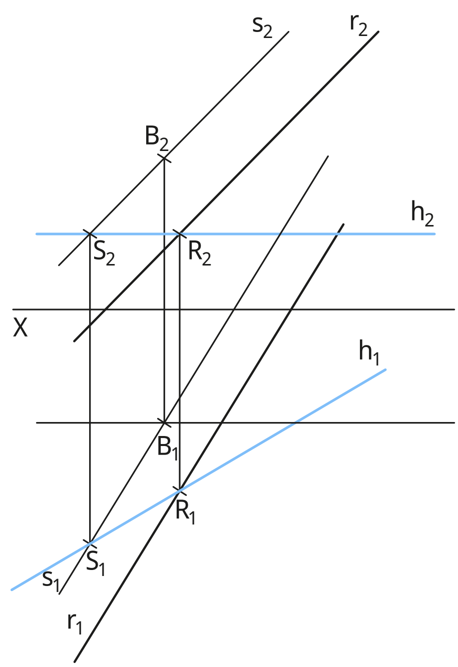


Assim, o processo consiste em:

- traçar a projeção frontal da reta **h** com a cota pretendida;
- traçar uma reta auxiliar do plano (neste caso, optou-se por uma reta paralela a **r** e que contém o ponto **B**);
- determinar a interseção das projeções frontais das retas **r** e **s** com a projeção frontal da reta **h**, e assim representar os seus pontos de concorrência (**R** e **S**);
- traçar a projeção horizontal da reta **h**, unindo as projeções horizontais dos pontos de concorrência da reta **h** com as retas **r** e **s**.



Terminado este processo, tem-se a reta **h**, complanar com **r** e **s**, definida pelas suas projeções.



Planos definidos pelos seus traços

Até ao presente foram abordados planos definidos por retas e pontos. No entanto, um plano pode, também, ser definido pelos seus traços.

Em Geometria Descritiva, um traço é uma interseção. Ou seja, o traço de um plano é a reta de interseção desse plano com um outro. No caso de planos definidos pelos seus traços, estes são o resultado da interseção do plano em estudo com os planos de projeção.

- **Traço frontal de um plano:** reta de interseção do plano com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano com afastamento nulo);
- **Traço horizontal de um plano**: reta de interseção do plano com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano com cota nula).

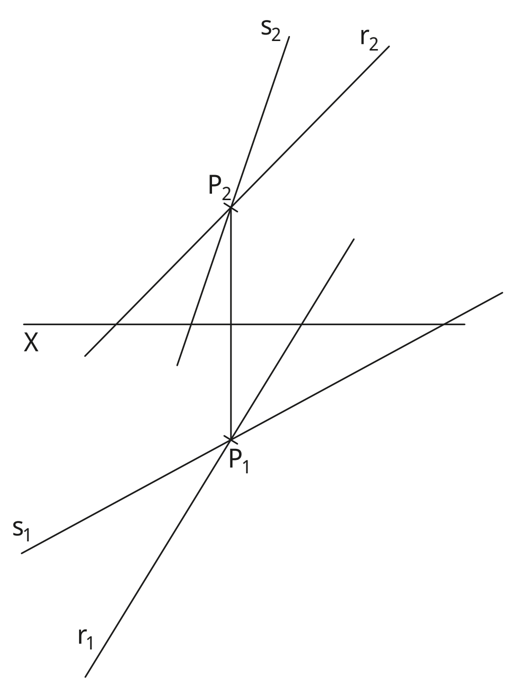
Determinar os traços de um plano

A determinação dos traços de um plano é a determinação das retas de interseção desse plano com os planos de projeção (ver página 143).

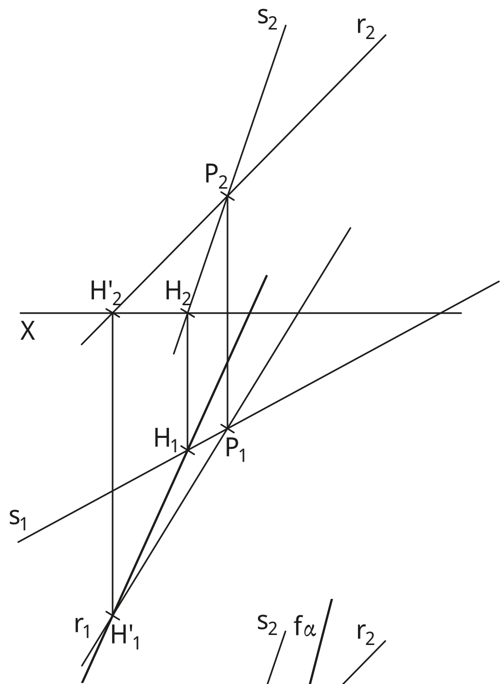
Para tal, é necessário recorrer a duas retas do plano e determinar os seus traços nos planos de projeção.

As retas **r** e **s**, concorrentes no ponto **P**, definem um plano do qual se pretende determinar os seus traços.

Sendo as retas **r** e **s** retas do plano, e sendo os traços desse plano os lugares geométricos onde se encontram todos os pontos de cota nula e de afastamento nulo, considerando, respetivamente, o traço horizontal e o traço frontal do plano, o processo passa por determinar os pontos de cota e afastamentos nulos das retas **r** e **s** – os traços das retas nos planos de projeção. Serão esses pontos que irão definir as retas do plano de cota e afastamento nulos, ou seja, os traços do plano.

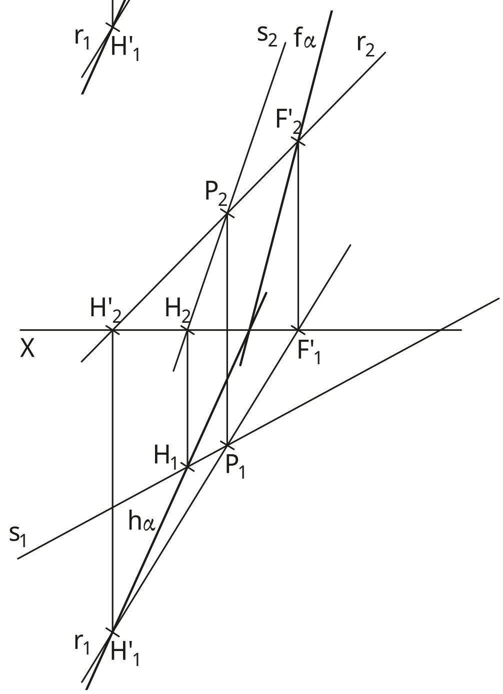


Considerando os traços horizontais das retas **r** e **s** (**H** e **H'**), unindo as suas projeções horizontais, é determinado o traço horizontal do plano.



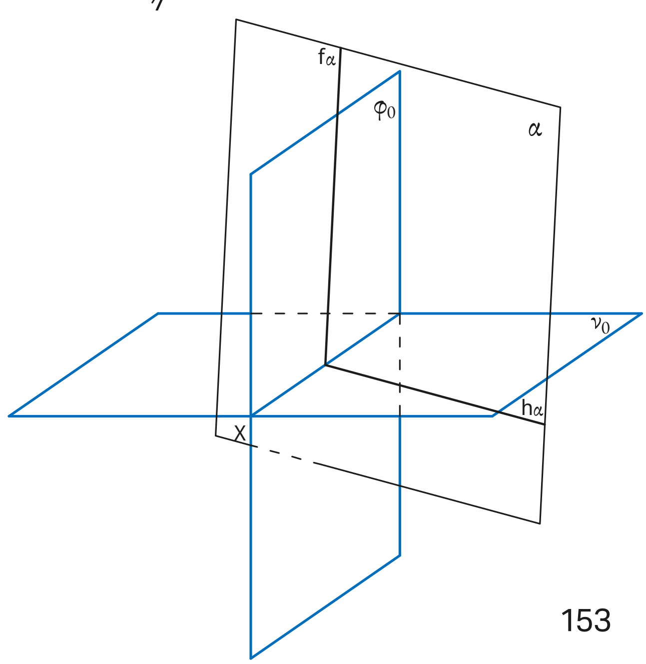
De seguida, com a determinação dos traços frontais das retas **r** e **s**, e unindo as suas projeções frontais, é determinado o traço frontal do plano.

Neste caso, é possível verificar que se trata de um plano oblíquo, pois ambos os seus traços são oblíquos face ao eixo **x**.



Repara que os traços intersetam o eixo **x** num único ponto. Esta é uma condição que se verifica sempre que um plano interseta os dois planos de projeção (o que não acontece em planos paralelos aos planos de projeção). Esse ponto de concorrência é o ponto do plano cuja cota e afastamento são nulos.

Convencionalmente, no desenho, os traços de um plano são representados a traço grosso e designados por **f** ou **h**, consoante se trate do traço frontal ou horizontal, seguidos da letra do alfabeto grego que denomina o plano.



O exemplo ao lado pretende representar, tridimensionalmente, um plano ***α***, oblíquo, e a sua relação com os planos de projeção. Quando este os interseta, temos os **traços do plano**.

Para praticar

1 O plano δ está definido por duas retas paralelas, **r** e **s**, em que **r** contém os pontos **A** (1; 5; 3) e **B** (–1; 4; 7), e **s** contém o ponto **C** (–4; 0; 6). Determina os traços do plano.

2 O plano μ está definido por duas retas concorrentes no ponto **P** (0; 4; 4). As retas concorrentes, **r** e **s**, são oblíquas. A projeção frontal da reta **r** forma um ângulo com o eixo **x**, de 30° (a.d.), e a projeção horizontal da reta **s** forma um ângulo com o eixo **x** de 60° (a.e.). O traço frontal da reta **s** tem 2 cm de cota e o traço horizontal da reta **r** tem 2 cm de afastamento. Após determinar ambas as projeções das retas **r** e **s**, representa o plano que as contém a partir dos seus traços.

3 Do plano α, sabe-se que contém os pontos **A** (3; 4; 7), **B** (0; 6; 2) e **C** (–4; 1; 5). Determina os traços do plano.

4 Determina os traços de um plano α definido por uma reta **r**, oblíqua, que contém os pontos **A** (4; 2; 6) e **B** (–1; 5; 2) e pelo ponto **P** (1; 1; 2). De que plano se trata?

5 Representa, pelas projeções, uma reta **h**, horizontal, pertencente ao plano, com 3 cm de cota. Descreve a relação dessa reta com os traços do plano a que pertence.

6 Determina os traços de um plano δ definido pelos três pontos não colineares: **A** (1; 3; 2), **B** (–1; 1; 4) e **C** (–3; 4; 1).

7 Considerando o plano do exercício anterior, determina os traços de um outro plano γ, paralelo a δ, cujos traços concorrem com o eixo **x** num ponto com abcissa –6.

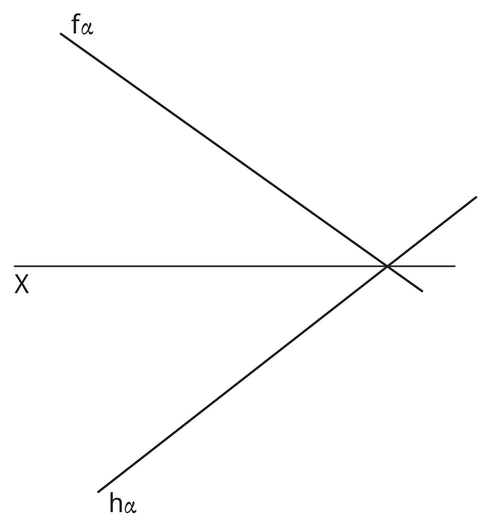
Resumindo

Um plano também pode ser definido pelos seus traços, que são a sua reta de cota nula e a sua reta de afastamento nulo – o traço horizontal e o traço frontal, respetivamente.

- Traço horizontal do plano – reta pertencente ao P. H. P.
- Traço frontal do plano – reta pertencente ao P. F. P.

Retas em planos definidos pelos seus traços

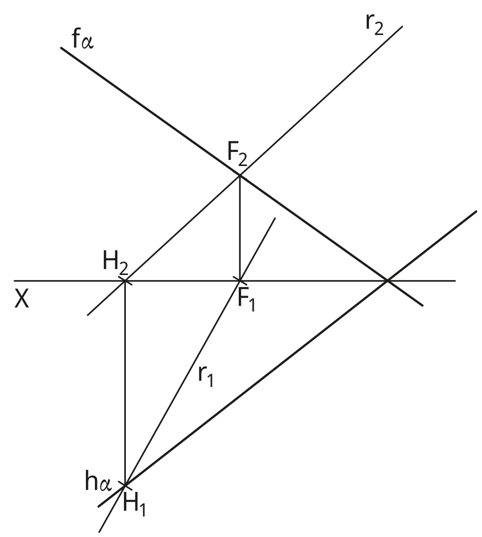
Quando um plano está definido pelos seus traços, pode entender-se que este está definido por duas retas, uma vez que os traços de um plano correspondem às duas retas, horizontal e frontal de um plano, de cota e afastamento nulo, respetivamente.



É também sobre os traços do plano que estão situados todos os traços de todas as retas pertencentes a esse plano. Assim, traçando uma qualquer projeção, seja ela frontal ou horizontal, de uma reta, é imediatamente possível determinar dois pontos dessa reta, que pertençam, também ao plano, e por consequência, chegar às duas projeções de uma reta desse plano.

Vejamos:

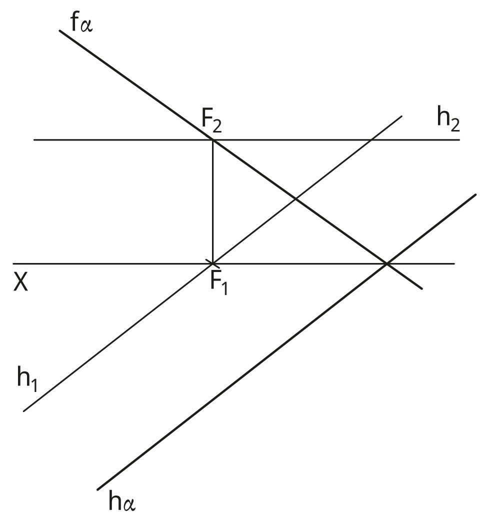
Traçou-se a projeção frontal de uma reta oblíqua, **r**, que interseta o traço frontal de α no ponto **F** (traço frontal da reta).
Quando $\mathbf{r_2}$ cruza o eixo **x**, obtém-se o ponto da reta **r** de cota nula, ou seja, o traço horizontal da reta **r**. A reta **r** está, agora, definida por dois pontos, sendo possível determinar a sua projeção horizontal, unindo $\mathbf{H_1}$ a $\mathbf{F_1}$.



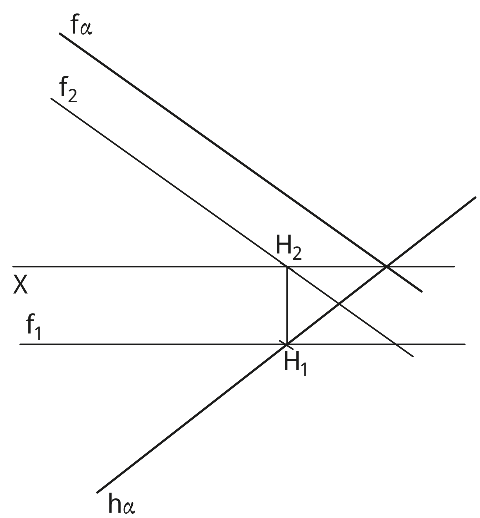
No caso de se pretender uma reta paralela a um dos planos de projeção, esta passa a necessitar apenas de um ponto, uma vez que já possuímos uma direção. Essa direção é dada pelos traços do plano, uma vez que retas frontais ou horizontais de um dado plano são sempre paralelas entre si.

Deste modo, o procedimento consiste em traçar a projeção frontal, conforme a coordenada pretendida, neste caso, de uma reta horizontal, e determinar o seu traço frontal. A partir da projeção do traço frontal da reta, traçar uma paralela ao traço horizontal do plano, obtendo $\mathbf{h_1}$.

A reta **h**, horizontal, pertencente ao plano $\boldsymbol{\alpha}$ definido pelos seus traços, passa a estar definida pelas suas projeções.



O procedimento é equivalente quando se trata de uma reta frontal, sendo que esta terá a sua projeção frontal paralela ao traço frontal do plano.



Resumindo

- Para que uma reta pertença a um plano, os seus traços têm de estar sobre os traços do plano.
- Retas horizontais de um plano são sempre paralelas ao traço horizontal desse plano.
- Retas frontais de um plano são sempre paralelas ao traço frontal desse plano.

Reta de maior declive de um plano

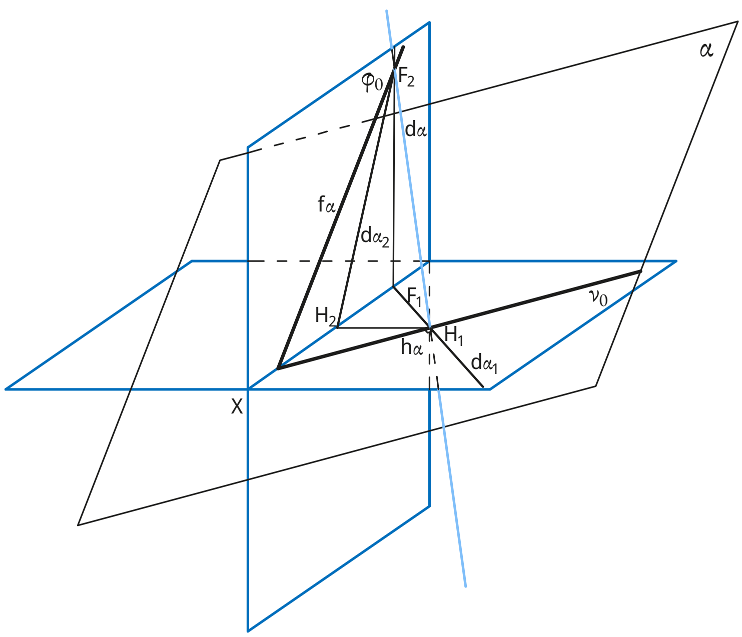
Uma reta de maior declive de um plano é aquela que forma, com o Plano Horizontal de Projeção, o ângulo máximo. Tentando uma aproximação ao contexto quotidiano, será o equivalente à reta que marcaria a direção da rampa mais íngreme possível.

Neste caso, será a reta cuja projeção horizontal forma um ângulo reto com o traço horizontal do plano na qual se insere.

dα é a reta de maior declive do plano α, pois a sua projeção horizontal forma um ângulo de 90° com o traço horizontal do plano.

Isso significa que não existe uma outra reta do plano que forme um ângulo maior com o Plano Horizontal de Projeção.

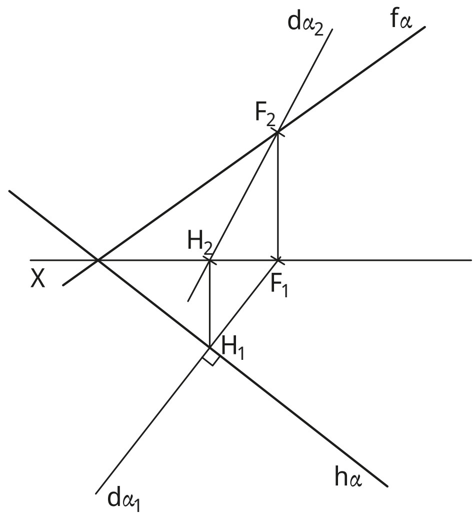
Verifica o procedimento para determinação de uma reta de maior declive de um plano definido pelos seus traços:



Sendo dado um plano α, definido pelos seus traços, pretende-se chegar às projeções da sua reta de maior declive. Para tal, e cumprindo o critério de pertença de uma reta a um plano, a reta de maior declive deve, também, ter os seus traços sobre os traços do plano.

A determinação da projeção horizontal da reta de maior declive do plano é feita imediatamente, perpendicular ao traço horizontal do plano, e são logo determinados os seus traços nos planos de projeção. A reta passa a estar definida por dois pontos, o que permite obter as duas projeções da reta.

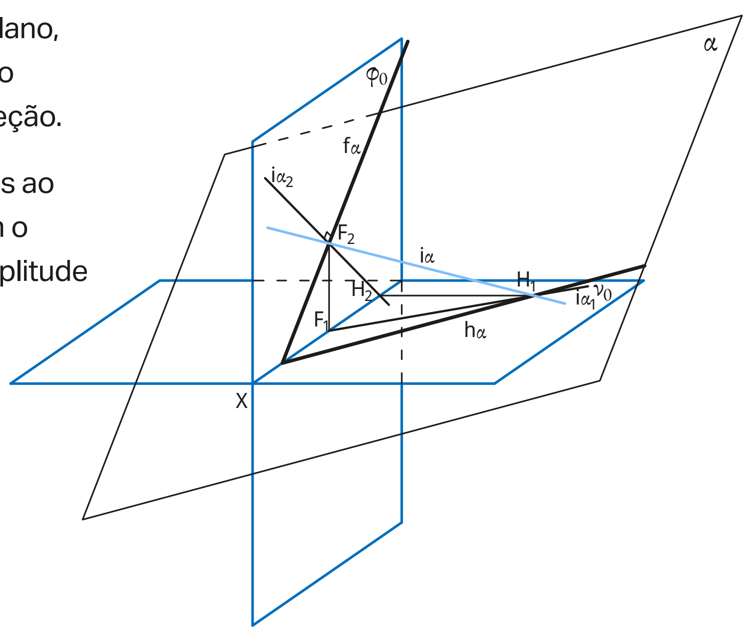
Está, assim, determinada a reta de maior declive do plano α.



Reta de maior inclinação de um plano

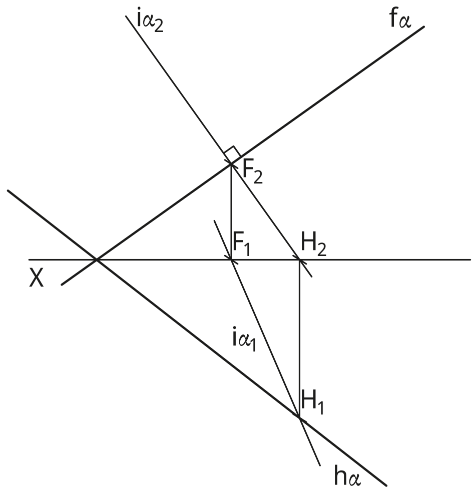
Por reta de maior inclinação de um plano, entende-se a reta que forma o ângulo máximo com o Plano Frontal de Projeção.

Isto é, de todas as retas pertencentes ao plano, esta é aquela cujo ângulo com o Plano Frontal de Projeção possui amplitude máxima.



Assim, a projeção frontal de uma reta de maior inclinação de um plano é perpendicular ao traço frontal desse mesmo plano.

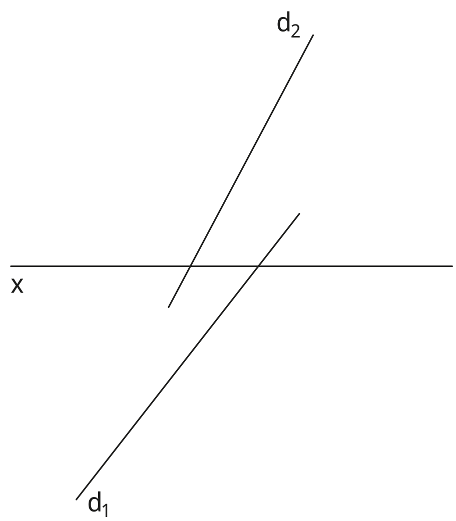
Observando o exemplo ao lado, verifica-se que $\mathbf{i\alpha_2}$ é perpendicular a $\mathbf{f\alpha}$. Determinando os seus traços, que estarão sobre os traços do plano, uma vez que a reta pertence ao mesmo, obtêm-se dois pontos da reta, suficientes para a definir.



Fica, assim, definida a reta de maior inclinação do plano representada pelas suas projeções.

Planos definidos pela sua reta de maior declive ou de maior inclinação

Neste caso particular, uma reta será suficiente para definir um plano, se esta for a sua reta de maior inclinação ou de maior declive. Assim, o processo de determinação dos traços do plano segue o processo inverso dos exemplos estudados anteriormente.

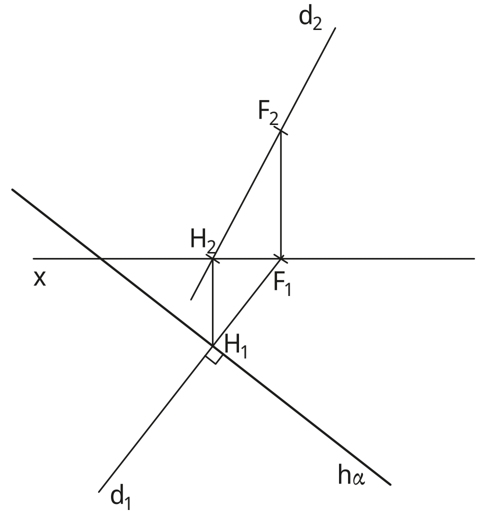


Neste caso, representada a reta de maior declive de um plano, através das suas projeções, pretende-se determinar os traços do plano.

Através do estudo do caso particular de retas de maior declive de um plano, sabe-se que a sua projeção horizontal forma um ângulo de 90° com o traço horizontal do plano em que se insere.

Determinados os traços da reta nos planos de projeção, conhece-se o ponto de interseção da projeção $\mathbf{d_1}$ com o traço horizontal do plano.

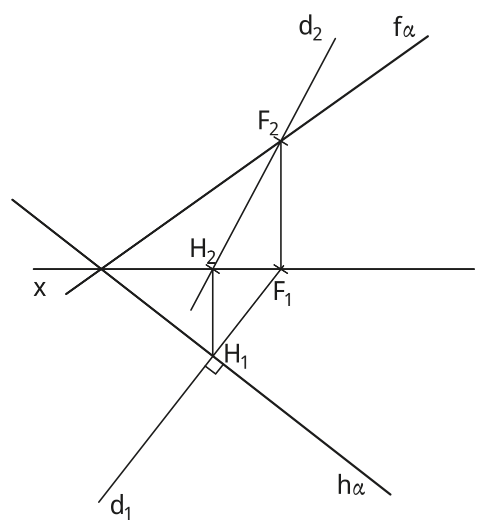
Deste modo, a determinação do traço horizontal do plano é imediata, pois este está definido por um ponto e uma direção (ponto **H** e ângulo de 90° com $\mathbf{d_1}$).



Encontrado o ponto no eixo **x** em que os traços se cruzam (sabendo que em casos de planos que intersetam ambos os planos de projeção, os seus traços convergem com o eixo **x** no mesmo ponto), o traço frontal do plano passa a estar definido por dois pontos (ponto **F** e ponto de convergência com **h**$\boldsymbol{\alpha}$).

Estão, assim, determinados os traços de um plano definido pela sua reta de maior declive.

No entanto, se se tratasse de uma reta de maior inclinação, o raciocínio seria semelhante, mas com base nas características da reta de maior inclinação de um plano (ângulo de 90° entre a sua projeção frontal e o traço frontal do plano).



Para praticar

1 Sendo dado um plano α, definido pelos seus traços, que intersetam o eixo **x** num ponto com 3 de abcissa, e cujo traço frontal forma, com o eixo **x**, um ângulo de 50° (a.d.), e cujo traço horizontal forma com o eixo **x** um ângulo de 30° (a.d.), determina a reta **d**, de maior declive. De seguida, determina a reta **i**, de maior inclinação.

2 Determina os traços de um plano oblíquo, α, cuja reta de maior inclinação é a reta **i**, definida pelos pontos **A** (2; 3; 5) e **B** (0; 5; 2). Determina a reta de maior declive do plano.

3 Considera o plano α, definido pelas retas **f** e **h**, respetivamente, frontal e horizontal. A reta f contém o ponto **A** (–2; 3; 5) e faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 50° (a.d.). A reta **h** é concorrente com a reta **f** no ponto **A** e faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 45° (a.e.). Determina a reta de maior declive do plano α.

4 Considerando o plano do exercício anterior, determina a sua reta de maior inclinação e descreve a relação desta com as projeções da reta **f**.

5 Sendo dada uma reta **r** oblíqua definida pelos pontos **A** (2; 1; 3) e **B** (–3; 5; 1), determina os traços de um plano oblíquo δ, cuja reta r é a sua reta de maior declive.

6 Considera a reta **r** como a reta de maior inclinação de um plano oblíquo α. Representa o plano pelos seus traços.

Resumindo

- A **reta de maior declive** de um plano é aquela cuja projeção horizontal faz, com o traço horizontal de um plano, um ângulo de 90°.
- A **reta de maior inclinação** de um plano é aquela cuja projeção frontal faz, com o traço frontal do plano, um ângulo de 90°.

Manual Digital

Documento
Alfabeto do plano

Alfabeto do plano

O **alfabeto do plano** corresponde à classificação dos planos face à sua posição no espaço, relativamente aos planos de projeção. Tal como nas retas, estes são agrupados em subcategorias, com base em características que lhes podem ser comuns. Assim, existem dois grandes tipos de planos:

- planos ortogonais aos planos de projeção;
- planos oblíquos aos planos de projeção.

Plano projetante

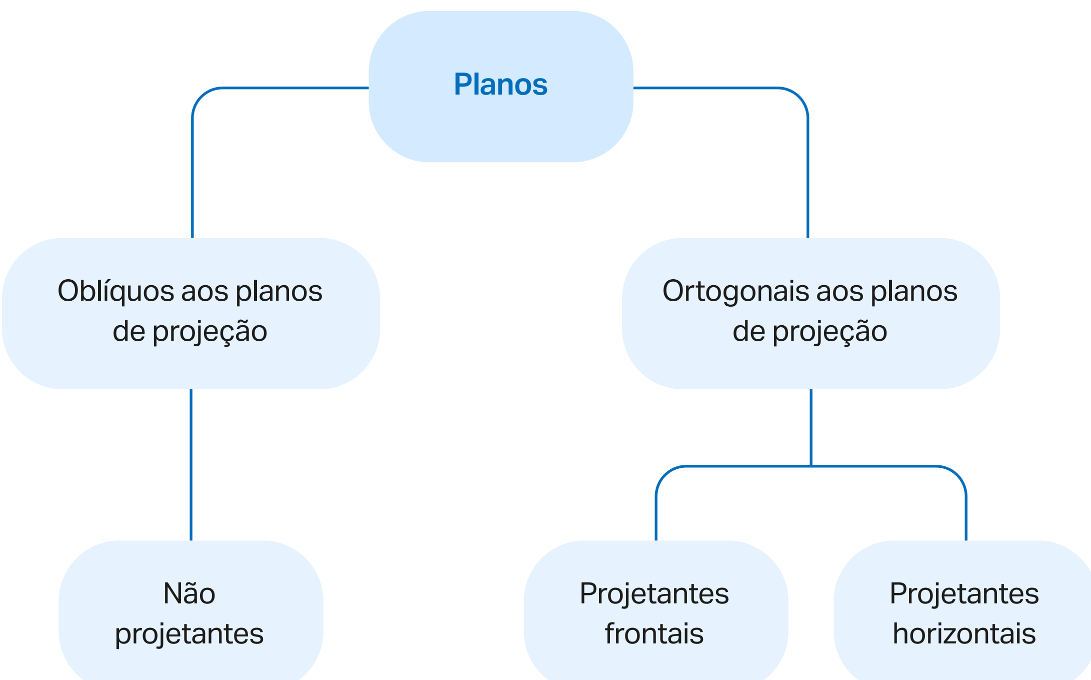
Um **plano projetante** é um plano ortogonal aos planos de projeção (a um ou a ambos) e que projeta ortogonalmente sobre o plano de projeção todas as suas retas e pontos.

Existem dois tipos de planos projetantes:

- **plano projetante frontal;**
- **plano projetante horizontal.**

Um **plano projetante frontal** é um plano **ortogonal** ao **Plano Frontal de Projeção**. Todos os seus pontos e retas têm a sua projeção sobre o seu traço frontal.

Um **plano projetante horizontal** é um plano **ortogonal** ao **Plano Horizontal de Projeção**. Todos os seus pontos e retas têm a sua projeção sobre o seu traço horizontal.

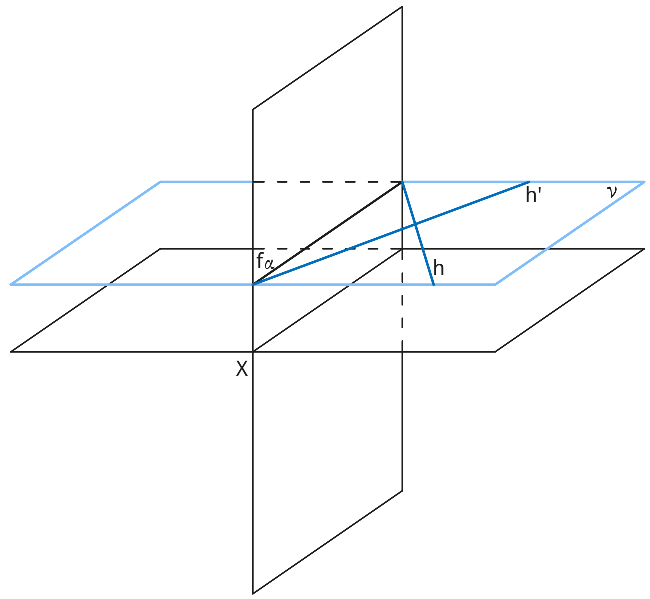


Planos projetantes frontais

Plano horizontal (ou de nível)

Observando o plano ν, horizontal, verifica-se que este é **ortogonal** ao **Plano Frontal de Projeção**, e **paralelo** ao **Plano Horizontal de Projeção**. Este facto implica que qualquer elemento geométrico que conste do plano, será projetado em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em oposição, esse mesmo elemento, em projeção frontal, estará sempre em deformação máxima (reduzido a uma única reta, coincidente com o traço frontal do plano).

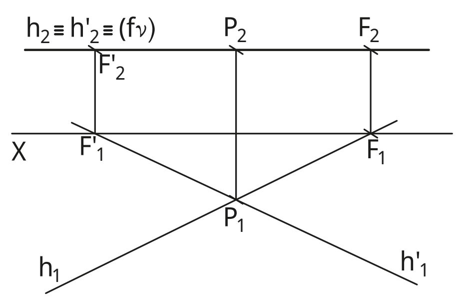


Neste caso, o plano ν, encontra-se definido por duas retas horizontais, concorrentes no ponto **P**.

Repara que ambas as projeções frontais das retas estão coincidentes, sobre o traço frontal do plano ν e, consequentemente, com as projeções frontais dos pontos que pertencem a essas retas.

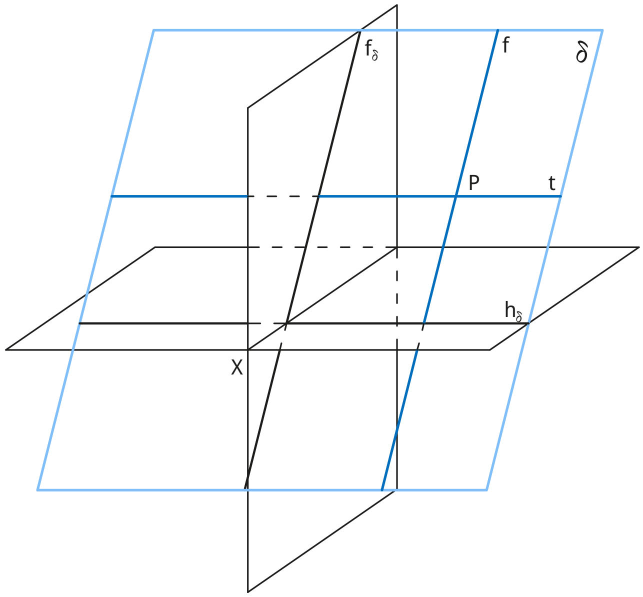
Em projeção horizontal, as retas **h** e **h'** estão representadas em verdadeira grandeza.

Os planos horizontais possuem apenas um traço (traço frontal), uma vez que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção.



Plano de topo

Um **plano de topo** é um plano **ortogonal** ao **Plano Frontal de Projeção**, logo é um plano projetante frontal, mas **oblíquo** face ao **Plano Horizontal de Projeção.** Assim, todas as suas projeções no Plano Horizontal de Projeção estão submetidas a uma deformação, dependente do ângulo do plano com o Plano Horizontal de Projeção.

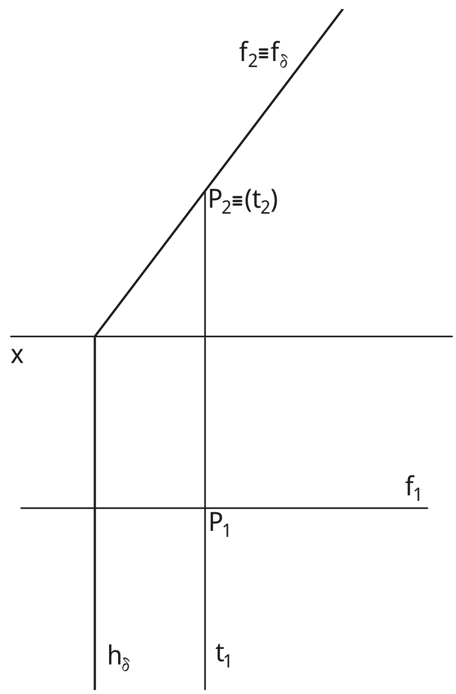


Nota que, em dupla projeção ortogonal, as projeções de ambas as retas, bem como do seu ponto de concorrência, estão sobre o traço frontal do plano.

No que respeita aos seus traços, num plano de topo, o seu traço horizontal é sempre perpendicular ao eixo **x**. O seu traço frontal forma um ângulo variável, consoante a inclinação do plano face ao Plano Horizontal de Projeção.

O seu traço frontal corresponde a uma reta frontal de afastamento nulo.

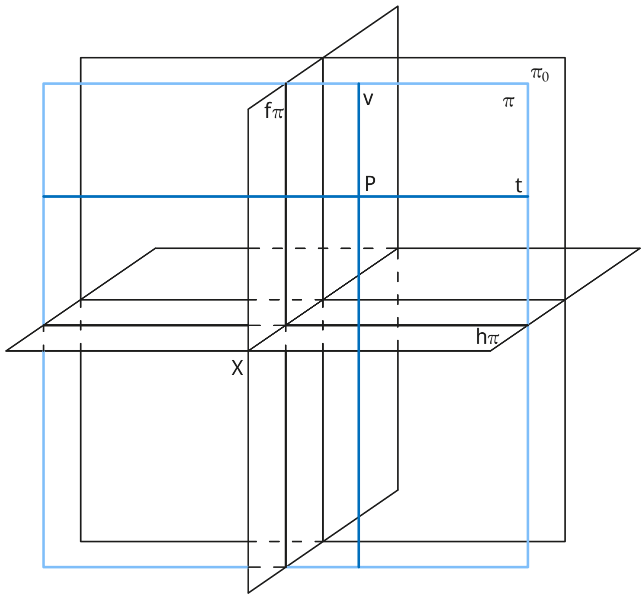
O seu traço horizontal corresponde a uma reta de topo de cota nula.



Plano de perfil

Um **plano de perfil** é um caso particular dos planos projetantes, uma vez que é **ortogonal** a **ambos os planos de projeção**. Assim, um plano de perfil é, simultaneamente, **um plano projetante frontal** e **projetante horizontal**.

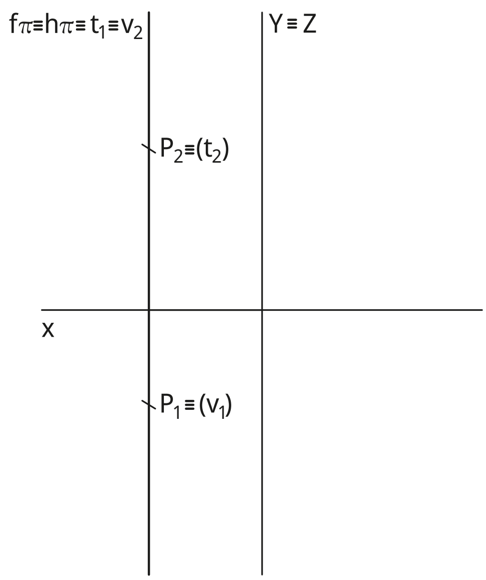
Observa o plano π, de perfil. Este está definido por duas retas, uma vertical (reta **v**) e uma de topo (reta **t**). Nota que retas verticais são retas projetantes horizontais e retas de topo são retas projetantes frontais. Esta condição valida a característica do plano de perfil ser duplamente projetante.



Os seus traços são ambos perpendiculares ao eixo **x**, uma vez que o plano π é ortogonal a ambos os planos de projeção.

Após o rebatimento sobre o plano horizontal de projeção, para passar para o plano do desenho, os traços apresentam-se como coincidentes.

Qualquer elemento do plano terá as suas projeções, quer frontais quer horizontais, sobre os traços do plano.



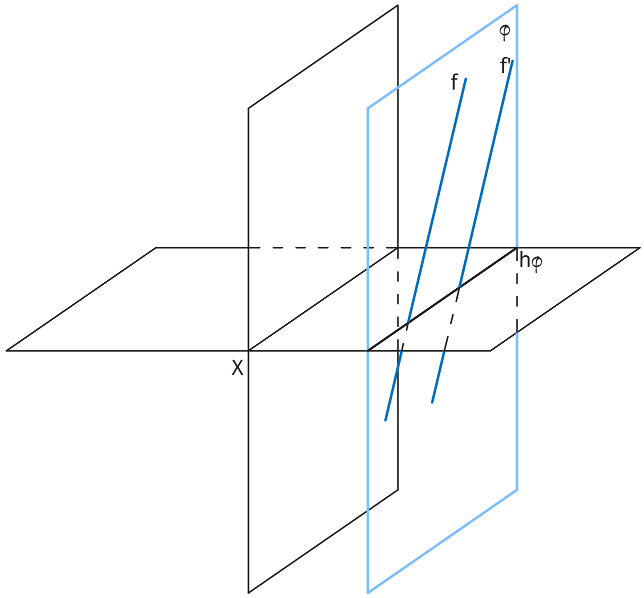
Planos projetantes horizontais

Plano frontal (ou de frente)

Os planos projetantes horizontais são planos ortogonais ao Plano Horizontal de Projeção.

Considera o plano φ. Trata-se de um plano frontal, **paralelo** ao **Plano Frontal de Projeção** e **ortogonal** ao **Plano Horizontal de Projeção**.

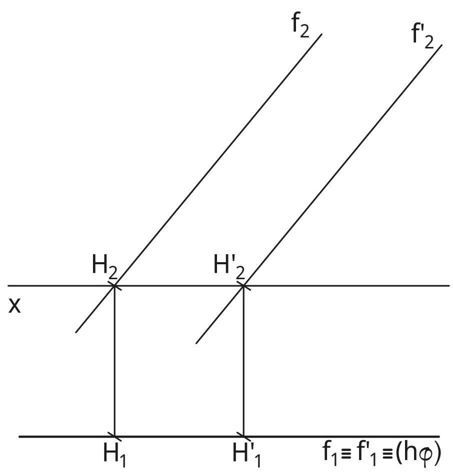
Embora todos os seus elementos se encontrem projetados sobre o seu traço horizontal, em projeção frontal, estes estão projetados em verdadeira grandeza, devido ao seu paralelismo com o Plano Frontal de Projeção.



Neste caso, o plano encontra-se definido por duas retas frontais paralelas (**f** e **f'**).

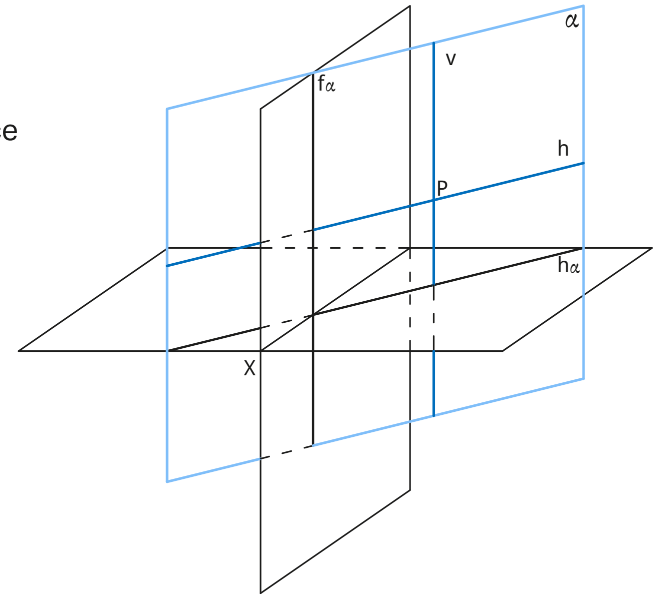
Nota que as suas projeções horizontais estão sobre o traço horizontal do plano. As suas projeções frontais estão em verdadeira grandeza.

Os planos frontais possuem apenas um traço (traço horizontal), uma vez que são paralelos ao Plano Frontal de Projeção.



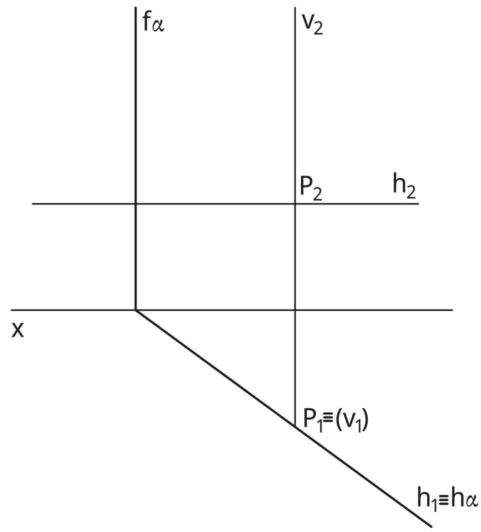
Plano vertical

Um **plano vertical** é um plano **ortogonal** ao **Plano Horizontal de Projeção** e **oblíquo** face ao **Plano Frontal de Projeção**. É um plano projetante horizontal, sendo que todos os seus elementos são projetados, horizontalmente, sobre o seu traço horizontal.



O plano *α*, vertical, está definido por duas retas, uma vertical (reta **v**) e uma horizontal (reta **h**), concorrentes no ponto **P**.

Em dupla projeção ortogonal, os traços de um plano vertical apresentam-se perpendicularmente ao eixo **x**, no caso do seu traço frontal, e com ângulo variável entre o seu traço horizontal e o eixo **x**, consoante o ângulo que o plano apresenta face ao Plano Frontal de Projeção.



Nota que todos os pontos e retas do plano têm as suas projeções horizontais sobre o seu traço horizontal. Trata-se de um plano **projetante horizontal**.

Plano de perfil

Tal como já foi abordado, o **plano de perfil** é o único que se encontra, em simultâneo, no grupo dos planos projetantes horizontais e dos planos projetantes frontais. A sua ortogonalidade face a ambos os planos de projeção origina esta condição particular.

Planos não projetantes

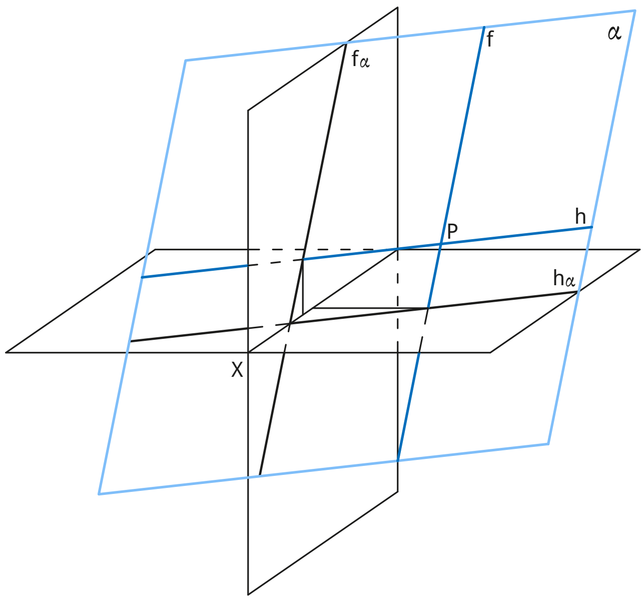
Em oposição, planos não projetantes são todos os outros que não são ortogonais aos planos de projeção. Trata-se, portanto, de planos **oblíquos face a ambos aos planos de projeção**.

Existem planos **oblíquos**, de **rampa** e de **rampa passantes**.

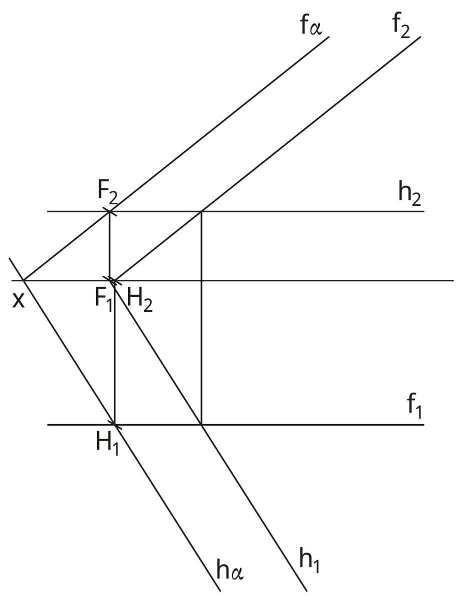
Planos oblíquos

Um **plano oblíquo** é um plano **oblíquo a ambos os planos de projeção** e face ao **eixo x**. Assim, os seus traços também são oblíquos relativamente ao eixo **x**.

Considerando o plano α, definido por duas retas, uma frontal (reta **f**) e outra horizontal (reta **h**), concorrentes no ponto **P**, este tem os seus traços oblíquos face ao eixo **x**.



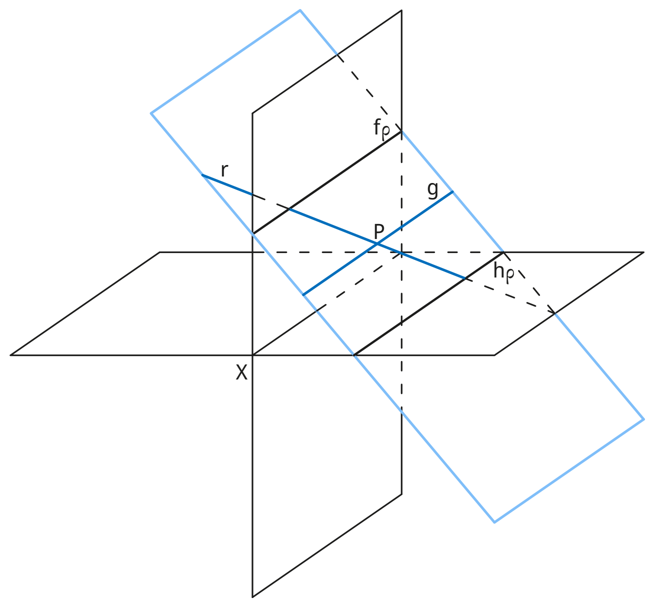
Observa o exemplo em dupla projeção ortogonal.



Nenhuma das projeções das retas **f** e **h** está sobre qualquer um dos traços do plano, uma vez que não se trata de um plano projetante. Nota que a projeção frontal da reta **f** é paralela ao traço frontal do plano, e a projeção horizontal da reta **h** é paralela ao traço horizontal do plano. Isto deve-se ao facto de os traços do plano corresponderem a retas frontais e horizontais do plano, com afastamento e cota nulos, respetivamente.

Planos de rampa

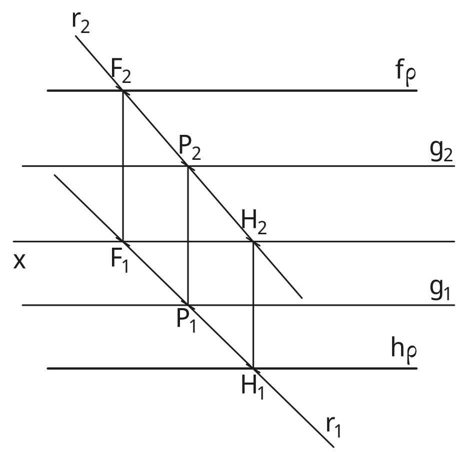
Um **plano de rampa** é um plano **oblíquo** a **ambos os planos de projeção** e **paralelo** ao **eixo x**.



Essa relação de paralelismo leva a que os traços de um plano de rampa sejam paralelos ao eixo **x**.

Observando o plano ρ, de rampa, verificamos que este se encontra definido por duas retas, uma oblíqua (reta **r**) e uma fronto--horizontal (reta **g**), concorrentes no ponto **P**.

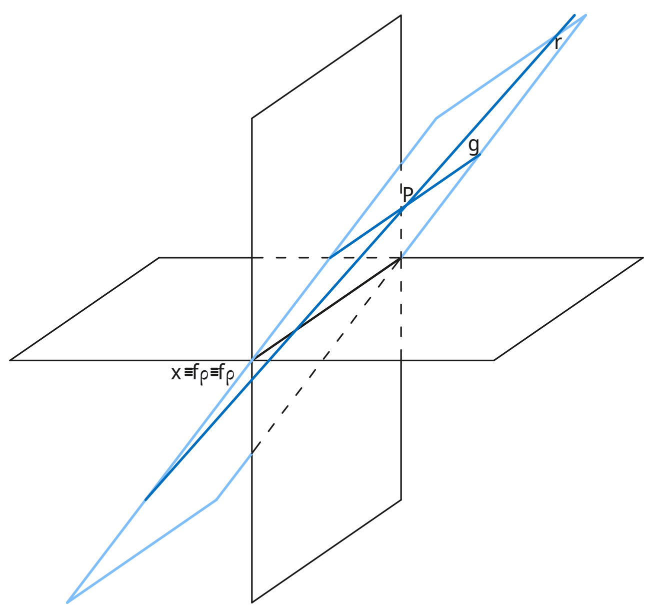
Nenhuma das retas tem a sua projeção sobre os traços do plano, uma vez que um plano de rampa não é um plano projetante.



Os traços do plano são retas fronto--horizontais do plano, de cota e afastamento nulos, respetivamente, no traço horizontal e no traço frontal.

Planos de rampa passantes

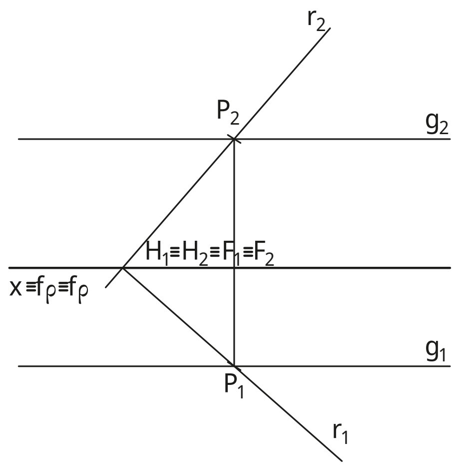
Planos de rampa passantes são casos particulares de planos de rampa, uma vez que são planos que **contêm o eixo x**. Ou seja, intersetam os planos de projeção numa única reta, que é a reta de interseção entre os planos de projeção.



Observa o plano ρ, passante. Este é oblíquo face aos planos de projeção e o eixo **x** corresponde a uma reta fronto-horizontal do plano, de cota e afastamentos nulos. Os seus traços estão sobre o eixo **x**. Excetuando as retas fronto-horizontais, todas as outras retas que podem ser parte de um plano passante devem ser, também, passantes.

Neste caso, o plano está definido por duas retas, uma oblíqua (reta **r**) e uma fronto-horizontal (reta **g**). Nota que os traços da reta **r** nos planos de projeção estão sobre o eixo **x**, uma vez que se trata de uma reta oblíqua passante.

Qualquer que seja a reta oblíqua, ou de perfil, que conste de um plano passante, terá sempre os seus traços sobre os traços do plano, ou seja, sobre o eixo **x**.



- **Planos projetantes** (ortogonais aos planos de projeção)
  - Projetantes horizontais (ortogonais ao P. H. P.)
    - Frontal – paralelo ao P. F. P.
    - Vertical – oblíquo ao P. F. P.
    - Perfil – ortogonal a ambos os P. P.
  - Projetantes frontais (ortogonais ao P. F. P.)
    - Horizontal – paralelo ao P. H. P.
    - Topo – oblíquo ao P. H. P.
    - Perfil – ortogonal a ambos os P. P.

- **Planos não projetantes** (oblíquos a ambos os planos de projeção)
  - Oblíquo – oblíquo ao eixo **x**
  - Rampa – paralelo ao eixo **x**
  - Passante – contém o eixo **x**

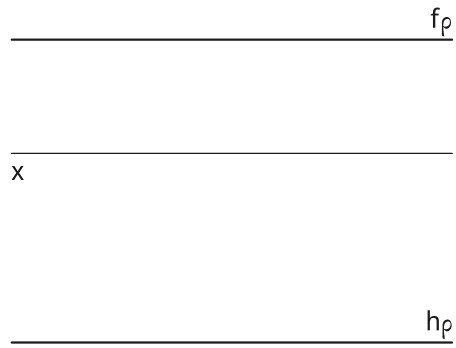
Projeção de retas e pontos pertencentes a planos

Planos de rampa

Considera o plano ρ, de rampa, definido pelos seus traços.

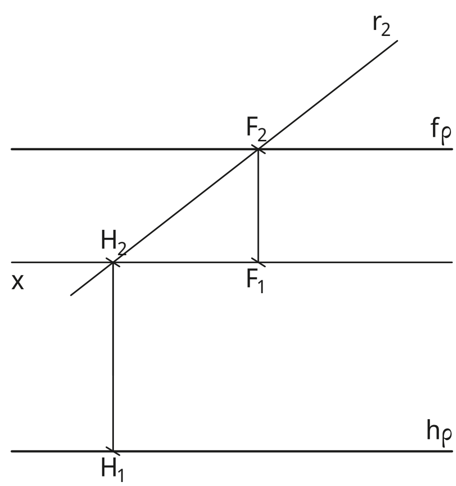
Pretende-se determinar a projeção de uma reta fronto-horizontal, com uma determinada cota, pertencente ao plano.

Este é um caso particular, uma vez que a reta fronto-horizontal, por não possuir traços nos planos de projeção, não possui pontos comuns com os traços do plano em que se insere.

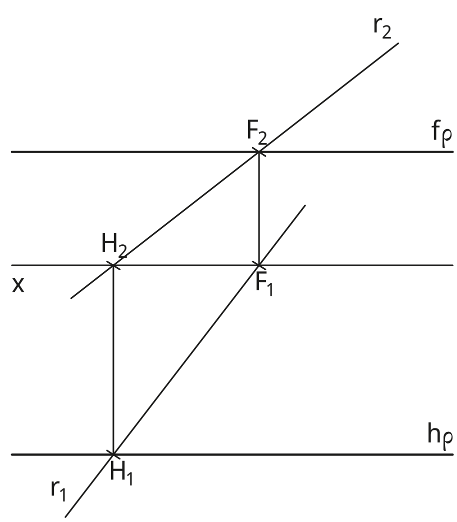


Assim, é necessário recorrer a uma reta auxiliar, do plano, que possa ser determinada a partir dos traços do plano.

Opta-se pela reta **r**, oblíqua, começando pela sua projeção frontal, e encontrando o seu traço frontal e o seu traço horizontal. Determinados dois pontos da reta, é possível representá-la pelas suas projeções.

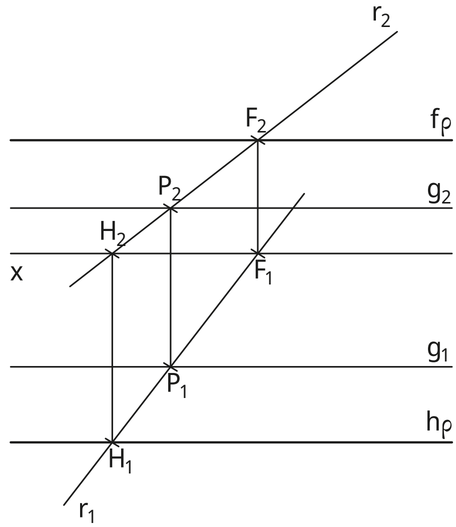


Como já estudámos, duas retas são complanares se forem paralelas ou concorrentes. Neste caso, como a reta pretendida é fronto-horizontal, esta terá de ser concorrente com **r**, para pertencer ao plano.

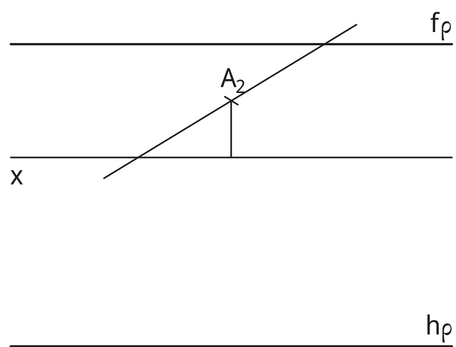


Assim, traça-se a projeção frontal da reta **g**, com a cota pretendida, e determina-se a projeção do ponto de concorrência da reta **g** com a reta **r**. Sobre $\mathbf{r_1}$, marca-se a projeção horizontal do ponto **P**, e a reta **g** encontra-se definida por um ponto e uma direção.

Deste modo, é possível chegar a uma determinada reta fronto-horizontal de um plano de rampa definido pelos seus traços.



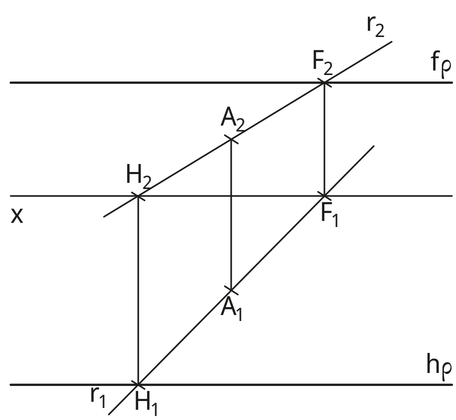
No caso da determinação de pontos pertencentes a um plano de rampa, considera o exemplo em que é dada a cota do ponto **A** e se pretende representar a sua projeção horizontal, desconhecendo o seu afastamento.



Para o ponto pertencer ao plano, terá de pertencer a uma reta desse plano. O processo passará, assim, pelo uso de uma reta auxiliar oblíqua.

Determinados os traços da reta **r** e as suas projeções, é possível determinar a projeção horizontal do ponto **A**.

Assim, é determinado um ponto pertencente a um plano de rampa representado pelos seus traços.



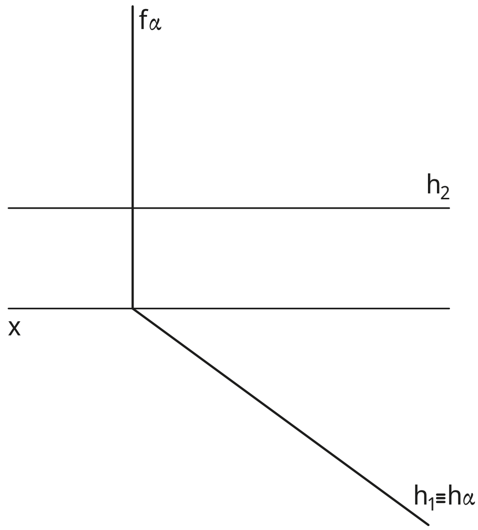
Planos projetantes

O plano vertical **α**, projetante horizontal, tem no seu traço horizontal todas as projeções horizontais dos pontos e retas neste contidos.

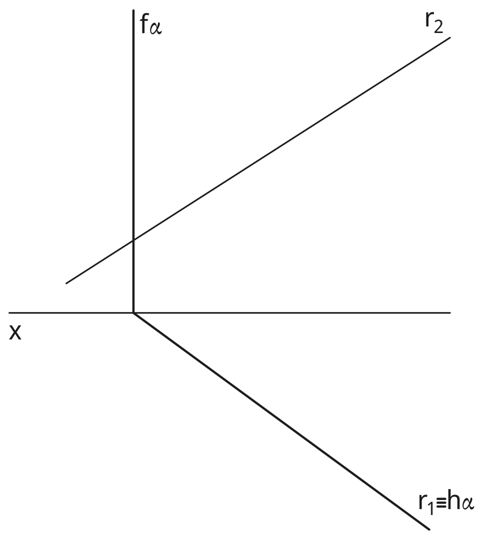
Determinadas as projeções de uma reta horizontal **h** do plano, esta terá a sua projeção coincidente com o traço horizontal do plano.

Na sua projeção frontal, uma vez que se trata de uma reta horizontal, esta é paralela ao eixo **x**.

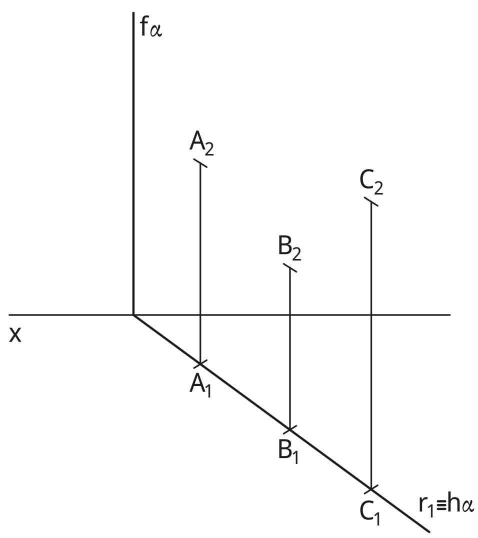
Assim são determinadas as projeções de uma reta horizontal pertencente a um plano vertical.



Já na determinação de uma qualquer reta oblíqua do plano vertical, esta terá, também, a sua projeção horizontal sobre o traço horizontal do plano.



No que respeita à sua projeção frontal, esta pode apresentar-se de variadas formas. A coincidência entre a projeção horizontal da reta e o traço horizontal do plano é condição suficiente para que esta pertença ao plano, qualquer que seja a sua projeção frontal. O mesmo princípio é aplicado no que respeita à projeção de pontos pertencentes ao plano projetante **α**. Qualquer ponto que tenha a sua projeção horizontal sobre o traço horizontal do plano, pertence ao plano.



Para praticar

1. De um plano α de topo, sabe-se que o seu traço frontal forma um ângulo de 45° (a.d.) com o eixo **x** e que o interseta no ponto de abcissa **0**. Determina as projeções de uma reta oblíqua, **r**, do plano, que contenha o ponto **P** (–4; 4; 4).

2. Considerando o mesmo plano de topo do enunciado anterior, traça as projeções de uma reta frontal, do plano, concorrente com a reta **r** no ponto **P**.

3. Dado um plano horizontal ν, cujo traço frontal tem 3 cm de cota, determina as projeções de uma reta de topo, **t**, de abcissa –2.

4. Considerando o plano ν do exercício anterior, sabe-se que contém uma reta **g**, fronto-horizontal, que concorre com a reta t num ponto **P** (–2; 6; 3).
Determina as projeções da reta **g**.

5. Dado um plano de rampa, definido pelos seus traços, em que o traço frontal tem 4 cm de cota, e o horizontal, 6 cm de afastamento, determina as projeções de uma qualquer reta **r**, oblíqua, pertencente ao plano.

6. Considera o plano de rampa ρ cujos traços horizontal e frontal têm, respetivamente, 4 cm de afastamento e 5 cm de cota. Determina as projeções de um ponto **P**, pertencente ao plano, com 2 cm de cota.

7. Sobre o mesmo plano, determina as projeções de uma reta oblíqua **r**, que contém o ponto **P**, e cuja projeção frontal faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 55° (a.d.).

8. Considera o plano de rampa ρ que contém a reta **r**, oblíqua, definida pelos pontos **A** (2; 1; 3) e **B** (–3; 5; 1).
Representa o plano pelos seus traços e determina as projeções de uma reta **s**, pertencente ao plano, e concorrente com a reta r no ponto **B**.

9. Sobre o plano do exercício anterior, determina as projeções de uma reta fronto-horizontal, **g**, concorrente com a reta r num ponto com 2 cm de cota.

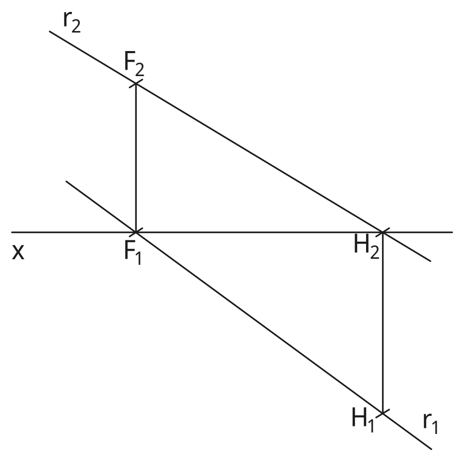
Resumindo

- Num plano projetante, qualquer ponto ou reta cuja projeção esteja sobre o traço projetante do plano, pertence a esse plano.

Determinação de planos segundo uma reta

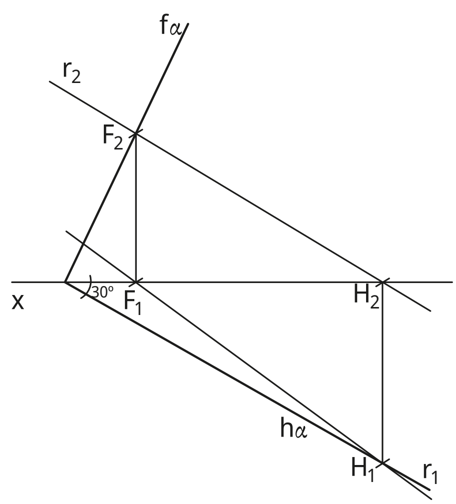
Plano oblíquo

Sendo dada uma reta de um plano, é possível determinar os seus traços se for dada uma direção ou a abcissa do seu ponto de concorrência no eixo **x**.



Neste caso, pretende-se a determinação dos traços de um plano oblíquo, sabendo que o seu traço horizontal forma um ângulo de 30° (a.d.) com o eixo **x**.

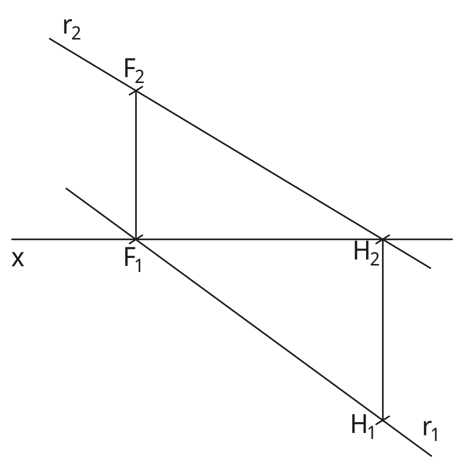
Determinados os traços da reta **r** nos planos de projeção, traça-se uma reta, passando por $\mathbf{H_1}$ e fazendo um ângulo de 30°, com abertura à direita, com o eixo **x**. Encontra-se, assim, representado o traço horizontal do plano.



Terminado este processo, o traço frontal do plano encontra-se definido por dois pontos (ponto **F** e ponto de concorrência de $\mathbf{h\alpha}$ com o eixo **x**).

Plano de rampa

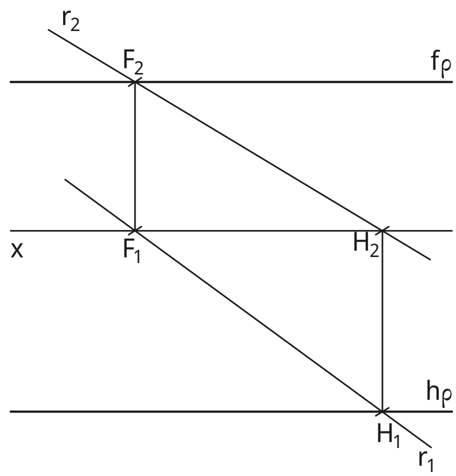
No que respeita a um plano de rampa, os seus traços podem ser definidos por apenas um ponto, uma vez que a sua direção já é conhecida – os traços de um plano de rampa são sempre paralelos ao eixo **x**.



Assim, dada uma reta **r**, oblíqua, o procedimento para determinar os traços de um plano de rampa que a contém, consiste em determinar, na reta, os seus traços nos planos de projeção.

Conhecidos os traços da reta nos planos de projeção, e sendo a reta **r** uma reta do plano de rampa do qual se pretende determinar os seus traços, é possível marcar os traços do plano, paralelos ao eixo **x**, passando pelos traços da reta **r**.

- o traço frontal do plano contém $\mathbf{F_2}$;
- o traço horizontal do plano contém $\mathbf{H_1}$.

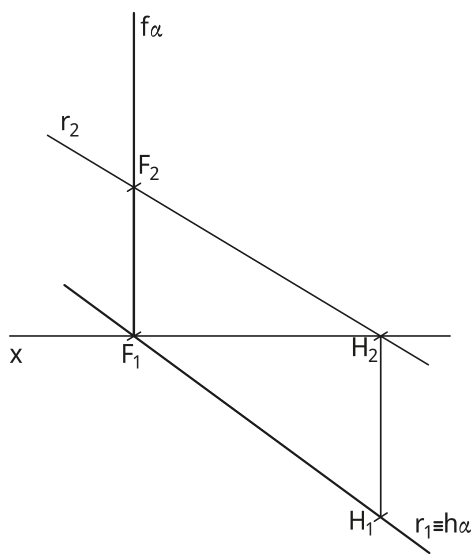


Planos projetantes

Considerando planos projetantes, o processo é mais simples, uma vez que planos projetantes projetam todos os seus pontos e retas sobre um dos seus traços. Isto é, planos projetantes horizontais projetam todos os seus elementos sobre o seu traço horizontal, e planos projetantes frontais projetam todos os seus elementos sobre o seu traço frontal.

Observa o exemplo da reta **r**, oblíqua. A determinação dos traços de um plano, neste caso, projetante horizontal (plano vertical), é imediata, uma vez que se sabe que $\mathbf{r_1}$, num plano projetante horizontal estará sempre sobre o traço horizontal do plano. Já o traço frontal de um plano de topo é sempre perpendicular ao eixo **x**. Assim, estão determinados os traços do plano.

Nota que este procedimento é apenas válido para planos projetantes, sendo um caso particular.

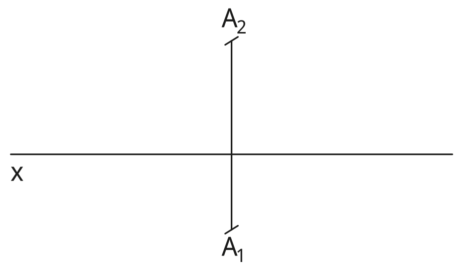


Determinação de planos segundo um ponto

Dado um ponto, é possível determinar os traços de um plano que o contenha, sendo conhecida a direção dos seus traços.

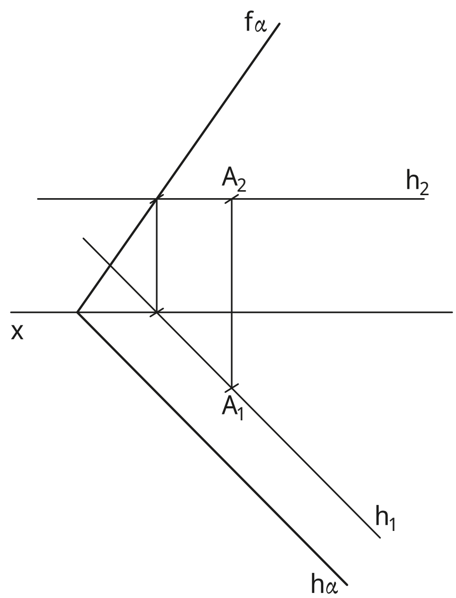
A condição de pertença de um ponto a um plano diz que o ponto terá de pertencer a uma reta do plano. Assim, é necessário traçar uma reta do plano que contenha o ponto dado.

Considerando o ponto **A**, sabe-se que pertence a um plano oblíquo, cujo traço frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 55° (a.d.). Uma vez que a direção do ângulo do traço horizontal é desconhecida, deve traçar-se uma reta horizontal, pertencente ao plano.



Determinando $\mathbf{h_2}$, que contém o ponto **A**, determina-se o seu traço frontal. Depois, é possível determinar a projeção horizontal da reta, que está definida por dois pontos: o seu traço frontal e o ponto **A**. Uma vez que as retas horizontais de um plano possuem a mesma direção dos seus traços, o traço horizontal de α será paralelo a $\mathbf{h_1}$ e concorrente com $\mathbf{f\alpha}$ no eixo **x**.

Em suma, para determinar os traços de um plano, sendo dado um ponto e uma direção, deve recorrer-se a uma reta auxiliar, desse plano, que indique a direção omissa dos traços do plano.



Para praticar

1. Considera a reta **r**, oblíqua, cujos traços frontal e horizontal têm as seguintes coordenadas: **F** (1; 0; 4) e **H** (–4; 3; 0). Determina os traços de um plano de rampa que contém a reta **r**.

2. Dada uma reta horizontal, **h**, com 3 cm de cota, cujo traço frontal é **F** (3; 0; 3), concorrente com a reta **v**, vertical, no ponto **P** (0; 6; 3), determina os traços do plano que as contém.

3. Sendo dada uma reta **f**, frontal, concorrente com o Plano Horizontal de Projeção num ponto **H** (0; 5; 0) e cuja projeção frontal forma com o eixo **x** um ângulo de 45° (a.d.), determina os traços do plano oblíquo α, que a contém.

4. Do ponto P (3; 4; 6), sabe-se que pertence a um plano de topo, cujo traço frontal forma com o eixo **x** um ângulo de 30° (a.e.). Determina os traços do plano α.

5. Determina os traços de um plano de rampa ρ que contém o ponto **R** (–2, 3, 5).

6. Sendo dado um ponto **A** (1; 3; 6), determina os traços de um plano oblíquo α que contém o ponto **A**.

7. Considerando o ponto **A** do exercício anterior, determina os traços de um plano de rampa, que contém esse ponto.

8. Sobre um plano oblíquo α, sabe-se que possui uma reta **r** que interseta o plano $\beta_{1/3}$ num ponto **Q**. Sobre a reta **r**, sabe-se que está definida por um ponto **A** (1; 2; 4), e a sua projeção frontal faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 45° (a.d.), e a sua projeção horizontal faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 55° (a.d.). Determina os traços do plano, recorrendo a uma reta projetante frontal, concorrente com a reta **r** no ponto **Q**.

Resumindo

- Em planos que intersetam ambos os planos de projeção, os seus traços intersetam o eixo **x** num mesmo ponto.
- Os traços de qualquer reta pertencente a um plano têm as suas projeções sobre os traços homónimos do plano.

6

Métodos geométricos auxiliares

Mudança de planos

Rotações

Rebatimentos

Métodos geométricos auxiliares

Revisitando os conceitos já abordados, acerca da verdadeira grandeza, esta é a característica de qualquer projeção de qualquer elemento inserido num plano paralelo a um dos planos de projeção. Por exemplo: um segmento de reta contido num plano frontal, ou seja, paralelo ao Plano Frontal de Projeção, tem a sua projeção frontal em verdadeira grandeza, o que significa que se projeta de forma fiel à sua dimensão real.

A determinação de uma verdadeira grandeza é de grande utilidade, pois permite conhecer a real dimensão de um dado elemento geométrico.

Contudo, em muitas situações, as projeções resultantes do método de dupla projeção ortogonal não estão em verdadeira grandeza – possuem um grau de deformação. Assim, com base na representação bidimensional, nestes casos, a determinação das dimensões do elemento projetado é conseguida com recurso a métodos geométricos auxiliares.

Existem três processos que permitem alcançar a verdadeira grandeza de um dado elemento:

- **mudança de planos** (ou mudança de diedro de projeção);
- **rotação**;
- **rebatimento**.

Resumindo

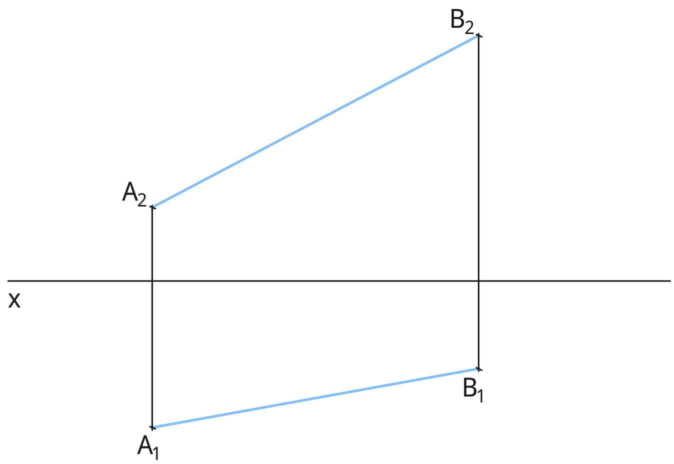
- Os métodos geométricos auxiliares são formas de reposicionar um elemento geométrico, de forma a facilitar o seu estudo. Na maioria dos casos, o objetivo é determinar a sua verdadeira grandeza.

Mudança de planos

O processo de **mudança de planos**, também conhecido como **mudança do diedro de projeção**, consiste na determinação de um plano auxiliar, paralelo ao plano que contém o elemento projetado. Assim, determina-se a projeção do elemento geométrico no novo plano, paralelo a este. Desta forma, é determinada a verdadeira grandeza do elemento geométrico em questão.

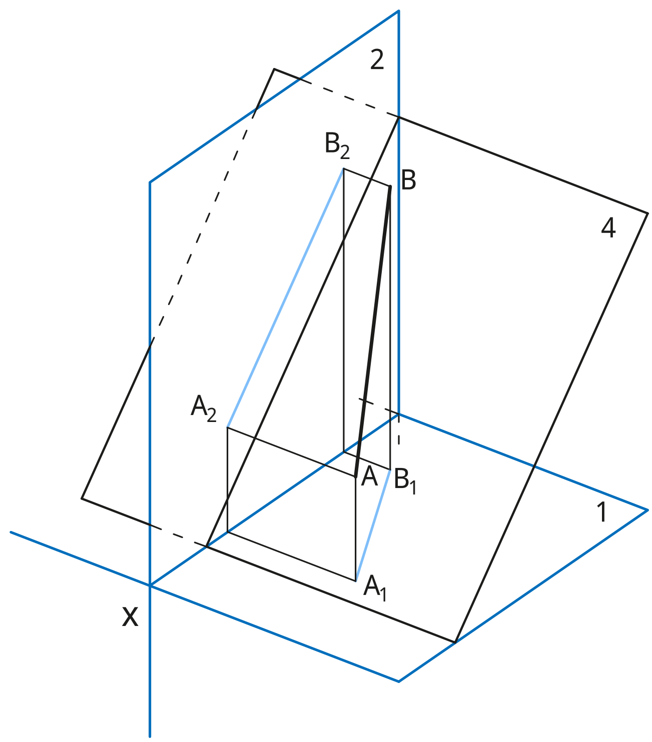
Por exemplo, considerando um segmento de reta cuja reta de suporte é oblíqua, portanto, não paralela aos planos de projeção, este tem ambas as projeções deformadas.
A determinação da sua verdadeira grandeza por meio do processo de mudança de planos é conseguida através da determinação de um plano auxiliar, paralelo ao segmento. Deste modo, o segmento passará a ser um segmento contido numa reta horizontal ou frontal, consoante o posicionamento do plano auxiliar.

Observa o segmento de reta **[AB]**.



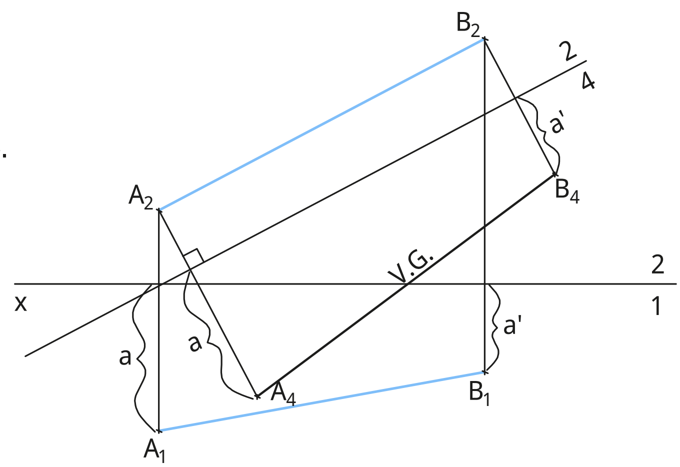
Ambas as projeções são oblíquas relativamente ao eixo **x**, tratando-se, por isso, de um segmento de reta oblíquo – nenhuma das suas projeções está em verdadeira grandeza. Contudo, pretende-se conhecer a dimensão do segmento, ou seja, a distância entre **A** e **B**. Para tal, é necessário recorrer a um método auxiliar.

No processo de **mudança de planos**, convencionou-se que o plano horizontal de projeção corresponde ao plano 1; o plano frontal de projeção, ao plano 2; e o plano auxiliar, a ser determinado, é o plano 4 (estando o plano 3 reservado para nomear planos de perfil, abordados mais à frente).



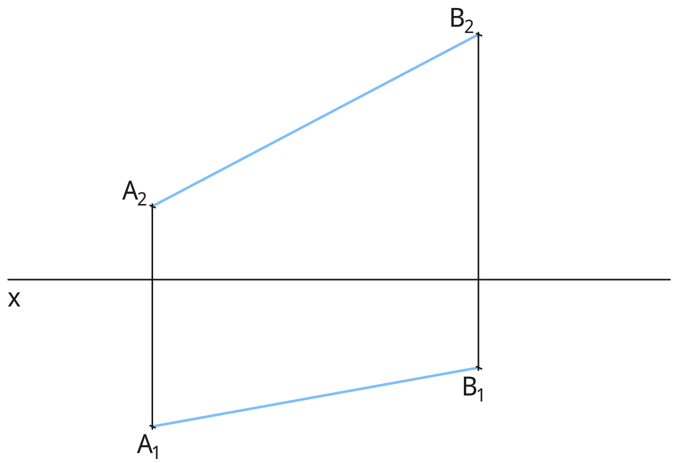
Como se pode verificar pela representação tridimensional ao lado, o segmento **[AB]** é oblíquo. Para determinar a sua verdadeira grandeza, é considerado um plano auxiliar (plano 4), paralelo ao segmento. Deste modo, dá-se a mudança de **diedro de projeção**, e os planos de projeção do segmento passarão a ser o plano 2 e o plano 4. Nota que, com base nesta transformação, o segmento **[AB]** passou a ser um segmento horizontal, paralelo ao plano 4.

No plano do desenho, é traçado um novo eixo, paralelo à projeção frontal do segmento. A partir daí, são marcados os afastamentos dos pontos **A** e **B**, perpendicularmente, originando as projeções dos pontos no plano 4. Assim, é determinada a verdadeira grandeza do segmento **[AB]**, horizontal relativamente ao plano 4. Como qualquer segmento horizontal, a sua projeção frontal é paralela ao eixo dos dois planos de projeção. A projeção horizontal (neste caso, no plano 4) está em verdadeira grandeza.



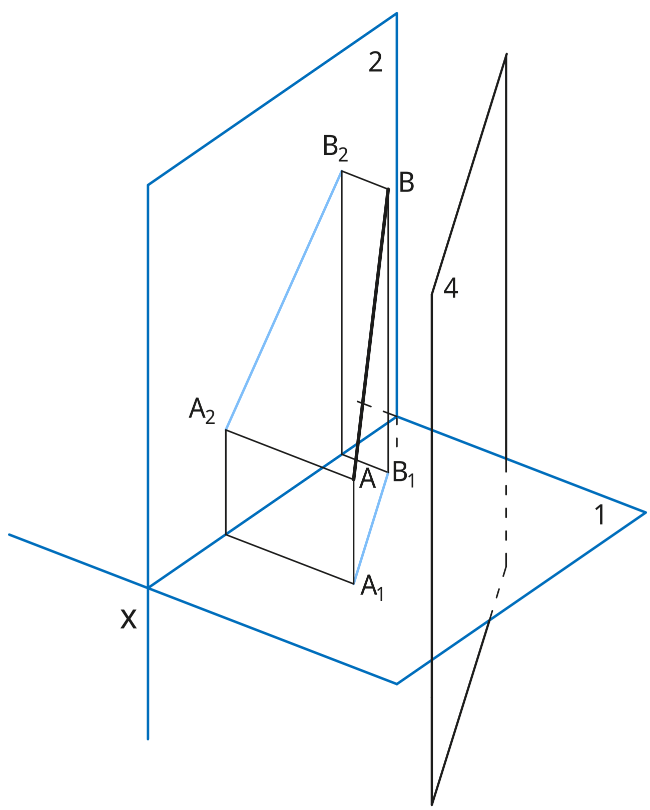
Neste caso, determinou-se a verdadeira grandeza convertendo um segmento de reta oblíquo num segmento de reta horizontal (ou de nível). Contudo, este poderia ser convertido num segmento de reta frontal (ou de frente). Esta seria uma opção igualmente válida, uma vez que iria tornar o segmento paralelo a um plano de projeção, sendo assim possível determinar a sua verdadeira grandeza.

Observa o mesmo segmento **[AB]**. Pretende-se determinar a sua verdadeira grandeza, convertendo-o num segmento de reta frontal.



O processo é, em tudo, semelhante ao descrito anteriormente, alterando apenas o plano auxiliar a determinar.

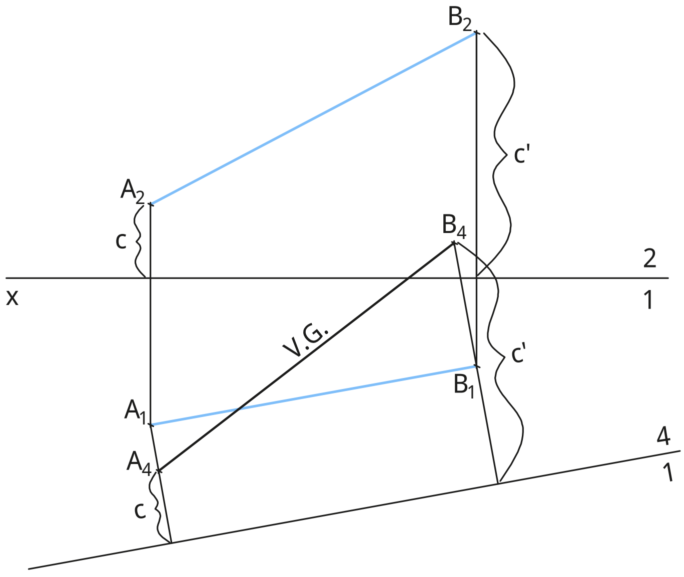
Neste caso, o plano auxiliar deverá ser, também, paralelo ao segmento, mas, ao invés de manter o plano frontal de projeção, mantém-se o plano horizontal de projeção. O novo diedro passa a estar definido pelo plano auxiliar e pelo Plano Horizontal de Projeção (planos 4 e 1, respetivamente).



Nota que o plano 4 é paralelo ao segmento de reta e forma um ângulo reto com o plano horizontal de projeção. O segmento **[AB]** projeta-se, no plano 4, em verdadeira grandeza.

Neste caso, para simplificar o desenho, optou-se por posicionar o plano auxiliar anteriormente ao segmento, o que irá corresponder, no novo diedro, a afastamentos negativos dos pontos **A** e **B**.

No plano do desenho, uma vez que se pretende um segmento frontal, o novo eixo deverá ser marcado paralelamente à projeção horizontal do segmento **[AB]**. Como o plano 4 foi posicionado anteriormente ao segmento, o eixo deve estar abaixo da projeção do segmento. De seguida, as cotas serão marcadas perpendicularmente, acima do eixo, pois **A** e **B** são pontos do 1.° diedro, e o plano horizontal de projeção manteve-se. O segmento compreendido entre $\mathbf{A_4}$ e $\mathbf{B_4}$ corresponde à verdadeira grandeza do segmento **[AB]**.



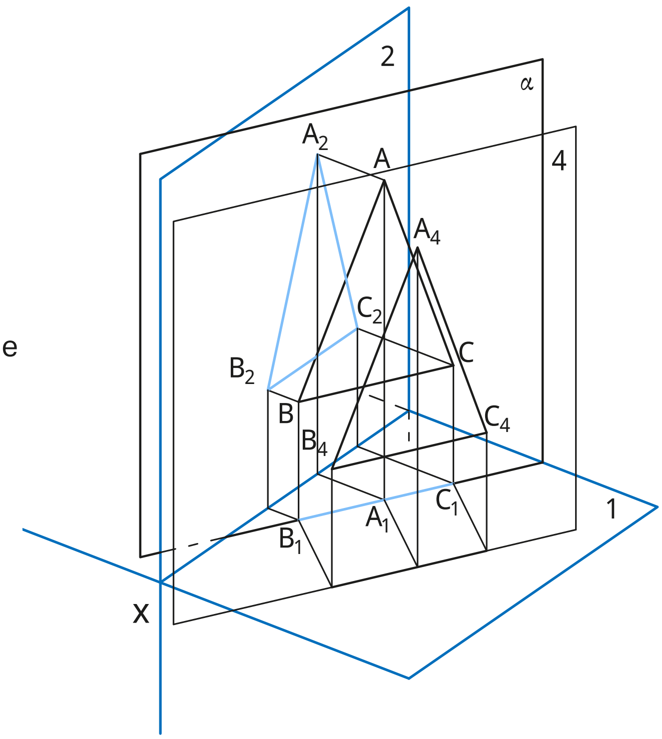
Transformação de elementos definidores do plano

Até aqui foi analisado o método de mudança de planos para determinação da verdadeira grandeza de um segmento de reta. Contudo, o método em questão pode ser alargado a casos de determinação de verdadeira grandeza de outros elementos geométricos, nomeadamente, figuras. Neste caso, a referência a ter em conta deixa de ser uma reta (reta de suporte do segmento), mas sim um plano (no qual se inserem as figuras geométricas). Assim sendo, é determinado um plano auxiliar, paralelo ao plano dado, transformando-o num tipo de plano paralelo a um plano de projeção. São estes: planos horizontais e planos frontais.

Considerando figuras contidas em planos verticais ou de topo, estes são projetantes, ou seja, perpendiculares a um plano de projeção e oblíquos ao outro plano do diedro. Nestes casos, as figuras nunca têm as suas projeções em verdadeira grandeza.

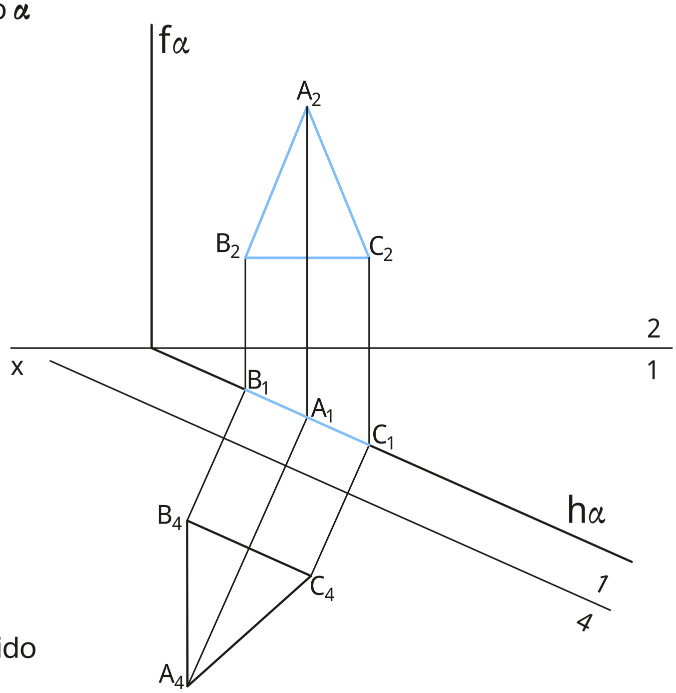
Na verdade, considerando um plano vertical, a projeção horizontal de qualquer figura neste contida terá a sua projeção horizontal em deformação máxima (coincidente com o traço horizontal do plano), e a sua projeção frontal com um determinado grau de deformação, podendo ser maior ou menor de acordo com o ângulo que o plano vertical forma com o Plano Frontal de Projeção.

Considerando o triângulo **[ABC]**, contido num plano vertical *α*, pretende-se determinar a sua representação em verdadeira grandeza.



Para tal, optou-se por transformar o plano vertical, que o contém, num plano frontal, determinando um novo plano, auxiliar, paralelo ao plano *α*. Assim, o novo diedro de projeção passa a estar definido pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo novo plano auxiliar 4, que assumirá o papel de Plano Frontal de Projeção.

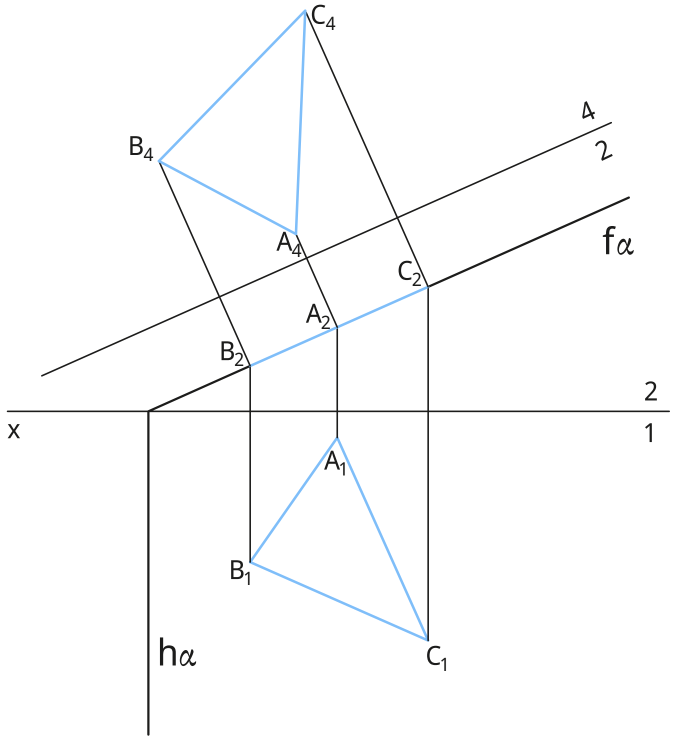
Em representação bidimensional, com o plano vertical definido pelos seus traços e com as projeções do triângulo **[ABC]**, é traçado um novo eixo, paralelo ao traço horizontal do plano, com o afastamento correspondente à distância entre o plano *α* e o plano auxiliar. A partir daí, as linhas de chamada das cotas são traçadas perpendicularmente ao novo eixo e são determinadas as novas projeções dos vértices do triângulo. Sendo estas projeções num plano paralelo ao plano que contém o triângulo, estão determinadas as verdadeiras grandezas dos segmentos correspondentes aos lados da figura geométrica.



Neste caso, a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]** foi determinada através da conversão de um plano vertical (definido pelo triângulo **[ABC]**, num plano frontal).

Ainda no âmbito de figuras pertencentes a planos projetantes, para o caso de planos de topo, o processo passa pela sua conversão num plano horizontal. O processo é semelhante ao já descrito. Contudo, o novo eixo é determinado paralelamente ao traço frontal do plano definido pela figura em questão.

As novas projeções dos vértices do triângulo são marcadas perpendicularmente ao traço frontal do plano de topo, a partir do novo eixo. Estas definem a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**.



Resumindo

No método da mudança de planos, há três aspetos a considerar:

- A escolha do plano de projeção que deve ser desconsiderado e a posição do novo plano proposto.
- Uma vez que apenas é alterado um dos planos de projeção, também apenas uma das projeções é alterada, sendo que a outra se mantém.
- As coordenadas dos pontos relativas ao plano que se mantém permanecem iguais e as coordenadas relativas ao plano que se substitui alteram-se.

Para praticar

1. É dado um segmento de reta **[AB]**, em que **A** (2; 3; 7) e **B** (–3; 5; 3). Determina a verdadeira grandeza do segmento, convertendo a sua reta de suporte numa reta de nível com 2 cm de cota.

2. É dado um triângulo **[ABC]**, pertencente a um plano de topo. Sobre o plano, sabe-se que forma um ângulo de 55° (a.d.) com o plano horizontal de projeção. Os vértices do triângulo são: **A** (1; 3), **B** (3; 1) e **C** (4; 5). Determina a verdadeira grandeza do triângulo, transformando o plano de topo num plano de nível com 2 cm de cota.

3. Do quadrado **[ABCD]**, sabe-se que dois dos seus lados são segmentos de reta verticais. Determina dos traços do plano que contem o quadrado, bem como as suas projeções, sabendo que: o segmento **[AB]**, de nível, cuja projeção horizontal faz um ângulo de 45° (a.d.) e o ponto A dista 2 cm do traço frontal da reta de suporte do segmento. A distância entre **A** e **B** é de 6cm. Determina a verdadeira grandeza do quadrado.

Rotações

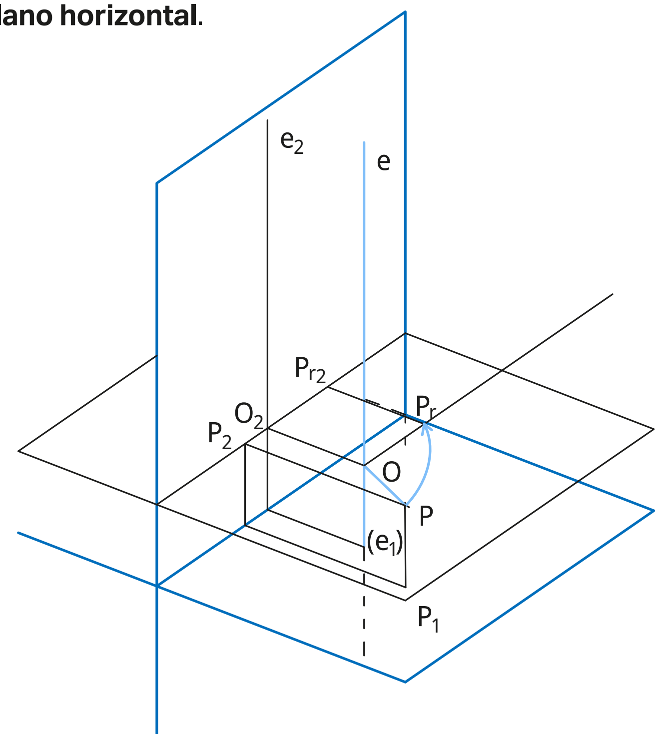
Rotações de pontos

A **rotação** é outro método geométrico que visa o reposicionamento de determinado elemento geométrico, de forma a facilitar o seu estudo.

Neste caso, ao contrário do que acontece com o método de mudança de planos, no qual o objeto permanece nas mesmas coordenadas, e apenas mudam os seus planos de projeção, na rotação, o diedro mantém-se, e dá-se uma deslocação do elemento geométrico em estudo.

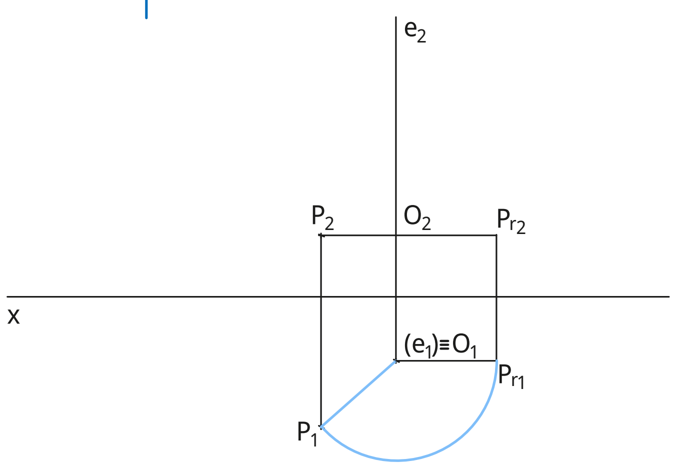
Numa rotação, dá-se um movimento de um elemento geométrico, seja ele um ponto, uma reta, ou um segmento de reta, em torno de um eixo. Os arcos de rotação estão sobre planos perpendiculares ao eixo de rotação. Por exemplo: se o **eixo** for uma **reta vertical**, os **arcos de rotação** desenvolver-se-ão sobre um **plano horizontal**.

Observando o exemplo, tem-se o processo de rotação de um ponto (ponto **P**). Para tal, determina-se um eixo de rotação. Neste caso, optou-se por um eixo vertical (reta **e**). Como tal, o ponto **P** irá deslocar-se sobre um plano horizontal (onde irá ser traçado o arco de rotação).

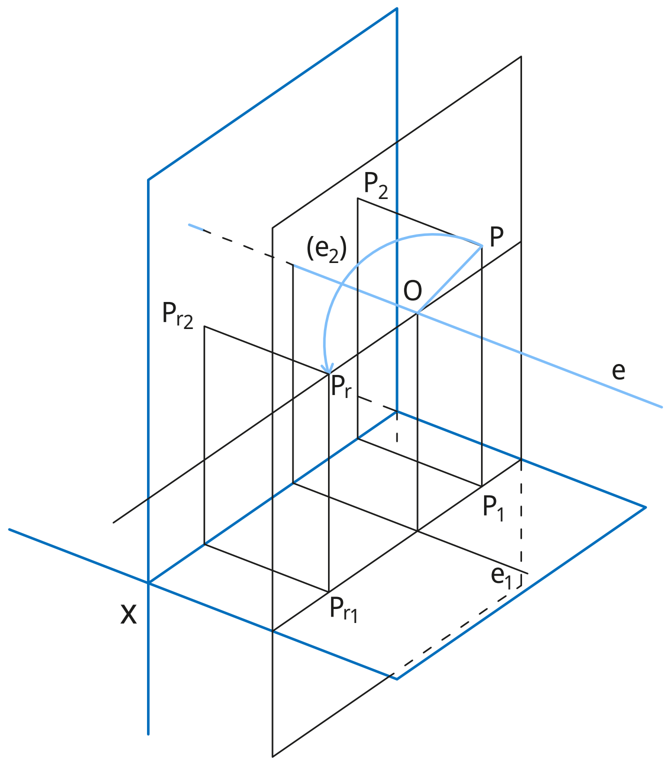


Dependendo da amplitude da rotação, o ponto **P** será deslocado para uma outra localização do diedro, mantendo a sua cota, uma vez que o eixo de rotação é vertical, alterando, apenas, a sua abcissa e o seu afastamento.

Em dupla projeção ortogonal, pode verificar-se que a cota do ponto **P**, após a rotação, mantém o mesmo valor, ao contrário da sua abcissa e do seu afastamento. A origem da rotação é um ponto da reta com a mesma cota do ponto **P**.



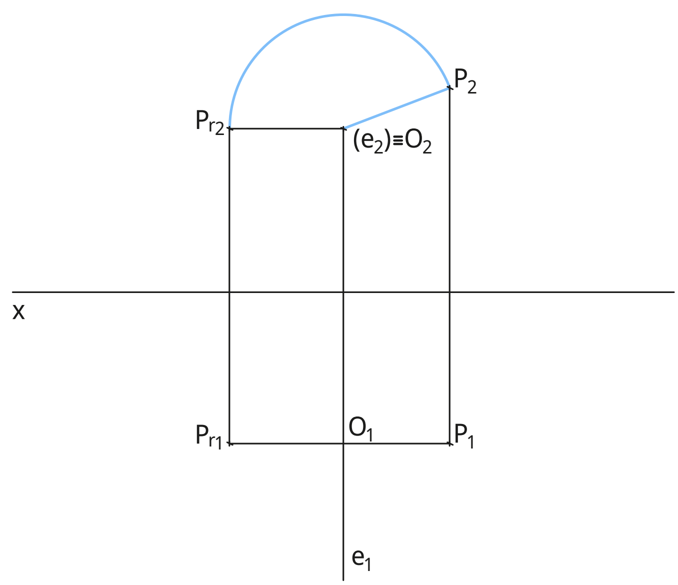
Considera, agora, um exemplo de rotação de um ponto, mas cujo **eixo de rotação** é uma **reta de topo** (reta **e**) Neste caso, o **arco de rotação** desenvolve-se sobre um **plano frontal**, perpendicular ao eixo de rotação.



Neste caso, após a rotação, o ponto mantém o seu afastamento, alterando a sua abcissa e cota.

A amplitude da rotação em questão projetar-se-á em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

A representação da rotação do ponto **P** em torno de um eixo de topo, em dupla projeção ortogonal, traduz-se como no desenho ao lado.



A origem da rotação é o ponto **O**, que é um ponto da reta **e**, de afastamento igual ao do ponto **P**. Nota que, após a rotação, o afastamento do ponto mantém-se, havendo alteração na sua abcissa e cota. A amplitude do ângulo de rotação pode ser medida em projeção frontal.

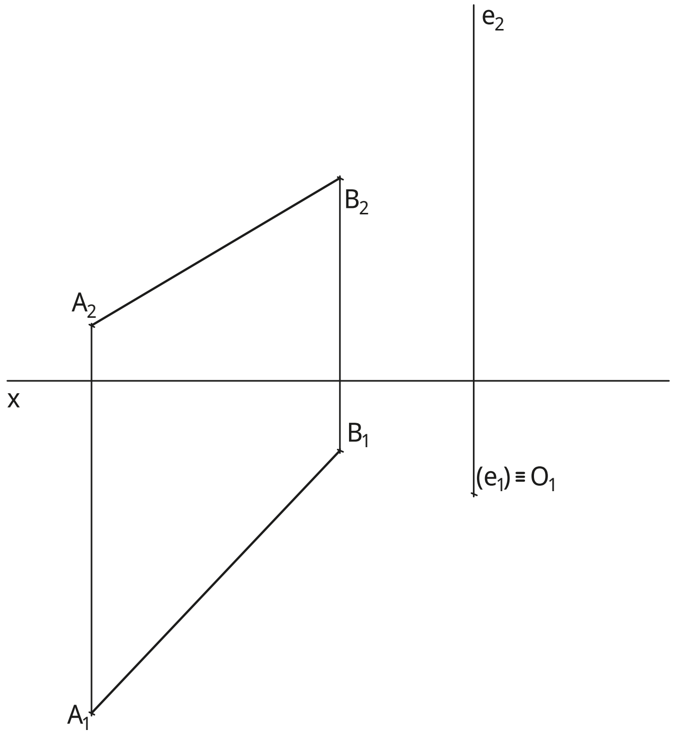
Após a rotação, o ponto **P** situa-se à esquerda da sua posição original. Por isto, considera-se que a rotação foi feita no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Rotações de segmentos de reta

Considerando, agora, rotações de segmentos de reta, observa o segmento **[AB]**.

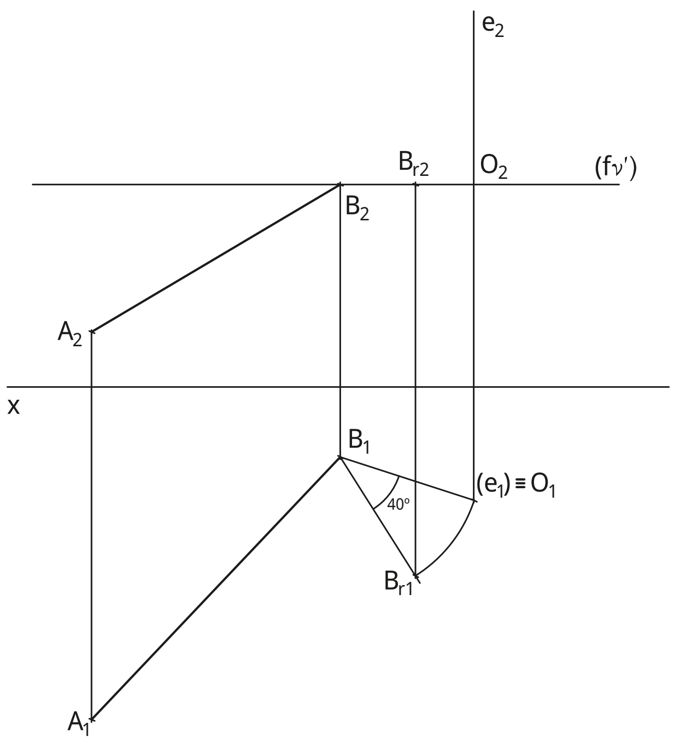
Pretende-se efetuar uma rotação do segmento **[AB]**, considerando um eixo, que se apresenta sob uma reta vertical (reta **e**).

Sendo o eixo uma reta vertical, as rotações serão feitas sobre um plano perpendicular ao eixo, ou seja, sobre um plano horizontal.

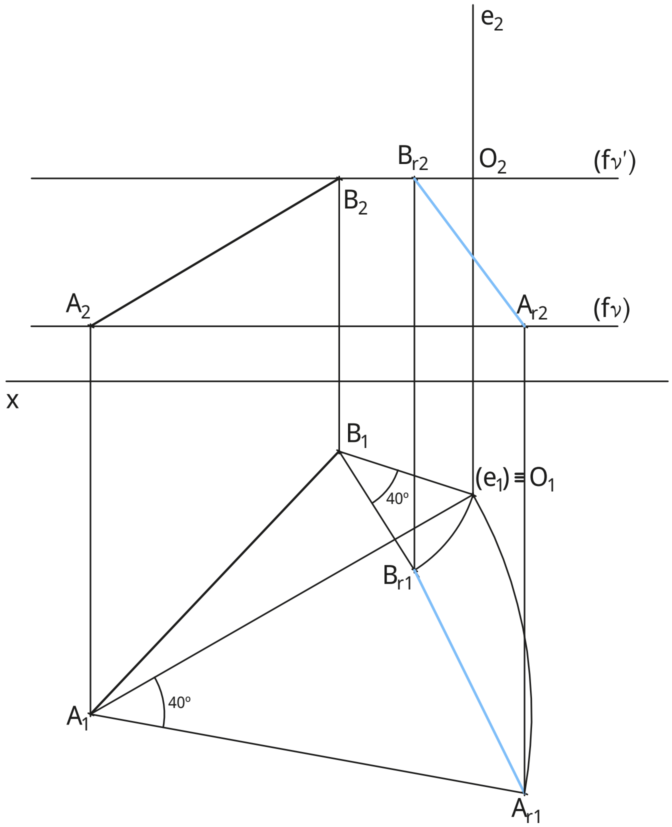


Acerca da rotação, sabe-se que a amplitude é 40°, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Assim, começando por efetuar a rotação de um dos extremos do segmento (ponto **B**), procede-se à união da projeção horizontal do ponto **B** e da projeção horizontal do ponto **O** (origem da rotação), coincidente com o traço horizontal do eixo de rotação. A partir daí, é determinada a projeção horizontal do ponto **B** após a sua rotação, marcando um ângulo de 40° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Nota que a marcação pode ser feita diretamente em projeção horizontal, uma vez que esta decorre sobre um plano horizontal.



A projeção frontal de **B**$_r$ estará sobre o traço do plano horizontal onde se dá a rotação, ou seja, com a mesma cota de **B**$_2$.



Para a determinação da rotação do segmento **[AB]**, é necessário proceder à rotação do seu outro extremo: ponto **A**.

Assim, repete-se o processo para o ponto **A**, assegurando os mesmos critérios de rotação: amplitude e sentido.

A rotação do ponto **A** dar-se-á sobre um outro plano horizontal, que contém o ponto **A**. A amplitude da rotação será, igualmente, traçada em projeção horizontal.

Após a rotação dos pontos **A** e **B**, é possível determinar a rotação do segmento, **[A**$_r$**B**$_r$**]**.

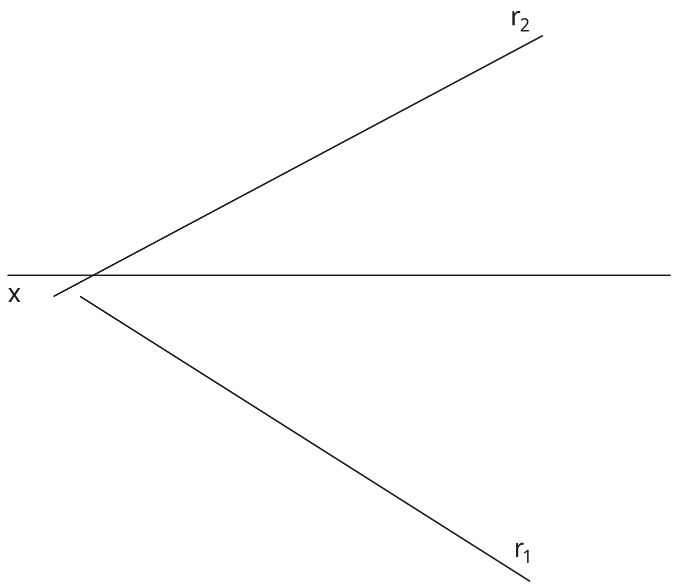
Para praticar

1 Considera o ponto **A** (0; 3; 2). Determina as projeções do ponto **A** após uma rotação de 45°, no sentido dos ponteiros do relógio, em torno de um eixo vertical, com afastamento igual ao do ponto **A**, com 3 cm de abcissa.

2 Considera o ponto **A** do enunciado anterior. **A** é um dos extremos de um segmento, cujo outro extremo é o ponto **B** (–4; 6; 3). Determina as projeções do segmento **[AB]** após uma rotação com as mesmas características das do enunciado anterior.

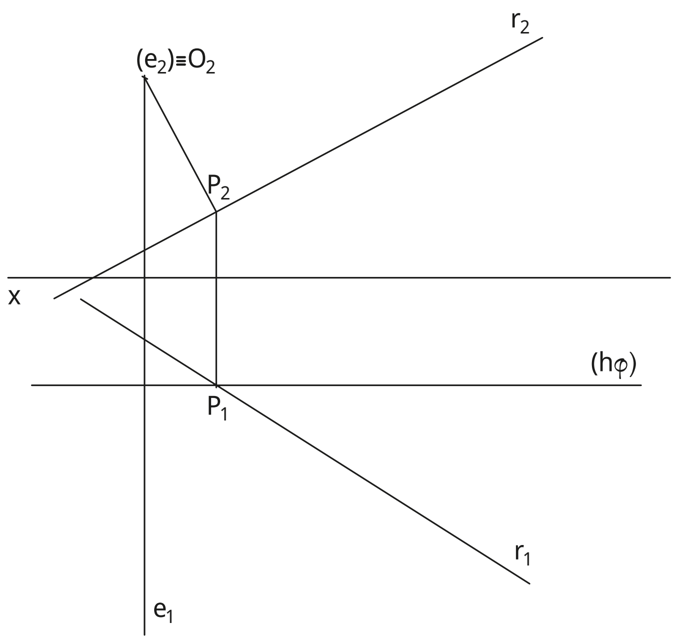
3 Dado um segmento de reta **[CD]**, em que **C** (1; 4; 2) e **D** (–3; 2; 5), determina as suas projeções, após uma rotação, sobre uma reta de topo que contém o ponto **D**, para que o segmento se torne horizontal. A amplitude e o sentido de rotação deverão ser determinados de acordo com a situação gráfica que permitir a melhor economia de traçado.

Rotações de retas



No que respeita à rotação de retas, estas serão feitas através da rotação de elementos definidores de uma reta, ou seja, de pontos da reta dada.

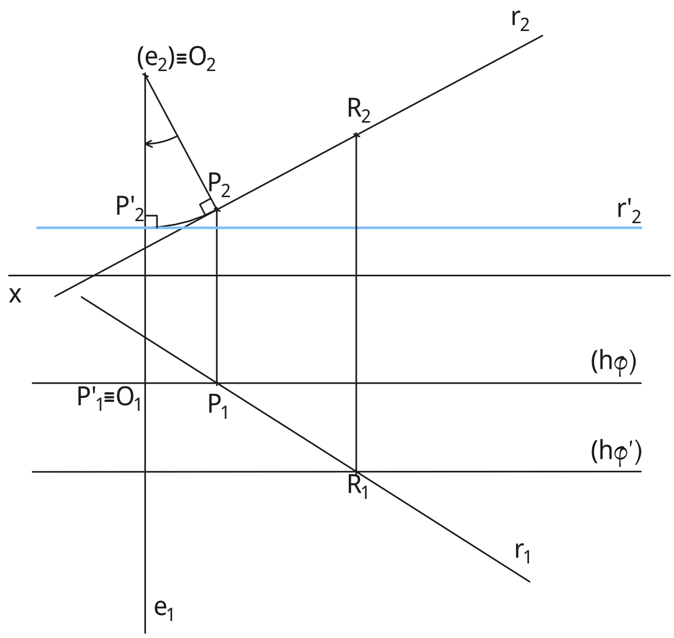
Observa a reta **r**, oblíqua. Pretende-se efetuar uma rotação que torne a reta **r** numa reta horizontal. Como tal, o primeiro passo, comum a todas as rotações, consiste em determinar o eixo de rotação.



Uma vez que se pretende obter uma reta horizontal, a rotação deverá ser efetuada em torno de uma reta de topo.

Neste caso, a amplitude da rotação não está definida *a priori*, sendo verificada em projeção frontal, em verdadeira grandeza, uma vez que, tendo um eixo de topo, a rotação é feita sobre planos frontais.

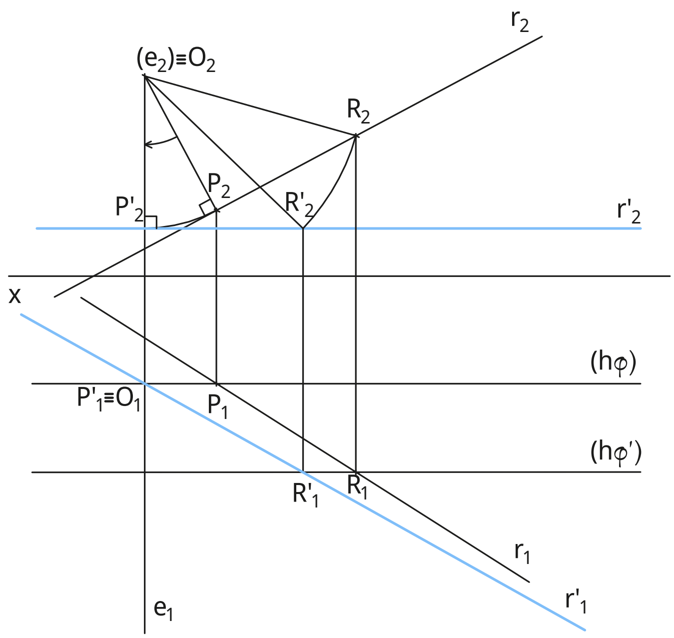
Assim, determinado o eixo, une-se a projeção frontal do ponto **O** (origem da rotação) à reta **r**, segundo uma perpendicular. Daí resulta o ponto **P**. O segmento **[OP]** é perpendicular à reta **r** e ao eixo de rotação.



O plano onde se dá a rotação do ponto **P** é um plano frontal. Assim, o seu traço horizontal contém a projeção horizontal do ponto **P**.

Uma vez que se pretende transformar a reta **r** numa reta horizontal, determinada a nova projeção do ponto **P**, é possível determinar a projeção frontal da reta **r** após a rotação, uma vez que a sua nova projeção frontal será sempre paralela ao eixo **x**.

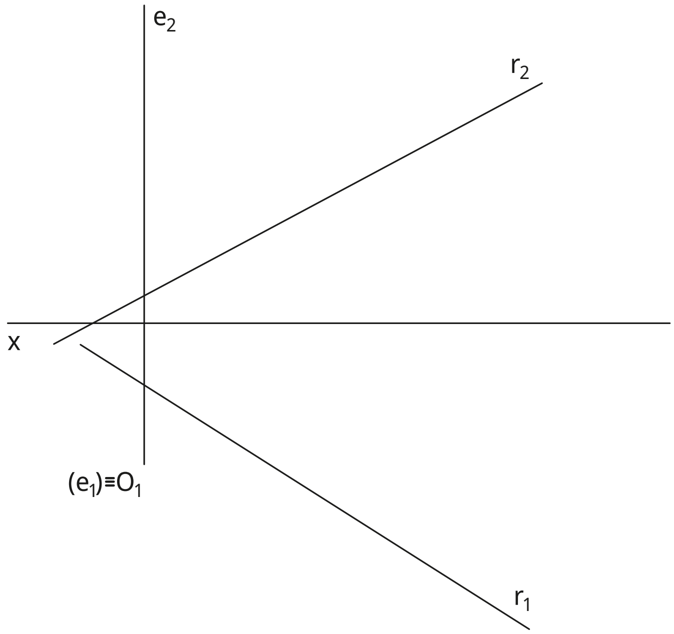
Uma vez que a rotação do ponto **P** foi feita sobre um plano frontal, a projeção horizontal do ponto após a rotação estará, também, sobre o traço horizontal desse plano frontal. Está, assim, determinado o ponto **P** após a sua rotação, pelas suas projeções.



Para determinar a projeção horizontal da reta **r**, é necessário mais um ponto da reta. Assim, **R** é outro ponto qualquer da reta **r**. Repetindo o processo de rotação, desta vez para o ponto **R**, é possível determinar a projeção horizontal da reta **r** após a sua rotação.

A reta **r** é, agora, uma reta horizontal.

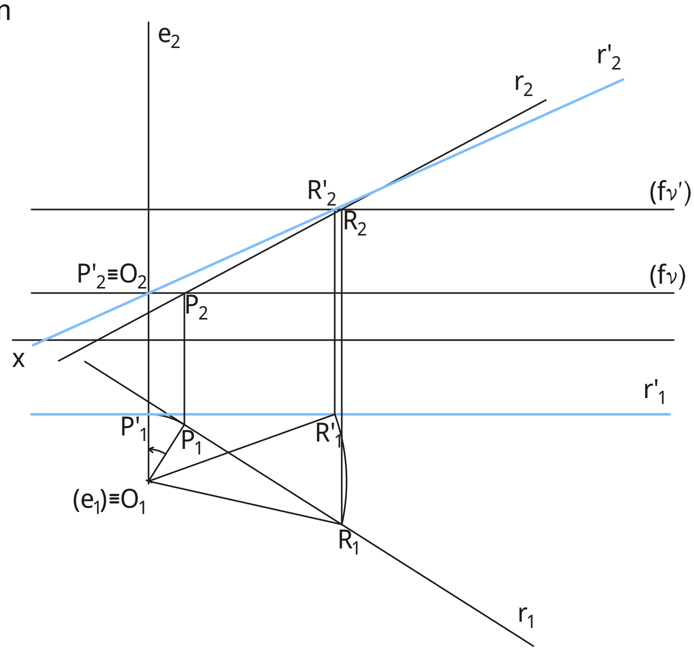
Observa a mesma reta **r**. Desta vez, pretende-se tornar a reta **r**, oblíqua, numa reta frontal.



Para tal, a primeira alteração face ao exemplo anterior é no eixo de rotação.

Neste caso, o eixo deverá ser vertical, uma vez que os arcos de rotação deverão estar contidos em planos horizontais.

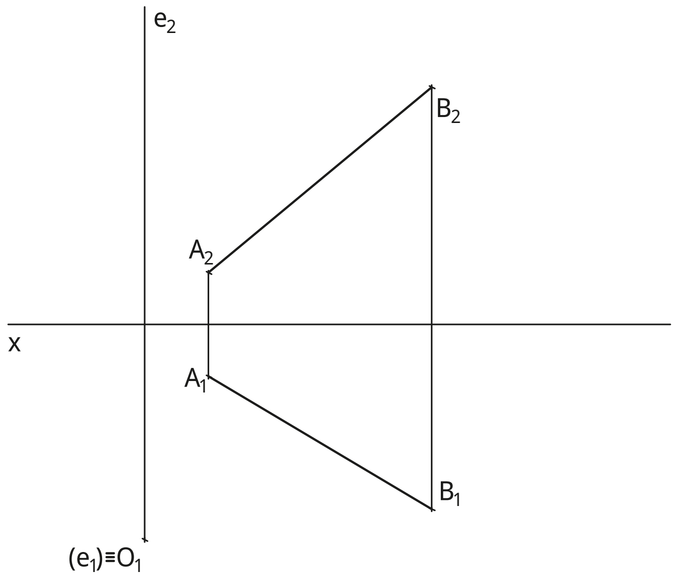
Uma vez determinado o eixo de rotação, o processo é equivalente ao já estudado, mas com rotações que se desenvolvem sobre planos horizontais e arcos de rotação em verdadeira grandeza em projeção horizontal.



Através da determinação de dois pontos da reta **r**, e da sua rotação para que estes tenham o mesmo afastamento, a reta **r** passa a ser uma reta frontal, por meio de uma rotação.

Assim, tendo uma reta oblíqua aos planos de projeção, é possível reposicioná-la, para que passe a estar paralela a um dos planos, sendo esta uma posição mais conveniente para diversos tipos de estudo, nomeadamente, na medição de distâncias entre pontos.

A rotação pode, por isso, ser um processo para determinação da verdadeira grandeza de um dado elemento geométrico.



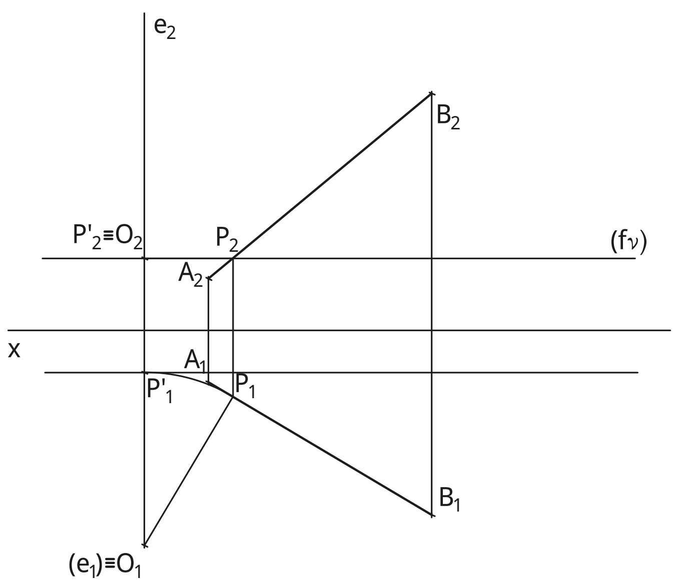
Observa o segmento de reta **[AB]**.

Sendo um segmento oblíquo, as suas projeções encontram-se deformadas, não sendo possível determinar, com base nestas, o seu real comprimento.

Para tal, é necessário efetuar uma rotação do segmento que o coloque paralelo a um dos planos de projeção.

Sendo dado um eixo de rotação que é uma reta vertical, intui-se que a rotação deverá resultar num segmento frontal.

Assim, o processo a ter em conta é idêntico ao já apresentado, no que respeita à rotação de retas oblíquas para retas frontais.

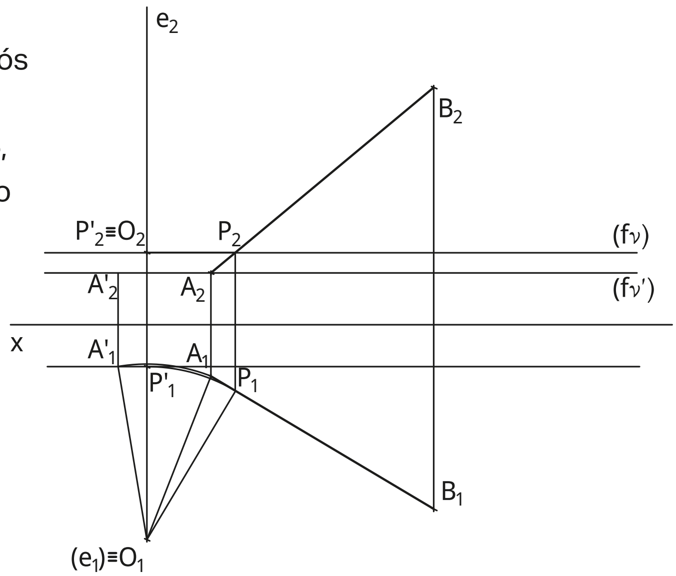


Determinado o segmento que contém o ponto **O** (origem da rotação), e perpendicular ao segmento **[AB]**, tem-se o segmento **[OP]**.

Uma vez que **P** pertence ao segmento **[AB]**, a determinação das suas duas projeções é imediata.

Efetuada a rotação do ponto **P** e determinadas as projeções do mesmo após a sua rotação, é possível determinar o afastamento do segmento após a rotação, uma vez que, tratando-se de um segmento frontal, todos os seus pontos terão afastamento igual.

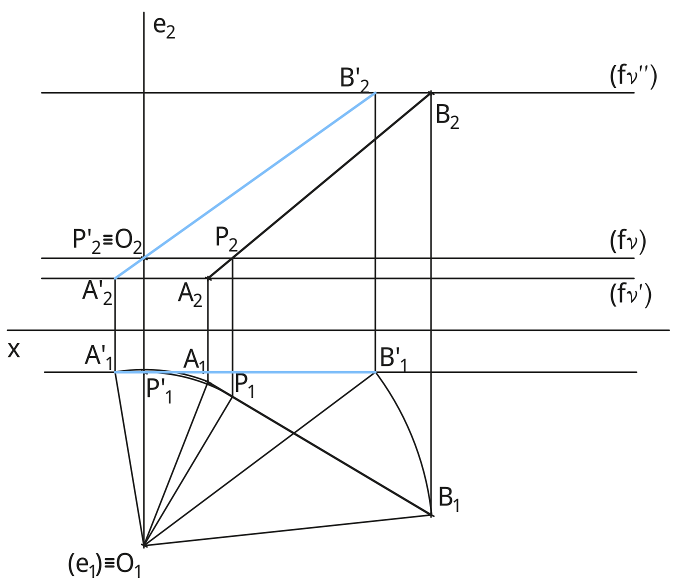
Por $\mathbf{P_{r1}}$, é possível traçar a projeção horizontal da reta de suporte do segmento **[AB]** após a rotação.



De seguida, é feita a rotação dos extremos do segmento. Unindo $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{A_1}$, traça-se um arco com o raio correspondente ao segmento **[AO]**, com a mesma amplitude do arco de rotação do ponto **P**, até intersetar a projeção horizontal da reta de suporte do segmento **[AB]**. Aí, tem-se a projeção horizontal de **A** após a rotação.

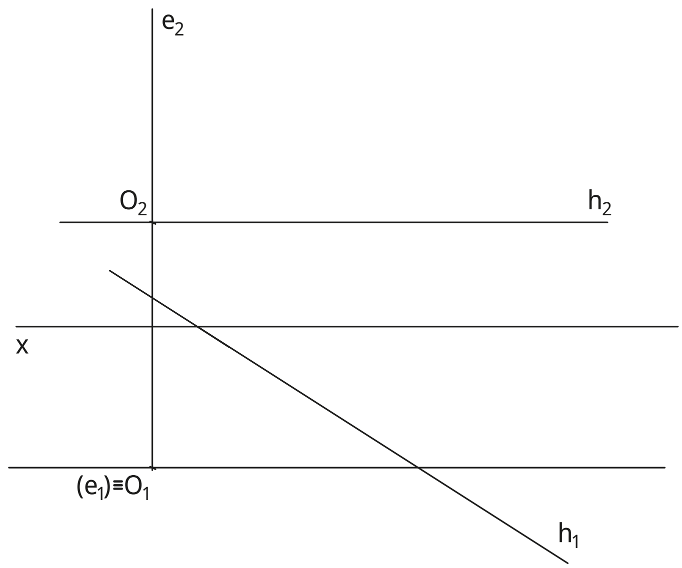
A projeção frontal é determinada com a mesma cota da projeção frontal antes da rotação, uma vez que a mesma se deu sobre um plano horizontal.

Repetindo o processo para o ponto **B**, é possível determinar as projeções do segmento após a rotação.
O segmento **[AB]** é, agora, um segmento frontal. O seu comprimento real poderá ser medido diretamente na sua projeção frontal, que está, agora, em verdadeira grandeza.



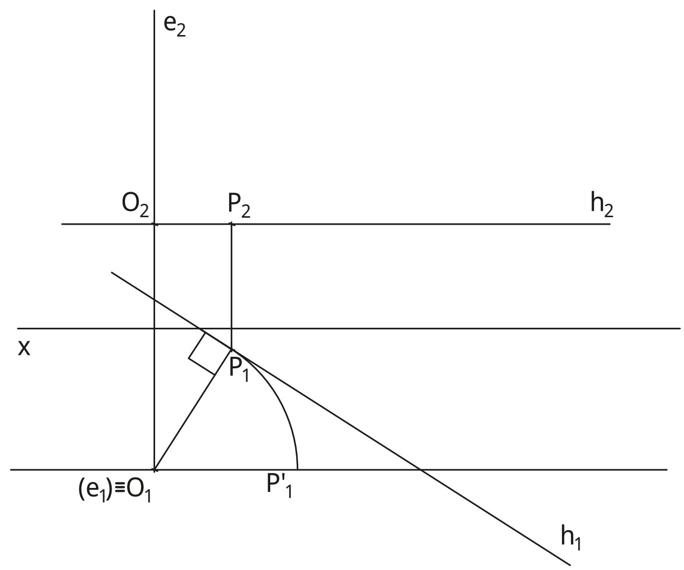
Estudados os casos em que se pretende transformar uma reta oblíqua numa reta paralela horizontal ou frontal, por meio de uma rotação, estudar-se-á, agora, como transformar, também, por meio de uma rotação, uma reta horizontal numa reta de topo, igualmente paralela ao Plano Horizontal de Projeção.

Sendo dada uma reta **h**, horizontal, é pretendido que esta passe a ser uma reta de topo, com recurso a uma rotação.



Neste caso, o eixo deverá ser uma reta vertical, uma vez que a rotação será feita sobre planos horizontais.

À semelhança dos exemplos já estudados, é determinado um segmento que contenha a origem da rotação e um ponto da reta dada. Esse segmento deve ser perpendicular à reta dada e ao eixo. Essa perpendicularidade verifica-se, em verdadeira grandeza, em projeção horizontal.

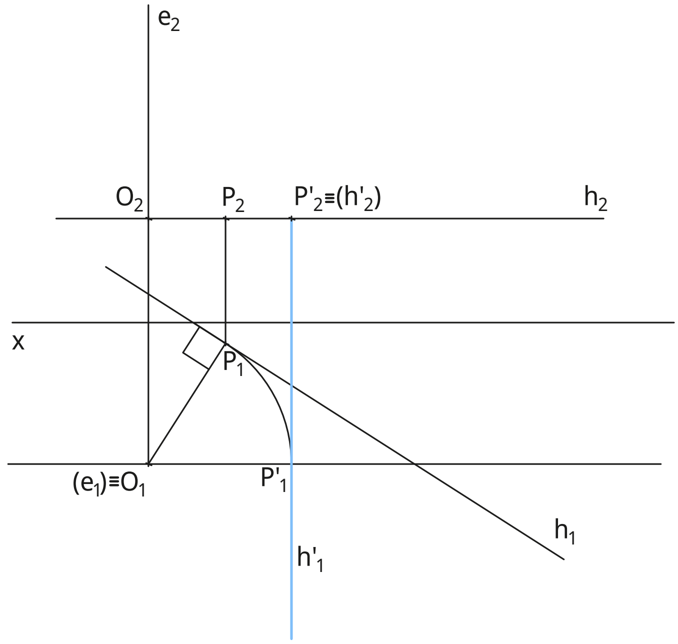


Nota que, quando o eixo de rotação é vertical, o plano dos arcos de rotação é horizontal, perpendicular ao eixo; quando o eixo de rotação é de topo, o plano dos arcos de rotação é frontal, perpendicular ao eixo.

Nota que o plano onde se dá a rotação contém a reta **h**.

Determinado o ponto **P**, da reta **h**, após a rotação, pelas suas projeções, é possível determinar a projeção da reta **h**, após a sua rotação, para uma reta de topo.

Repara que, neste caso, é apenas necessário um ponto da reta, uma vez que é conhecida a direção da mesma. Uma reta de topo é sempre perpendicular ao Plano Frontal de Projeção, e, por isso, a sua projeção horizontal é sempre perpendicular ao eixo **x**.

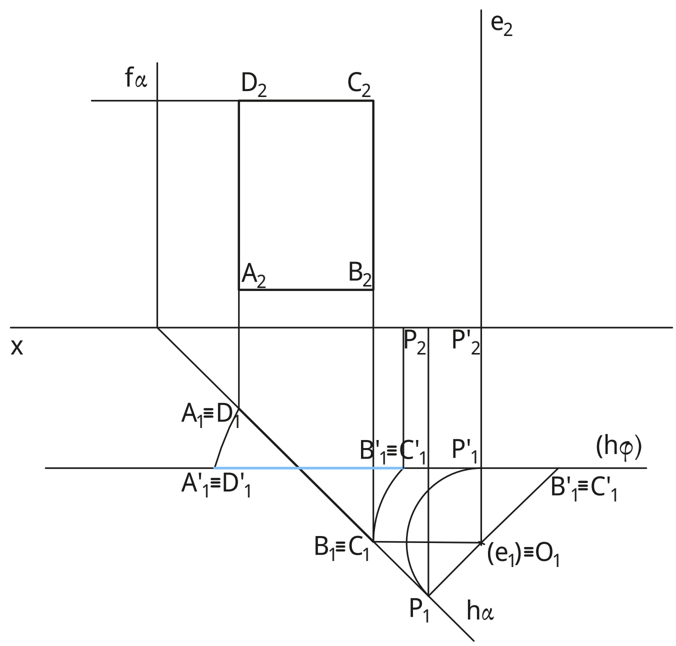


Rotações de planos projetantes

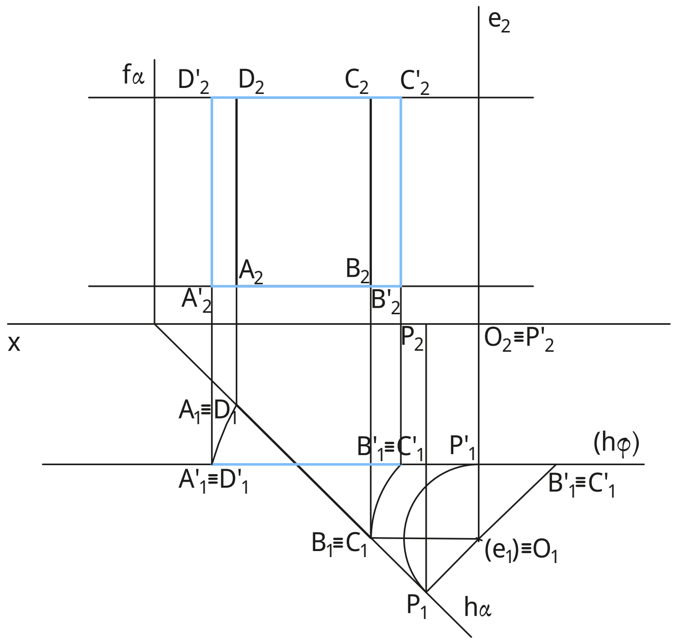
A **rotação de planos projetantes**, especialmente quando se trata de planos de verticais ou de topo, é de extrema utilidade, uma vez que permite obter a verdadeira grandeza de qualquer elemento geométrico contido nesse plano.

Considera a figura **[ABCD]**. Sabe-se que é um quadrado contido num plano vertical. Por isto, é adquirido que a sua projeção horizontal está em deformação máxima e que a sua projeção frontal não está em verdadeira grandeza, estando deformada.

Neste caso concreto, é possível saber a medida do lado do quadrado, uma vez que dois dos seus lados estão inseridos em retas verticais, e, por isso, projetam-se em verdadeira grandeza no plano frontal de projeção, pois são paralelos a este (segmentos **[AD]** e **[BC]**).



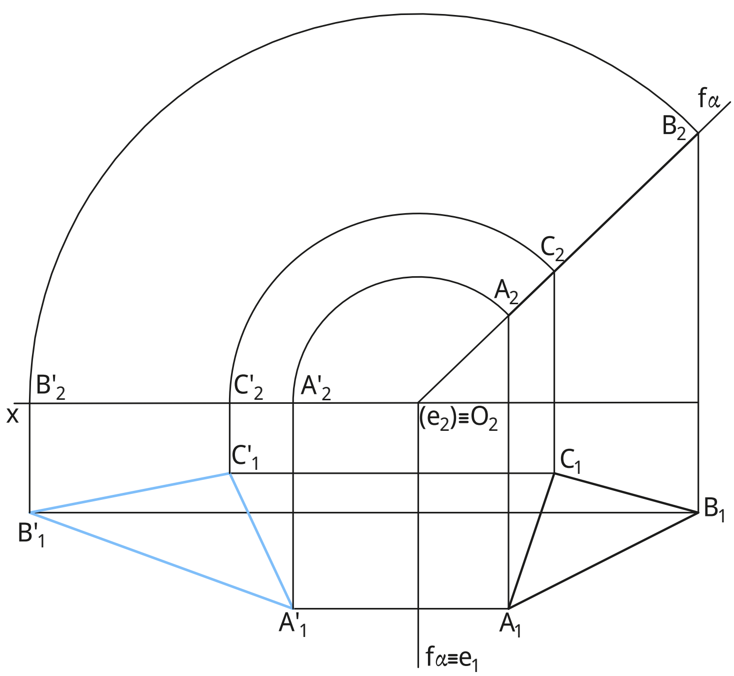
Em todo o caso, pretende-se obter a verdadeira grandeza do quadrado **[ABCD]** por meio de uma rotação, em que o plano vertical passa a ser um plano frontal. O tipo de reta que mais se adequa a este caso, para ser o eixo de rotação, é a reta vertical. Assim, o eixo é a reta **e**, vertical, e exterior ao plano. Posteriormente, o procedimento é o mesmo da rotação de pontos para rotação de retas ou segmentos de reta. A possibilidade de conhecer, antes da rotação, a verdadeira dimensão do lado do quadrado permite validar a solução que resulta da rotação do plano. Em suma, neste caso, para determinar a verdadeira grandeza do quadrado **[ABCD]**, bastou proceder à rotação dos dois segmentos de reta **[AB]** e **[CD]**.



Contudo, quando se trata de rotações de planos, com figuras geométricas, o desenho pode ficar muito sobrecarregado, se o eixo de rotação for exterior ao plano.

Assim, por forma a conseguir uma maior economia de meios, é comum optar-se, no caso da rotação de planos, por um eixo que pertença ao plano que vai ser alvo da rotação.

Neste caso, temos um plano de topo, no qual se encontra um triângulo **[ABC]**. Pretende-se determinar a verdadeira grandeza do triângulo através de uma rotação. Sendo o eixo uma reta do plano de topo, e sabendo que se pretende que o triângulo passe a estar contido no plano horizontal de projeção, o eixo terá de ser uma reta que pertença, em simultâneo, aos dois planos, ou seja, o traço horizontal do plano.



Aí, os arcos de rotação passam a estar em verdadeira grandeza no plano frontal de projeção, e a amplitude da rotação passa a corresponder ao ângulo maior que o plano α faz com o Plano Horizontal de Projeção.

Daí, resulta uma rotação do plano de topo para um plano horizontal (neste caso, o Plano Horizontal de Projeção), segundo um eixo que pertence, em simultâneo, a ambos os planos. Este processo introduz um terceiro método geométrico auxiliar: o **rebatimento**.

Resumindo

No método das rotações, há três aspetos a considerar:

- A escolha do eixo de rotação (vertical ou de topo) mais apropriado ao caso concreto em estudo e consequente plano onde estão contidos os arcos de rotação (frontal, se o eixo for de topo; horizontal, se o eixo for vertical).
- A amplitude da rotação, que deverá ser a mesma para todos os elementos geométricos alvo da rotação.
- O sentido da rotação, que poderá ser no sentido dos ponteiros do relógio, ou contrário a este. Também aqui deverá ser o mesmo em todos os elementos geométricos alvo da rotação.

Para praticar

1. Considera um plano vertical, cujo traço frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 50° (a.d.). O plano possui um triângulo cujos vértices são: **A** (3; 4), **B** (5; 7) e **C** (1; 5). Determina a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**.

2. Considera um plano α definido por duas retas, em que a reta **t**, de topo, contém o ponto **P** (3; 4; 6) e a reta **f**, de frente, é concorrente com a reta **t** no ponto **P** e faz um ângulo de 45° (a.d.) com o Plano Horizontal de Projeção. De que plano se trata? Transforma o plano α num plano horizontal com 3 cm de cota.

3. Considera um plano vertical α cujo traço horizontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 45° (a.d.) e cujo ponto de concorrência dos seus traços no eixo **x** tem 3 cm de abcissa. Transforma o plano vertical α num plano frontal com 3 cm de afastamento.

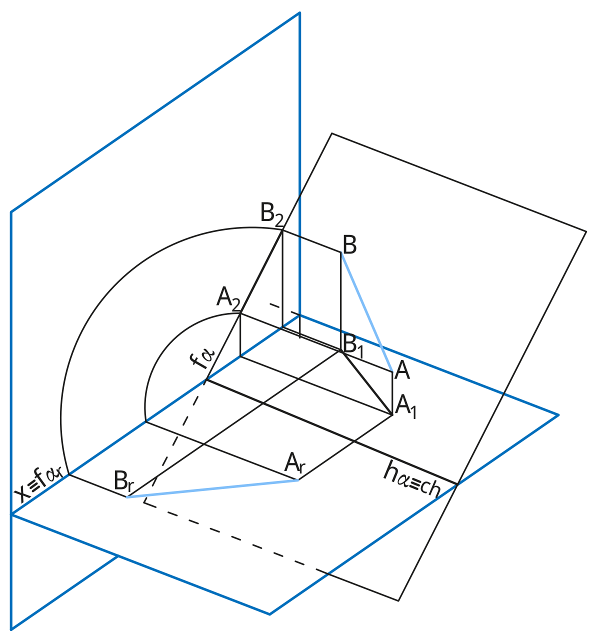
Rebatimentos

Como foi anteriormente referido, um **rebatimento** é uma **rotação** em que o **eixo é complanar com o elemento que se pretende rodar**. Isto pressupõe que este **método** é utilizado, unicamente, para **planos**.

Assim, sempre que, numa rotação, o eixo pertença ao plano da figura que se pretende rodar, então, está-se perante um rebatimento. Neste caso, o eixo é denominado de **charneira**.

Um exemplo muito elucidativo de um rebatimento é uma porta. Esta pode ser rebatida para várias posições, consoante o seu ângulo de rotação, em torno de um eixo que lhe pertence (dobradiças). A esse eixo dá-se o nome de charneira.

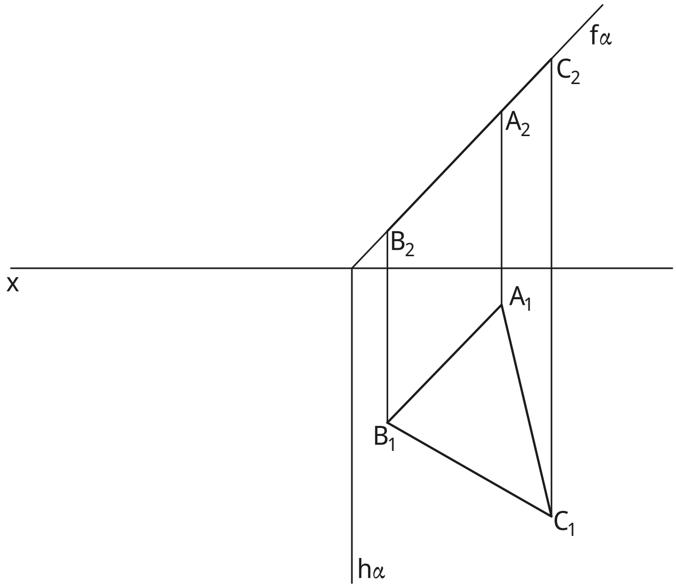
Observa, agora, o segmento **[AB]** contido num plano de topo. Pretendendo obter a verdadeira grandeza do segmento, optou-se por rebater o segmento sobre o Plano Horizontal de Projeção. Assim, a charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano, fα, e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.



Nos rebatimentos, salvo algumas exceções, os elementos são geralmente rebatidos sobre os planos de projeção. Assim, o resultado do rebatimento é feito segundo apenas uma representação, ao invés das rotações, em que os pontos continuam a estar definidos por duas projeções, após a rotação.

Analisando o processo em dupla projeção ortogonal, considera o triângulo **[ABC]**, contido num plano de topo α. Pretende-se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, e, para tal, a forma mais intuitiva é rebater o plano de topo sobre o Plano Horizontal de Projeção.

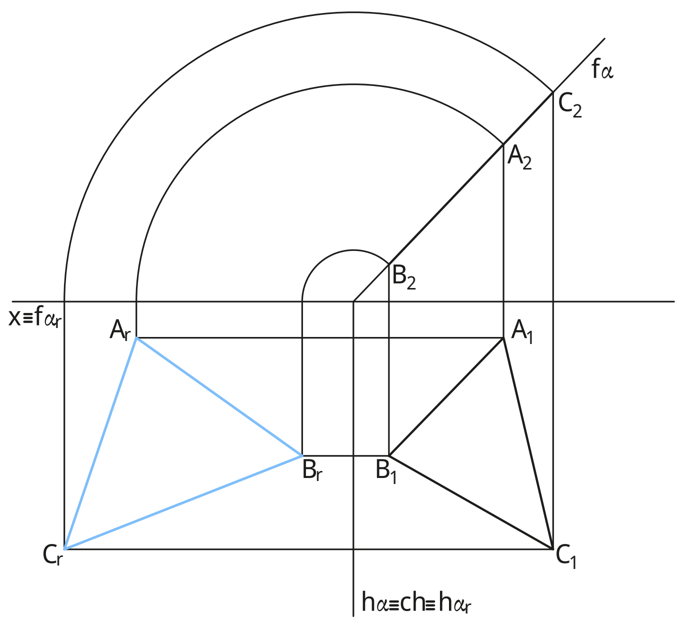
Para tal, determina-se a charneira do rebatimento, que deverá ser uma reta pertencente ao plano a rebater e ao plano para o qual será rebatido: traço horizontal de α.



No plano do desenho, a origem dos arcos de rebatimento será onde a charneira interseta o eixo **x**. A partir daí, as projeções frontais dos vértices do triângulo devem ser transportadas para o eixo **x**.

Para determinar os pontos rebatidos, desde o eixo **x**, deve ser traçada uma linha de chamada com o mesmo afastamento dos pontos na sua posição original. Assim, ficam determinados os vértices rebatidos do triângulo e, por conseguinte, os lados do mesmo em verdadeira grandeza.

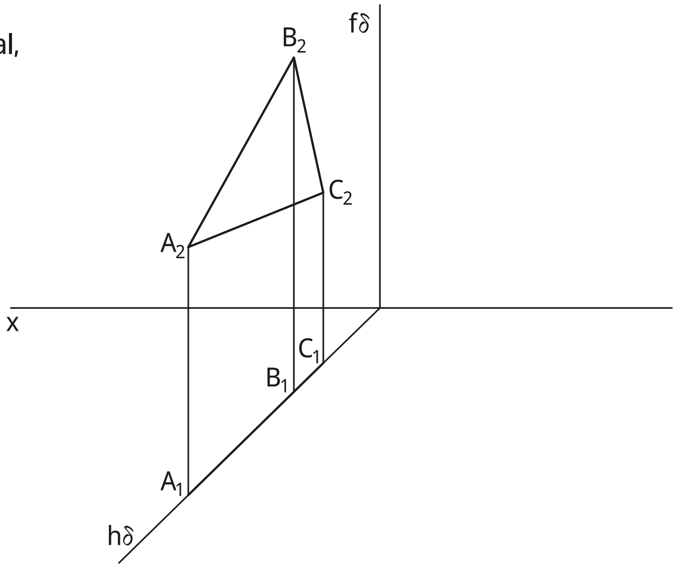
Neste caso, o traço frontal de α, quando rebatido, fica coincidente com o eixo **x**, pois o rebatimento foi feito sobre o Plano Horizontal de Projeção.



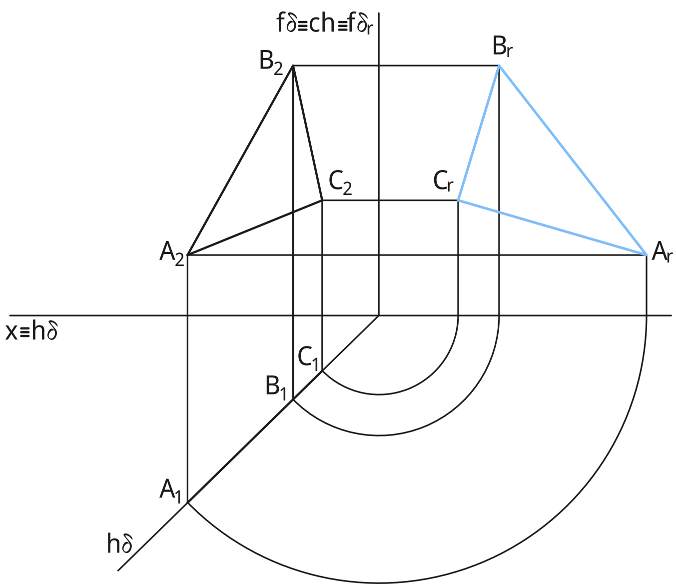
Tendo, agora, em consideração um triângulo **[ABC]**, contido num plano vertical, pretende-se determinar a sua verdadeira grandeza.

Neste caso, tratando-se de um plano vertical, o processo mais óbvio será o de rebater este plano sobre um plano frontal.

Optando-se por rebater o plano sobre o Plano Frontal de Projeção, a charneira do rebatimento será o traço frontal do plano vertical, estando os arcos de rebatimento representados, em verdadeira grandeza, no Plano Horizontal de Projeção.

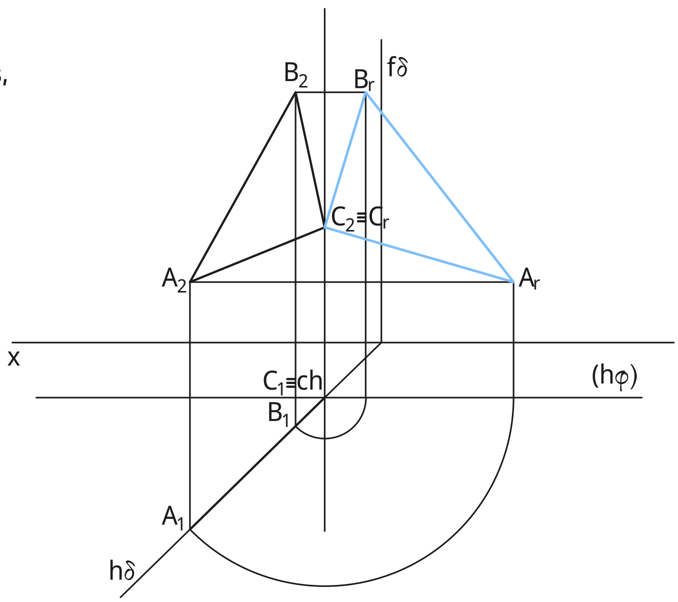


Com centro na interseção da charneira com o eixo **x**, as projeções horizontais dos pontos são transportadas para o eixo **x**, e, a partir daí, são marcadas as cotas correspondentes, resultando no rebatimento dos pontos que definem o plano vertical. Posto isto, o traço horizontal do plano vertical, após o rebatimento, fica coincidente com o eixo **x**. Já o traço frontal mantém-se, uma vez que coincide com a charneira, ou seja, rebate sobre si mesmo.



Apesar de terem sido, até agora, abordados exemplos de rebatimentos cuja charneira corresponde a um dos traços do plano a rebater, e, por conseguinte, rebatimentos sobre os planos de projeção, tal não é uma condição necessária. Isto é: a charneira de um rebatimento não tem de corresponder a um dos traços do plano a rebater e o rebatimento não necessita de ser feito sobre um dos planos de projeção.

Por vezes, para simplificação de processos, opta-se por determinar uma charneira que, além de ser complanar com o elemento geométrico a rebater, contém um dos seus pontos. É o caso evidenciado ao lado, em que a charneira é uma reta vertical do plano, que contém o ponto **C**. Assim, o rebatimento dar-se-á sobre um plano de frente, que contém o ponto **C**. Este processo permite determinar a verdadeira grandeza do triângulo rebatendo, apenas, dois dos seus vértices.



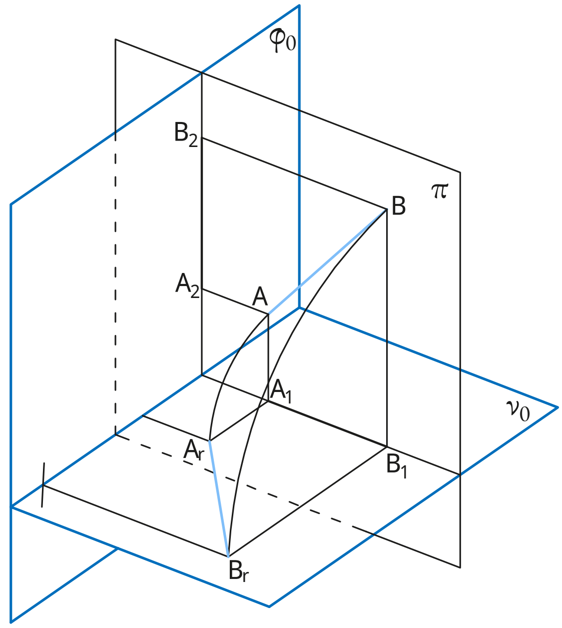
Rebatimento de planos de perfil

Os planos de perfil são casos particulares em que qualquer elemento que lhes pertença só pode ser verdadeiramente percecionado com recurso a um método geométrico auxiliar, uma vez que é ortogonal a ambos os planos de projeção.

Também por este facto, não existe um processo padrão para o seu rebatimento, ao invés do rebatimento de um plano de topo, em que o mais lógico, mas não obrigatório, é que seja rebatido sobre um plano horizontal, ou de um plano vertical, que intuitivamente será rebatido sobre um plano frontal. No caso dos planos de perfil, a sua relação com ambos os planos de projeção é idêntica. Assim, é tão usual rebater um plano de perfil sobre um plano frontal como sobre um plano horizontal.

Na verdade, o rebatimento de um plano de perfil pode assemelhar-se a um sistema de representação triédrica, em que passamos a ter três vistas do mesmo objeto/elemento geométrico (ver página 66). Este processo é utilizado quando a dupla projeção não é suficiente para ilustrar uma determinada realidade, como é o caso de retas ou figuras inseridas em planos de perfil, cuja representação em dupla projeção ortogonal não é esclarecedora.

Na representação ao lado, observa o segmento **[AB]**, contido num plano de perfil.

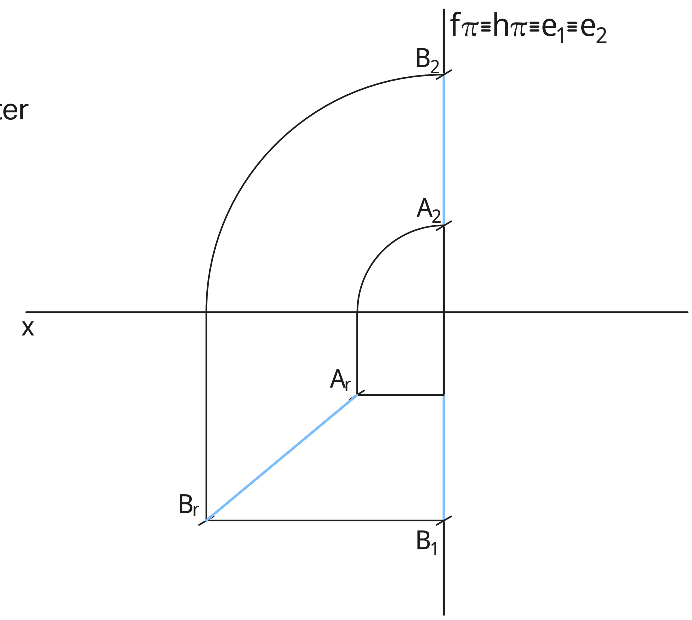


Para verificar a verdadeira grandeza do segmento, é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar, neste caso, o rebatimento.

Optando-se por um rebatimento sobre o Plano Horizontal de Projeção, verifica-se uma transposição das cotas dos extremos do segmento (ponto **A** e ponto **B**) para o Plano Horizontal de Projeção. Mantendo os afastamentos dos pontos, são determinados os pontos rebatidos.

Analisando, agora, em dupla projeção ortogonal:

Estando o plano de perfil definido pelos seus traços, o segmento **[AB]**, pertencente ao plano, tem as suas projeções sobre os traços do plano. Deste modo, o estudo do segmento só pode ser feito através do rebatimento deste. Caso contrário, a sua orientação e a sua verdadeira dimensão não são possíveis de conhecer.



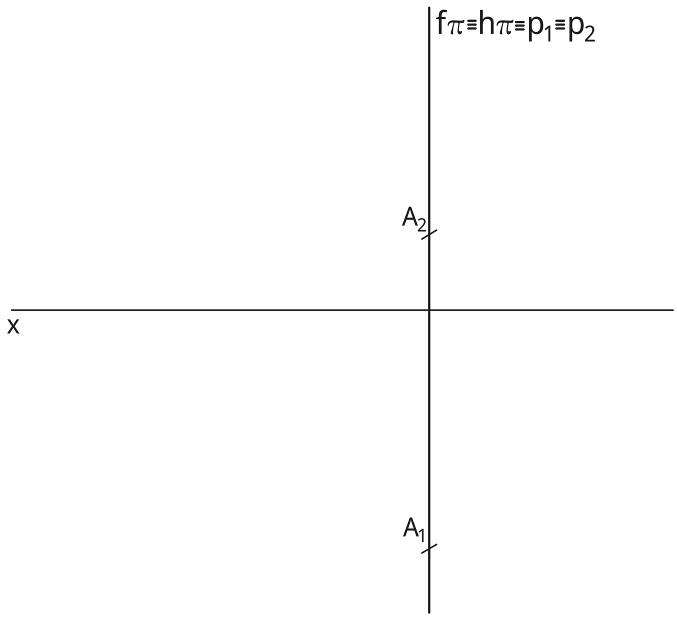
Assim, optou-se, arbitrariamente, por rebater o plano de perfil sobre o plano horizontal (nota que rebater o mesmo plano de perfil sobre o Plano Frontal de Projeção seria uma opção igualmente viável). A charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano de perfil. Com centro na interseção da charneira de rebatimento com o eixo **x**, traçam-se arcos de rebatimento, com as cotas dos pontos a rebater, transpondo, também, os afastamentos dos pontos, tendo $\mathbf{A_r}$ e $\mathbf{B_r}$.

Retas de perfil – projeção de pontos em retas de perfil

Também o estudo de retas de perfil está dependente do recurso a métodos geométricos auxiliares.

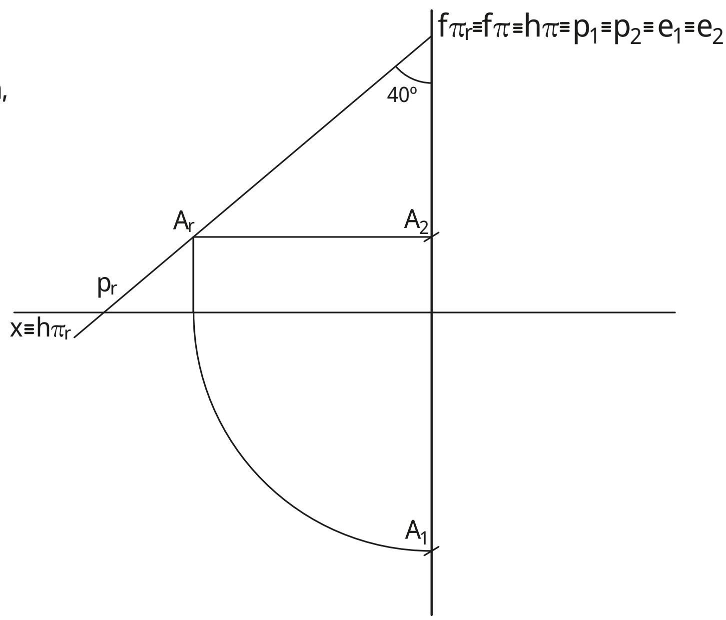
Observa a reta **p** representada segundo as suas projeções. Sabe-se que a reta contém o ponto **A** e que forma, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 40°.

Sabe-se, também, que a reta **p** contém o ponto **P**, com 1 cm de cota.



Tendo em conta a reta representada pelas suas projeções, não é possível determinar as projeções do ponto **P**, uma vez que, nesta situação, não é possível determinar uma linha de chamada que provenha da projeção frontal da reta, onde estará a projeção frontal do ponto, até à projeção horizontal da reta, onde estará a projeção horizontal do ponto **P**.

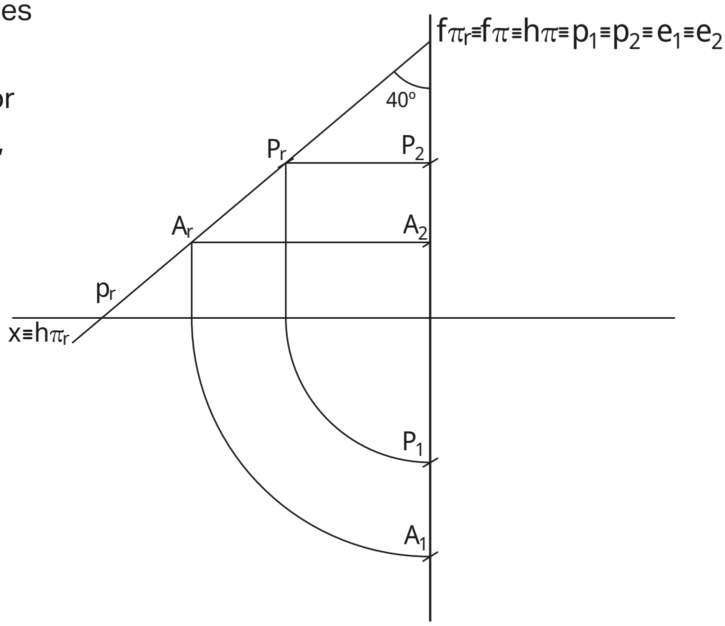
Assim, é necessário recorrer a um rebatimento para determinar o ponto **P**.



Optou-se por rebater o plano de perfil sobre o Plano Frontal de Projeção. Neste caso, a charneira do rebatimento será o traço frontal do plano a rebater. De seguida, procede-se ao rebatimento do ponto **A**, pelo qual será traçada uma reta que faça um ângulo de 40° com o traço frontal do plano. Este ângulo corresponde à relação da reta **p** com o Plano Frontal de Projeção. Tendo a reta **p** rebatida, é possível, agora, determinar o ponto **P**, pertencente à reta. O ponto deverá ser representado na reta **p** rebatida, com a cota pretendida (nota que, na reta rebatida, as cotas são marcadas acima do eixo **x**, mas os afastamentos são marcados paralelamente à charneira do rebatimento (traço frontal do plano de perfil).

De seguida, para determinar as projeções do ponto **P**, basta seguir o processo de contra-rebatimento, ou seja: transpor as coordenadas que já são conhecidas, para as projeções da reta **p**.

Assim, fica determinado, pelas suas projeções, um ponto, pertencente a uma reta de perfil, sendo dada uma das suas coordenadas.

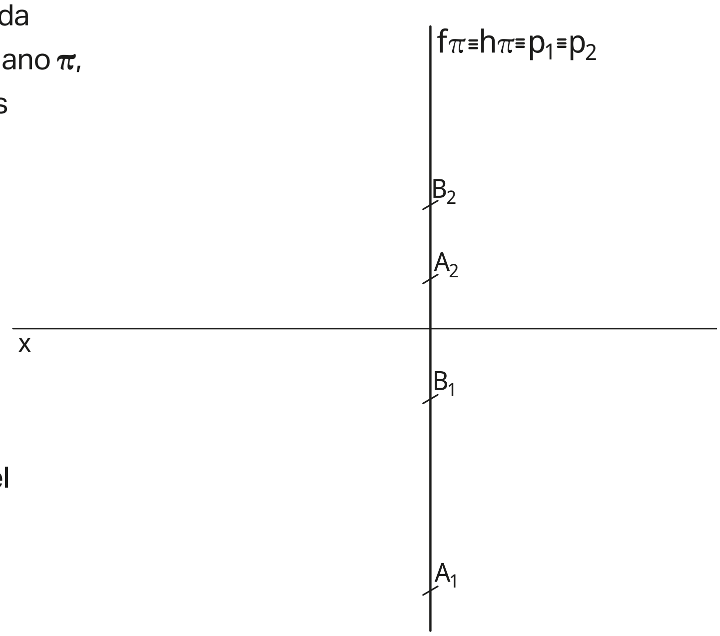


Retas de perfil – pontos notáveis de uma reta de perfil

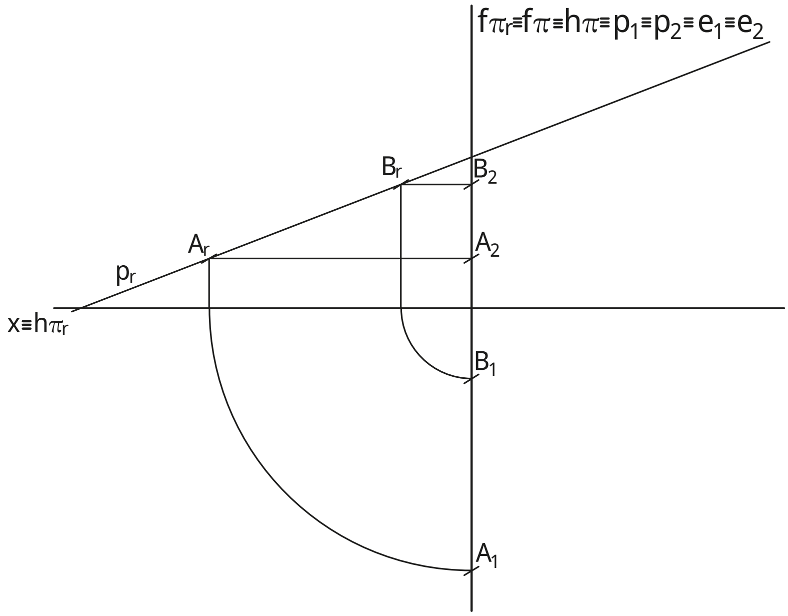
Os pontos notáveis de uma reta de perfil, tal como quaisquer outros pontos a esta pertencentes, só podem ser determinados no rebatimento da reta dada.

Sendo dada uma reta **p**, de perfil, definida pelos pontos **A** e **B**, e pertencente ao plano **π**, pretende-se determinar os seus pontos notáveis. Para tal, é necessário rebater o plano de perfil que contém a reta **p**, de forma que esta possa ser representada, passando pelos dois pontos que a definem.

Uma vez que as suas projeções são coincidentes, como, aliás, em todas as retas de perfil, é impossível determinar os seus pontos notáveis sem recorrer a um rebatimento.

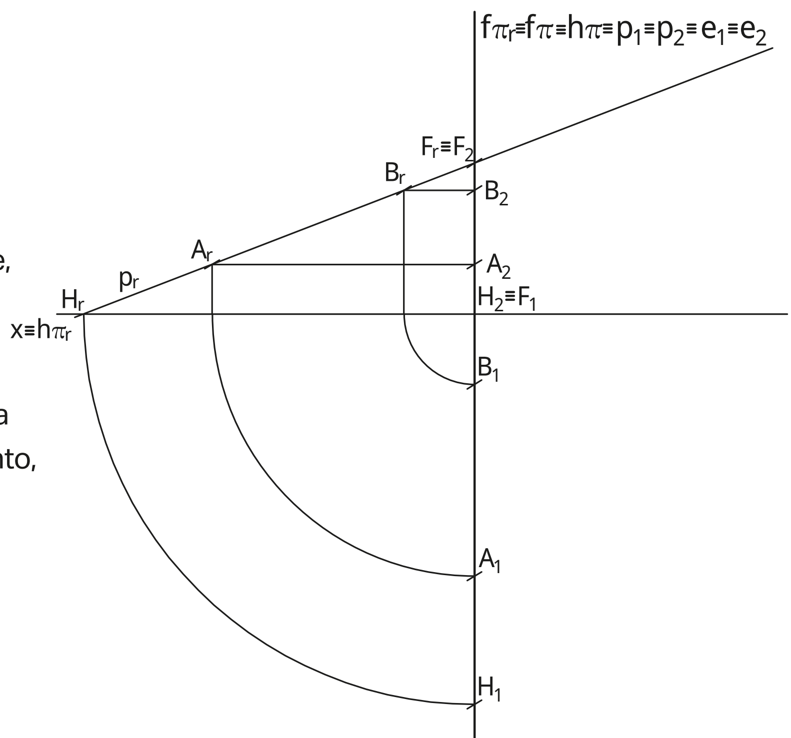


Tendo o plano que contém a reta rebatido, é possível observá-la em verdadeira grandeza, conhecendo exatamente a sua relação com os planos de projeção. Deste modo, é possível determinar os seus pontos notáveis.



Relembrando o que estudámos anteriormente (ver página 112), sabe-se que uma reta tem os seus traços sobre os traços do plano que a contém. Assim, o traço horizontal da reta **p** será um ponto que pertence, simultaneamente, à reta e ao traço horizontal do plano. Após o rebatimento, o traço horizontal do plano está coincidente com o eixo **x**.

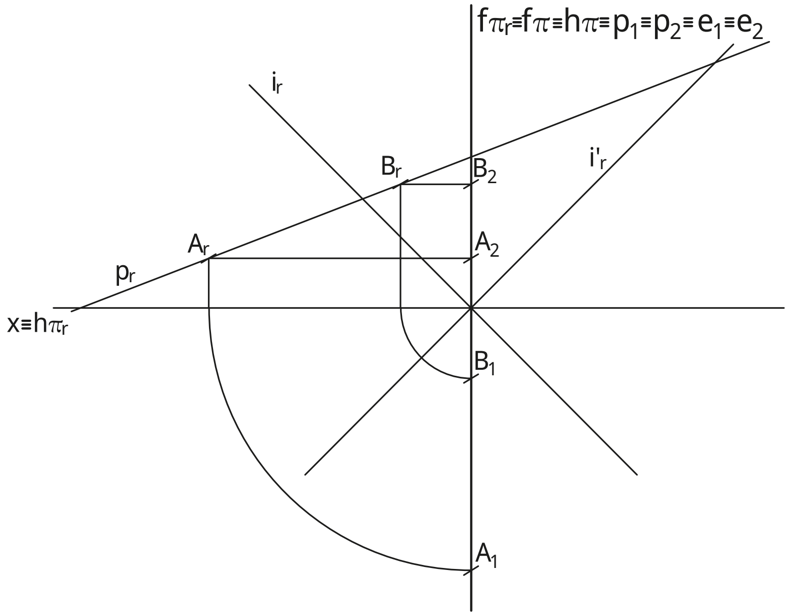
Já o traço frontal da reta estará sobre o traço frontal do plano. A sua determinação é feita na interseção da reta rebatida com o traço frontal do plano (neste caso, coincidente com o eixo do rebatimento e, por conseguinte, com o traço frontal do plano rebatido).



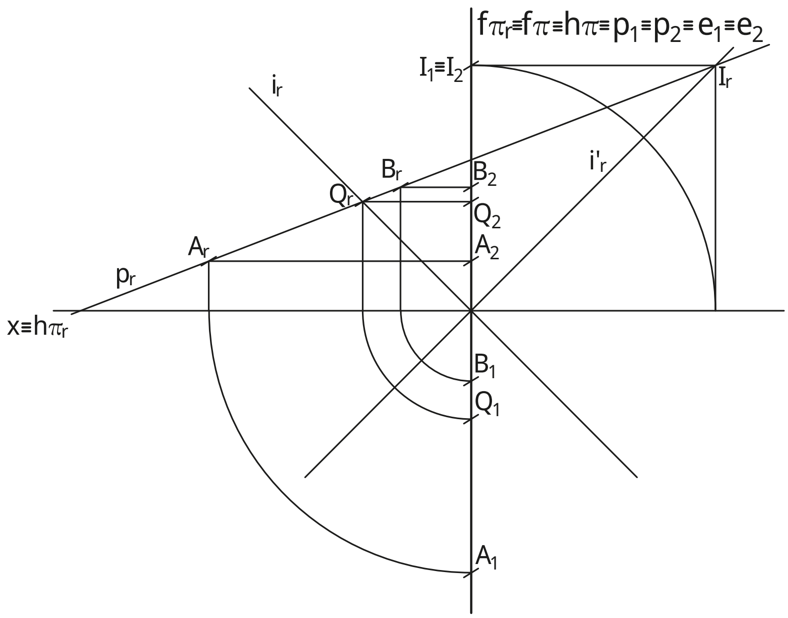
Uma vez que o traço frontal da reta se situa na charneira do rebatimento, não é necessário contra-rebater o ponto.

Já o traço horizontal deverá ser reconduzido até à projeção horizontal da reta **p**, através do contra-rebatimento, de forma a ficar representado pelas suas projeções.

No que respeita aos traços da reta nos planos bissetores, estes são determinados com recurso a retas auxiliares. Estas retas são as retas de interseção do plano de perfil π com os planos bissetores. Sabendo que os planos bissetores são planos que dividem igualmente um diedro, as retas de interseção destes com qualquer plano de perfil são retas de perfil passantes que formam 45° com ambos os planos de projeção.



Assim, $\mathbf{i_r}$ é a reta que resulta da interseção do plano de perfil com o plano bissetor 1/3. Já $\mathbf{i'_r}$ é a reta de interseção do mesmo plano de perfil com o plano bissetor 2/4.



Deste modo, uma vez que todas as retas estão representadas em verdadeira grandeza, a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os planos bissetores pode ser feita diretamente na interseção das retas no desenho, ou seja: o ponto de interseção da reta **p** com o plano bissetor 1/3 está na interseção de $\mathbf{p_r}$ com $\mathbf{i_r}$. Já o ponto de interseção da reta **p** com o plano bissetor 2/4 está sobre a interseção de $\mathbf{p_r}$ com $\mathbf{i'_r}$.

- **Q** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano bissetor 1/3;
- **I** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano bissetor 2/4.

Manual Digital

Interatividade
Determinar as projeções de um ponto numa reta de perfil

Resumindo

No método dos rebatimentos, há dois aspetos a considerar:

- A escolha do plano sobre o qual irá ser rebatido o plano alvo de estudo.
- A determinação do eixo (charneira) do rebatimento, que deverá pertencer ao plano a rebater, bem como a identificação dos planos ortogonais a este eixo, onde se desenvolvem os arcos de rebatimento.

Para praticar

1. Considera o segmento **[AB]**, em que **A** (2; 3; 2) e **B** (–1; 4; 5). Sabendo que o segmento está contido num plano de topo, α, determina a sua verdadeira grandeza, com recurso a um rebatimento.

2. Determina os traços de um plano definido pelos pontos **A** (4; 2; 1), **B** (2; 3; 2) e **C** (–4; 1; 5). Sendo que os pontos são vértices de um triângulo **[ABC]**, determina a sua verdadeira grandeza, usando como charneira uma reta que contenha o ponto **C**.

3. Dada uma reta **p**, de perfil, definida por um ponto **P** (0; 3; 4), cujos traços frontal e horizontal são pontos do 1.° diedro, e sabendo que faz, com o plano frontal de projeção, um ângulo de 40°, determina o ponto A, da reta, sabendo que este tem 5 cm de afastamento.

4. Sendo dado um segmento de perfil, **[MN]**, em que **M** (4; 6) e **N** (1; 4), cuja reta de suporte é uma reta de perfil de abcissa **0**, determina a verdadeira grandeza do segmento.

5. Considera a reta de perfil, de suporte do segmento **[MN]**, e determina os seus pontos notáveis.

6. Sobre a reta do exercício anterior, traça uma reta de perfil **p'**, perpendicular à reta dada, que contém o ponto **M**.

7. Determina os traços de um plano de rampa, ρ, que contém a reta **p'**.

7

Interseção de planos

Interseção de dois planos

Interseção de três planos

Interseção de planos

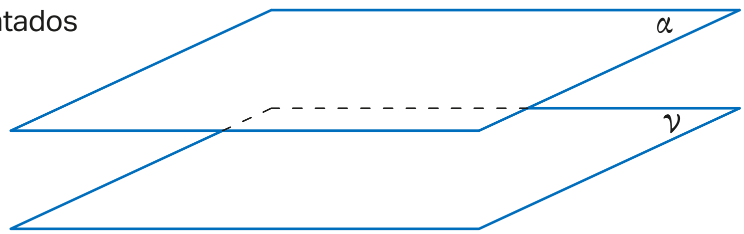
Interseção de dois planos

Dois planos não paralelos, ou seja, que se intersetam, são denominados **planos secantes**. A interseção entre dois planos resulta sempre numa reta que pertence, simultaneamente, a ambos.

Recordando o conceito de retas paralelas, que se intersetam num ponto a distância infinita: ponto impróprio (ver página 22). Também dois planos paralelos se intersetam segunda uma reta situada a distância infinita: **reta imprópria**.

No caso dos planos secantes, estes intersetam-se segundo uma reta situada a distância finita, possível de determinar: **reta própria**.

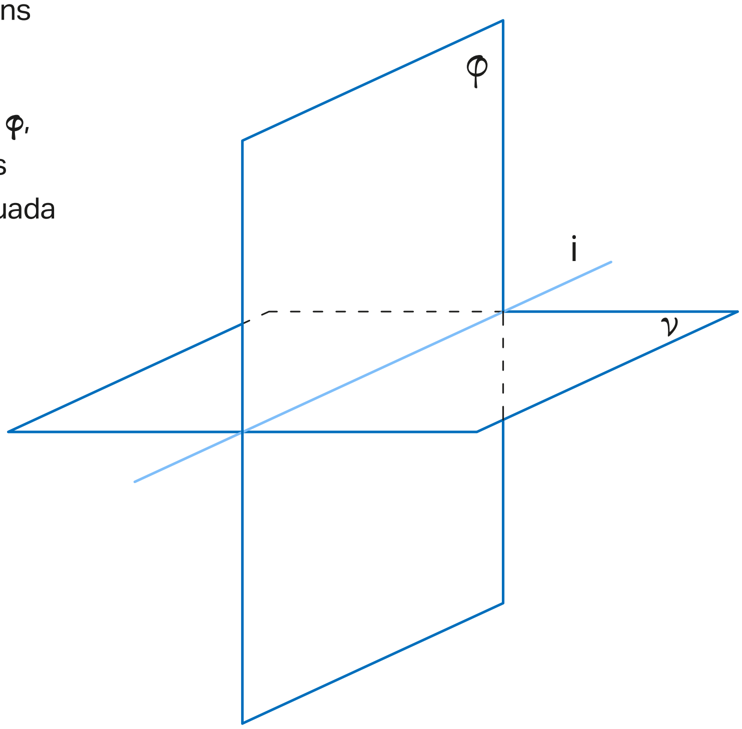
No exemplo ao lado, estão representados dois planos paralelos.



Os planos α e ν intersetam-se segundo uma reta que se situa a distância infinita: **reta imprópria**.

Os dois planos possuem a mesma orientação, não tendo pontos comuns entre si.

No entanto, considerando um plano φ, ortogonal a ν, verifica-se que ambos se intersetam segundo uma reta situada a distância finita: **reta própria**.



A reta **i** pertence, em simultâneo, a φ e a ν, sendo a reta de interseção destes dois planos.

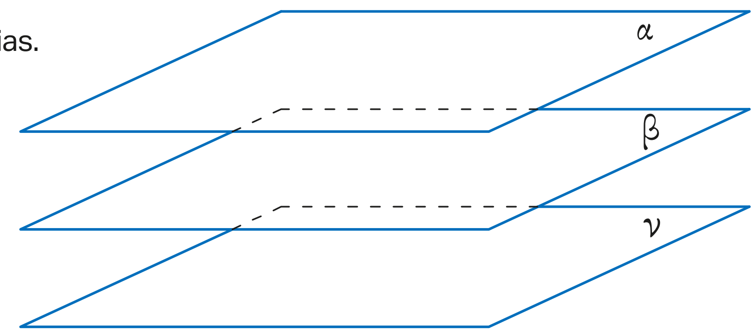
Nota que planos secantes não necessitam de ser ortogonais. Na verdade, quaisquer planos que se intersetem são secantes, independentemente do ângulo formado entre si.

Resumindo

- Planos secantes são planos não paralelos, que se intersetam segundo uma reta situada a distância finita: reta própria.
- Planos paralelos intersetam-se segundo uma reta a distância infinita: reta imprópria.
- Nota que, no estudo das interseções, apenas são considerados planos secantes.

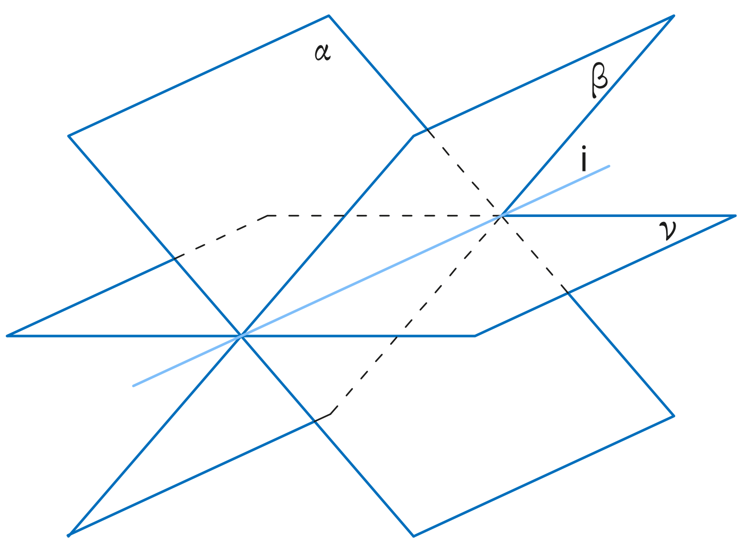
Interseção de três planos

À semelhança do que se verifica na interseção de dois planos, também na interseção de três planos há retas próprias e impróprias. Contudo, no caso da **interseção de três planos**, esta pode dar-se segundo uma **reta**, mas também segundo um **ponto**.



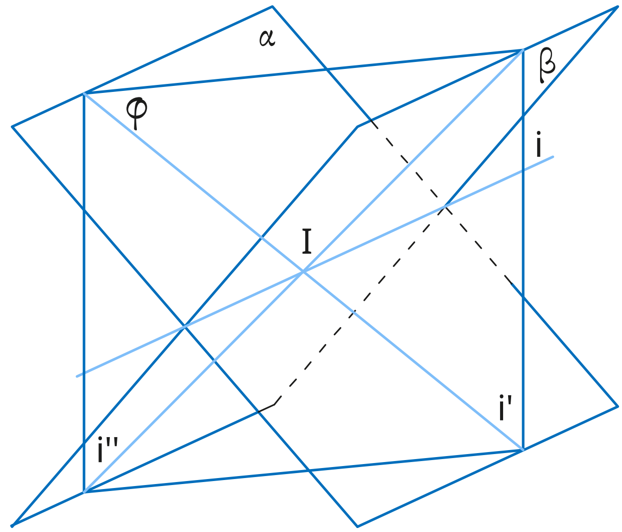
Dados três planos paralelos, estes intersetam-se segundo uma reta situada a distância infinita: reta imprópria. Neste caso, uma vez que os planos possuem a mesma orientação, a sua interseção, a distância infinita, será sempre segundo uma reta.

Três planos podem intersetar-se segundo uma reta, quando os três têm uma reta em comum. Trata-se de uma reta própria, pois situa-se a distância finita. Se analisarmos a interseção dos planos dois a dois, as três retas resultantes são coincidentes.



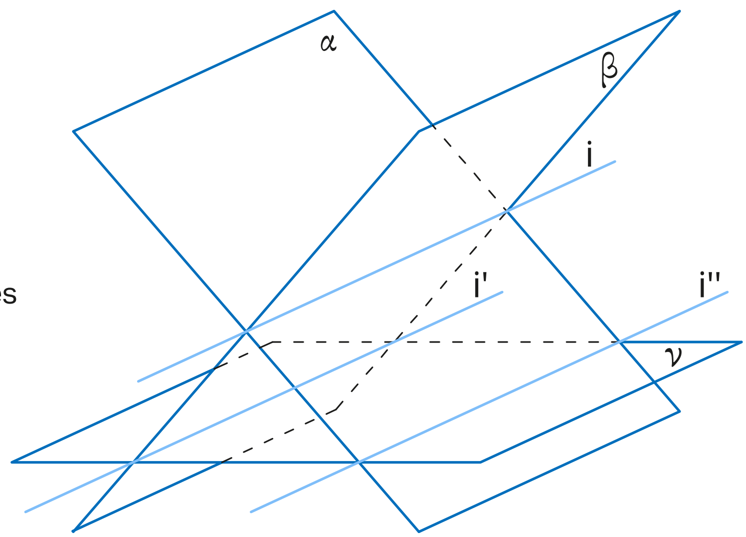
Contudo, entre três planos, a interseção simultânea dos três poder-se-á dar segundo um ponto.

Observando o exemplo, o plano α interseta o plano φ segundo a reta **i**, que, por sua vez, interseta o plano β segundo a reta **i'**, que interseta o plano α segundo a reta **i''**. Os três planos intersetam-se entre si segundo três retas.



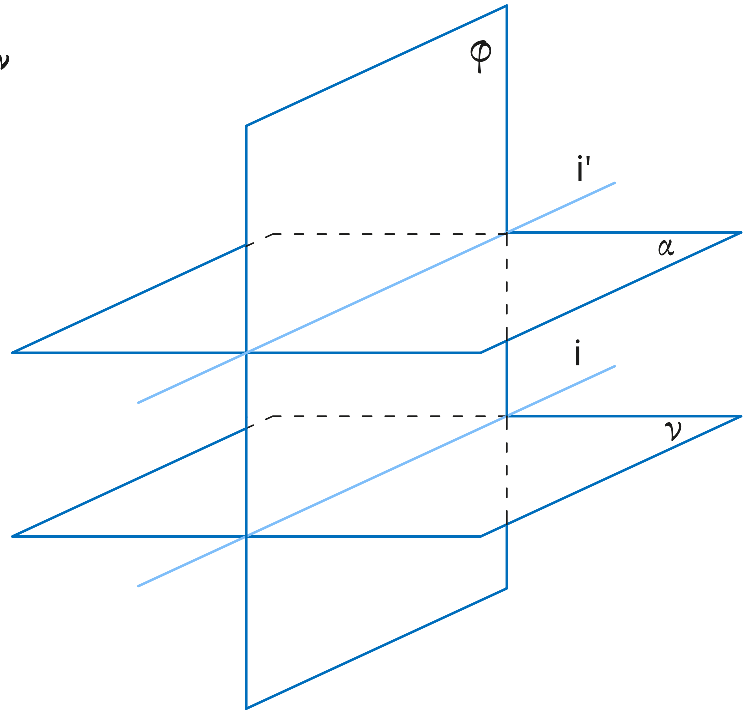
Para determinar o ponto comum aos três planos, é necessário determinar o ponto de concorrência das suas três retas de interseção. Assim, o ponto **I** é o ponto de interseção dos três planos, ou seja: é o ponto comum aos três planos.

Os três planos acima intersetam-se dois a dois e possuem um ponto comum: **ponto próprio**.



Neste caso, os planos também se intersetam dois a dois. No entanto, o ponto comum entre ambos é um **ponto impróprio**, uma vez que as três retas de interseção são paralelas entre si, intersetando-se num ponto situado a distância infinita.

Assim, não é possível determinar um lugar geométrico comum aos três planos em simultâneo.



Também neste exemplo os três planos intersetam-se dois a dois. Contudo, α e ν são paralelos, pelo que se intersetam numa reta infinita: reta imprópria.

O plano φ interseta α e ν segundo duas retas, **i** e **i'**, situadas a distância finita: retas próprias.

Deste modo, conclui-se que os três planos não possuem nenhum lugar geométrico comum aos três em simultâneo.

Em conclusão, três planos só se intersetam entre si se, em simultâneo, apresentarem algum lugar geométrico comum aos três. Esse lugar geométrico pode ser um ponto ou uma reta.

O facto de três planos não possuírem um único ponto ou reta comum aos três, em simultâneo, não significa que os planos não se intersetam. A interseção dos três planos pode traduzir-se em três retas paralelas entre si. Neste caso, diz-se que os planos se intersetam num ponto a distância infinita: ponto impróprio.

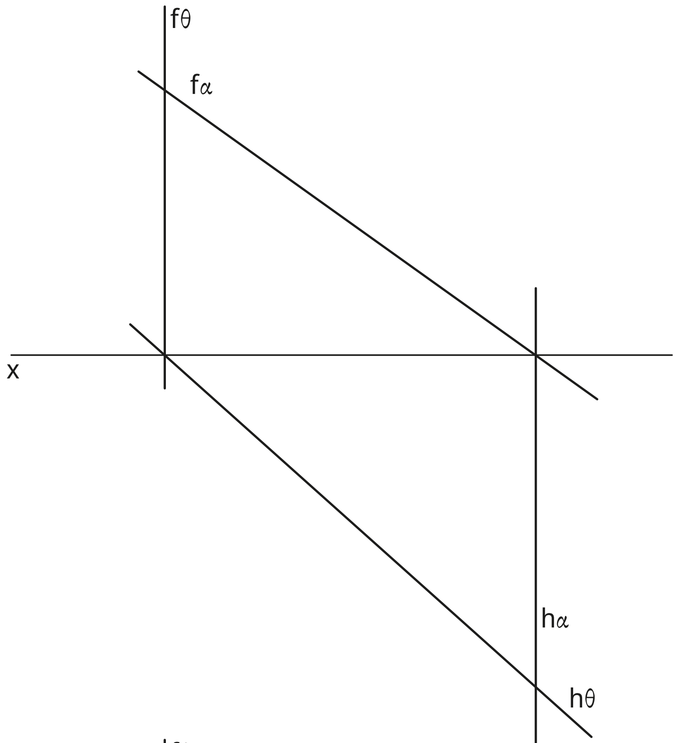
Resumindo

- Três planos intersetam-se quando possuem um lugar geométrico comum aos três. Essa interseção pode ser segundo um ponto ou uma reta.
- Quando a interseção é feita segundo uma reta, as retas de interseção dos três planos são coincidentes.
- Quando a interseção é feita segundo um ponto, as retas de interseção dos três planos são concorrentes num único ponto.

Casos particulares: interseção de planos projetantes

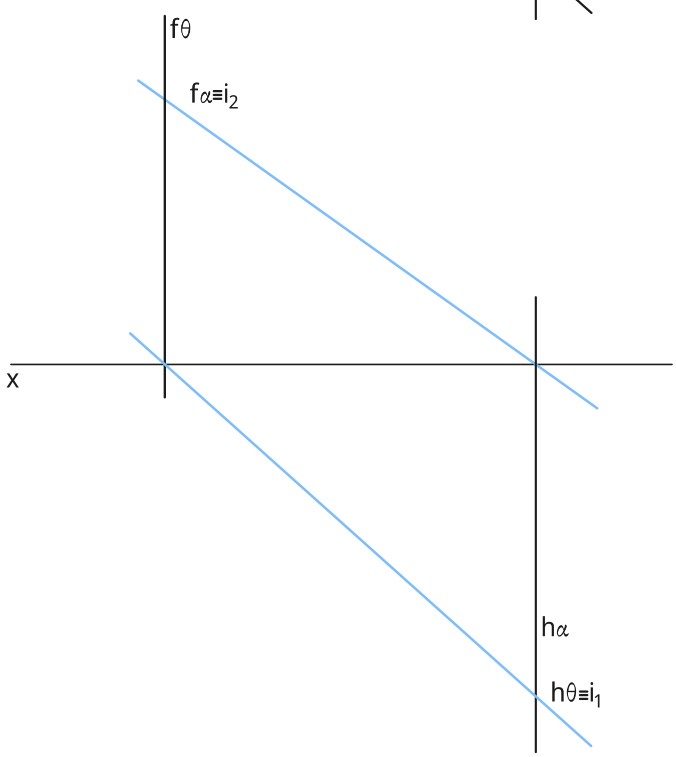
Recordando o conceito de plano de projetante, sabe-se que:

- Um plano projetante horizontal tem todos os seus elementos geométricos projetados sobre o seu traço horizontal.
- Um plano projetante frontal tem todos os seus elementos geométricos projetados sobre o seu traço frontal.



Observa os planos α e θ, de topo e vertical, respetivamente.

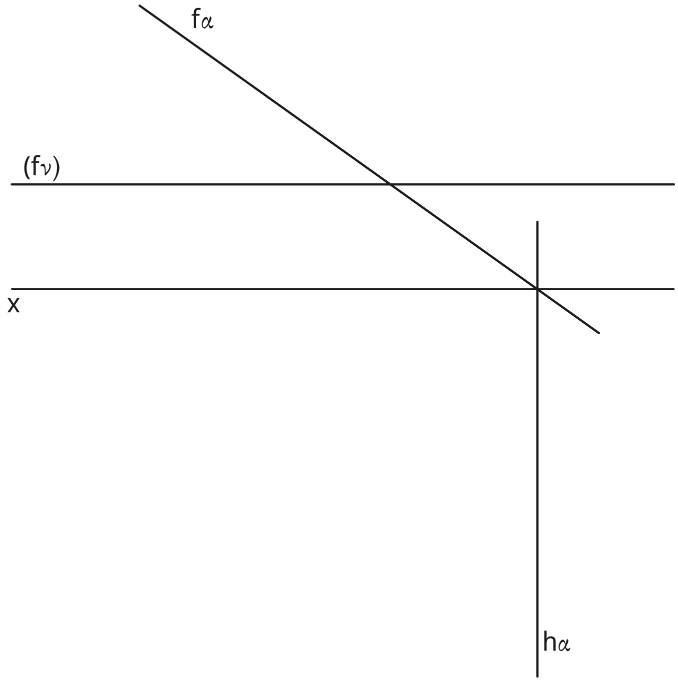
A determinação da reta de interseção dos dois planos, sendo que um é projetante frontal, e o outro é projetante horizontal, é um caso particular no que respeita à interseção de planos, pelo facto de o processo de determinação dessa reta estar intimamente ligado ao tipo de planos em questão.



Na verdade, como já foi referido, a reta de interseção entre dois planos é uma reta comum a ambos. Deste modo, tratando-se de planos projetantes, a reta deverá ter as suas projeções sobre os traços do plano a que pertence. Uma vez que pertence a ambos os planos, e ambos são projetantes, um frontal e outro horizontal, a reta **i** deverá ter a sua projeção frontal sobre o traço frontal de α. A reta **i** está, agora, representada pela sua projeção frontal. Para determinar a sua projeção horizontal, o raciocínio é idêntico. Uma vez que a reta também pertence a θ, e sendo este um plano projetante horizontal, a projeção horizontal de qualquer reta que lhe pertença deverá estar sobre o seu traço horizontal. Assim, $\mathbf{i_1}$ está coincidente com o traço horizontal do plano θ.

Considera, agora, uma interseção entre um plano horizontal, ν, e um plano de topo, α, ambos projetantes.

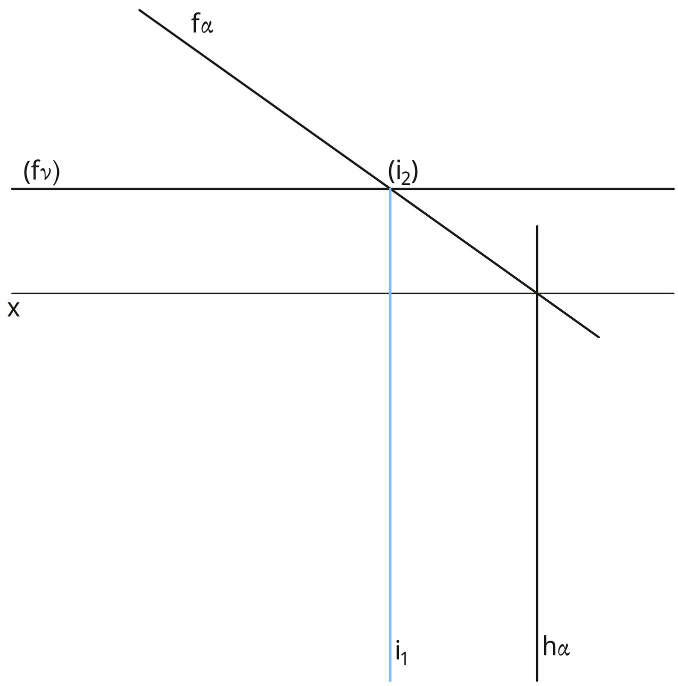
Neste caso, uma vez que são ambos projetantes frontais, a determinação da sua reta de interseção é feita através da interseção dos seus traços frontais. Assim, a projeção frontal da reta **i** está no ponto de concorrência entre o traços frontais dos planos.



Assim, tratando-se de uma reta cuja projeção frontal é um único ponto – está em deformação máxima –, sabe-se que se trata de uma reta de topo, uma vez que é, também, o tipo de retas comum a planos horizontais e de topo.

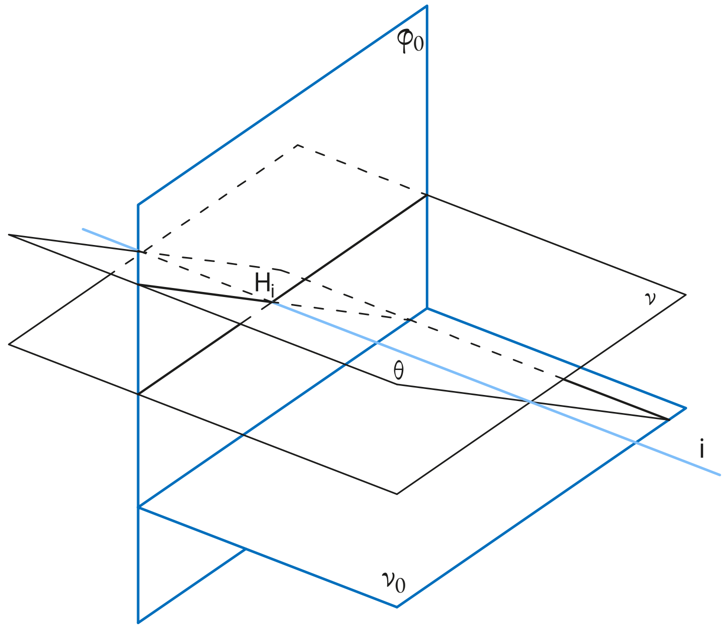
Conhecendo o tipo de reta, a determinação da sua projeção horizontal é imediata, uma vez que é sempre perpendicular ao eixo **x**, por se tratar de uma reta perpendicular ao plano frontal de projeção.

A reta **i** é o lugar geométrico comum aos dois planos.



Tridimensionalmente, a compreensão deste caso particular é facilitada.

Sendo ambos os planos ortogonais ao plano frontal de projeção, a reta comum a ambos será, necessariamente, perpendicular ao plano frontal de projeção.



Resumindo

- A interseção entre dois planos projetantes frontais será sempre uma reta projetante frontal.
- A interseção entre dois planos projetantes horizontais será sempre uma reta projetante horizontal.

Para praticar

1. Determina a reta **i**, de interseção entre um plano de topo α cujo traço frontal faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 45° (a.d.) e um plano θ vertical, cujo traço horizontal faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 50° (a.e.). Sabe-se que os pontos dos planos no eixo **x** distam 6 cm entre si, sendo que o plano de topo se situa à esquerda.

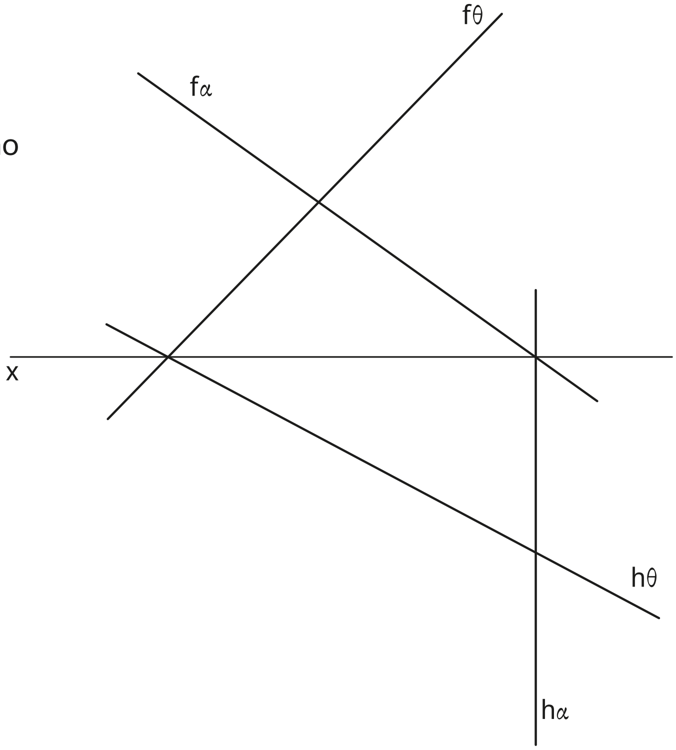
2. Considerando o mesmo plano α determina a reta i, de interseção do plano com um plano δ, frontal, com 4 cm de afastamento.

3. Determina reta de interseção entre o plano θ do exercício 1, com um plano horizontal **v**, com 3 cm de cota.

4. Determina a reta i de interseção entre dois planos α e θ, sendo α um plano de topo, cujo traço frontal faz um ângulo de 45° (a.d.) com o Plano Horizontal de Projeção e o plano θ, vertical, faz um ângulo de 30° (a.e.) com o Plano Frontal de Projeção. Os pontos de concorrência dos traços dos planos com o eixo **x** distam 5 cm, sendo que o plano de topo se situa à esquerda. De que reta se trata?

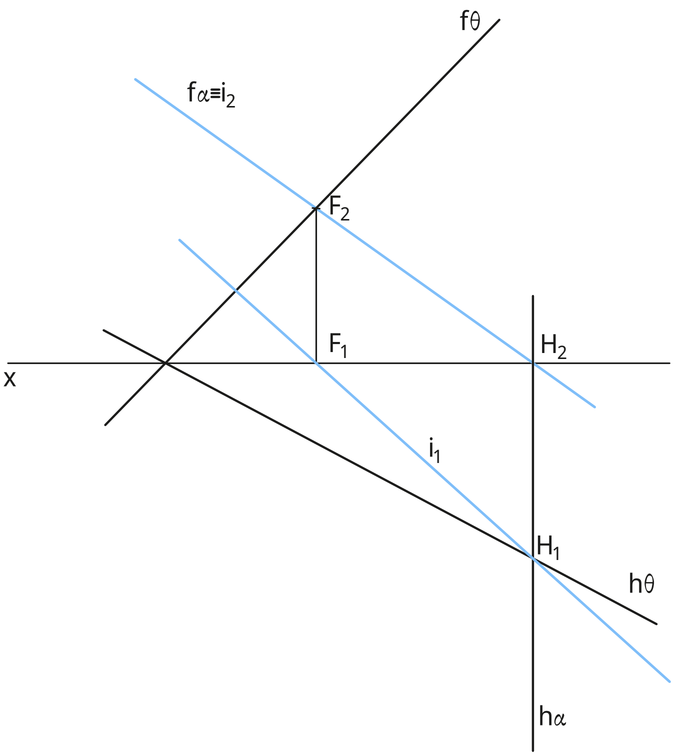
Interseção entre um plano projetante e um plano não projetante

A interseção entre um plano projetante e um outro, não projetante, é também um caso particular na interseção entre planos. Neste caso, uma das projeções da reta de interseção entre ambos os planos continua a ser imediata. Contudo, para a determinação da outra projeção, é necessário um procedimento próprio.



Sendo dado um plano **α**, de topo, e um plano **θ**, oblíquo, pretende-se a determinação da reta **i**, de interseção dos dois planos.

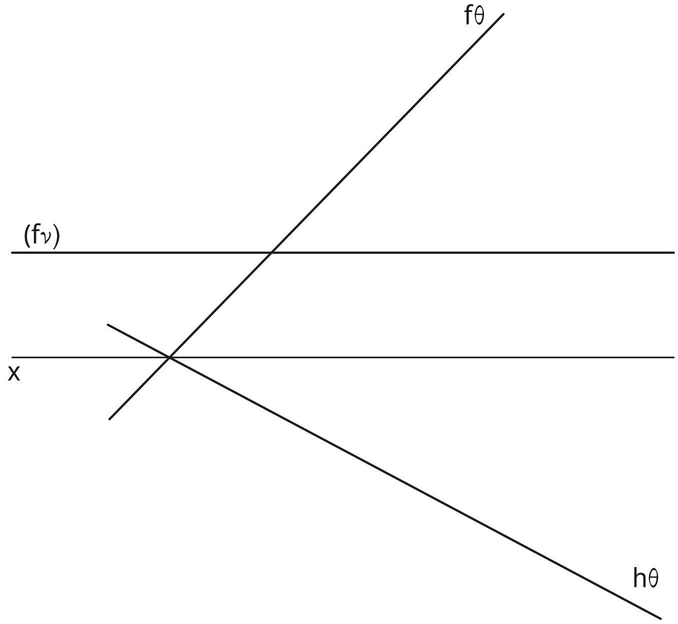
Tratando-se de uma reta pertencente, simultaneamente, a um plano projetante frontal e a um plano não projetante, a determinação da sua projeção frontal é imediata, uma vez que deve estar sobre o traço frontal de **α**. Nota que, quando uma reta pertence a um plano projetante frontal, a sua projeção frontal está sobre o traço frontal desse plano. Uma vez que o outro plano não é projetante, a projeção horizontal da reta não está sobre nenhum dos traços dos planos.



Deste modo, é necessário determinar os pontos notáveis da reta **i**.

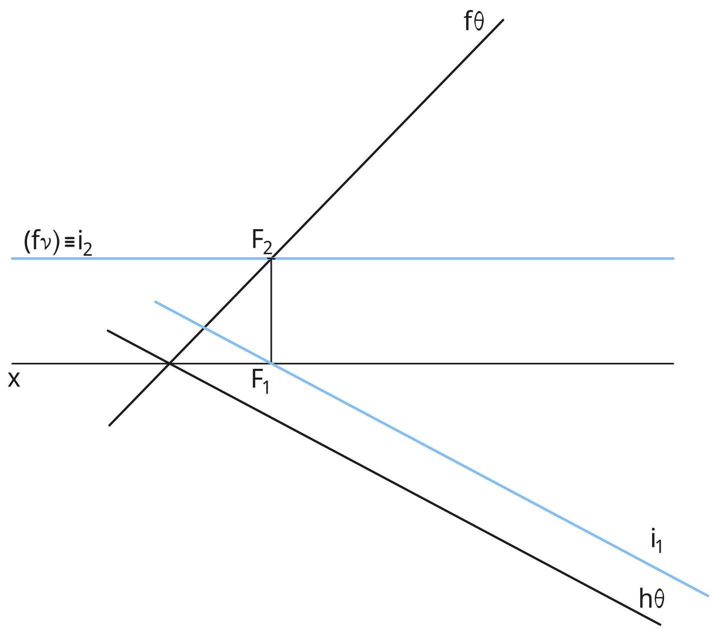
No caso dos pontos notáveis da reta – traços da reta nos planos de projeção –, estes situam-se sobre os traços do plano que a contém. Uma vez que a reta pertence a ambos os planos, os seus traços são determinados através da interseção dos traços de ambos os planos, ou seja: é necessário determinar os pontos comuns dos traços de ambos os planos. Onde **hα** e **hθ** se intersetam, está o traço horizontal da reta **i**; e onde **fα** e **fθ** se intersetam, está o traço frontal da reta **i**. Estando a reta **i** definida por dois pontos, é possível determinar ambas as suas projeções.

Analisando, agora, a interseção entre um plano horizontal e um plano oblíquo, ou seja, entre um plano projetante frontal e um plano não projetante, a determinação da projeção frontal da reta **i** é igualmente imediata, devendo estar sobre o traço frontal do plano projetante frontal **ν**. Neste caso, sabe-se que o tipo de reta em questão será uma reta horizontal, por ser o único comum a um plano horizontal e a um plano oblíquo.



Sabe-se, também, que a projeção horizontal de uma reta horizontal é sempre paralela ao traço horizontal do plano que a contém, uma vez que retas horizontais complanares são sempre paralelas, e o traço horizontal de um plano que contém retas horizontais é uma reta horizontal de cota nula.

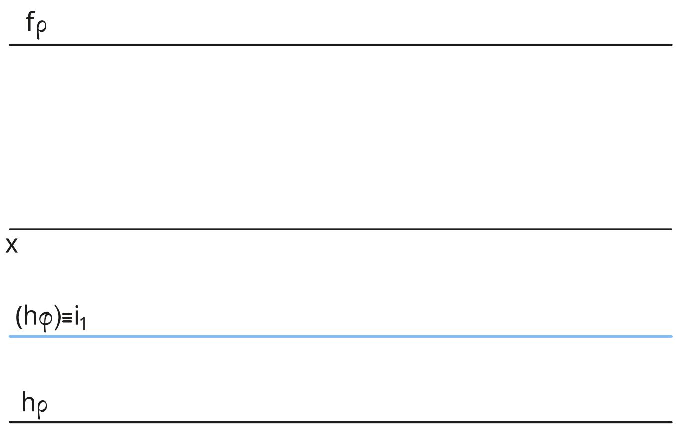
Sendo conhecida a direção da reta **i** (paralela ao traço horizontal de **θ**), é necessário determinar um ponto da reta, para que esta possa estar definida por um ponto e uma direção.



Através da concorrência entre os traços frontais dos planos, tem-se o traço frontal da reta **i**.
A sua projeção horizontal deverá conter $\mathbf{F_1}$ e ser paralela a **hθ**).

Ainda dentro dos casos de interseção entre planos projetantes e planos não projetantes, observa o exemplo ao lado.

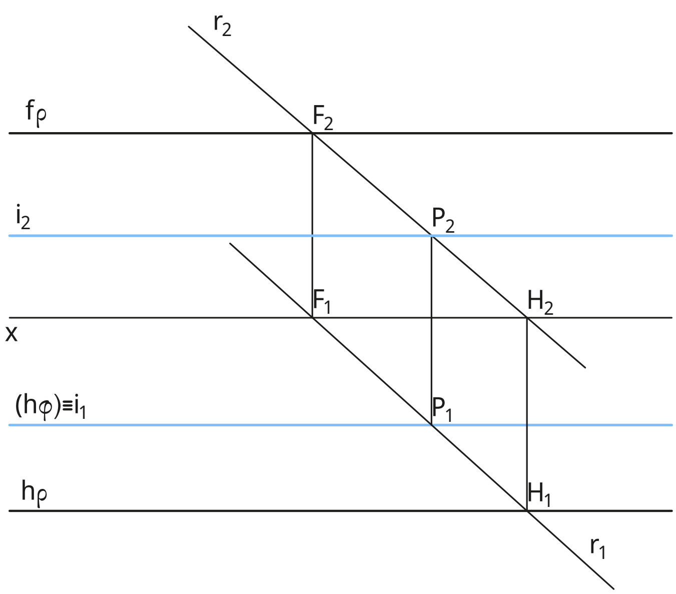
Dado um plano de rampa φ e um plano frontal φ, pretende-se determinar a reta **i**, de interseção dos dois planos.



Uma vez mais, tratando-se de uma interseção que contempla um plano projetante, uma das projeções da reta de interseção estará sobre o traço desse plano. Neste caso, trata-se de um plano frontal (projetante horizontal). Assim, a projeção horizontal **i_1** estará sobre hφ.

Sabe-se que a reta **i** será uma reta fronto-horizontal, sendo esta a única família de retas comum a ambos os planos.

Conhece-se, assim, a direção da reta **i**, sendo necessário determinar um dos seus pontos, para determinar a sua projeção frontal. Uma vez que uma reta fronto-horizontal é paralela a ambos os planos de projeção, não é possível determinar os seus traços, pois estes não existem. Deste modo, recorre-se a uma qualquer reta oblíqua do plano de rampa (reta **r**: nota que esta está definida pelos seus traços, que estão sobre os traços do plano de rampa que a contém) e determina-se a interseção da sua projeção horizontal com a projeção horizontal de **i**. Aí terá lugar a projeção horizontal do seu ponto de concorrência. A reta **i** está, assim, definida por um ponto e uma direção, sendo possível determinar ambas as suas projeções.



Para praticar

1. Determina a reta **i**, de interseção entre um plano de rampa ρ, cujo traço frontal tem 5 cm de cota e o traço horizontal 4 cm de afastamento, com um plano α, de topo, cujo traço frontal faz um ângulo de 30° (a.d.) com o plano horizontal de projeção. Sabe-se que o traço horizontal da reta **i** tem 3 cm de abcissa. De que reta se trata?

2. Sendo dado um plano α, oblíquo, cujos traços horizontal e frontal fazem, com o eixo **x**, respetivamente, ângulos de 30° (a.d.) e 45° (a.d.), e um plano ν horizontal, com 4 cm de cota, determina a reta **i** de interseção dos dois planos.

3. Considera o plano α do exercício anterior. Determina reta **i**, de interseção desse plano com um plano θ, vertical, cujo traço horizontal faz um ângulo de 35° (a.e.) com o Plano Frontal de Projeção. Os pontos de concorrência dos planos no eixo **x** distam 6 cm entre si, estando o plano vertical à direita.

4. Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos α e θ, sendo que α é um plano de topo, cujo traço frontal faz um ângulo de 45° (a.d.) com o Plano Horizontal de Projeção, e o plano θ, vertical, faz um ângulo de 30° (a.e.) com o Plano Frontal de Projeção. Os pontos de concorrência dos traços dos planos com o eixo **x** distam 5 cm, sendo que o plano de topo se situa à esquerda. De que reta se trata?

5. No mesmo plano de rampa, determina a sua reta de interseção com um plano de topo α cujo traço frontal faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 45° (a.d.)

6. Considera o mesmo plano de topo, e determina a reta **i**, de interseção deste com um plano frontal, com 3 cm de afastamento. De que reta se trata?

7. Determina as projeções de uma reta **i**, de interseção entre um plano de rampa ρ cujo traço frontal tem 4 cm de cota e o traço horizontal 5 cm de afastamento, e um plano horizontal, ν com 3 cm de cota.

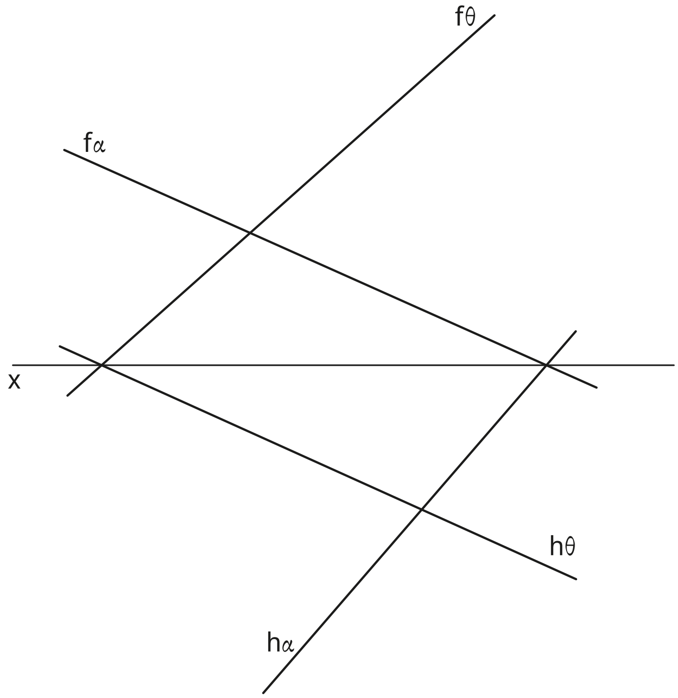
Resumindo

- A reta de interseção entre um plano projetante e um plano não projetante terá sempre uma das suas projeções sobre o traço do plano projetante em questão.

Interseção entre dois planos não projetantes

Caso geral

Dados dois planos, a sua reta de interseção pertencerá a ambos em simultâneo. No entanto, tratando-se de planos não projetantes, a reta não terá nenhuma das suas projeções sobre os traços dos planos em questão. Assim, a reta terá de verificar outra condição de pertença a ambos os planos.
Assim, os traços da reta deverão estar sobre os traços dos planos.



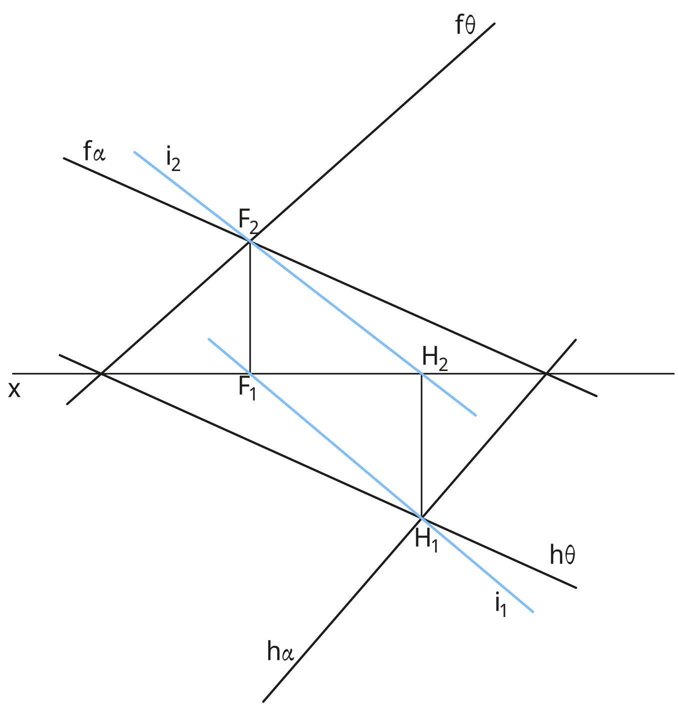
Uma vez que a reta **i** é comum a α e θ, os seus traços deverão estar na interseção dos traços homónimos dos planos.

O traço frontal da reta **i (F)** estará na interseção de **fα** com **fθ**.

O traço horizontal da reta **i** (H) estará na interseção de **hα** com **hθ**.

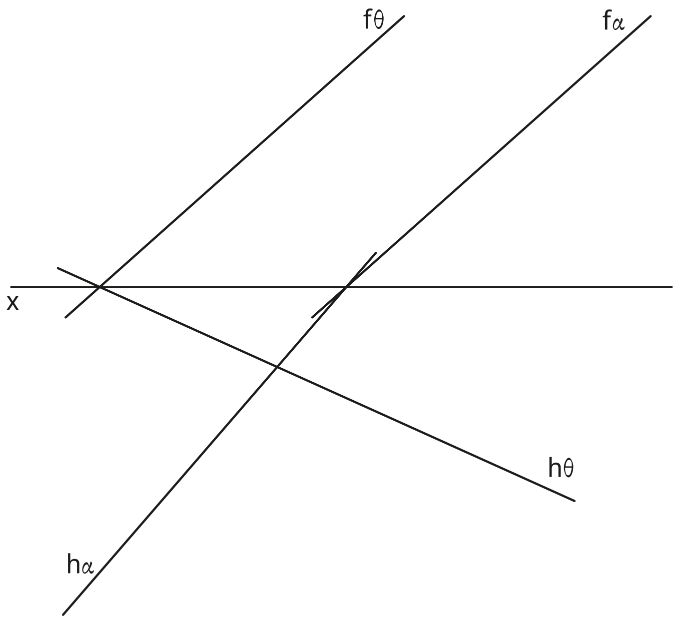
A reta **i** fica, assim, definida por dois dos seus pontos, sendo possível determinar as suas projeções.

A reta **i** é uma reta oblíqua e é o lugar geométrico de todos os pontos comuns a ambos os planos, também oblíquos.



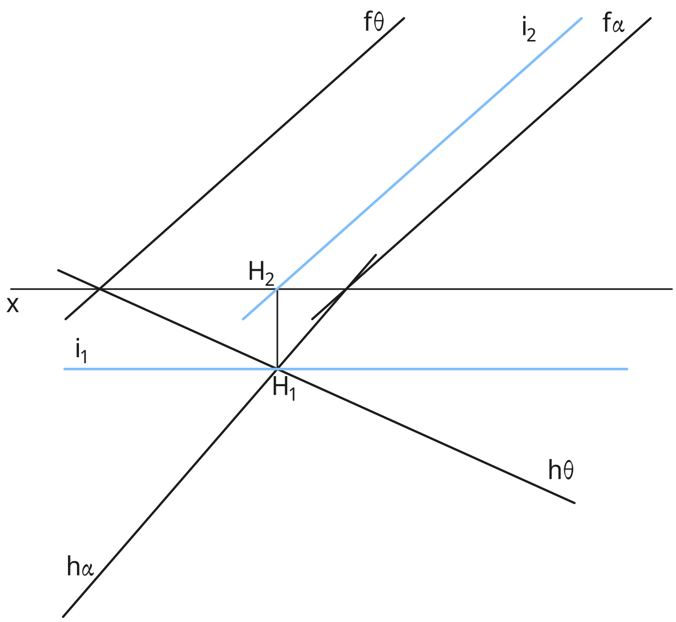
Como foi observado, a determinação da reta de interseção entre dois planos não projetantes é de simples resolução, através dos traços da reta, situados nos pontos de concorrência dos traços dos planos dados.
Contudo, é possível que dois planos que se intersetam verifiquem apenas interseção entre dois dos seus traços.

Considera os planos oblíquos α e θ.
Os traços horizontais de ambos são concorrentes. Contudo, os seus traços frontais são paralelos. Esta condição permite antever a família da reta de interseção de ambos os planos.
O facto de os seus traços serem paralelos revela que os planos não têm qualquer ponto comum no Plano Frontal de Projeção. Este facto revela que a reta de interseção entre ambos não poderá, também ela, ter nenhum ponto no Plano Frontal de Projeção. Assim, a reta deverá ser paralela ao Plano Frontal de Projeção. Sendo as retas frontais as únicas paralelas ao Plano Frontal de Projeção e que podem pertencer a planos oblíquos, conclui-se que a reta **i** será uma **reta frontal**.

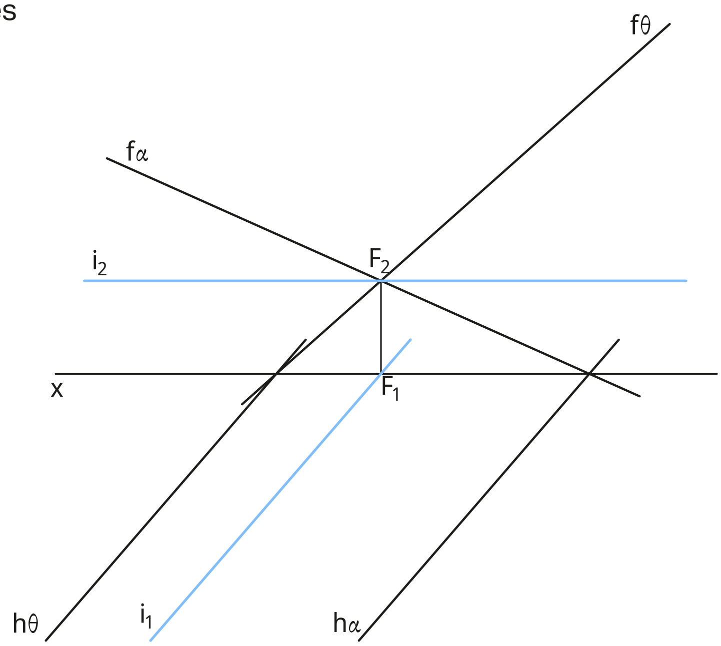


No seguimento deste raciocínio, traça-se a projeção horizontal da reta **i**, que se sabe que será paralela ao eixo **x**, passando pelo seu traço horizontal (interseção dos traços horizontais dos planos).
Sendo a reta **i** uma reta pertencente a ambos os planos, esta deve ter a sua projeção frontal paralela aos traços dos planos – qualquer reta frontal tem a sua projeção frontal paralela ao traço frontal do plano que a contém.

Assim, é determinada a reta **i** de interseção dos planos α e θ.



Nota que, no caso de planos não projetantes em que são os seus traços horizontais que são paralelos, o raciocínio é semelhante. Porém, a reta de interseção passa a ser uma reta horizontal.
Uma vez que os traços horizontais são paralelos, os dois planos não possuem qualquer ponto comum no Plano Horizontal de Projeção. Assim, a reta de interseção entre ambos deverá ser uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (não possuir traço no Plano Horizontal de Projeção).

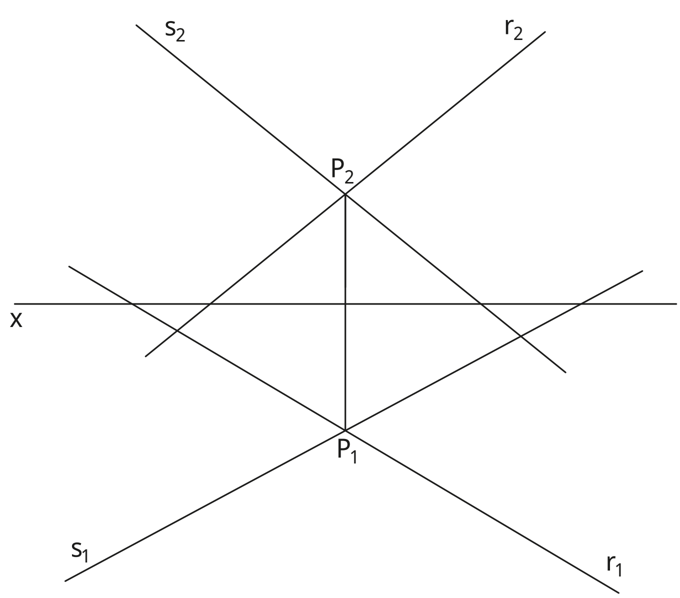


Neste caso, a reta **i** está definida pelo seu traço frontal (ponto de concorrência entre os traços frontais dos planos), e por uma direção (direção dos traços horizontais dos planos).

Interseção de um plano com os bissetores

Interseção com o plano $\beta_{1/3}$ – planos não definidos pelos seus traços

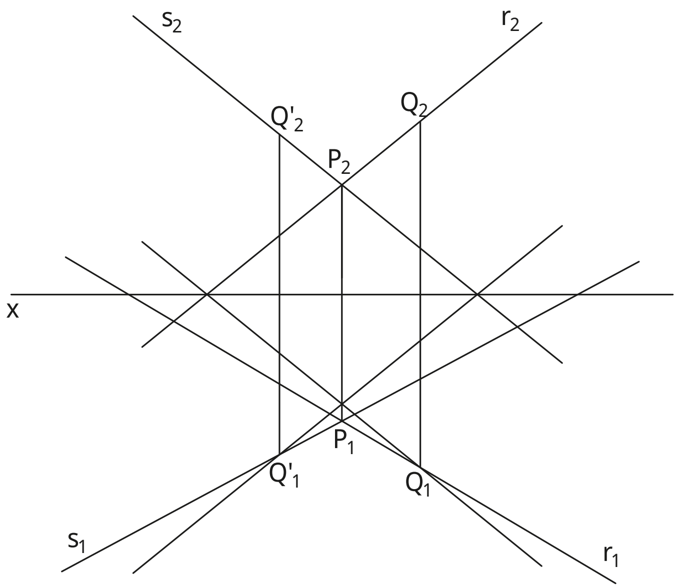
Sendo dado um plano definido por duas retas **r** e **s**, concorrentes no ponto **P**, pretende-se determinar a sua reta de interseção com o plano bissetor 1/3. Sabe-se que o plano $\beta_{1/3}$ é o que atravessa os 1.° e 3.° diedros, cujos pontos têm as suas projeções simétricas relativamente ao eixo **x**.



Uma vez que o plano está definido por duas retas oblíquas concorrentes, o procedimento passa por determinar os traços dessas mesmas retas com o plano $\beta_{1/3}$. Para tal, deve recorrer-se ao método auxiliar para determinação deste ponto notável de uma reta (ver página 114).

A reta **i**, de interseção, deve pertencer, em simultâneo, ao plano definido pelas retas **r** e **s** e ao plano $\beta_{1/3}$.

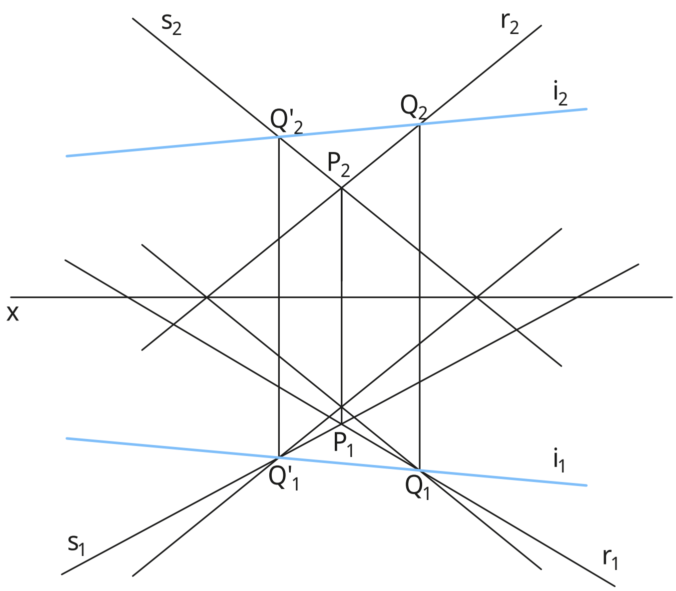
Esta deve conter os pontos **Q** e **Q'** que são os pontos de interseção das retas dadas com o plano bissetor 1/3. Assim, a reta **i** pertence ao plano bissetor, pois contém dois pontos desse plano, e também pertence ao plano definido por **r** e **s**, pois é concorrente com estas nos pontos **Q** e **Q'**.



Deste modo, unindo as projeções homónimas dos pontos **Q** e **Q'**, obtém-se as duas projeções da reta **i**.

A reta **i** é a reta de interseção do plano definido por **r** e **s** com o plano $\beta_{1/3}$.

Nota que a reta **i** tem as suas projeções simétricas relativamente ao eixo **x**. Esta é uma característica das retas pertencentes ao plano bissetor 1/3.



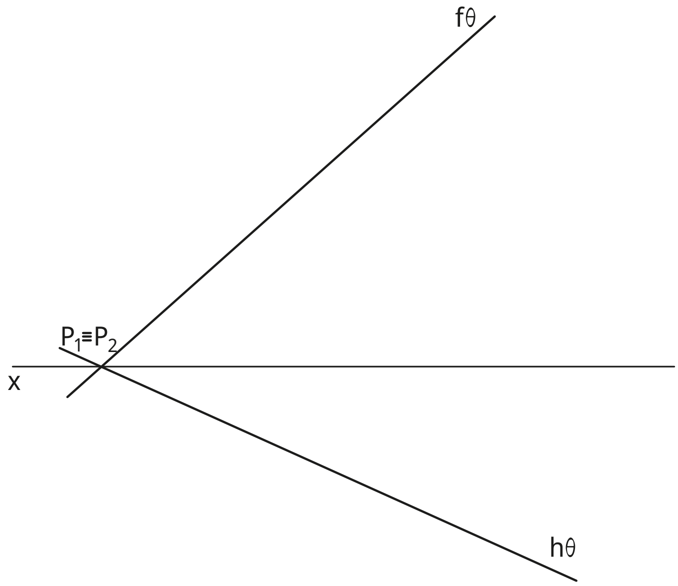
Resumindo

- Para determinar a reta de interseção com um plano bissetor, em planos definidos por duas retas, é necessário determinar os pontos de interseção dessas retas com o mesmo plano bissetor. A reta de interseção estará, assim, definida por dois pontos.

Interseção com o plano $\beta_{1/3}$ – planos definidos pelos seus traços

A determinação da reta de interseção de um dado plano com um plano bissetor é feita a partir de um ponto já conhecido, estando o plano definido pelos seus traços. Esse ponto corresponde à interseção dos seus traços com o eixo **x**.

Observa o plano oblíquo θ, definido pelos seus traços, que convergem no eixo **x**, no ponto **P**.



Por se tratar de uma interseção entre um **plano oblíquo** e um **plano passante**, a reta de interseção será uma **reta oblíqua passante**, uma vez que é a única família de retas comum a ambos os planos.

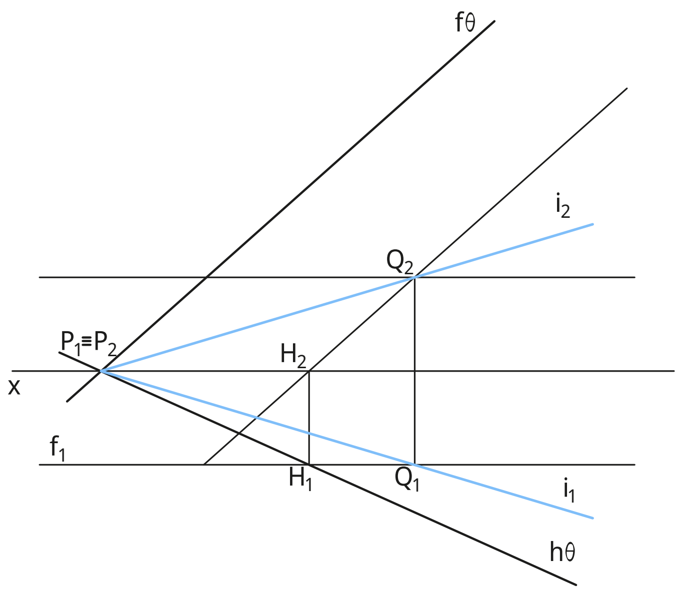
Deste modo, o ponto **P** será, também, um ponto da reta **i**, uma vez que ambas as projeções da reta convergem no eixo **x**, onde se encontram coincidentes todos os seus traços.

Conhecendo, assim, um ponto da reta **i**, é necessária a determinação de um segundo ponto para que a reta possa estar definida.

Para tal, recorre-se a uma qualquer reta auxiliar, pertencente ao plano θ, e determina-se a interseção dessa reta com o $\beta_{1/3}$.

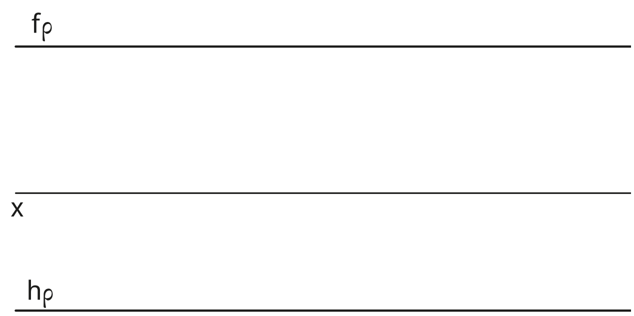
Neste caso, optou-se por uma reta **f**, frontal. A reta **f** pertence ao plano θ, uma vez que o seu traço horizontal está sobre o traço horizontal do plano, e que a sua projeção frontal é paralela ao traço frontal do plano.

Determinado o ponto **Q** da reta **f** (ponto da reta **f** que possui as suas projeções simétricas), a reta **i** fica definida por dois pontos – **P** e **Q**. A reta **i** poderá, assim, ser representada pelas suas projeções.



Interseção de um plano de rampa com o plano $\beta_{1/3}$

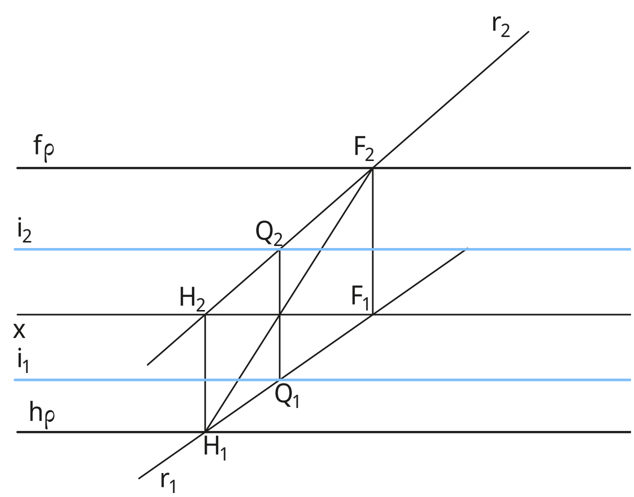
A reta de interseção de um plano de rampa com o $\beta_{1/3}$ é, necessariamente, uma **reta fronto-horizontal**.
Na verdade, esta é a única família de retas que pertence, em simultâneo, a um **plano de rampa** e a um **plano bissetor**.



Conhecendo-se a direção da reta **i**, é necessário determinar um ponto da reta, que pertença, em simultâneo, ao plano de rampa e ao plano bissetor.

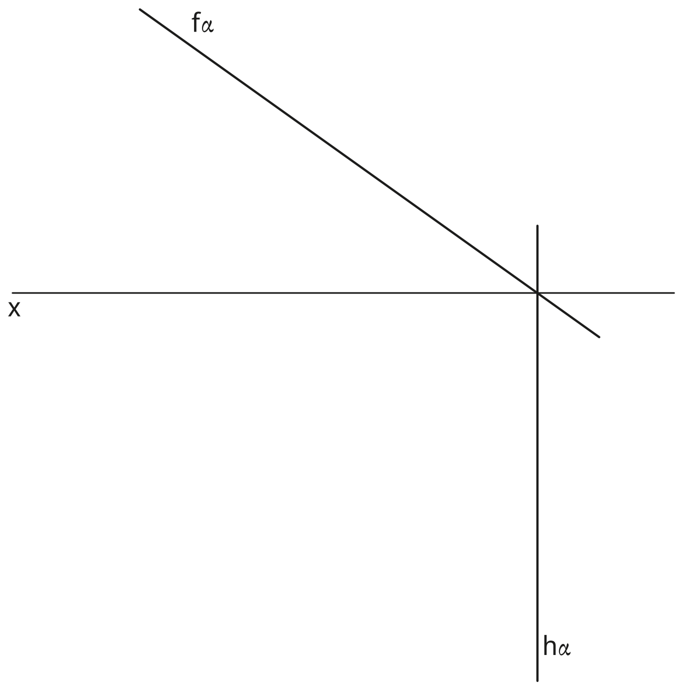
Deste modo, é necessário traçar uma reta auxiliar, do plano de rampa ρ, e determinar o seu traço no plano bissetor 1/3.

A reta **r**, oblíqua, pertence ao plano de rampa ρ, pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano.
Através da união de $\mathbf{H_1}$ a $\mathbf{F_2}$ é encontrada a abcissa do ponto **Q**, de interseção da reta **r** com o $\beta_{1/3}$. As projeções do ponto **Q** estão sobre as projeções homónimas da reta **r**, sendo que **Q** é um ponto comum ao plano de rampa e ao plano bissetor 1/3.
A reta **i**, de interseção dos dois planos, está, assim, definida por um ponto e uma direção, sendo possível a sua representação através das suas projeções.



Interseção de um plano projetante com o plano $\beta_{1/3}$

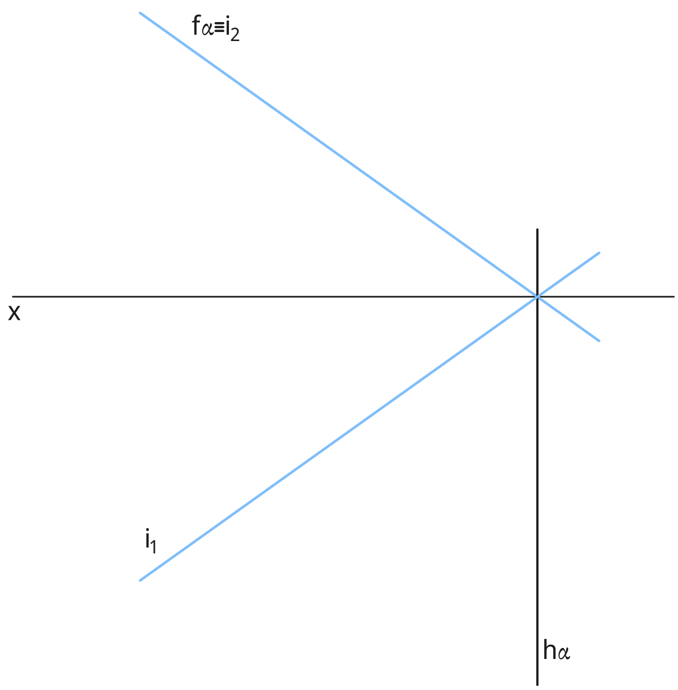
Em qualquer plano projetante, as projeções dos elementos geométricos a este pertencentes estão coincidentes com um dos traços do plano. Se o plano for projetante frontal, essa coincidência dá-se no traço frontal; se for projetante horizontal, dá-se no traço horizontal.



Sendo dado um plano de topo, α, projetante frontal, pretende-se determinar a reta de interseção do mesmo com o plano bissetor 1/3.

Sobre qualquer reta pertencente ao plano bissetor 1/3, sabe-se que as suas projeções são simétricas ao eixo **x**.

Uma vez que a reta pertence, em simultâneo, ao plano $\beta_{1/3}$ e ao plano de topo, sabe-se que a sua projeção frontal deverá estar sobre o traço frontal do plano, sendo este um plano projetante frontal. Pela sua pertença ao plano bissetor 1/3, as suas projeções deverão ser simétricas. Assim, a determinação da projeção horizontal da reta **i** deverá ser feita ao traçar uma projeção simétrica a $\mathbf{i_2}$, relativamente ao eixo **x**.



A reta **i** fica, assim, representada pelas suas projeções.

Interseção com o plano $\beta_{2/4}$ – planos não definidos pelos seus traços

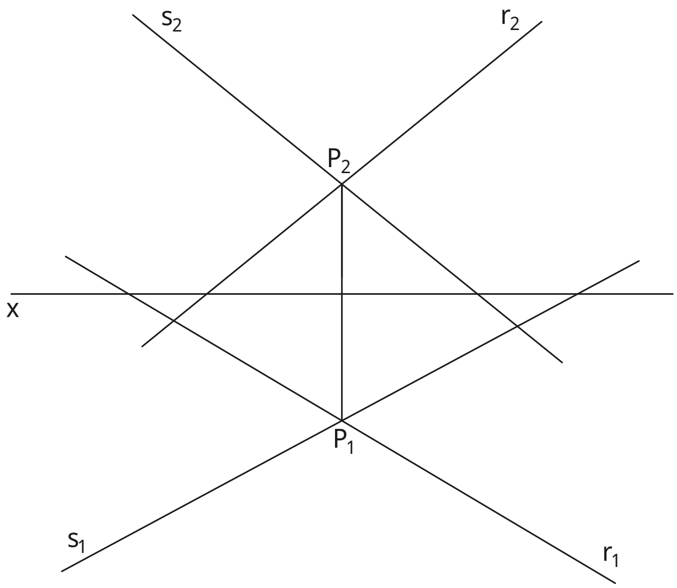
No caso da interseção de planos com o plano bissetor 2/4, o raciocínio é semelhante ao que é utilizado, quando considerado o plano bissetor 1/3, já abordado.

Contudo, é considerado o traço das retas do plano com plano $\beta_{2/4}$ – ponto **I**.

Considerando o plano oblíquo definido pelas retas **r** e **s**, concorrentes no ponto **P**, pretende-se a determinação da reta de interseção do plano dado com o plano $\beta_{2/4}$.

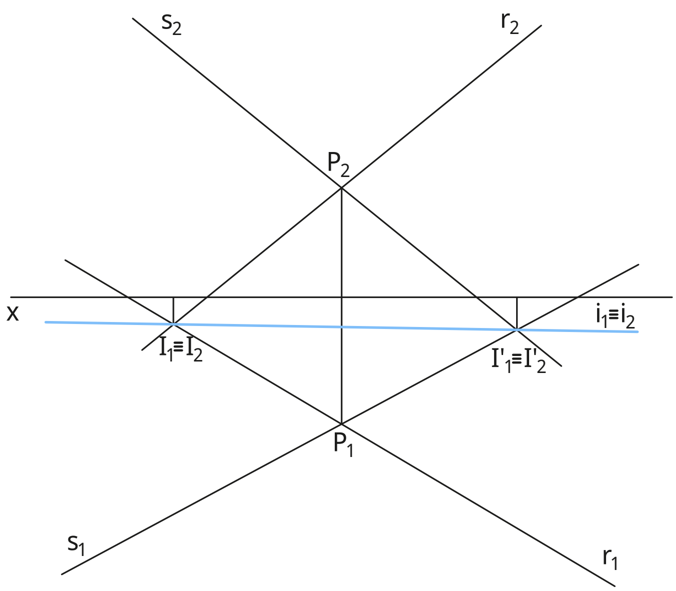
Para tal, deverá ser determinado o traço das retas **r** e **s** nesse plano bissetor (ver página 114).

Esses pontos serão pontos que pertencem, em simultâneo, ao plano oblíquo definido por ambas as retas, e ao plano bissetor 2/4.



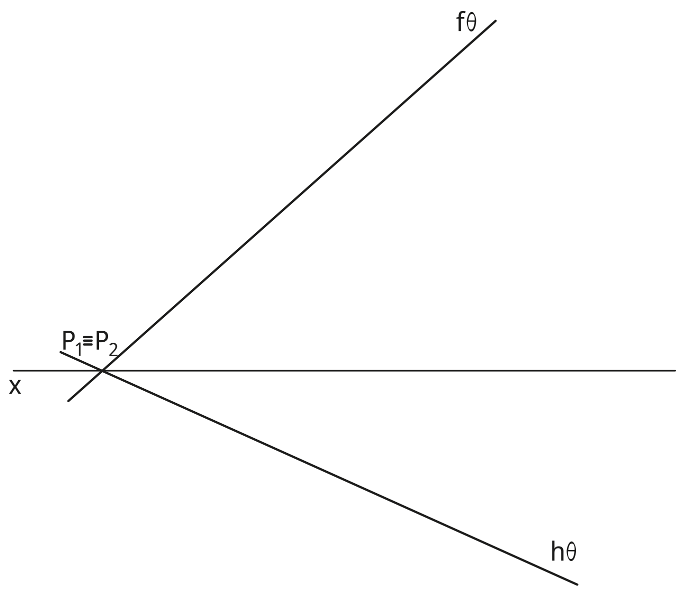
Determinados os traços das retas **r** e **s** no plano $\beta_{2/4}$, **I** e **I'**, a reta **i** fica definida por dois pontos.

No seguimento, a reta **i** está representada pelas suas projeções.

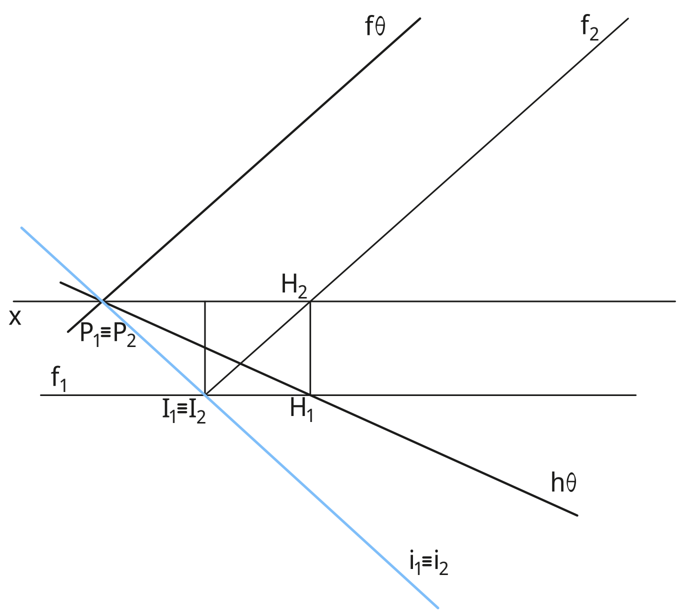


Interseção com o plano $\beta_{2/4}$ – planos definidos pelos seus traços

À semelhança do que já foi referido, a determinação da reta de interseção de um dado plano com um plano bissetor é feita a partir de um ponto já conhecido, estando o plano definido pelos seus traços. Esse ponto corresponde à interseção dos seus traços com o eixo **x**.



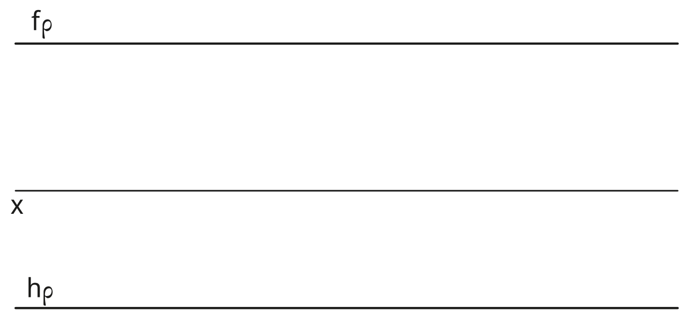
Sendo dado o plano θ, oblíquo, pretende-se determinar a reta resultante da sua interseção com o plano bissetor 2/4. Sendo a reta **i** uma reta que pertence, simultaneamente, ao plano θ, mas também ao plano $\beta_{2/4}$, a reta **i** será uma reta que apenas atravessa os 2.° e 4.° diedros.
Deste modo, as suas projeções serão coincidentes.
Sabendo que a reta **i** contém o ponto **P**, é necessário determinar mais um ponto da reta, para que esta possa ser definida.
O método para a determinação desse ponto passa por traçar uma reta auxiliar, que pertença ao plano θ, e o seu traço no plano bissetor 2/4.
Neste caso, optou-se por uma reta **f**, frontal, pertencente ao plano oblíquo.
Nota que o traço horizontal da reta está sobre o traço horizontal do plano, e que a projeção frontal da reta é paralela ao traço frontal do plano, ou seja, está garantida a condição de pertença da reta **f** ao plano θ.
Na interseção de ambas as projeções da reta **f** está o ponto **I** – interseção da reta **f** com o $\beta_{2/4}$.
O ponto I é um ponto que pertence, em simultâneo, ao plano θ e ao $\beta_{2/4}$.



A reta **i** está, agora, definida pelos pontos **P** e **I**. Nota que ambos os pontos têm as suas projeções coincidentes, o que valida o facto de a reta **i** também ter as suas projeções coincidentes, como qualquer reta pertencente ao plano bissetor 2/4.

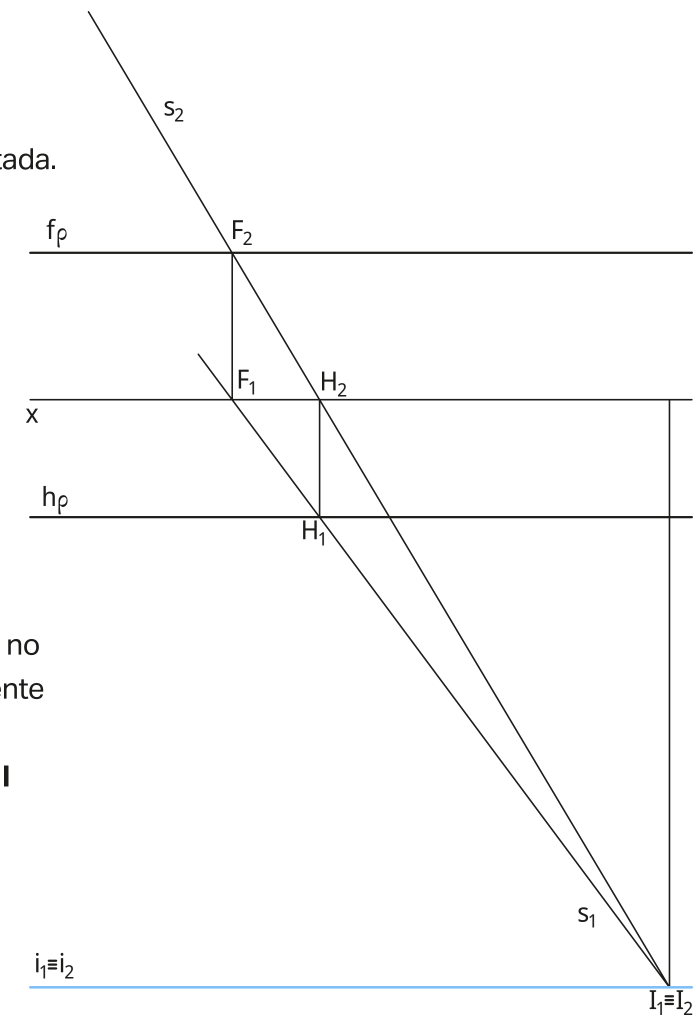
Interseção de um plano de rampa com o plano $\beta_{2/4}$

A interseção de um **plano de rampa** com o plano $\beta_{2/4}$ será sempre uma reta **fronto-horizontal**, na medida em que é a única família de retas que podem pertencer, em simultâneo, a ambos os planos. Neste caso, uma vez que num plano de rampa os seus traços são sempre paralelos ao eixo **x**, não há um primeiro ponto predefinido para a reta **i**, como acontece no caso, por exemplo, dos planos oblíquos. Na verdade, sendo a reta **i** uma reta fronto-horizontal, esta também terá as suas projeções paralelas ao eixo **x**, não possuindo nenhum ponto neste eixo.
Contudo, a direção da reta é conhecida *a priori*, sendo necessário apenas um ponto para que esta possa ser representada.



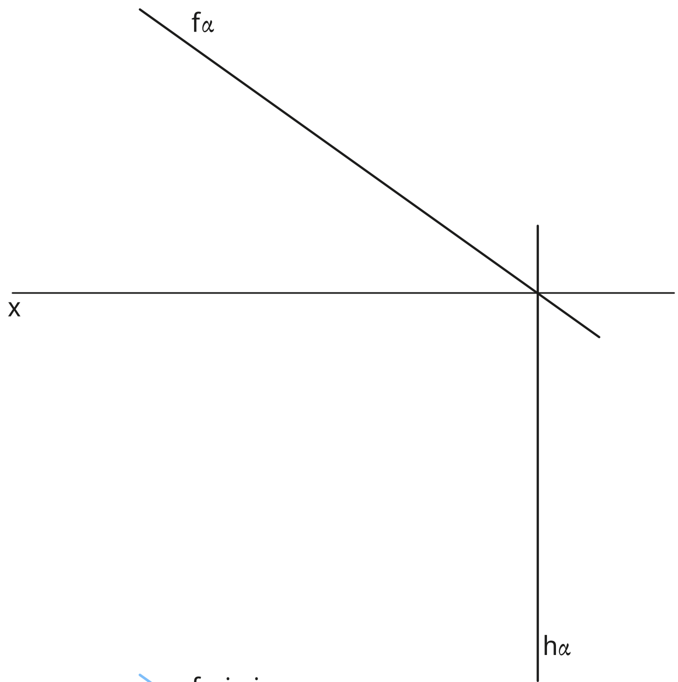
Observa o plano de rampa ρ. Pretende-se determinar a reta de interseção do plano ρ com o plano $\beta_{2/4}$.

Sabendo que a reta **i** é uma reta fronto-horizontal, já é conhecida a sua direção, sendo apenas necessário um ponto da reta.
A determinação desse ponto passa por traçar uma qualquer reta pertencente ao plano de rampa e determinar o seu traço no $\beta_{2/4}$. A reta **s** é uma reta oblíqua, pertencente ao plano de rampa ρ – os seus traços estão sobre os traços do plano. O ponto **I** é o ponto de interseção da reta **s** com o plano $\beta_{2/4}$, sendo, por isso, um ponto comum aos dois planos e, por conseguinte, um ponto da reta **i**, que fica, assim, definida por um ponto e uma direção.



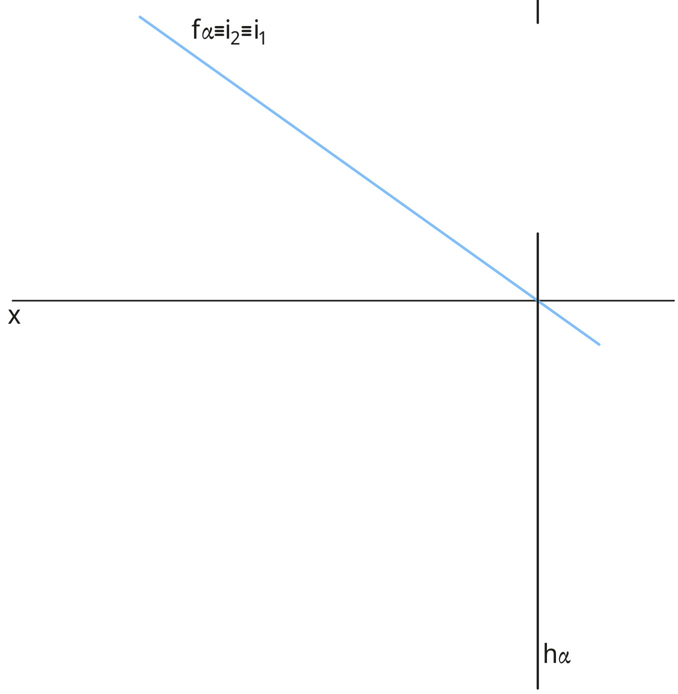
Interseção de um plano projetante com o plano $\beta_{2/4}$

Em qualquer plano projetante, as projeções dos elementos geométricos a este pertencentes estão coincidentes com um dos traços do plano. Se o plano for projetante frontal, essa coincidência dá-se no traço frontal; se for projetante horizontal, dá-se no traço horizontal.



Considerando um plano α, de topo, projetante frontal, pretende-se determinar a sua reta de interseção com o plano $\beta_{2/4}$.

A reta **i**, sendo uma reta que pertence ao plano α e ao plano $\beta_{2/4}$, terá as suas projeções coincidentes. Sendo α um plano projetante frontal, a projeção frontal da reta **i** estará coincidente com o traço frontal do plano. Uma vez que as projeções da reta **i** são coincidentes, ambas estarão sobre o traço frontal do plano.



Deste modo, a reta **i** é uma **reta oblíqua passante**, que atravessa os 2.° e 4.° diedros.

Resumindo

- Retas de interseção de um dado plano com o plano $\beta_{1/3}$ têm sempre as suas projeções simétricas relativamente ao eixo **x**.
- Retas de interseção de um dado plano com o plano $\beta_{2/4}$ têm sempre as suas projeções coincidentes.

Para praticar

1. Representa os planos α e θ, sabendo que os traços do plano α convergem no eixo **x** num ponto com 4 cm de abcissa e fazem, com o eixo **x**, ângulos de 40° (a.d.) e 35° (a.d.), respetivamente, o traço frontal e horizontal. O plano θ contém o ponto **P** (–1; 0; 0) e os seus traços frontal e horizontal fazem, com o eixo x, ângulos de 45° (a.e.) e 40° (a.e.), respetivamente. Determina a reta de interseção entre ambos.

2. Considera as retas **r** e **s**, paralelas, estando r definida pelos pontos **A** (3; 2; 4) e **B** (0; 0; 6) e s pelo ponto **C** (1; 3; 4) que definem um plano α. Determina as retas de interseção do plano com o plano bissetor 1/3.

3. Considera o plano α do exercício 1 e determina as retas de interseção desse plano com os planos bissetores.

4. Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos oblíquos α e θ que possuem um ponto comum no eixo **x**. Sobre os traços do plano α, sabe-se que fazem ângulos de 30° (a.e.) e 45 (a.e.), respetivamente, traço frontal e horizontal. Sobre o plano θ, sabe-se que os seus traços são simétricos face ao eixo x, e que o seu traço frontal faz um ângulo de 35° (a.d.). De que reta se trata?

5. Considera o plano α do exercício anterior, e determina a sua reta de interseção com cada um dos planos bissetores.

6. Determina as projeções de uma reta **i**, de interseção entre um plano α, oblíquo, cujos traços frontal e horizontal fazem, respetivamente, ângulos de 45° (a.e.) e 35° (a.e.), com um plano de rampa, ρ, cujos traços frontal e horizontal têm, respetivamente, 4 cm de cota e 3 cm de afastamento.

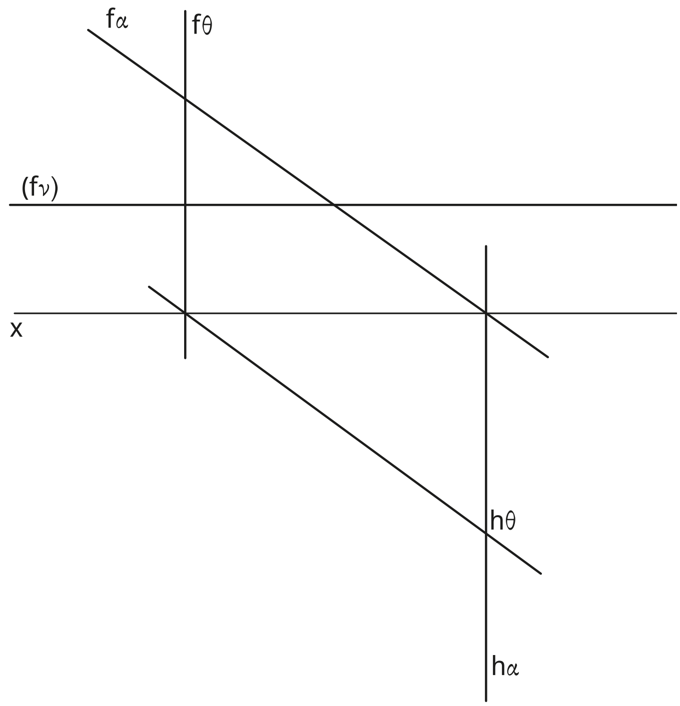
7. Considerando o plano de rampa, ρ, do exercício anterior, determina as projeções das suas retas de interseção com os planos bissetores.

8. Dado um plano de rampa ρ, cujo traço frontal tem 2 cm de cota e o traço horizontal 4 cm de afastamento, determina a interseção desse plano com os planos bissetores.

Interseção entre três planos

A interseção entre três planos pode dar-se através de uma reta ou um ponto, que podem ser próprios ou impróprios, se estiverem a distância finita ou infinita, respetivamente (ver página 211).

A interseção entre três planos resulta no lugar geométrico onde se situa(m) o(s) ponto(s) comum(uns) aos três planos em simultâneo.

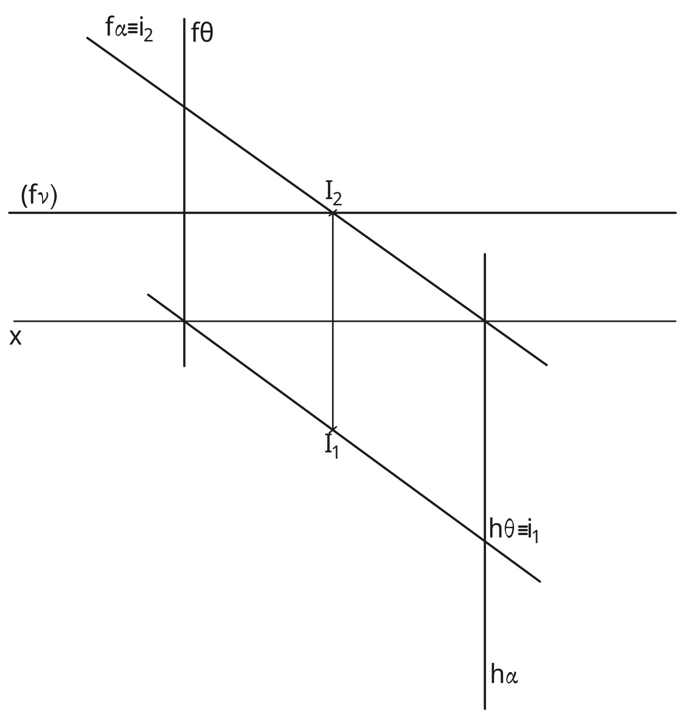


Começando por analisar o exemplo a seguir, observa os três planos:

- o plano *α*, de topo;
- o plano θ, vertical;
- o plano *ν*, horizontal.

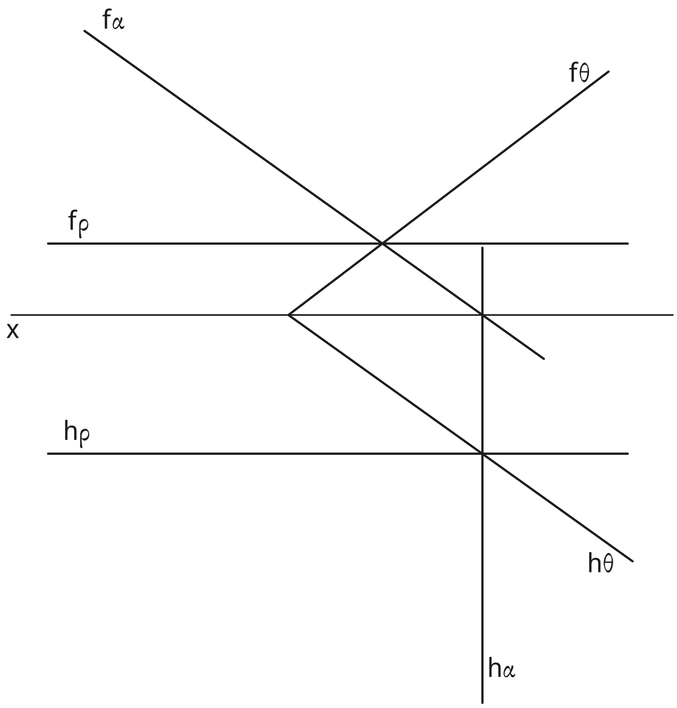
Pretende-se determinar a interseção entre os três planos. Neste caso, trata-se de planos projetantes, tanto frontais como horizontais. Inicialmente, determina-se a reta **i**, de interseção entre os planos *α* e θ.

Uma vez que são planos projetantes, as projeções da reta de interseção de ambos estarão sobre os seus traços homónimos dos planos. Assim, $\mathbf{i_2}$ estará sobre **f*α*** e $\mathbf{i_1}$ estará sobre **hθ**.



Uma vez que o plano *ν*, horizontal, é projetante frontal e sendo que a reta **i**, de interseção de *α* e θ é uma reta oblíqua, antevê-se que a interseção dos três planos se irá dar segundo um ponto, uma vez que um plano horizontal não contempla retas oblíquas, dada a sua natureza. Assim, o ponto **I**, de interseção dos dois planos, é determinado na interseção da reta **i** com o plano *ν*. Neste caso, na interseção de $\mathbf{i_2}$ com o traço frontal do plano *ν*. O ponto **I** pertence à reta **i**, pelo que as suas projeções estão sobre as projeções homónimas da reta.

Após abordar o caso de interseção entre três planos projetantes, abordar-se-á, agora, a interseção entre um plano projetante e dois planos não projetantes.

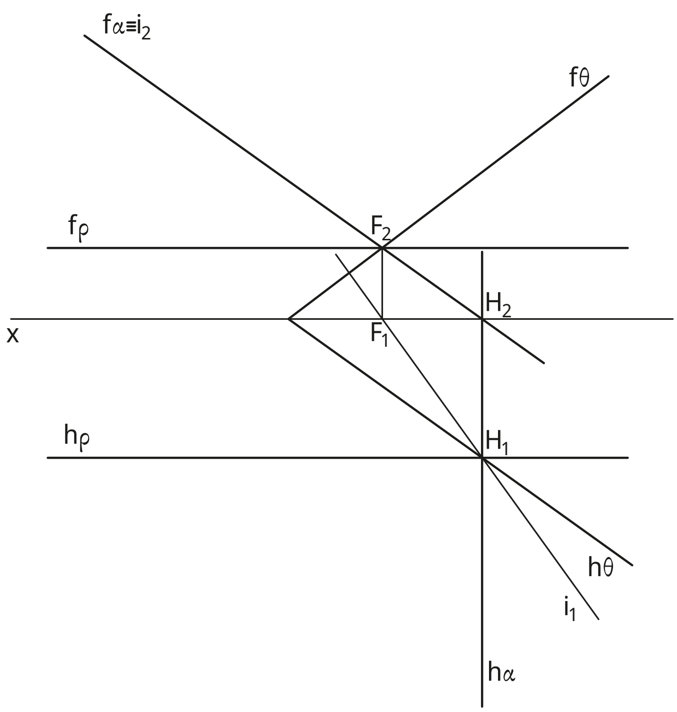


Observa os três planos:

- o plano **α**, de topo;
- o plano **θ**, oblíquo;
- o plano **ρ**, de rampa.

À semelhança do procedimento do exemplo anterior, inicia-se a resolução através da determinação da reta de interseção entre dois dos planos. Neste caso, consideram-se os planos **α** e **θ**. Trata-se de um plano projetante e de outro, não projetante, respetivamente. Deste modo, sendo **α** um plano projetante frontal, a projeção frontal da reta **i** estará sobre o traço frontal de **α**.

Já a determinação da sua projeção horizontal não é imediata, sendo necessário recorrer ao princípio de pertença de uma reta a um plano (para que uma reta pertença a um plano, deverá ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano). Assim, sendo a reta **i** uma reta que pertence aos dois planos em simultâneo, os seus traços devem estar na interseção dos traços homónimos de ambos os planos:



- O ponto **F** encontra-se na interseção entre **fα** e **fθ**;
- O ponto **H** na interseção entre **hα** e **hθ**.

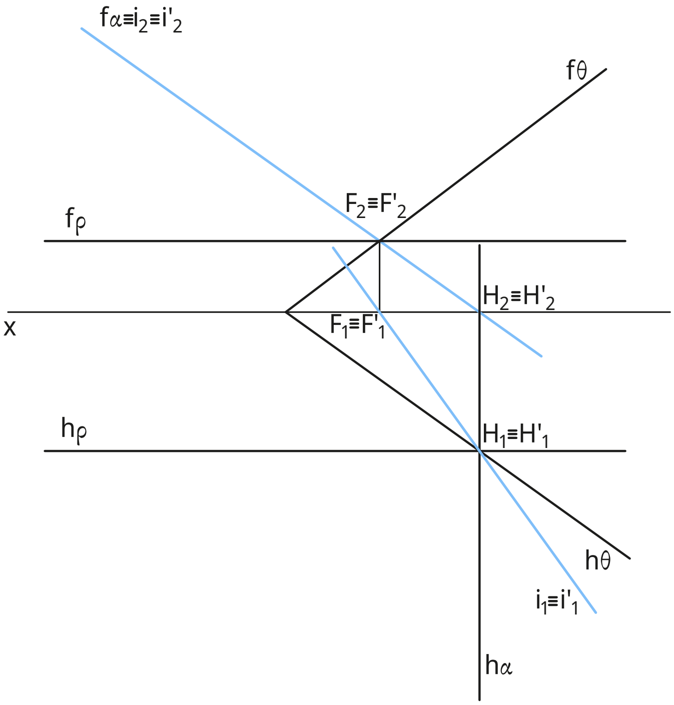
Deste modo, a reta **i** fica definida por dois pontos, sendo possível a representação das suas projeções.

Determinando, agora, a interseção entre o plano de rampa ρ e um dos outros planos, opta-se pelo plano de topo, α, por se tratar de um plano projetante, o que simplifica o processo e promove uma maior economia de traçado.

Assim, sendo o plano α um plano projetante frontal, a projeção frontal de **i'** estará, também, sobre **fα** e, consequentemente, coincidente com **i_2**.

Para obter a projeção horizontal de **i'**, recorre-se, novamente, à determinação dos traços da reta, que deverão estar sobre a interseção dos traços homónimos dos planos.

- O ponto **F'** encontra-se na interseção entre **fα** e **fρ**.
- O ponto **H'** na interseção entre **hα** e **hρ**.



Estando a reta **i'** definida por dois pontos, é possível determinar as suas projeções, que se revelam coincidentes com as projeções da reta **i**. Assim, conclui-se que os três planos se intersetam segundo uma reta.

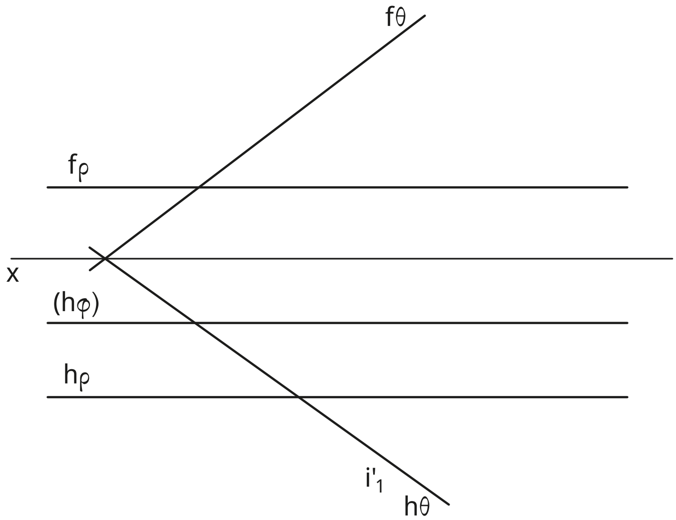
Estando a reta **i'** definida por dois pontos, é possível determinar as suas projeções, que se revelam coincidentes.

Resumindo

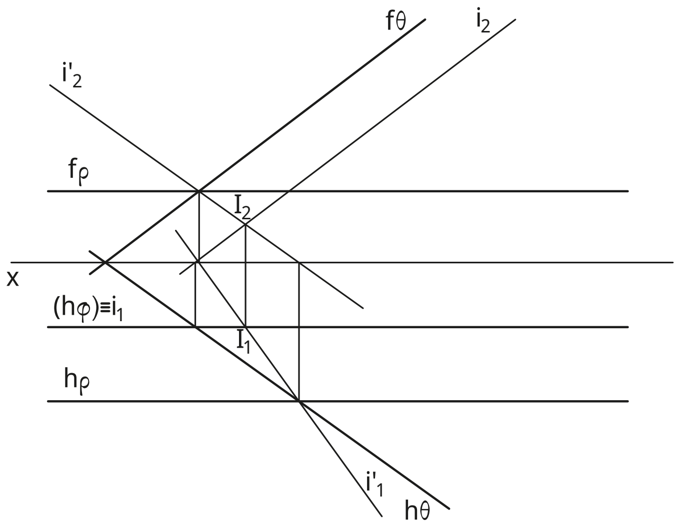
- Três planos intersetam-se segundo um ponto ou uma reta, dependendo se as retas de interseção entre cada um deles sejam coincidentes entre si ou concorrentes no mesmo ponto.

Considerando outro exemplo, igualmente de interseção entre três planos, dos quais um é projetante, observa os três planos:

- o plano φ, frontal;
- o plano θ, oblíquo;
- o plano ρ, de rampa.



A reta **i**, de interseção do plano φ, frontal, com o plano θ, oblíquo, é uma reta frontal, comum a ambos os planos, por esta ser a única família de retas comum a planos frontais e oblíquos. Sendo a reta **i** uma reta que pertence a φ, a sua projeção horizontal estará sobre o traço homónimo do plano, uma vez que se trata de um plano projetante horizontal. A sua projeção frontal será paralela ao traço frontal do plano θ, pois qualquer reta frontal pertencente a um plano oblíquo tem a sua projeção frontal paralela ao traço frontal desse plano.



Tendo a direção da reta, é necessário um ponto, para que esta possa ser representada. Na interseção dos traços horizontais dos dois planos, tem-se o traço horizontal da reta **i**. Assim, a reta pode ser representada.

Posteriormente, a determinação da reta **i'**, de interseção entre o plano ρ, de rampa, e o plano θ, oblíquo, é feita através dos traços da reta, que se situam na interseção dos traços homónimos dos planos. A reta **i'** fica, assim, definida por dois pontos.

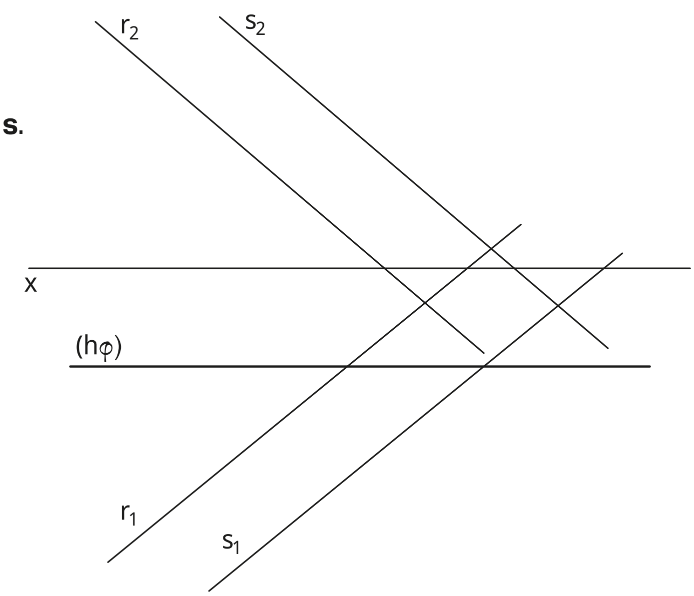
Notando que as retas **i** e **i'** não são coincidentes, conclui-se que a interseção dos três planos se dá segundo um ponto – ponto **I** – que corresponde ao ponto de concorrência das retas **i** e **i'**.

Interseção entre um plano projetante e um plano não definido pelos seus traços

Considerando um plano definido por duas retas, pretende-se determinar a reta de interseção deste com um plano projetante.

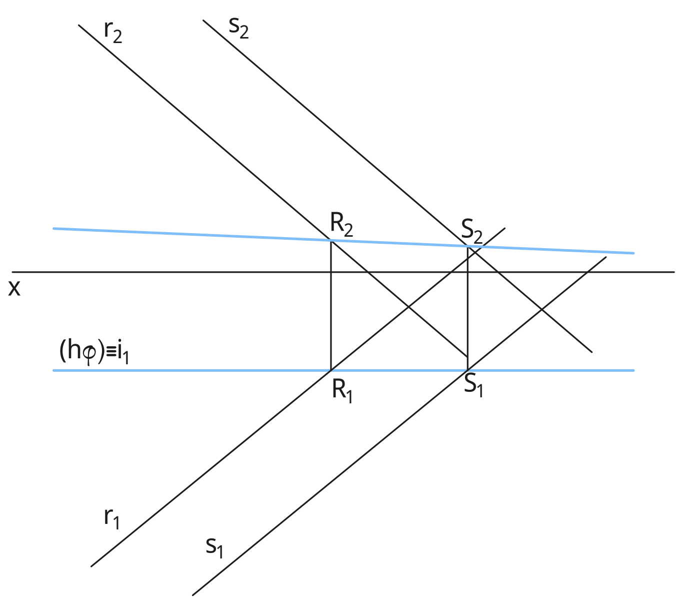
Observa os dois planos:

- o plano φ, frontal;
- o plano definido pelas retas paralelas **r** e **s**.



Tratando-se de um plano projetante horizontal, a determinação da projeção horizontal da reta **i**, de interseção entre ambos os planos, é imediata, sendo coincidente com o traço horizontal do plano frontal. Para determinar a projeção frontal da reta **i** serão necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Neste caso, recorre-se aos pontos de concorrência da reta **i** com as retas **r** e **s**. Estes serão pontos que pertencem, em simultâneo, a ambos os planos. Deste modo, determinam-se os pontos **R** e **S**, sobre as projeções das retas **r** e **s**, com as projeções horizontais na interseção de $\mathbf{i_1}$ com as projeções horizontais das retas **r** e **s**. A reta **i** fica, assim, definida por dois pontos.



A reta **i** é uma reta frontal, que pertence, simultaneamente, ao plano φ, frontal, e ao plano definido pelas retas **r** e **s**.

Interseção entre planos com recurso a métodos auxiliares – interseção entre planos de rampa

Na interseção de planos, há um conjunto de situações que correspondem a casos particulares, relativamente aos quais é necessário recorrer a métodos auxiliares, nomeadamente, a planos auxiliares.

Um destes casos é a determinação da interseção entre dois planos de rampa.

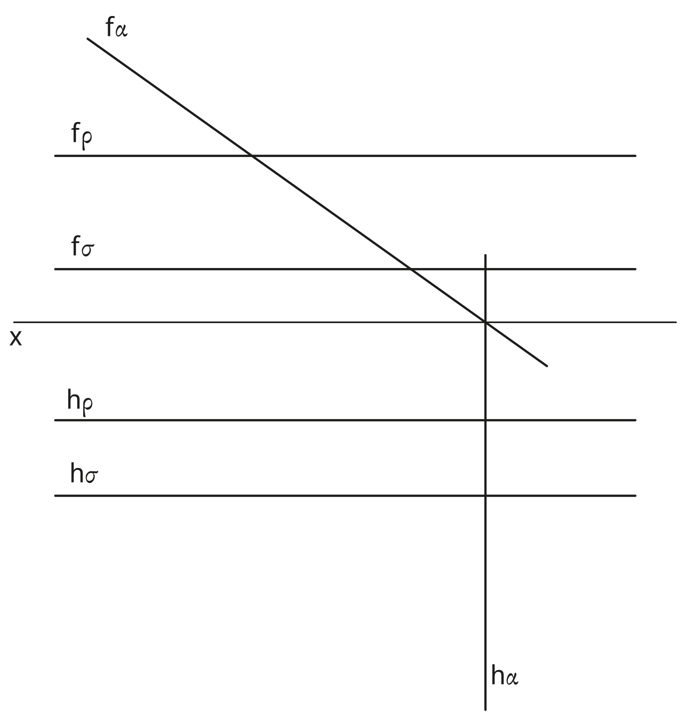
Observa os dois planos:

- o plano **ρ**, de rampa;
- o plano **σ**, de rampa.

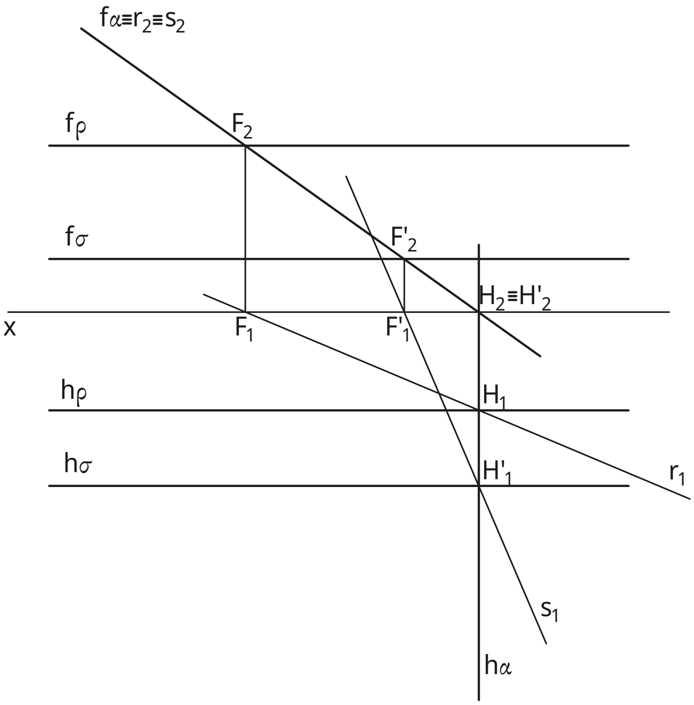
Pretende-se determinar a reta de interseção entre os dois planos. Acerca dessa reta, sabe-se que se trata de uma reta fronto-horizontal, uma vez que é a única reta que pode ser comum a ambos, dada a natureza dos dois planos.

No entanto, é necessário determinar um dos pontos dessa reta – **i** – para que esta possa ser representada, uma vez que já conhecemos a sua direção.

Recordando que uma reta pode ser definida por um ponto e uma direção, e conhecendo, a priori, a direção da reta pretendida, basta determinar um ponto que lhe pertença.

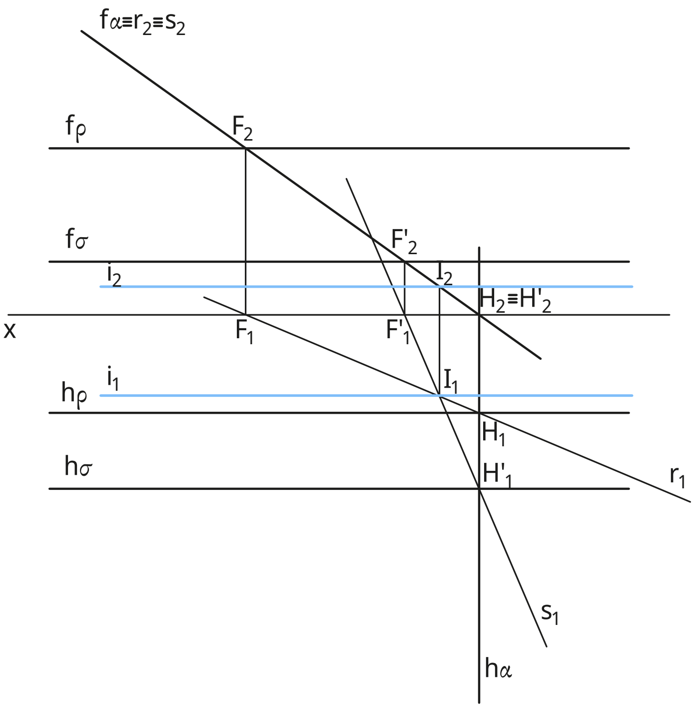


Esse ponto será determinado pela interseção de duas retas, cada uma pertencente a um dos planos. O seu ponto de concorrência será um ponto comum a ambos os planos de rampa e, consequentemente, um ponto da reta **i**.



Para tal, é necessário recorrer a um método auxiliar.

Considerando um plano projetante auxiliar, neste caso, um plano de topo *α*, determina-se a interseção deste com cada um dos planos de rampa. Tratando-se de um plano projetante frontal, as retas **r** e **s**, de interseção do plano de topo com cada um dos planos de rampa, têm as suas projeções frontais sobre o traço frontal do plano *α*. Determinando os traços das retas – pontos de concorrência dos traços homónimos dos planos –, é possível representar as projeções horizontais das mesmas. Estando as retas representadas, é feita a determinação do seu ponto de concorrência – o ponto **I**. Esse ponto é um ponto da reta **i** de interseção dos dois planos de rampa. Assim, as projeções da reta **i** são paralelas ao eixo **x** e aos traços dos planos de rampa, contêm o ponto **I**.

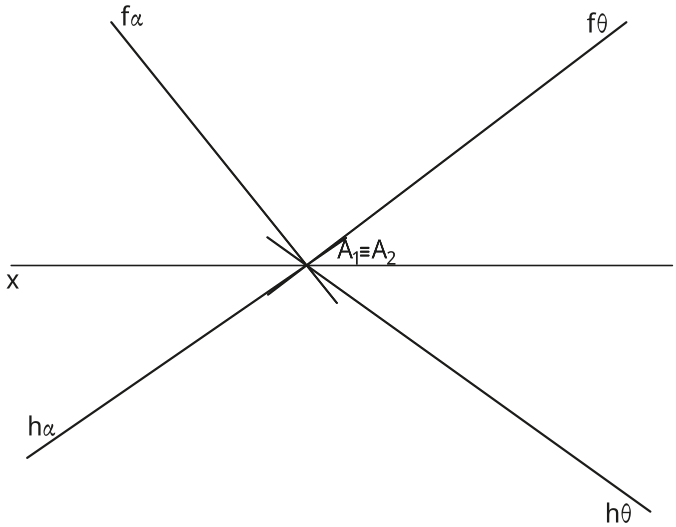


Assim, é determinada a reta **i**, de interseção entre dois planos de rampa, com recurso a um plano projetante auxiliar.

Interseção entre dois planos oblíquos com um ponto comum sobre o eixo x

No caso da interseção entre dois planos oblíquos, definidos pelos seus traços, que partilham o mesmo ponto de concorrência com o eixo **x**, também é necessário recorrer a um método auxiliar, para a determinação da reta **i**, de interseção de ambos.

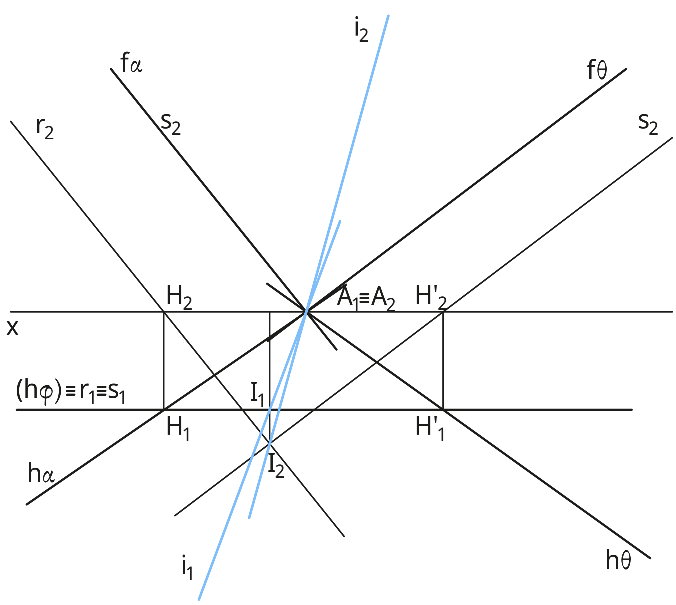
Neste caso, consideram-se os planos oblíquos α e θ, cujos traços de ambos concorrem entre si no ponto **A**, no eixo **x**.



Para determinar a interseção dos dois planos, é necessário recorrer a um plano auxiliar, determinando a interseção deste com cada um dos planos dados.

A determinação de duas retas de cada um dos planos, pertencentes, simultaneamente, a um plano projetante auxiliar, permitirá determinar um ponto da reta **i**. Uma vez que o ponto **A** é comum a ambos os planos, este será, forçosamente, um ponto da reta **i**, ficando esta definida por dois pontos.

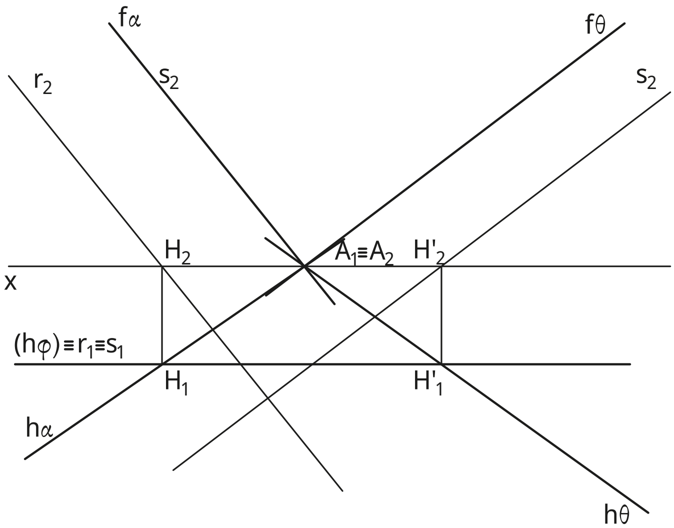
Neste caso, optou-se por um plano frontal, projetante horizontal.
A interseção deste plano com cada um dos planos oblíquos dá-se segundo retas frontais, cujas projeções horizontais estão coincidentes no traço horizontal do plano frontal. Determinados os traços horizontais de ambas as retas, são representadas as suas projeções frontais, paralelas aos traços frontais dos planos oblíquos correspondentes.



Tendo as retas **r** e **s**, de interseção do plano auxiliar com cada um dos planos oblíquos, é possível determinar o ponto de concorrência de ambas, através da interseção das suas projeções frontais.

O ponto **I**, de concorrência das retas **r** e **s**, é um ponto comum aos planos α e θ, estando a reta **i** definida pelos pontos **A** e **I**.

A reta **i** é a reta de interseção de dois planos oblíquos, α e θ, cujos traços têm um ponto comum no eixo **x**.



Manual Digital

Interatividade
Interseção entre dois planos de rampa

Resumindo

- A reta de interseção entre dois planos de rampa é sempre uma reta fronto-horizontal. Uma reta pode ser definida por um ponto e uma direção. Para a determinação da reta de interseção entre dois planos de rampa, é suficiente determinar um ponto da reta, sendo já conhecida a sua direção.
- Quando dois planos oblíquos possuem traços que não se intersetam dentro dos limites do papel, é necessário recorrer a planos auxiliares, paralelos aos planos de projeção.

Para praticar

1 Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos de rampa ρ e λ, sabendo que os seus traços frontais têm, respetivamente, 3 cm de cota e 5 cm de cota, e que os seus traços horizontais têm, respetivamente, 5 cm de afastamento e 2cm de afastamento.

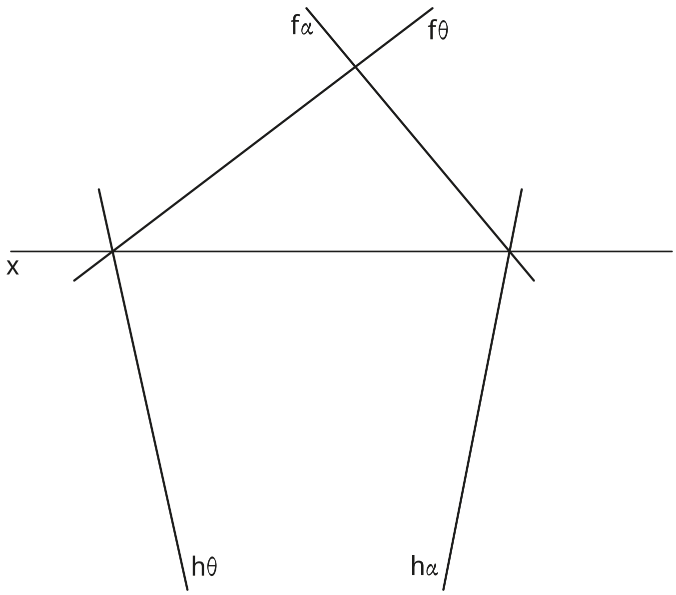
2 Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos de rampa, ρ e λ, sabendo os seus traços frontais têm, respetivamente, –1cm de cota e 3 cm de cota, e que os seus traços horizontais têm, respetivamente, 4 cm de afastamento e 6 cm de afastamento.

3 Determina a reta **i**, de interseção entre os planos oblíquos α e θ, cujo ponto de concorrência no eixo x é comum, na abcissa zero. Os traços frontal e horizontal do plano α fazem, respetivamente, ângulos de 50° (a.e.) e 45° (a.e.) e os traços do plano θ fazem, respetivamente, ângulos de 35° (a.d.) e 55° (a.d.).

Interseção entre dois planos oblíquos cujos traços não se intersetam nos limites da folha de papel

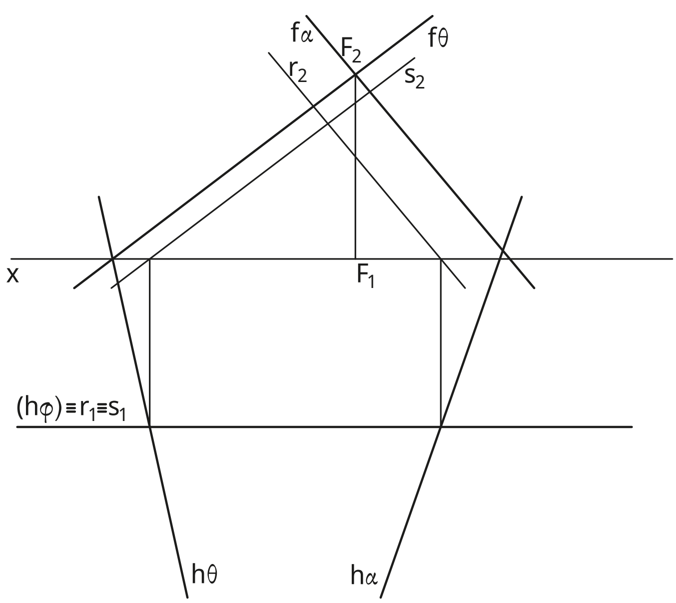
No caso da interseção entre dois planos oblíquos, definidos pelos seus traços, pode ser aplicado o caso geral, que consiste em determinar os traços da reta de interseção de ambos, através da concorrência entre os traços de cada um dos planos. No caso em que os traços não se intersetam nos limites da folha de papel, a aplicação do caso geral é inviável, sendo necessário recorrer a um método auxiliar.

Analisando os planos α e θ, é claro que os planos se intersetam numa reta a distância finita: reta própria. Contudo, dadas as condicionantes do suporte utilizado na resolução do problema – folha de papel –, poder-se-á dar o caso de os traços do plano não se intersetarem nos limites de espaço disponível no plano do desenho. Assim, é necessário recorrer a planos auxiliares para a determinação da reta **i**.



Considerando um plano frontal, projetante horizontal, são determinadas as retas de interseção desse plano com cada um dos planos oblíquos – retas **r** e **s**.

Tratando-se de interseção entre um plano frontal e um plano oblíquo, sabe-se que **r** e **s** serão retas frontais. As suas projeções horizontais estão sobre o traço horizontal do plano frontal e as suas projeções frontais são paralelas ao traço homónimo do plano oblíquo ao qual também pertencem.

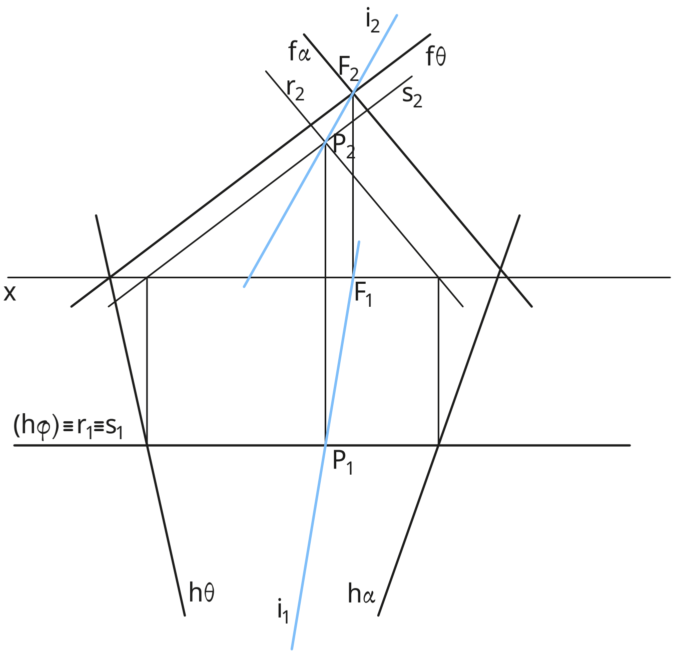


Entretanto, uma vez que os traços frontais dos planos α e θ se intersetam dentro dos limites do papel, é possível determinar o traço frontal da reta **i**, que resulta da interseção dos traços frontais de ambos os planos oblíquos.

A reta **i** está, agora, prestes a ficar definida por dois pontos, restando determinar o ponto de concorrência das retas **r** e **s**, que será um ponto comum aos dois planos oblíquos.
As retas **r** e **s** são concorrentes no ponto **P**, ficando a reta **i** definida pelos pontos **P** e **F**.

Deste modo, fica definida a reta **i**, de interseção entre dois planos oblíquos cujos traços não se intersetam dentro dos limites da folha de papel.

Nota que, caso os traços frontais também não se intersetassem dentro dos limites do papel, a solução passaria por recorrer a um outro plano auxiliar, e determinar o ponto de concorrência entre outras duas retas, de interseção desse plano auxiliar com cada um dos planos dados. A reta **i** estaria aí, também, definida por dois pontos comuns a ambos os planos oblíquos.



Para praticar

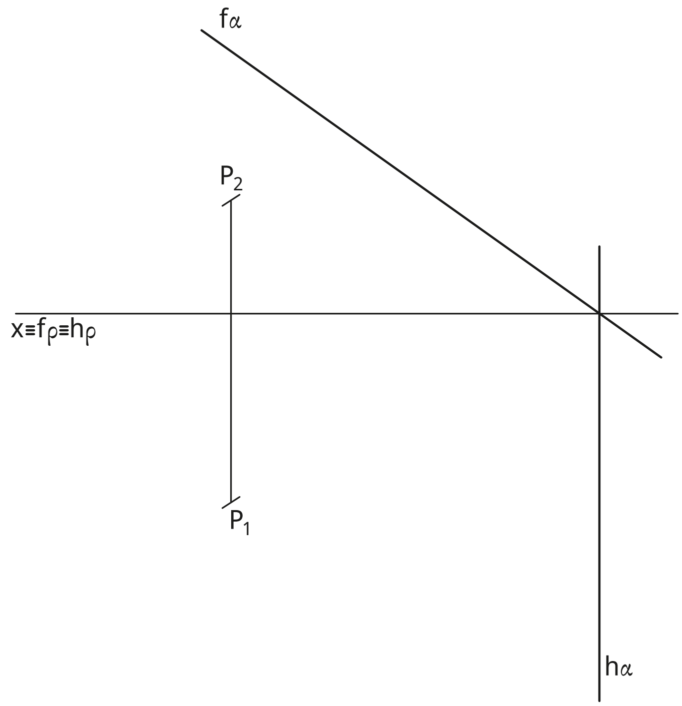
1. Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos oblíquos α e θ. O plano α contém o ponto do eixo **x** com abcissa 4 e os seus traços frontal e horizontal fazem, respetivamente, ângulos de 50° (a.d.) e 70° (a.d.). O plano θ contém o ponto do eixo x com abcissa –7 e os seus traços frontal e horizontal fazem, respetivamente, ângulos de 55° (a.e.) e 60° (a.e.).

2. Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos oblíquos α e θ. O plano α, definido pelos seus traços, contém o ponto do eixo **x** com 5 cm de abcissa, e os seus traços fazem, com este eixo, ângulos de 35° (a.d.) e 70° (a.d.), respetivamente, frontal e horizontal. O plano θ contém o ponto do eixo **x** com –3 cm de abcissa, e os seus traços frontal e horizontal fazem, com o eixo **x**, ângulos de 40° (a.e.) e 80° (a.e.).

Interseção entre um plano passante e um plano projetante

A interseção entre dois planos, quando um destes é um plano passante, integra um dos casos particulares da interseção entre planos, que implica o recurso a métodos auxiliares.

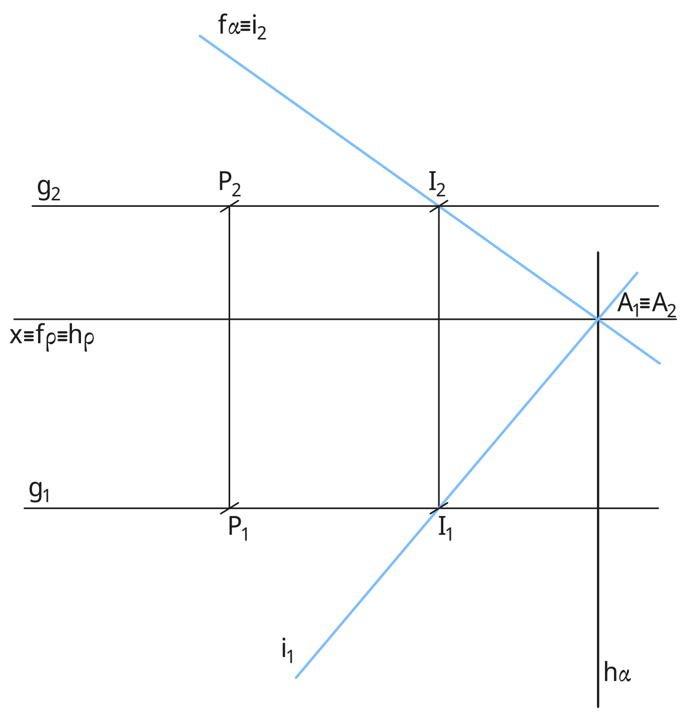
Considerando o plano passante, ρ, definido pelos seus traços e pelo ponto **P** (recorda que um plano passante é o único plano cujos seus traços não são suficientes para o definir), pretende-se determinar a reta de interseção deste com o plano α, de topo.



Tratando-se de uma interseção que envolve um plano projetante, sabe-se desde já, que uma das projeções da reta de interseção estará coincidente com um dos traços desse plano.

Assim, sendo o plano α um plano de topo, projetante frontal, a projeção frontal da reta **i** estará coincidente com o seu traço frontal.

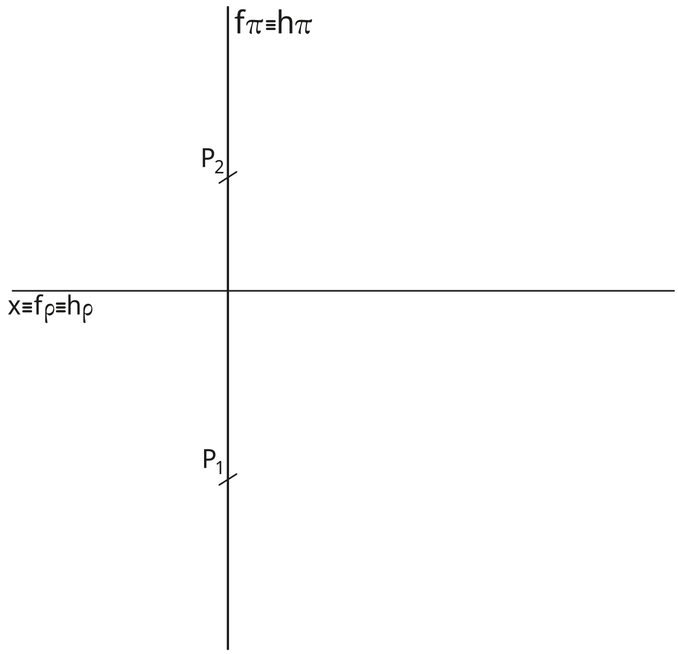
Para determinar a projeção horizontal da reta **i**, é necessário determinar um ponto dessa reta, uma vez que, tratando-se de um plano passante, a reta será, obrigatoriamente, uma reta passante, ou seja, com um ponto pertencente ao eixo **x**, uma vez que o plano α também possui um ponto no eixo **x**.
Assim, a reta **i** estará definida pelo ponto **A** e por um outro ponto, a determinar. Para tal, recorre-se a uma reta auxiliar, fronto-horizontal, pertencente ao plano passante. Pelo ponto **P**, que pertence ao plano, traçam-se as projeções da reta **g**. Posteriormente, a partir da interseção de $\mathbf{g_2}$ e $\mathbf{i_2}$, dá-se o ponto de concorrência das duas retas, que permite traçar a projeção horizontal da reta **i**.



Em conclusão, a reta **i** é uma reta oblíqua passante, comum aos dois planos.

A interseção entre um plano passante e um plano de perfil, é, também, pela sua natureza, um caso particular, que recorre a métodos auxiliares. Neste caso concreto, o método auxiliar envolve contornos diferentes dos casos que envolvem os restantes planos projetantes.

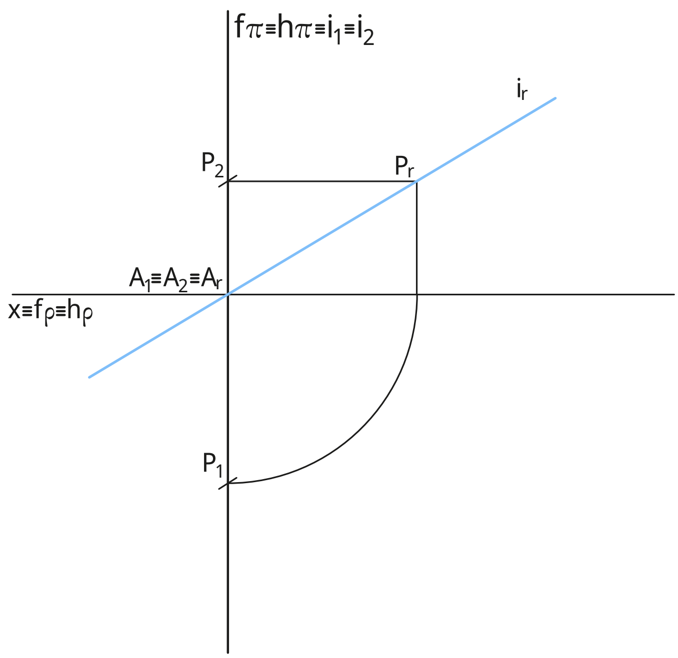
Considerando o mesmo plano passante do exemplo anterior, pretende-se determinar a reta de interseção do mesmo com um plano de perfil, que contém o ponto **P**.



Neste caso, a solução passará por um rebatimento do ponto **P**. Uma vez que o plano de perfil contém o ponto **P**, e que este também define o plano passante, é claro que o ponto **P** é um ponto da reta **i**, pois é comum a ambos os planos.
Por outro lado, também se sabe que a reta de interseção entre ambos será, obrigatoriamente, uma reta passante, uma vez que se trata da interseção entre um plano cujos traços contêm todos os pontos do eixo **x**, e o plano de perfil interseta esse mesmo eixo.
Assim, sabe-se que a reta **i** contém os pontos **A** e **P**.

No entanto, como se trata de uma reta de perfil passante, é necessário recorrer a um rebatimento para obter uma representação elucidativa da reta em questão.

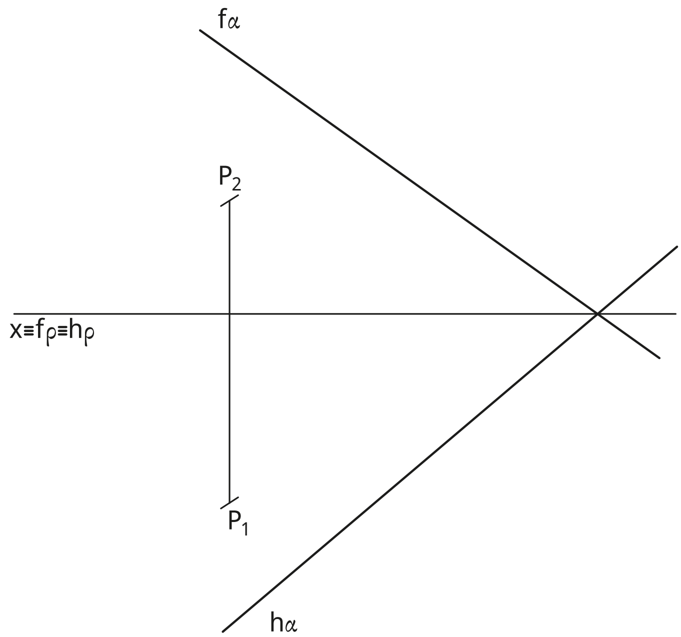
Rebatendo o ponto **P**, neste caso, sobre o Plano Frontal de Projeção, obtém-se a reta **i** rebatida. Nota que o ponto **A**, por ser um ponto do eixo **x**, contido no plano de perfil, permanece na mesma localização, mesmo após o seu rebatimento.



Interseção entre um plano passante e um plano oblíquo

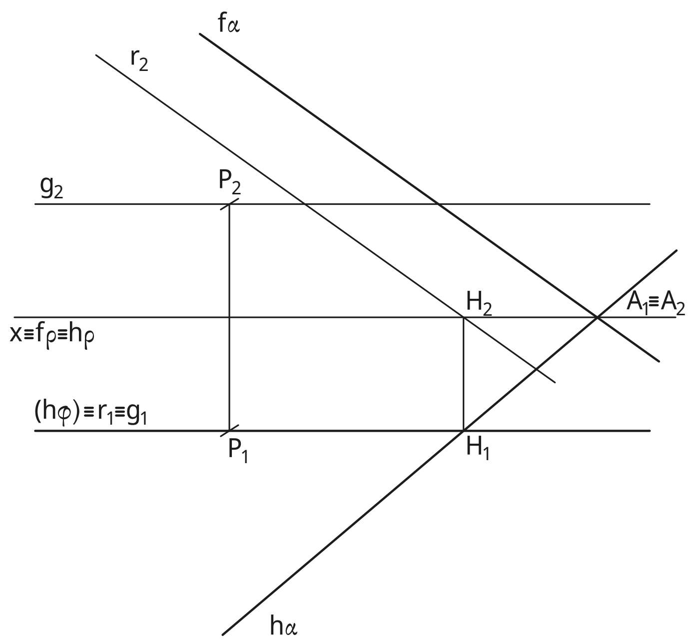
Analisado o caso particular de interseção entre um plano passante e um plano projetante, será agora abordado o caso particular de interseção, também, de um plano passante, mas com um plano oblíquo consequentemente, não projetante.

Continuando a considerar o mesmo plano passante, definido pelos seus traços e pelo ponto **P**, e um plano oblíquo α, procede-se à determinação da reta **i**, de interseção entre ambos.



Neste caso, não se tratando de planos projetantes, nenhuma das projeções da reta é determinada de forma imediata. Assim, é necessário recorrer a um plano auxiliar, projetante, que contenha o ponto **P**, e definir as duas retas de interseção, desse plano projetante com cada um dos dois planos dados.

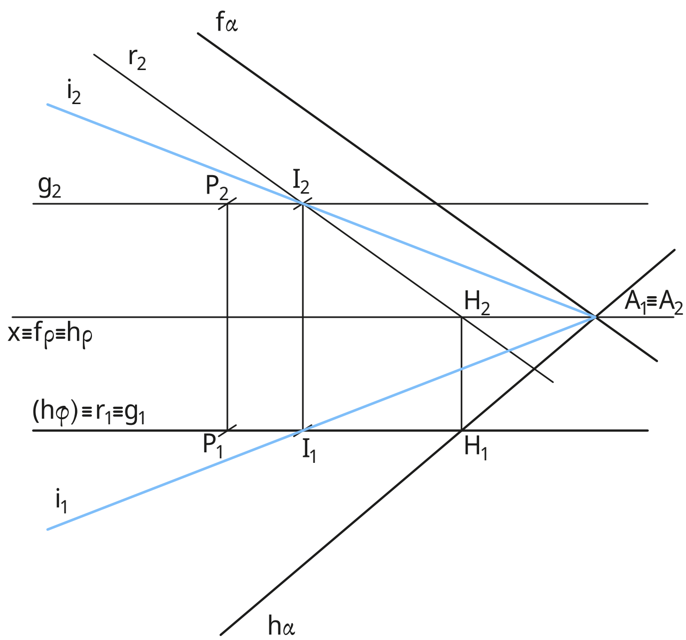
Optando por um plano frontal, ou seja, projetante horizontal, as projeções horizontais dessas retas – **r** e **g** – estarão sobre o traço horizontal do plano auxiliar. A reta **g**, fronto-horizontal, fica definida pelo ponto **P**, e tem as suas projeções paralelas ao eixo **x** (está definida por um ponto e uma direção). A reta **r**, frontal, não contém o ponto **P**, pois não pertence ao plano passante, mas sim ao plano oblíquo. Deste modo, a sua projeção frontal deverá ser paralela ao traço frontal do plano α. Conhecendo a direção da reta **r**, é necessário um ponto para que esta fique definida. Sendo esta uma reta comum ao plano α e ao plano φ, o traço horizontal da reta estará no ponto de concorrência entre os traços horizontais de ambos os planos.



Deste modo, é possível representar a projeção frontal da reta **r**.

Obtidas as duas retas, é necessário encontrar o ponto de concorrência entre ambas. Esse ponto – ponto **I** – será comum aos dois planos dados: α e ρ. A reta **i** estará, agora, definida por dois pontos: **A** e **I**.

A reta **i** é uma reta oblíqua passante.



Resumindo

- Numa interseção entre um plano passante e qualquer outro plano cujos traços possuam um ponto no eixo **x**, a reta resultante dessa interseção será sempre uma reta **oblíqua passante**, à exceção da interseção com um plano perfil, que resulta numa reta de **perfil passante**.

Para praticar

1 Determina as projeções de uma reta **i**, de interseção entre um plano ρ, passante, definido pelo ponto **P** (3; 3; 5), e pelo eixo **x**, com um plano de topo, cujo ponto de concorrência com o eixo **x** tem –2 cm de abcissa, e o seu traço frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 45° (a.e.). De que reta se trata?

2 Determina as projeções da reta **i**, de interseção entre um plano passante definido pelo eixo **x** e o ponto **P** (2; 2; 6), com um plano de rampa, cujos traços têm 4 cm de cota e 6 cm de afastamento. De que reta se trata?

3 Considerando os planos do enunciado anterior, determina as retas de interseção de cada um destes com um plano de perfil, de abcissa nula.

Interseção entre um plano passante e um plano de rampa

Até então, os casos de interseção entre planos que contemplam planos passantes resultaram em retas passantes, sendo elas oblíquas ou de perfil.

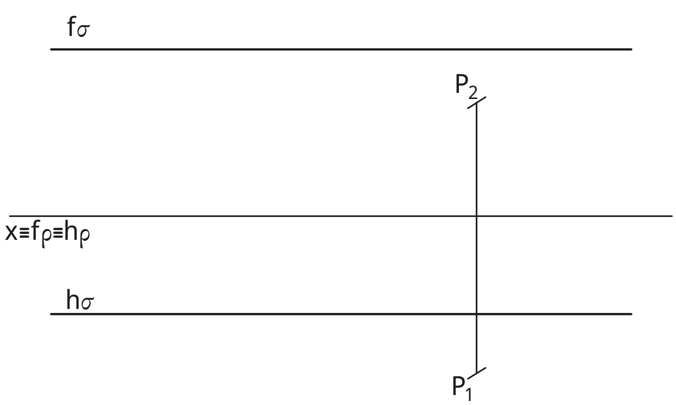
No entanto, nem sempre uma interseção que integre um plano passante resulta numa reta passante. Na verdade, tal só se verifica quando o outro plano em questão possui qualquer ponto do eixo **x**. Essa condição não se verifica em planos horizontais, frontais ou de rampa.

Como tal, será abordado o caso particular de interseção entre um plano passante e um plano de rampa.

Observa os dois planos:

- o plano **ρ**, passante;
- o plano **σ**, de rampa.

O plano passante, definido pelos seus traços e pelo ponto **P**, interseta o plano **σ** segundo uma reta **fronto-horizontal**, uma vez que este último não possui qualquer ponto no eixo **x** – nota que os seus traços são paralelos ao eixo.



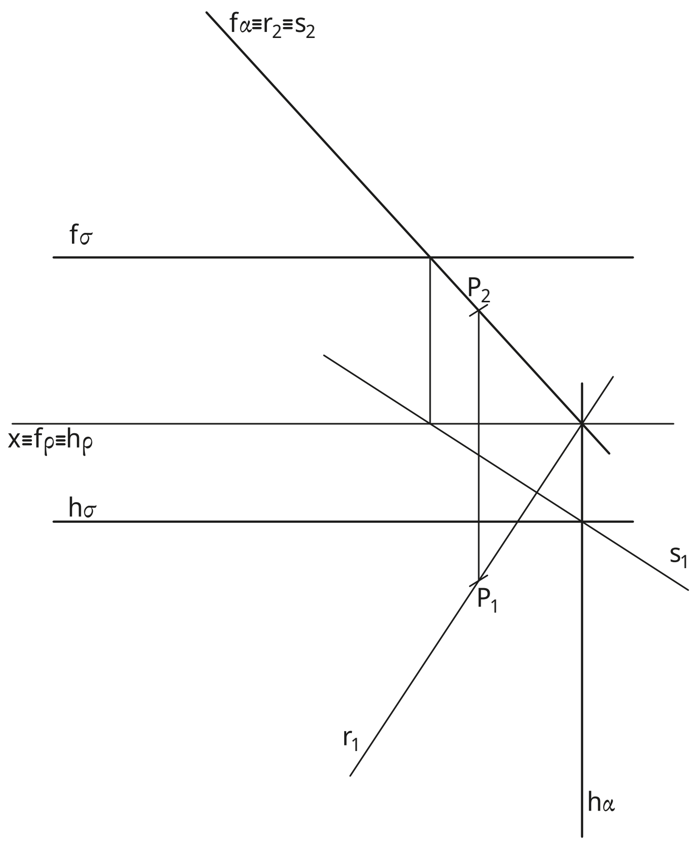
Assim, a determinação da reta **i** é feita, conhecendo, desde já, a sua direção, sendo necessário apenas um ponto da reta. A determinação desse ponto é feita com recurso a um plano auxiliar, projetante.

Neste caso, foi considerado um plano α, de topo, projetante frontal, e determinadas as retas de interseção deste com cada um dos planos dados.

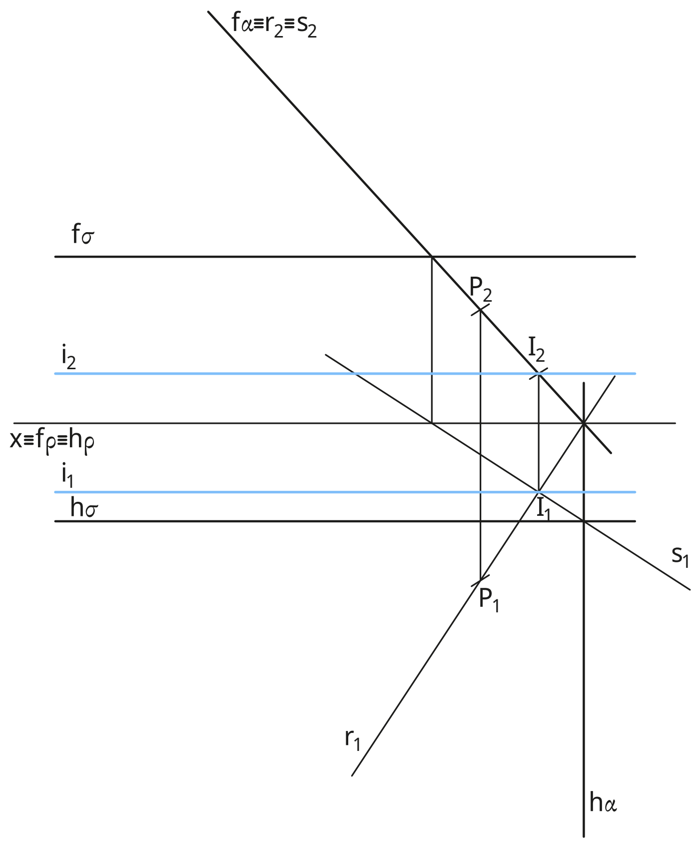
Tratando-se de um plano projetante frontal, as projeções frontais das retas **r** e **s** (de interseção com os planos passante e de rampa, respetivamente), ficam coincidentes com o traço frontal de α.

Sendo **P** um ponto do plano passante, a reta **r** fica definida por dois pontos (ponto **P** e ponto de concorrência dos traços do plano de topo com o eixo **x**), e é uma reta oblíqua passante.

A reta **s** será definida pelos seus traços, determinados através da interseção dos traços homónimos dos planos a que pertence – a reta **s** é uma reta oblíqua.



O ponto **I**, de concorrência das retas **r** e **s**, é um ponto comum ao plano de rampa e ao plano passante. Recordando que é conhecida a direção da reta **i** (reta fronto-horizontal), existem, agora, dados suficientes para representar a reta **i** pelas suas projeções. A projeção $\mathbf{i_2}$ contém $\mathbf{I_2}$ e é paralela ao eixo **x**, e a projeção $\mathbf{i_1}$ contém $\mathbf{I_1}$ e é paralela ao eixo **x**.

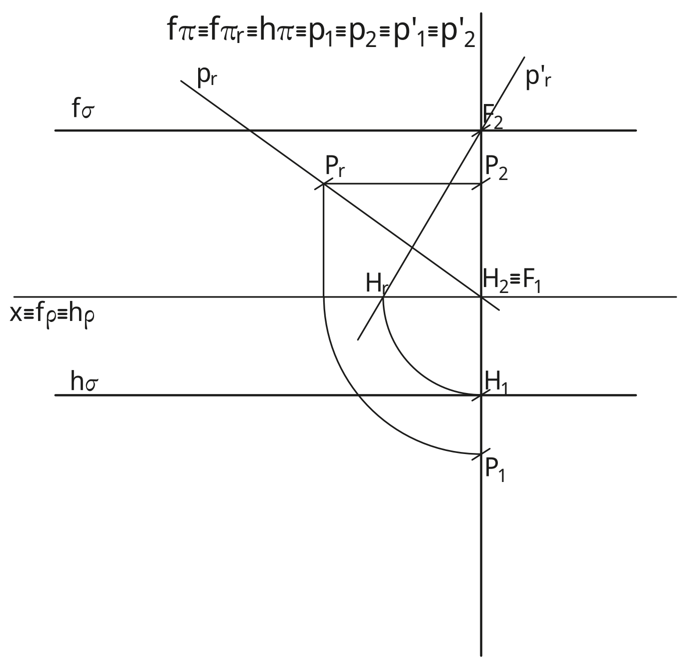


No entanto, consolidados os conhecimentos acerca do rebatimento de planos, este caso particular pode ser solucionado com recurso a esse método geométrico auxiliar.

Considerando um plano auxiliar, também projetante, mas de perfil e não de topo, determina-se a interseção deste com os dois planos dados.

Considera que:

- A reta **p** é a reta de interseção do plano ρ com o plano π.
- A reta **p'** é a reta de interseção do plano σ com o plano π.

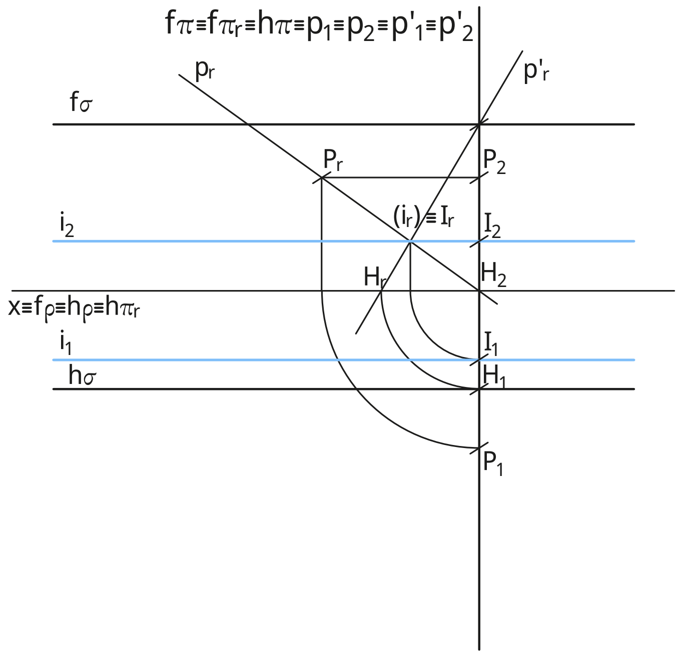


Neste caso, para economia de meios, optou-se por integrar o ponto **P** no plano de perfil. Rebatendo o mesmo, a determinação da reta **p** rebatida é imediata, uma vez que se trata de uma reta de perfil passante.

No caso da reta **p'**, esta será definida pelos seus traços, obtidos através da interseção dos traços dos planos π e σ.

Tendo a representação das retas **p** e **p'** rebatidas, é determinado o ponto de interseção – **I** – de ambas, também ele rebatido.

Efetuando o contra-rebatimento do plano, obtém-se um ponto da reta **i**, que está agora definida por um ponto e uma direção. Nota que a reta **i** é exatamente a mesma que resulta da resolução que recorre a um plano de topo. Assim, estão enunciadas duas formas distintas de determinar a mesma reta.



Resumindo

- Uma interseção entre um **plano passante** e um **plano de rampa** resulta sempre numa **reta fronto-horizontal**.

Para praticar

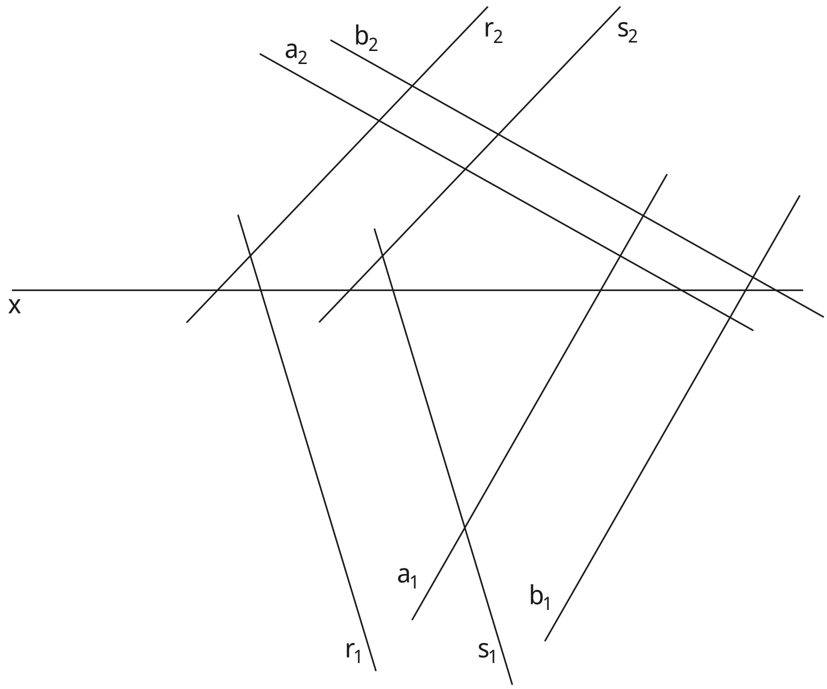
1. **Determina a reta i, de interseção entre um plano passante, definido pelo eixo x e pelo ponto P (2; 4; 6) com o plano oblíquo, cujos traços são concorrentes num ponto com –4cm de abcissa, e formam ângulos de 40° (a.e.) e 35° (a.e.), respetivamente, o traço frontal e horizontal.**

2. Considera o plano passante γ definido pelo eixo **x** e pelo ponto P (1; 3; 6), e determina a sua reta i, de interseção com um plano de perfil, que contém o ponto A (–1; 2; 4). De que reta se trata?

Interseção entre planos não definidos pelos seus traços

Por último, o caso particular de interseção entre dois planos não definidos pelos seus traços.

Dados dois planos, um definido pelas retas **a** e **b**, e outro definido pelas retas **r** e **s**, pretende-se determinar a reta de interseção entre ambos, sem recorrer aos traços dos planos.



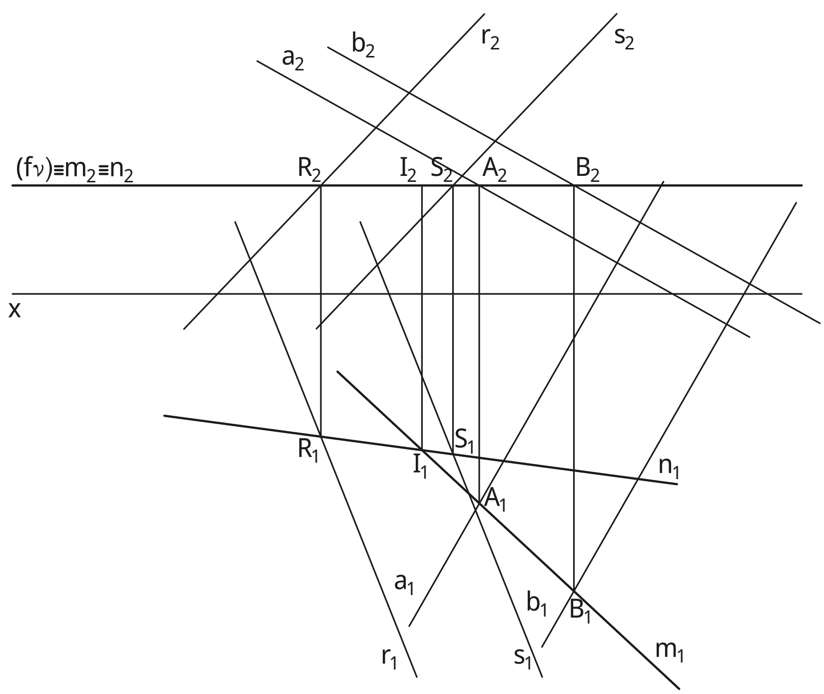
Para tal, é necessário recorrer a planos auxiliares, intersetando-os com as retas definidoras dos planos dados.

Inicialmente, recorre-se a um plano auxiliar, neste caso, horizontal – $\boldsymbol{\nu}$.

A interseção deste plano com o plano definido pelas retas **a** e **b** é dada pela interseção do plano horizontal $\boldsymbol{\nu}$ com cada uma das retas. Dessa forma, a reta de interseção fica definida por dois pontos.

Assim, são determinadas duas retas:

- reta **m**, de interseção do plano $\boldsymbol{\nu}$ com o plano definido pelas retas **a** e **b**;
- reta **n**, de interseção do plano $\boldsymbol{\nu}$ com o plano definido pelas retas **r** e **s**.



Sendo **ν** um plano projetante frontal, as projeções frontais das retas **m** e **n** estão sobre o traço do plano. Assim, são distinguidos os pontos de concorrência entre as:

- retas **m** e **n**;
- retas **a** e **b**;
- retas **r** e **s**;

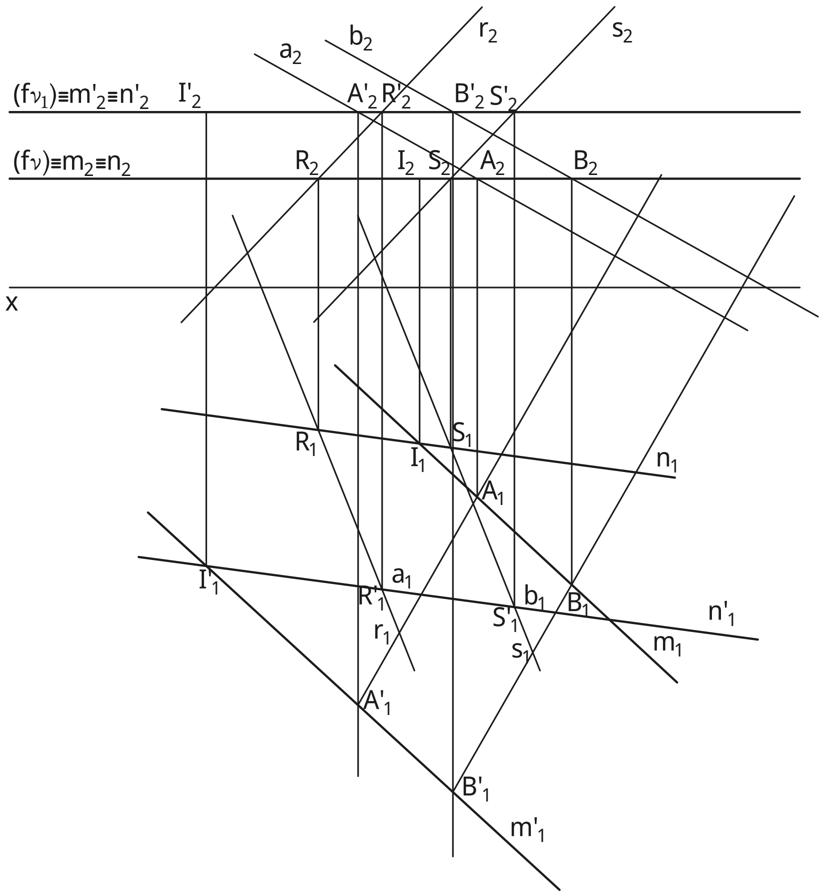
respetivamente.

Os pontos **A** e **B** definem a reta **m**, e os pontos **R** e **S** definem a reta **n**.

Assim, resultam duas retas, de interseção dos dois planos dados, definidos por duas retas cada, e o plano auxiliar, horizontal.

A interseção das retas **m** e **n** é um ponto da reta **i**, de interseção dos dois planos não definidos pelos seus traços.

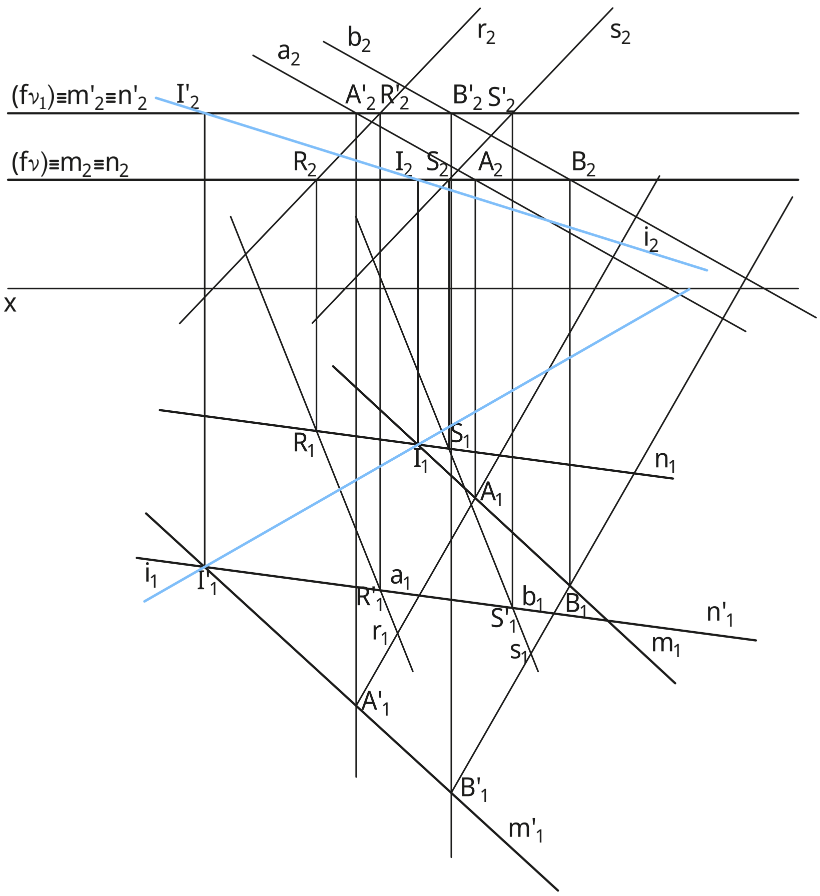
Não sendo possível determinar os traços da reta **i**, uma vez que os planos não estão definidos pelos seus traços, é necessário encontrar mais um ponto da reta **i**, recorrendo a um outro plano auxiliar.



Deste modo, o processo é repetido, com recurso a outro plano auxiliar, paralelo ao previamente utilizado, e é feita uma nova interseção entre este e cada um dos planos dados, definidos por duas retas cada.

Através da interseção das retas **m’** e **n’**, obtém-se o outro ponto da reta **i**, sendo possível representá-lo em dupla projeção ortogonal.

Esta está, agora, definida por dois pontos, podendo ser representada pelas suas projeções.



Como se pode verificar, a resolução deste tipo de casos envolve alguma complexidade de traçado. Como tal, é fortemente recomendado que os planos auxiliares sejam projetantes e paralelos entre si.

Resumindo

- Quando dois ou mais planos se intersetam entre si, denominam-se planos secantes.
- A reta de interseção entre dois planos é o lugar geométrico onde se situam dos os pontos comuns a ambos.
- Três planos intersetam-se quando possuem um lugar geométrico comum aos três. Essa interseção pode ser segundo uma reta (quando as retas de interseção entre cada um dos planos são coincidentes) ou um ponto (quando as retas de interseção entre cada um dos planos são concorrentes no mesmo ponto).

Para praticar

1. Determina as projeções de uma reta **i**, de interseção entre um plano passante γ, definido pelo eixo **x** e pelo ponto P (0; 1; 4), e um plano de rampa ρ, cujo traço frontal tem 3 cm de cota, e o traço horizontal, 5 cm de afastamento. De que reta se trata?

2. Considerando os planos γ e ρ do exercício anterior, determina a interseção dos mesmos com um plano de perfil π, de abcissa nula.

3. Determina a reta **i**, de interseção entre dois planos passantes. Do plano γ, sabe-se que contém o ponto **A** (3; 5). Do plano λ , sabe-se que contém o ponto B (4; 3).

4. Considerando os planos do exercício anterior, determina os traços de um plano de rampa ρ, que contenha o ponto **A**, e seja ortogonal a λ.

5. Considera dois planos oblíquos, não definidos pelos seus traços.
Sobre o plano α, sabe-se que está definido por duas retas paralelas, **r** e **s**. A reta **r** está definida pelos seus traços, sendo que: **F** (–3; 0; 2) e **H** (2; 5; 0) e a reta **s**, paralela a **r**, contém o ponto **P** (1; 2; 3). O plano θ está definido por duas retas **a** e **b**, paralelas entre si. A reta **a** contem o ponto **P** e o seu traço horizontal tem –2 cm de abcissa e 4 cm de afastamento. A reta **b**, paralela à reta **a**, contém o ponto **B** (5; 3; 3). Representa, pelas suas projeções, a reta **i**, de interseção dos planos, sem determinar os traços dos planos.

Geometria Descritiva 10.º ano

Criação Intelectual
Inês Cabral Campo

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
Shutterstock.com
© Stock.Adobe.com
Porto Editora
© Pedro Moita (p. 10)

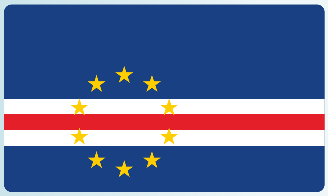
Edição
2025

Este manual segue
o programa experimental
da disciplina, publicado pelo
Ministério da Educação.

Cabo Verde

Brasão

Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!

Este livro foi aprovado pelo Ministério da Educação para utilização obrigatória nas escolas