

Matemática

10.º ano

10



Ministério
da Educação



Manual Digital na app
EV Smart Book e em
www.escolavirtual.cv



Explora o manual digital do teu livro

Exercícios Interativos

Para resolução com *feedback* imediato.



Vídeos e interatividades

Explicam a matéria de forma motivadora.



Jogos

Exploram os conceitos curriculares de forma lúdica.



Áudios

Dão vida aos textos e ajudam a reforçar as competências linguísticas.



QuizEV

Desafiam-te a mostrares o que sabes.
Podes, também, jogar com os teus amigos.



Matemática A

10.º ano



Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado
pela Universidade de Cabo Verde.

Explora o teu manual digital



<https://escolavirtual.cv>

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv



**Ministério
da Educação**

Podes também aceder ao teu livro
através da **app EV Smart Book**



Conhece o teu manual

Este manual ajuda-te neste percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em quatro domínios, de acordo com o plano curricular do ensino secundário: Álgebra (radicais e polinómios), Geometria analítica, Funções reais de variável real e Álgebra (estruturas algébricas). Cada domínio está dividido em temas.

Cada domínio é composto por:

Separador

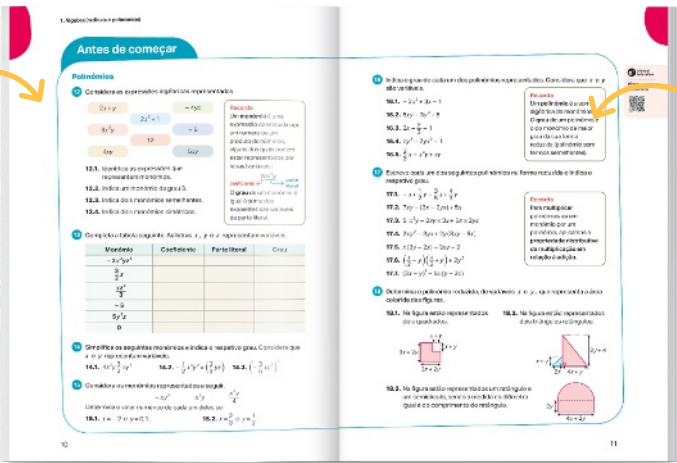


Domínio

Temas

Antes de começar

Antes de começar



Revisão de conceitos essenciais

Desenvolvimento dos conteúdos

Explicação dos conteúdos

Exercícios de aplicação

Imagens ilustrativas

Exemplos

No final de cada tema:

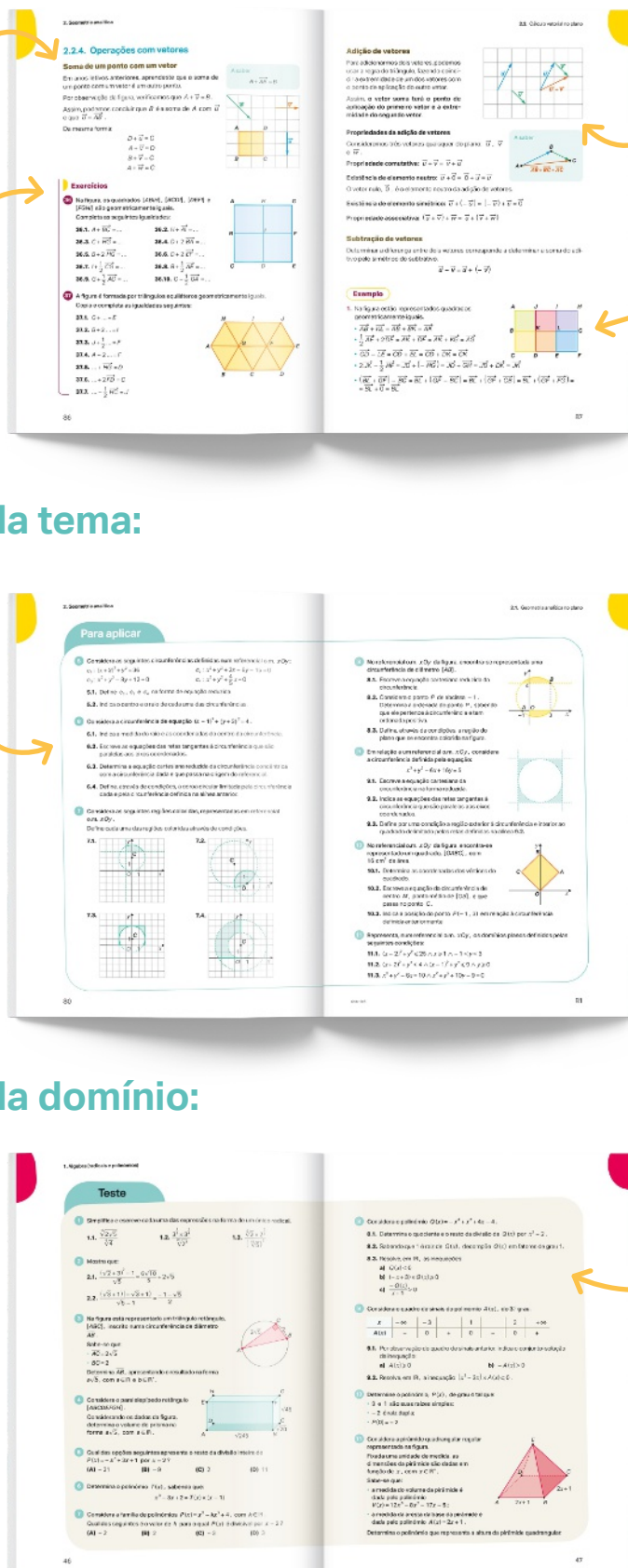
Para aplicar

Aplicação dos conteúdos aprendidos

No final de cada domínio:

Teste

Preparação para os momentos de avaliação



1

Domínio 1 | Álgebra (radicais e polinómios)

Antes de começar	8
1.1. Radicais e potências de expoente racional	12
1.1.1. Raiz de índice n de um número real	12
1.1.2. Operações com radicais	14
1.1.3. Racionalização de denominadores	19
1.1.4. Potências de expoente racional	21
Para aplicar	24
1.2. Polinómios	26
1.2.1. Operações com polinómios	26
1.2.2. Fatorização de polinómios	36
1.2.3. Resolução de inequações de grau superior a 1	40
Para aplicar	43
Teste	46

2

Domínio 2 | Geometria analítica

Antes de começar	50
2.1. Geometria analítica no plano	56
2.1.1. Referencial cartesiano, $\mathbb{R}^2$	56
2.1.2. Distância entre dois pontos no plano	60
2.1.3. Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta	61
2.1.4. Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta	64
2.1.5. Retas paralelas aos eixos coordenados	65
2.1.6. Semiplanos	67
2.1.7. Circunferência e círculo	71
Para aplicar	78
2.2. Cálculo vetorial no plano	82
2.2.1. Vetor no plano	82
2.2.2. Norma de um vetor	83
2.2.3. Produto de um escalar por um vetor	84
2.2.4. Operações com vetores	86
2.2.5. Coordenadas de um vetor	89
2.2.6. Vetor como diferença de dois pontos	90
2.2.7. Coordenadas da soma e da diferença de vetores	91
2.2.8. Vetores colineares	92
2.2.9. Vetor diretor de uma reta e seu declive	94
2.2.10. Equação reduzida da reta	95
2.2.11. Posição relativa de retas no plano	97
2.2.12. Equação vetorial da reta	99
2.2.13. Equações paramétricas da reta	101
Para aplicar	104
2.3. Geometria analítica no espaço	108
2.3.1. Referenciais no espaço	108
2.3.2. Planos paralelos aos planos coordenados	110
2.3.3. Retas paralelas aos eixos coordenados	113
2.3.4. Distância entre dois pontos no espaço	117
2.3.5. Equação do plano mediador de um segmento de reta	119
2.3.6. Equação cartesiana reduzida da superfície esférica	120
2.3.7. Inequação cartesiana reduzida da esfera	122
Para aplicar	124

2.4. Cálculo vetorial no espaço	128
2.4.1. Generalização dos conceitos abordados no plano	128
2.4.2. Equação vetorial da reta no espaço	131
Para aplicar	135
Teste	138

3

Domínio 3 | Funções reais de variável real

Antes de começar	142
3.1. Generalidades acerca de funções	146
3.1.1. Produto cartesiano de dois conjuntos	146
3.1.2. Gráfico de uma função	147
3.1.3. Restrição de uma função e imagem de um conjunto por uma função	148
3.1.4. Funções injetivas	149
3.1.5. Funções sobrejetivas	150
3.1.6. Funções bijetivas	151
3.1.7. Composição de funções	154
3.1.8. Função inversa de uma função bijetiva	156
Para aplicar	158
3.2. Generalidades acerca de funções reais de variável real	160
3.2.1. Conceito de função real de variável real	160
3.2.2. Paridade de uma função	161
3.2.3. Transformações geométricas de gráficos de funções	162
Para aplicar	171
3.3. Monotonia, extremos e concavidade	172
3.3.1. Sinal e zeros de uma função	172
3.3.2. Monotonia de uma função	174
3.3.3. Extremos de uma função	176
3.3.4. Sentido das concavidades do gráfico de uma função	179
Para aplicar	180
3.4. Estudo elementar das funções quadráticas, funções definidas por ramos e funções modulares	182
3.4.1. Funções quadráticas	182
3.4.2. Funções definidas por ramos	196
3.4.3. Funções modulares	198
Para aplicar	205
Teste	208

4

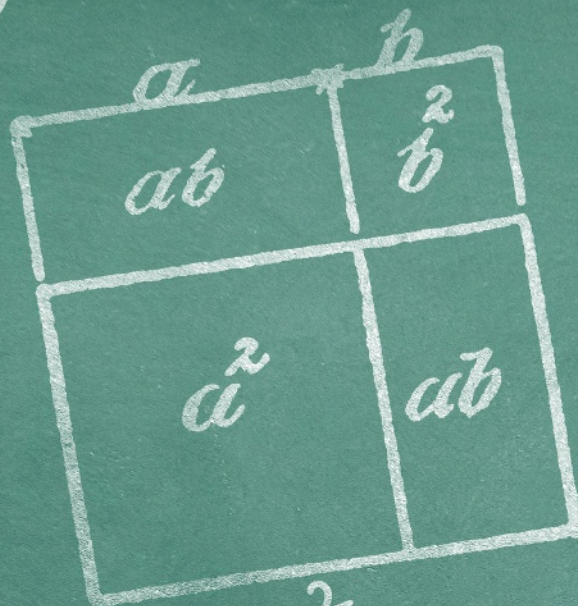
Domínio 4 | Álgebra (estruturas algébricas)

Antes de começar	212
4.1. Introdução à Teoria de Grupos. Isomorfismo de grupos	214
4.1.1. Introdução à Teoria de Grupos	214
4.1.2. Isomorfismo de grupos	217
Para aplicar	222
Teste	224

Soluções	226
-----------------	-----

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

1



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$$

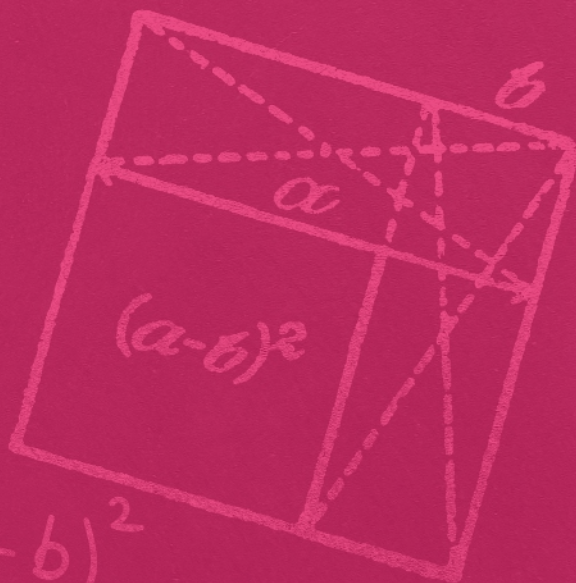


Álgebra (radicais e polinómios)



1.1. Radicais e potências de expoente racional

1.2. Polinómios



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Antes de começar



Vídeos

Propriedades das operações com raízes quadradas



Propriedades das operações com raízes quadradas: multiplicação



Propriedades das operações com raízes quadradas: divisão



Exercício

Aplicar propriedades das operações com raízes quadradas

Radicais e potências

- 1 Calcula o valor numérico de cada uma das seguintes expressões, apresentando o resultado na forma de potência.

1.1. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \times 3^{-7}$

1.2. $0,2^6 : (10^2)^{-3}$

1.3. $\left(-\frac{5}{3}\right)^4 \times 0,6^{-2}$

1.4. $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : 0,4^{-5} \times 5^3$

1.5. $[(-7)^3]^2 : \left(\frac{1}{7}\right)^5 \times 7^4$

- 2 Determina a medida do lado de um quadrado com 49 cm^2 de área.

- 3 Considera o quadrado [LUAR] com 121 cm^2 de área.

Qual é a área de um novo quadrado cuja medida do lado é igual a metade da medida do lado do quadrado [LUAR]?

- 4 Simplifica:

4.1. $\sqrt{4} \times \sqrt{25}$

4.2. $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{1}{5}}$

4.3. $\sqrt{\frac{1}{10}} \times \sqrt{0,1}$

4.4. $\sqrt{12} \times \sqrt{12}$

4.5. $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{27}}{\sqrt{6}}$

4.6. $\frac{\sqrt{40} \times \sqrt{8}}{\sqrt{5}}$

- 5 Escreve na forma $\sqrt{b}$, com $b \in \mathbb{R}_0^+$:

5.1. $5\sqrt{2}$

5.2. $3\sqrt{5}$

5.3. $2\sqrt{10}$

5.4. $3\sqrt{7}$

5.5. $5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$

5.6. $\frac{1}{2}\sqrt{3} \times 3\sqrt{5}$

Recorda

Potências de expoente inteiro

Sejam $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m, p \in \mathbb{Z}$.

- $a^m \times a^p = a^{m+p}$
- $a^m : a^p = a^{m-p}$
- $a^m \times b^m = (a \times b)^m$
- $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- $(a^m)^p = a^{m \times p}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
- $a^0 = 1$

Recorda

Um número é um **quadrado perfeito** se e só se é o quadrado de um número inteiro não negativo.

Por exemplo:

$\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$.

Recorda

Operar com raízes quadradas

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, com $b \neq 0$

- 6 Simplifica cada uma das seguintes expressões, escrevendo-as na forma $a\sqrt{b}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_0^+$.

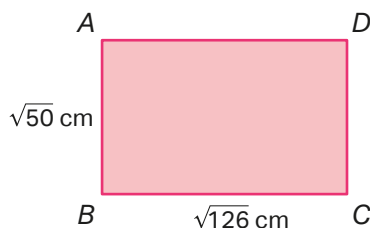
6.1. $\sqrt{120}$

6.2. $3\sqrt{150}$

6.3. $\sqrt{0,12}$

6.4. $\sqrt{\frac{45}{75}}$

- 7 Considera o retângulo $[ABCD]$.
Sabe-se que $\overline{BC} = \sqrt{126}$ cm e $\overline{AB} = \sqrt{50}$ cm.
Mostra que a área de $[ABCD]$ é $30\sqrt{7}$ cm².



Recorda

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2} = \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

- 8 Qual é a medida da aresta de um cubo com 125 cm³ de volume?

- 9 Considera um cubo com 1080 cm³ de volume.

Determina a medida da aresta de um novo cubo, sabendo que é igual a metade da medida da aresta do cubo inicial.

Apresenta a resposta na forma $a\sqrt[3]{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Recorda

Um número é um **cubo perfeito** se é o cubo de um número inteiro.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-27} &= -3, \text{ pois} \\ (-3)^3 &= -27.\end{aligned}$$

- 10 Simplifica:

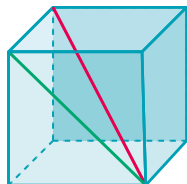
10.1. $\sqrt[3]{135}$

10.2. $\sqrt[3]{200}$

10.3. $\sqrt[3]{-54}$

10.4. $\sqrt[3]{-750}$

- 11 Considera um cubo, como o representado na figura.



- 11.1. Se a medida da aresta do cubo for $2\sqrt{3}$ cm, determina a medida da diagonal espacial do cubo.

- 11.2. Se a medida da diagonal de uma das faces do cubo for $3\sqrt{10}$ cm, determina o valor exato, em centímetros, da medida da aresta do cubo na forma $a\sqrt{b}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_0^+$.

Recorda

Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa (h) é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos (c_1 e c_2).

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Antes de começar

Polinómios

- 12** Considera as expressões algébricas representadas.

$2x + y$

$-4yx$

$2x^3 + 1$

$3x^2y$

-5

12

$4xy$

$5xy$

- 12.1.** Identifica as expressões que representam monómios.
- 12.2.** Indica um monómio de grau 3.
- 12.3.** Indica dois monómios semelhantes.
- 12.4.** Indica dois monómios simétricos.

Recorda

Um **monómio** é uma expressão constituída por um número ou um produto de números, alguns dos quais podem estar representados por letras (variáveis).

$2ax^2y$
 coeficiente ← parte literal

O **grau** de um monómio é igual à soma dos expoentes das variáveis da parte literal.

- 13** Completa a tabela seguinte. As letras x , y e z representam variáveis.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$-3x^2yz^3$			
$\frac{3}{2}x$			
$\frac{xz^3}{3}$			
-5			
$5y^2z$			
0			

- 14** Simplifica os seguintes monómios e indica o respetivo grau. Considera que x e y representam variáveis.

14.1. $4x^2y \frac{3}{2}xy^3$

14.2. $-\frac{1}{2}x^3y^2 \times \left(\frac{2}{3}yx\right)$

14.3. $\left(-\frac{3}{5}xy^3\right)^2$

- 15** Considera os monómios representados a seguir.

$-xy^2$

x^3y

$\frac{x^2y}{4}$

Determina o valor numérico de cada um deles se:

15.1. $x = -2$ e $y = 0,1$;

15.2. $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{1}{2}$.



- 16** Indica o grau de cada um dos polinômios representados. Considera que x e y são variáveis.

16.1. $-2x^3 + 3x - 1$

16.2. $5xy - 3y^4 + 5$

16.3. $2x - \frac{y}{3} - 1$

16.4. $xy^2 - 2yx^2 - 1$

16.5. $\frac{2}{3}x - x^3y + xy$

Recorda

Um **polinômio** é a soma algébrica de monômios. O **grau** de um polinômio é o do monômio de maior grau da sua forma reduzida (polinômio sem termos semelhantes).

- 17** Escreve cada um dos seguintes polinômios na forma reduzida e indica o respetivo grau.

17.1. $-x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y$

17.2. $7xy - (3x - 2yx) + 5x$

17.3. $5x^2y - 2xy \times 3x + 5x \times 2yx$

17.4. $2xy^2 - 3yx + 2y(3xy - 5x)$

17.5. $x(3y - 2x) - 3xy - 2$

17.6. $\left(\frac{x}{2} - y\right)\left(\frac{x}{2} + y\right) + 2y^2$

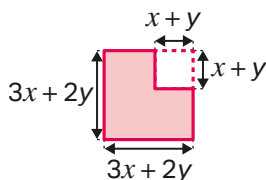
17.7. $(3x - y)^2 - 5x(y - 2x)$

Recorda

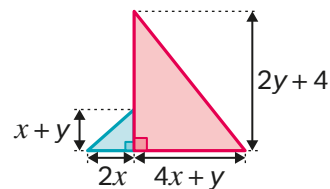
Para **multiplicar** polinômios ou um monômio por um polinômio, aplicamos a **propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição**.

- 18** Determina o polinômio reduzido, de variáveis x e y , que representa a área colorida das figuras.

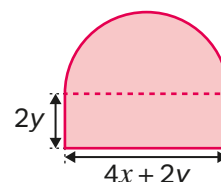
- 18.1.** Na figura estão representados dois quadrados.



- 18.2.** Na figura estão representados dois triângulos retângulos.



- 18.3.** Na figura estão representados um retângulo e um semicírculo, sendo a medida do diâmetro igual à do comprimento do retângulo.



1 Álgebra (radicais e polinómios)



Atividade
Raízes de índice
ímpar

1.1. Radicais e potências de expoente racional

Neste tema, os conhecimentos relativos ao cálculo com raiz quadrada e raiz cúbica serão estendidos a qualquer radical.

Desta forma, os conceitos sobre potências já adquiridos serão generalizados a potências com expoente racional.

Sabias que...

Acredita-se que o símbolo $\sqrt{\quad}$ seja inspirado na letra "r", que representava a raiz quadrada antes de o ícone atualmente aceite ser criado. A escolha dessa letra terá tido origem no latim, *radix*, que significa raiz.

1.1.1. Raiz de índice n de um número real

No ano letivo anterior, estudaste algumas propriedades relativas aos números reais.

- Dados os números reais a e b e um número real **positivo** c :
se $a < b$, então $ac < bc$.
- Dados os números reais a e b e um número real **negativo** c :
se $a < b$, então $ac > bc$.
- Dados os números reais **positivos** a e b :
se $a < b$, então $a^2 < b^2$ e $a^3 < b^3$.
- Dados os números reais **negativos** a e b :
se $a < b$ e n par, então $a^n > b^n$;
se $a < b$ e n ímpar, então $a^n < b^n$.

Exemplos

1. $\frac{4}{3} > \frac{1}{3}$, logo $2 \times \frac{4}{3} > 2 \times \frac{1}{3}$.
2. $\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$, logo $(-3) \times \frac{1}{4} > (-3) \times \frac{2}{3}$.
3. $-\frac{1}{4} > -\frac{2}{3}$, logo $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 < \left(-\frac{2}{3}\right)^2$.
4. $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{3}$, logo $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 < \left(-\frac{1}{3}\right)^5$.

Raiz de índice n de um número

Dado um número real a e um número natural n **ímpar**, existe um único número real b tal que $b^n = a$.

A b dá-se o nome de **raiz de índice n de a** e representa-se por $\sqrt[n]{a}$.

Vamos demonstrar que b é único.

Para tal, começamos por considerar a implicação: $b_0^n = b_1^n \Rightarrow b_0 = b_1$

Desta forma, basta mostrar que $b_0 \neq b_1 \Rightarrow b_0^n \neq b_1^n$.

Assim, como hipótese, sabemos que $b_0 \neq b_1$ e que n é um número natural ímpar.

Como $b_0 \neq b_1$, então $b_0 > b_1$ ou $b_0 < b_1$.

Sendo n um número natural ímpar, sabemos que, se $b_0 > b_1$, então $b_0^n > b_1^n$, ou seja, $b_0^n \neq b_1^n$.

Sendo n um número natural ímpar, sabemos que, se $b_0 < b_1$, então $b_0^n < b_1^n$, ou seja, $b_0^n \neq b_1^n$.

Desta forma, $b_0 \neq b_1 \Rightarrow b_0^n \neq b_1^n$, sendo n um número natural ímpar, como queríamos demonstrar.

Dado um número real não negativo a e um número natural n **par**, existe um único número real não negativo b tal que $b^n = a$.

A b dá-se o nome de **raiz de índice n de a** e representa-se por $\sqrt[n]{a}$.

Vamos demonstrar que, para além de b e $-b$, não existe qualquer outra solução da equação $x^n = a$, com n par e a um número real positivo.

Nota

$$0^n = \underbrace{0 \times 0 \times \dots \times 0}_{n \text{ vezes}} = 0$$

Assim, $\sqrt[n]{0} = 0$

Seja b uma solução de $x^n = a$. Assim, $b^n = a$.

- 0 não é solução da equação, pois $0^n = \underbrace{0 \times 0 \times 0 \times \dots \times 0}_{n \text{ vezes}} = 0$ e 0 não é um número real positivo.
- Seja c um número real positivo diferente de b . Assim, $c < b$ ou $c > b$.
Como n é par, $c^n < b^n$ ou $c^n > b^n$. Ou seja, $c^n \neq b^n$, isto é, $c^n \neq a$.
Desta forma, c não poderá ser solução de $x^n = a$.
- Considerando o simétrico de c , $-c$, temos $(-c)^n = (-1)^n \times c^n = c^n$, pois n é par. Da mesma forma, $(-c)^n \neq a$.
Logo, $-c$ também não é solução de $x^n = a$.

Assim, os dois únicos números reais que são solução de $x^n = a$ são b e $-b$.

Note-se que $(-b)^n = (-1)^n \times b^n = b^n = a$.

Designamos $\sqrt[n]{a}$ por **radical**, sendo n o **índice** do radical e a o **radicando**.

Se n é ímpar, $\sqrt[n]{a}$ existe sempre, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Se n é par, $\sqrt[n]{a}$ só está definido para todo $a \in \mathbb{R}_0^+$.

1.1.2. Operações com radicais

Multiplicação de radicais

Consideremos $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$, com $n \in \mathbb{N}$ (se n for par, então $a \geq 0$ e $b \geq 0$; se n for ímpar, então a e b tomam qualquer valor real).

$$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n = a \times b$$

No caso de n ser um número natural par, $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \geq 0$.

Pela definição de raiz de índice n , concluímos que:

O **produto de radicais com o mesmo índice** é igual a um radical com o mesmo índice e cujo radicando é igual ao produto dos radicandos:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Com $a, b \in \mathbb{R}$, no caso de n ser ímpar, e $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, no caso de n ser par.

Exemplos

1. $(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$

Logo, $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$.

2. $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{12}$

3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. $\sqrt[3]{xy} \times \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^2y}$

A saber

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}, \text{ com } n > 1$$

Se n é par, $a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

Propriedade:

Se multiplicarmos ou dividirmos o índice do radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural, obtemos um radical equivalente.

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \times r]{a^{p \times r}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n:r]{a^{p:r}}, \quad n, p, r \in \mathbb{N}, n > 1 \text{ e } a \geq 0$$

Exemplos

1. Vamos representar o radical $\sqrt[3]{5^2}$ por um radical equivalente de índice 9.

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3 \times 3]{5^{2 \times 3}} = \sqrt[9]{5^6}$$

2. Vamos representar o radical $\sqrt[8]{3^4}$ por um radical equivalente de índice 2.

$$\sqrt[8]{3^4} = \sqrt[8:4]{3^{4:4}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}$$



Vídeo
Propriedades algébricas dos radicais: produto de raízes com o mesmo índice



Exercícios

1 Escreve na forma de um único radical:

1.1. $\sqrt[5]{7} \times \sqrt[5]{3}$

1.2. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$

1.3. $\sqrt[3]{-5} \times \sqrt[3]{0,2}$

1.4. $\sqrt[5]{-\frac{3}{2}} \times \sqrt[5]{\frac{2}{5}}$

2 Representa cada um dos radicais seguintes por um radical equivalente de índice 8.

2.1. $\sqrt[4]{3^2}$

2.2. $\sqrt[16]{3^6}$

2.3. $\sqrt{5^4}$

3 Escreve na forma de um único radical:

3.1. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{2}$

3.2. $\sqrt[5]{2} \times \sqrt[3]{3}$

3.3. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{ab}$, com $a, b \in \mathbb{R}$

4 Na figura está representado o retângulo [GATO], tal que, para uma certa unidade, $\overline{GO} = \sqrt[3]{2}$ e $\overline{GA} = \sqrt{5}$.

Determina a medida da área do retângulo na forma $\sqrt[n]{a}$.



Potência de um radical

Considera $(\sqrt[n]{a})^p$, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, sendo $a \geq 0$ se n for um número par.

$$(\sqrt[n]{a})^p = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{p \text{ vezes}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{p \text{ vezes}}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Assim:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R} \text{ se } n \text{ for ímpar e } a \in \mathbb{R}_0^+ \text{ se } n \text{ for par.}$$

Considerando $n = p$:

$$(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{n \text{ vezes}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

No caso de o índice ser igual ao expoente, obtemos o radicando.

Assim:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R}, \text{ desde que } \sqrt[n]{a} \text{ esteja definida.}$$

Exemplos

$$1. (\sqrt[5]{2})^{12} = \sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^5 \times 2^5 \times 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{2^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[5]{4} = 4\sqrt[5]{4}$$

$$2. (\sqrt[3]{4} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt[3]{4})^2 + 2 \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \sqrt[3]{16} + 2\sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{4^2} + 3 = \sqrt[3]{16} + 2\sqrt[6]{432} + 3$$

$$3. (2 - \sqrt[3]{5})(2 + \sqrt[3]{5}) = 2^2 - (\sqrt[3]{5})^2 = 4 - \sqrt[3]{5^2} = 4 - \sqrt[3]{25}$$

Recorda**Casos notáveis da multiplicação de binómios**

- Quadrado de um binómio:
 $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
- Diferença de quadrados:
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Vídeo
 Propriedades algébricas dos radicais: quociente de raízes com o mesmo índice

**A saber**

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Se n é par, $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Se n é ímpar, $a \in \mathbb{R}$.

Exercícios

- 5** Representa as seguintes expressões na forma de um único radical.

5.1. $(\sqrt[3]{5})^2 - 3\sqrt[3]{25}$

5.2. $(3\sqrt[5]{7})^2 + 2\sqrt[5]{49}$

5.3. $(\sqrt[6]{7^3 \times 3^5})^2$

- 6** Em cada um dos casos seguintes, determina o valor solicitado, apresentando o resultado na forma $a\sqrt[n]{b}$.

6.1. A área de um quadrado cuja medida do lado é $5\sqrt[3]{2}$ cm.

6.2. O volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é $3\sqrt[5]{2}$ cm.

6.3. O perímetro de um triângulo cujos lados medem $\sqrt[3]{3000}$ cm, $\sqrt[3]{81}$ cm e $4\sqrt[3]{24}$ cm.

- 7** Mostra que $(5\sqrt[3]{16} - 3)(2\sqrt[3]{2})^2 = 80 - 12\sqrt[3]{4}$.

Divisão de radicais

Consideremos $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ se n for ímpar e $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$ se n for par. Como $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$, então, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

O **quociente de dois radicais com o mesmo índice** é um radical com o mesmo índice e com radicando igual ao quociente dos radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Se n é ímpar, $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Se n é par, $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$.

Exemplos

$$1. \sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{0,1} = \sqrt[5]{2 : \frac{1}{10}} = \sqrt[5]{2 \times 10} = \sqrt[5]{20}$$

$$2. \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{-3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{1000} : (-3)} = \sqrt[3]{\frac{81}{1000} \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \\ = \sqrt[3]{-\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{-27} : \sqrt[3]{1000} = -\frac{3}{10}$$

$$\text{Repara que } (\sqrt[n]{a})^{-p} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^p} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^p}} = \sqrt[n]{a^{-p}}.$$

A saber

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Se n for par, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+$.

Propriedade:

A **potência de um radical com expoente negativo** é igual a um radical com o mesmo índice cujo radicando está elevado a esse expoente.

$$(\sqrt[n]{a})^{-p} = \sqrt[n]{a^{-p}}, \quad n, p \in \mathbb{N}$$

Se n é ímpar, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se n é par, $a \in \mathbb{R}^+$.

Exercícios

8 Escreve na forma de um único radical:

$$8.1. \sqrt[5]{6} : \sqrt[5]{2}$$

$$8.2. \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{0,5}$$

$$8.3. \frac{\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{0,2})^{-1}}$$

$$8.4. \frac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{0,2}}$$

9 Calcula e simplifica:

$$9.1. (\sqrt[3]{5})^{-1}$$

$$9.2. (\sqrt[4]{3})^{-2}$$

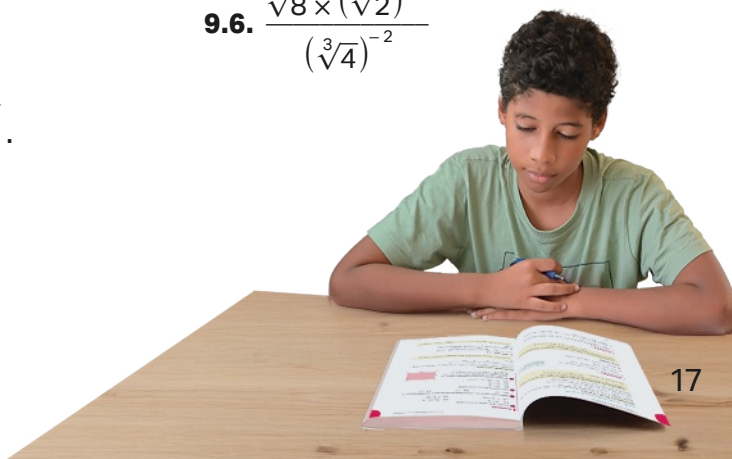
$$9.3. \left(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$$

$$9.4. (\sqrt[3]{2})^{-1} : (\sqrt[3]{7})^{-2}$$

$$9.5. (\sqrt[3]{2})^{-2} : \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^{-2}$$

$$9.6. \frac{\sqrt[3]{8} \times (\sqrt[3]{2})^{-2}}{(\sqrt[3]{4})^{-2}}$$

10 Mostra que $\frac{(\sqrt[3]{8})^{-1}}{(2\sqrt[3]{2})^{-2}} = 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.



Radical de radical

Consideremos $\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{n \times p}$, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ se n e p são ambos ímpares e $a \in \mathbb{R}_0^+$ se n ou p são pares.

Como $\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{n \times p} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n\right]^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a$, podemos concluir que $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \times p]{a}$.

O **radical de radical** de um número é um radical cujo índice é o produto dos índices e o radicando é o referido número.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \times p]{a}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N}$$

Se n e p são ambos ímpares, $a \in \mathbb{R}$. Se n ou p são pares, então $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Exemplos

1. $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$
2. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-7}} = \sqrt[15]{-7}$
3. $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3 \times 5}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{40}} = \sqrt[15]{40}$

A saber

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \times p]{a}$$

Se n e p são ambos ímpares, $a \in \mathbb{R}$.

Se n ou p são pares, $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Exercícios

- 11 Transforma num radical do tipo $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$:

11.1. $5\sqrt[3]{5}$

11.2. $2\sqrt[3]{5}$

11.3. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

- 12 Escreve na forma de um único radical:

12.1. $\sqrt[4]{\sqrt{7}}$

12.2. $\sqrt[5]{\sqrt{9}}$

12.3. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-2}}$

12.4. $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$

12.5. $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}$

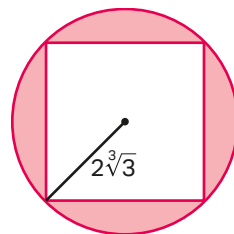
12.6. $\sqrt[3]{2^2\sqrt[4]{7}}$

- 13 Determina a medida do lado de um quadrado, sabendo que a sua área é $2\sqrt[4]{5} \text{ cm}^2$.

- 14 O quadrado da figura está inscrito numa circunferência de raio $2\sqrt[3]{3}$.

14.1. Determina a medida do lado do quadrado, apresentando o resultado na forma $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.

14.2. Determina o valor exato da medida da área da zona colorida da figura.



- 15 Determina a medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[3]{5}$. Apresenta o resultado na forma $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.

1.1.3. Racionalização de denominadores

Na resolução de diversos problemas, é comum surgirem frações em que o denominador contém um radical. Nesses casos, devemos transformar estas frações em frações equivalentes em que os denominadores não tenham radicais, isto é, devemos **racionalizar os denominadores**.

 Manual Interativo

Atividade
Racionalização de denominadores

Exemplos

Vamos racionalizar os denominadores de algumas frações.

1. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ pois } \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5.$$

2. $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5 \times 2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{10}}{6}, \text{ pois } \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2^2} = 2.$$

3. $\frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{(3 + \sqrt{7}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2} + \sqrt{7} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$$

4. $\frac{2}{\sqrt[5]{4^3}}$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{2 \times \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^3} \times \sqrt[5]{4^2}} = \frac{2\sqrt[5]{16}}{4} = \frac{\sqrt[5]{16}}{2}, \text{ pois } \sqrt[5]{4^3} \times \sqrt[5]{4^2} = \sqrt[5]{4^3 \times 4^2} = \sqrt[5]{4^5} = 4.$$

Exercícios

- 16 Racionaliza os denominadores de cada uma das seguintes frações, simplificando o resultado.

16.1. $\frac{3}{\sqrt{9}}$

16.2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

16.3. $\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

16.4. $\frac{8}{3\sqrt{4}}$

16.5. $\frac{7}{\sqrt[3]{5}}$

16.6. $\frac{2}{3\sqrt[5]{4^2}}$

16.7. $\frac{-3}{5\sqrt[7]{3^4}}$

16.8. $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{5^2}}$

16.9. $\frac{\sqrt[5]{3}}{3\sqrt[5]{3^2}}$

Exemplos

Vamos racionalizar os denominadores de algumas frações em que o denominador é uma soma ou uma diferença envolvendo pelo menos uma raiz quadrada.

Nestes casos, para racionalizar o denominador, utilizaremos o caso notável da multiplicação "diferença de quadrados".

1. $\frac{3}{2 - \sqrt{5}}$

$$\frac{3}{2 - \sqrt{5}} = \frac{3 \times (2 + \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5}) \times (2 + \sqrt{5})} = \frac{6 + 3\sqrt{5}}{2^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{6 + 3\sqrt{5}}{4 - 5} = -6 - 3\sqrt{5}$$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{1} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

3. $\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{3 \times (\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{-3} = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

Exercícios

- 17 Racionaliza os denominadores de cada uma das seguintes frações, simplificando o resultado.

17.1. $\frac{1}{\sqrt{3} - 5}$

17.2. $\frac{-5}{2 + \sqrt{3}}$

17.3. $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

17.4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 1}$

17.5. $\frac{3}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$

17.6. $\frac{\sqrt{2} - 1}{-3 - \sqrt{3}}$

17.7. $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{-\sqrt{3} + 1}$

17.8. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

- 18 Considera um retângulo cuja medida de área é $\sqrt{20} \text{ cm}^2$. Se a medida do seu comprimento é $(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$, qual é a medida da sua largura?

Apresenta o resultado na forma de fração com denominador racional.

1.1.4. Potências de expoente racional

Nos anos anteriores, foram estudadas potências de expoente inteiro.

Vamos, agora, desenvolver o estudo de potências cujo expoente é um número racional.

Potências de expoente $\frac{1}{n}$

Define-se a **potência de base a e expoente $\frac{1}{n}$** como sendo a raiz de índice n de a .

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, se n ímpar, e $a \in \mathbb{R}_0^+$, se n par.

Exemplos

1. $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

2. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

3. $0,25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10}$

4. $2^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{2}$

5. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$

6. $0,3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

A saber

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
com $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $n \geq 2$

Exercícios

19 Escreve na forma de radical:

19.1. $7^{\frac{1}{5}}$

19.2. $0,1^{\frac{1}{3}}$

19.3. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

20 Calcula:

20.1. $9^{\frac{1}{2}}$

20.2. $125^{\frac{1}{3}}$

20.3. $0,36^{\frac{1}{2}}$

20.4. $0,008^{\frac{1}{3}}$

Potências de expoente fracionário

Vamos considerar uma potência de base $a \neq 0$ e expoente fracionário $m = \frac{n}{p}$, com $n, p \in \mathbb{Z}$ e $p \geq 2$:

$$a^{\frac{n}{p}} = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^n = \left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \sqrt[p]{a^n}$$

Seja a um número real não negativo e $\frac{n}{p}$ um número racional não negativo ($n, p \in \mathbb{N}$).

Definimos a **potência de base a e expoente $\frac{n}{p}$** como sendo a raiz de índice p de a^n .

$$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$$

Exemplos

1. Representar na forma de potência de expoente racional:

$$\bullet \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$\bullet \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{10}}$$

2. Representar na forma de radical:

$$\bullet \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{16}{9}}$$

Potências de expoente racional negativo

Seja a um número real positivo e $m = \frac{n}{p}$ um número racional não negativo ($n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$). Sabemos que $a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$.

Tal só poderá ocorrer se $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Seja a um número real positivo e m um número racional não negativo.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \text{ ou seja, } a^{-\frac{n}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{p}}}$$

Exercícios

21 Representa na forma de potência de expoente racional:

21.1. $\sqrt[3]{2^5}$

21.2. $\sqrt[12]{5^3}$

21.3. $\sqrt[4]{5^{-2}}$

21.4. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$

21.5. $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}$

21.6. $\left(\sqrt[5]{3\sqrt{7}}\right)^3$

- 22** Representa cada uma das seguintes potências na forma de radical do tipo $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.

22.1. $5^{\frac{2}{3}}$

22.2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

22.3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{4}}$

22.4. $(0,3)^{\frac{2}{5}}$

22.5. $\left(\frac{15}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

22.6. $\sqrt[3]{2\sqrt{5^2}}$

Manual Interativo

Atividades
Propriedades das potências

Simplificação de expressões envolvendo radicais e potências

Propriedades das potências de expoente racional

No ano anterior, foi visto que as propriedades das operações com potências de expoente inteiro são também válidas nas operações com potências de expoente racional.

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$a^n : a^p = a^{n-p}, \text{ com } a > 0 \text{ e } n, p \in \mathbb{Q}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \text{ com } a, b > 0 \text{ e } n \in \mathbb{Q}$$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}, \text{ com } a > 0 \text{ e } n, p \in \mathbb{Q}^+$$

Exemplos

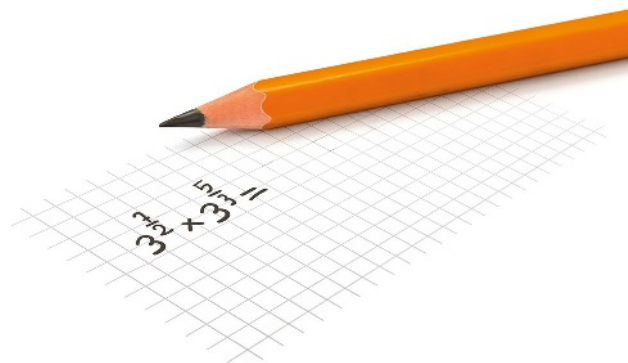
1. $3^{\frac{7}{2}} \times 3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{7}{2} + \frac{5}{3}} = 3^{\frac{21}{6} + \frac{10}{6}} = 3^{\frac{31}{6}}$

2. $10^{\frac{3}{2}} : 10^{\frac{2}{5}} = 10^{\frac{3}{2} - \frac{2}{5}} = 10^{\frac{15}{10} - \frac{4}{10}} = 10^{\frac{11}{10}}$

3. $2^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} = (2 \times 5)^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{3}{4}}$

4. $6^{\frac{3}{2}} : 2^{\frac{3}{2}} = (6 : 2)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

5. $\left(7^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}} = 7^{\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}} = 7^{\frac{15}{24}}$



Exercícios

- 23** Transforma numa potência de expoente racional positivo:

23.1. $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} : \left(5^{\frac{1}{9}}\right)^3$

23.2. $\sqrt[5]{2^3} : 2^{-\frac{2}{3}}$

23.3. $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{5}$

23.4. $7^{\frac{2}{5}} : \sqrt[5]{14^2}$

- 24** Simplifica as expressões seguintes:

24.1. $\frac{3^{\frac{1}{4}} \times 3^{-2}}{(3^{-3})^2}$

24.2. $\frac{\sqrt[5]{3^2} \times 2^{\frac{2}{5}}}{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{5}}}$

Para aplicar

- 1 Representa na forma $b\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

1.1. $\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{245}$

1.2. $2\sqrt{50} + \frac{1}{4}\sqrt{18} - 5\sqrt{98}$

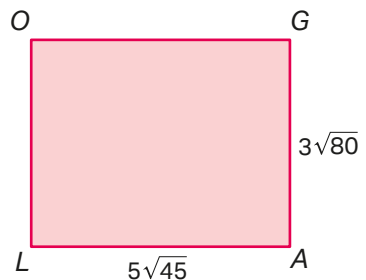
1.3. $\frac{\sqrt{300}}{5} + 3\sqrt{147} - \sqrt{12}$

1.4. $\sqrt[3]{40} - 5\sqrt[3]{135}$

- 2 Considera o retângulo [LAGO] cujas medidas dos lados, numa dada unidade, estão indicadas na figura.

Determina o perímetro do retângulo.

Apresenta o resultado na forma $b\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$.



- 3 Representa na forma de um único radical:

3.1. $\sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[3]{2}$

3.2. $\sqrt[3]{3\sqrt{2}} \times \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.3. $\sqrt{5\sqrt{2}} : 8^{\frac{1}{4}}$

3.4. $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-1} \times \left(15^{\frac{1}{3}}\right)^2$

3.5. $\frac{\left(\sqrt[5]{2}\right)^2 : 2^{\frac{1}{3}}}{\left(2^3\right)^{-\frac{1}{5}}}$

3.6. $\frac{\sqrt[5]{16} : \sqrt[6]{2}}{\sqrt{2} : \sqrt[3]{4}}$

- 4 Calcula o valor de cada uma das seguintes expressões, simplificando o resultado.

4.1. $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + 1)^2$

4.2. $(2\sqrt{8} - 3)^2 - \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)^{12}$

4.3. $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

4.4. $\frac{\left(2\sqrt{\sqrt{3} - 5}\right)^2}{\sqrt{2\sqrt{12}}}$

- 5 Considera o prisma quadrangular regular representado na figura.

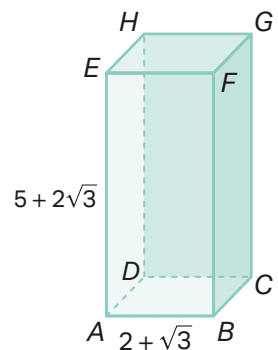
Fixada uma unidade de medida, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2 + \sqrt{3}$
- $\overline{AE} = 5 + 2\sqrt{3}$

- 5.1. Mostra que a medida da área da face [ABFE] do prisma é igual a $16 + 9\sqrt{3}$.

- 5.2. Determina o perímetro da face [ABFE] do prisma.

Apresenta o resultado na forma $c + b\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.



6 Racionaliza os denominadores das seguintes frações:

6.1. $\frac{3}{2 - \sqrt{7}}$

6.2. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

6.3. $\frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{3}}$

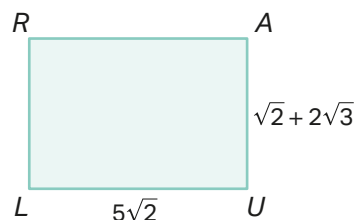
6.4. $\frac{3}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

6.5. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

6.6. $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + \sqrt{10}}$

7 Acerca do retângulo [LUAR], representado na figura, sabe-se que, numa dada unidade:

- $\overline{LU} = 5\sqrt{2}$
- $\overline{UA} = \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$



7.1. Determina a medida da área do retângulo [LUAR].

7.2. Determina o valor exato de $\overline{LA}$.

7.3. A medida do lado de um quadrado, [XPTQ], é igual a $\overline{UA}$. Determina a medida da área do quadrado [XPTQ].

8 Verifica se:

8.1. 5 é solução da equação $(\sqrt{2\sqrt[3]{x}})^3 = 2\sqrt{10x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$;

8.2. $2 - \sqrt{5}$ é solução da equação $x^2 - 2x - 5 = 0$, com $x \in \mathbb{R}$;

8.3. $1 - \sqrt{3}$ é solução de $x^2 = \frac{2}{x}$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9 Considera a expressão $A = \frac{\sqrt{a} \times a^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt[6]{a^{-3}}}$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

9.1. Mostra que $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

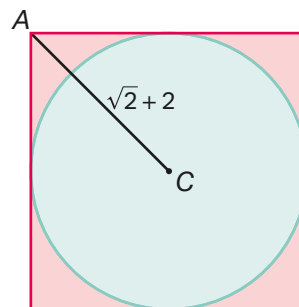
9.2. Se $a = \sqrt{2} + 3$, determina o valor de $A^2 \times \sqrt{5}$. Apresenta o resultado na forma de fração com denominador racional.

10 Na figura está representado um círculo inscrito num quadrado.

Fixada uma unidade de medida, sabe-se que $\overline{AC} = \sqrt{2} + 2$.

10.1. Mostra que a medida da área do círculo é igual a $(3 + 2\sqrt{2})\pi$.

10.2. Determina a razão entre a área do quadrado e $\overline{AC}$. Apresenta o resultado na forma de fração com denominador racional.



1.2. Polinómios

1.2.1. Operações com polinómios

Neste tema, serão aprofundados os conhecimentos sobre polinómios adquiridos em anos letivos anteriores.

Adição, subtração e multiplicação de polinómios

Exemplos

Considerando os polinómios $A(x) = 3x^2 - 2$,

$B(x) = 2 - 3x + x^2$ e $C(x) = \frac{x}{2} - 3x^2$, então:

$$1. A(x) + B(x) = (3x^2 - 2) + (2 - 3x + x^2) = \underbrace{4x^2 - 3x}_{\text{Polinómio reduzido}}$$

O polinómio soma tem grau 2.

$$2. B(x) - C(x) = (2 - 3x + x^2) - \left(\frac{x}{2} - 3x^2\right) = 2 - 3x + x^2 - \frac{x}{2} + 3x^2 = \underbrace{4x^2 - \frac{7x}{2} + 2}_{\text{Polinómio reduzido}}$$

O polinómio diferença tem grau 2.

$$3. A(x) \times C(x) = (3x^2 - 2) \times \left(\frac{x}{2} - 3x^2\right) = \frac{3}{2}x^3 - 9x^4 - \frac{2x}{2} + 6x^2 = \underbrace{-9x^4 + \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 - x}_{\text{Polinómio reduzido}}$$

O polinómio produto tem grau 4.

Nota

$P(x)$ representa um polinómio na variável x .

Exercícios

25 Considera os polinómios na variável y :

$$A(y) = y^2 - 3y, B(y) = 5y^3 - 2y + 1 \text{ e } C(y) = 2y - y^3$$

Determina, na forma reduzida e ordenada, o polinómio:

25.1. $A(y) + B(y)$

25.2. $B(y) - C(y)$

25.3. $A(y) \times C(y)$

25.4. $[A(y) + C(y)] - B(y)$

25.5. $[A(y)]^2 + [C(y)]^2$

25.6. $(y - 1) \times A(y) - [C(y)]^2$

26 Considera o polinómio $R(x) = (3x - 5x^2)^2 - 4x^2 \times (2x)^2$.

Em cada uma das alíneas seguintes, seleciona a opção correta.

26.1. O polinómio $R(x)$ é igual a:

(A) $17x^4 + 9x^2$

(B) $x^2 \times (9x^2 - 30x + 9)$

(C) $9x^2 - 33x^4$

(D) $9x^2 \times \left(9x^2 - \frac{10}{3}x\right)$

26.2. O grau do polinómio $R(x)$ é:

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

Divisão inteira ou divisão euclidiana de polinómios

Para dividir dois números, sendo o divisor diferente de zero, podemos recorrer ao algoritmo da divisão inteira.

Da mesma forma, é possível efetuar a divisão inteira de um polinómio, $A(x)$, por outro polinómio (não nulo), $B(x)$, obtendo o polinómio quociente, $Q(x)$, e o polinómio resto, $R(x)$, tais que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$:

- O grau do dividendo, $A(x)$, é maior ou igual ao grau do divisor, $B(x)$;
- O polinómio resto, $R(x)$, é o polinómio nulo ou um polinómio com grau inferior ao grau do divisor, $B(x)$.

Recorda

Ao efetuar a divisão inteira de 13 por 4, pretendemos encontrar o quociente, q , e o resto, r , tais que $13 = 4 \times q + r$, com $r < 4$.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ -12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Assim, o quociente é 3 e o resto é 1.

Exemplo

Para determinar o polinómio quociente e o polinómio resto da divisão inteira de $2x^3 - x^2 + x + 3$ por $x - 1$, seguimos os seguintes passos:

1.º Escrever por ordem decrescente das potências de x o dividendo e o divisor.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 3 & x - 1 \end{array}$$

2.º Dividir o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor, obtendo o primeiro termo do quociente: $2x^3 : x = 2x^2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 3 & x - 1 \\ & 2x^2 \end{array}$$

3.º Multiplicar cada termo do divisor por $2x^2$, adicionando os simétricos desses produtos ao dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 3 & x - 1 \\ -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 \\ \hline x^2 + x + 3 & \end{array}$$

4.º Repetir o processo, dividindo o termo de maior grau do polinómio diferença obtido pelo termo de maior grau do divisor ($x^2 : x = x$). Multiplicar cada termo do divisor por x e adicionar os simétricos desses produtos a $x^2 + x + 3$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 3 & x - 1 \\ -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + x \\ \hline x^2 + x + 3 & \\ -x^2 + x & \\ \hline 2x + 3 & \end{array}$$

5.º Repetir o processo até que o polinómio resto seja nulo ou tenha grau inferior ao grau do divisor.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + x + 3 & x - 1 \\
 - 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + x + 2 \leftarrow \text{Quociente} \\
 \hline
 x^2 + x + 3 & \\
 - x^2 + x & \\
 \hline
 2x + 3 & \\
 - 2x + 2 & \\
 \hline
 \text{Resto} \rightarrow 5 &
 \end{array}$$

Assim:

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = (x - 1) \times (2x^2 + x + 2) + 5$$

Quando o resto de uma divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio, não nulo, $B(x)$ é zero, diz-se que $A(x)$ é **divisível** por $B(x)$.

Assim, $A(x) = B(x) \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ o polinómio quociente.

Exemplo

Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $C(x) = x^3 + 2x - 1$ por $D(x) = x + 1$.

Observando o dividendo, verificamos que o polinómio não é completo.

Assim, devemos escrever o termo em falta com coeficiente zero.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 0x^2 + 2x - 1 & x + 1 \\
 - x^3 - x^2 & x^2 - x + 3 \\
 \hline
 - x^2 + 2x - 1 & \\
 + x^2 + x & \\
 \hline
 3x - 1 & \\
 - 3x - 3 & \\
 \hline
 - 4 &
 \end{array}$$

Assim:

$$x^3 + 2x - 1 = (x + 1) \times (x^2 - x + 3) - 4$$

O quociente é $x^2 - x + 3$ e o resto é -4 .

A saber

Na divisão de $A(x)$ por $B(x)$:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

sendo $Q(x)$ o quociente e $R(x)$ o resto, com grau $R(x) < \text{grau } B(x)$.



Exercícios

- 27** Determina o polinómio cuja divisão por $5x - 1$ tem como quociente $2x^2 + x$ e resto -1 .
- 28** Determina o polinómio que é divisível por $2x^2 + x + 1$, sendo $2x + 1$ o quociente da divisão.
- 29** Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determina o quociente e o resto de cada uma das seguintes divisões:
- 29.1.** $(x^3 - 2x^2 + x - 5) : (x^2 + 1)$ **29.2.** $(2x^3 - 5x + 1) : (2x^2 + x - 1)$
- 29.3.** $(2x^3 + 3x + 1) : (2x - 1)$ **29.4.** $(x^4 - x^2 + 1) : (x^2 - 2x)$
- 29.5.** $(x^3 - x) : (x + 1)$ **29.6.** $(x^4 - x^3 + 2x - 1) : (x^2 - 3)$
- 30** Verifica se $A(x)$ é divisível por $B(x)$, sendo:
- 30.1.** $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ e $B(x) = x^3 - 2x$;
- 30.2.** $A(x) = -x^5 + 5x^3 - 6$ e $B(x) = x^2 - 2$.
- 31** Sabendo que $2x^4 + x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ é divisível por $P(x)$ e que o quociente é $2x + 1$, determina $P(x)$.
- 32** Considera a família de polinómios $P(x) = x^3 + kx + 1$, com $k \in \mathbb{R}$.
- 32.1.** Seja $k = -2$. Determina o resto e o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x^2 - x$.
- 32.2.** Qual é o valor de k para o qual $P(x)$ é divisível por $x + 1$?

Regra de Ruffini

Quando pretendemos determinar o polinómio quociente e o polinómio resto de uma divisão de polinómios em que o polinómio divisor é do tipo $x - a$, podemos aplicar a regra de Ruffini.

Sabias que...

Paolo Ruffini (1765-1822)

Médico e matemático italiano que, em 1802, recebeu da *Italian Society of Forty* uma medalha de ouro pelo melhor método para determinar a raiz de uma equação numérica de qualquer grau. Foi, também, autor da "regra de Ruffini" que muito te vai ajudar na resolução de problemas!



Exemplos

Vamos aplicar a regra de Ruffini para determinar o quociente e o resto da divisão:

1. $(2x^3 - x^2 + x + 3) : (x - 1)$

O divisor é $x - 1$.

Assim, o número que anula o divisor é 1.

Número que anula o divisor		Coeficientes do dividendo			
		2	-1	1	3
	1				

		2	-1	1	3
		↓			
1					
		2			

Baixar o coeficiente do termo de maior grau do dividendo.

		2	-1	1	3
		↓	+		
1			2		
	×	2	1		

Multiplicar 2 por 1, colocar o produto ($2 \times 1 = 2$) por baixo de -1 e adicionar esses dois valores ($-1 + 2 = 1$).

		2	-1	1	3
		↓	+	+	
1			2	1	
	×	2	1	2	

Multiplicar 1 por 1, colocar o produto ($1 \times 1 = 1$) por baixo de 1 e adicionar esses dois valores ($1 + 1 = 2$).

		2	-1	1	3
		↓	+	+	+
1			2	1	2
	×	2	1	2	5

Multiplicar 2 por 1, colocar o produto ($2 \times 1 = 2$) por baixo de 3 e adicionar esses dois valores ($3 + 2 = 5$).

		2	-1	1	3
		↓	+	+	+
1			2	1	2
	×	2	1	2	5

Coeficientes do quociente

Resto

Como o grau do dividendo é 3 e o grau do divisor é 1, o grau do quociente é $3 - 1 = 2$.

Assim, $Q(x) = 2x^2 + x + 2$ e $R(x) = 5$.

Desta forma, podemos concluir que $2x^3 - x^2 + x + 3 = (x - 1) \times (2x^2 + x + 2) + 5$.

2. $(x^3 + 2x - 1) : (2x + 2)$

Começemos por determinar o número que anula o divisor:

$$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

Cálculos auxiliares

- $1 \times (-1) = -1$
- $-1 \times (-1) = 1$
- $3 \times (-1) = -3$
- $-1 + (-3) = -4$

	1	0	2	-1	
	↓	+	+	+	
-1		-1	1	-3	
× ↗	1	-1	3	-4	← Resto

Coeficientes do quociente

Na divisão de $x^3 + 2x - 1$ por $x + 1$, o quociente é $x^2 - x + 3$ e o resto é -4 .

Como $2x + 2 = 2(x + 1)$, determinamos o quociente da divisão de $x^3 + 2x - 1$ por $2x + 2$ do seguinte modo:

$$x^2 - x + 3 = 2 \times Q(x) \Leftrightarrow Q(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

O resto é $R(x) = -4$.

A saber

Na divisão de $A(x)$ por $ax - b$, com $a \neq 0$:

$$A(x) = (ax - b) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow A(x) = a \left(x - \frac{b}{a} \right) \times Q(x) + R(x)$$

sendo $Q(x)$ o quociente e $R(x)$ o resto.

Exercícios

33 Recorrendo à regra de Ruffini, faz as seguintes divisões, indicando o quociente e o resto.

33.1. $(2x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x - 2)$

33.2. $(x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3) : (x - 1)$

33.3. $(-x^3 - 2x^2 + 2) : (x + 1)$

33.4. $(-2x^4 + x^3 + 3) : (x + 2)$

33.5. $(x^3 - 1) : (x + 3)$

33.6. $(-x^4 + 2x^2 - 4) : (x - 5)$



- 34** Em cada uma das situações seguintes, determina os valores de k , com $k \in \mathbb{R}$, tais que:

34.1. o polinómio $A(x) = 3x^3 - kx + 2$ é divisível por $x - 2$;

34.2. o polinómio $B(x) = 2x^2 + x - 3$ é divisível por $x + k$;

34.3. a divisão inteira de $C(x) = 2x^3 + kx^2 + 3x - 5$ por $x - 5$ tenha resto 10.

- 35** Recorrendo à regra de Ruffini, mostra que $3x^3 - 4x^2 + 6x - 8$ é divisível por $\frac{3}{2}x - 2$.

- 36** Aplica a regra de Ruffini e determina o quociente e o resto das divisões seguintes:

36.1. $(-x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1) : (2x - 1)$

36.2. $(3x^3 - 12x^2 + 22x - 7) : (3x - 1)$

36.3. $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 5) : (2x + 5)$

36.4. $(x^6 - 4x^4 - x^2 + 1) : (2x - 4)$

Teorema do resto

Consideremos a divisão inteira de $A(x)$ por $B(x) = x - a$.

Pelo algoritmo da divisão inteira, sabemos que

$A(x) = B(x) \times Q(x) + R$, isto é, $A(x) = (x - a) \times Q(x) + R$.

Desta forma, $A(a) = (a - a) \times Q(a) + R \Leftrightarrow A(a) = R$.

Concluimos que:

Nota

Na divisão de um polinómio por um polinómio de grau 1, o resto é nulo ou tem grau 0, logo podemos representá-lo por R .

Teorema do resto

O resto da divisão inteira de $A(x)$ por $(x - a)$ é igual a $A(a)$.

Exemplo

O resto da divisão inteira de $A(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ por $(x + 5)$ é:

$$A(-5) = (-5)^3 + 3 \times (-5)^2 + 5 \times (-5) - 1 = -76$$

Zero ou raiz de um polinómio

Diz-se que a é **zero** ou **raiz do polinómio** $A(x)$ se e só se $A(a) = 0$.

Teorema

Um polinómio $A(x)$ é divisível por $x - a$ se e só se $A(a) = 0$.

Podemos, facilmente, demonstrar o teorema anterior.

Se $A(a) = 0$, então, pelo teorema do resto, sabemos que o resto da divisão de $A(x)$ por $x - a$ é zero. Assim, $A(x)$ é divisível por $x - a$.

Por outro lado, se $A(x)$ é divisível por $x - a$, então, pelo algoritmo da divisão inteira, sabemos que $A(x) = (x - a) \times Q(x) + 0$. Logo, $A(a) = (a - a) \times Q(a) \Leftrightarrow A(a) = 0$, como queríamos demonstrar.

Vamos, agora, determinar o **resto da divisão** de um polinómio, $A(x)$, por $ax - b$ (com $a \neq 0$).

Sabemos que $A(x) = (ax - b) \times Q(x) + R$, pelo algoritmo da divisão. Assim:

$$A(x) = a \left(x - \frac{b}{a} \right) \times Q(x) + R. \text{ Logo, } A\left(\frac{b}{a}\right) = a \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a} \right) \times Q\left(\frac{b}{a}\right) + R = 0 + R = R.$$

Podemos concluir que:

O resto da divisão de um polinómio $A(x)$ por $ax - b$, com $a \neq 0$, é $A\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exemplos

1. Sem fazer a divisão, vamos determinar o resto de:

$$(3x^4 - 2x^2 - 5) : (x - 3)$$

$$\text{Seja } P(x) = 3x^4 - 2x^2 - 5.$$

Pelo teorema do resto, o resto é dado por:

$$P(3) = 3 \times 3^4 - 2 \times 3^2 - 5 = 220$$

2. Sabendo que 1 é zero do polinómio $M(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$, podemos escrever $M(x)$ como um produto de dois polinómios.

Como 1 é zero de $M(x)$, então $M(x)$ é divisível por $x - 1$.

Assim, podemos usar a regra de Ruffini para dividir $M(x)$ por $x - 1$.

	2	-2	-3	3
	↓	+	+	+
1	2	0	-3	
× ↗	2	0	-3	0

$$\text{Assim: } M(x) = (x - 1) \times (2x^2 - 3)$$

A saber

Na divisão de $A(x)$ por $x - a$:

- o resto é $A(a)$;
- $A(a) = 0$ se e só se $A(x)$ é divisível por $x - a$.

3. Sem efetuar a divisão, vamos determinar o resto de:

$$(3x^4 - 2x^2 - 5) : (2x + 2)$$

$$\text{Seja } P(x) = 3x^4 - 2x^2 - 5.$$

Como $2x + 2 = 2(x + 1)$, o resto é dado por:

$$P(-1) = 3 \times (-1)^4 - 2 \times (-1)^2 - 5 = -4$$

A saber

O resto da divisão de $A(x)$ por $ax - b$, com $a \neq 0$, é $A\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercícios

- 37 Recorre ao teorema do resto para determinar o resto das seguintes divisões:

37.1. $(2x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x - 2)$

37.2. $(x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3) : (x - 1)$

37.3. $(-x^3 - 2x^2 + 2) : (x + 1)$

37.4. $(-2x^4 + x^3 + 3) : (x + 2)$

37.5. $(x^3 - 1) : (x + 3)$

37.6. $(-x^4 + 2x^2 - 4) : (x - 5)$

- 38 Considera a família de polinómios $M(x) = 3x^3 - kx + 5$, com $k \in \mathbb{R}$.

Determina o valor de k , tal que:

38.1. $M(x)$ é divisível por $x + 1$.

38.2. o resto da divisão de $M(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ é 1.

- 39 Mostra que $A(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 2$ é divisível por $x + 2$ e determina $B(x)$ tal que $A(x) = (x + 2) \times B(x)$.

- 40 Sem efetuar as divisões, determina os seus restos.

40.1. $(-x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1) : (2x - 1)$

40.2. $(3x^3 - 12x^2 + 22x - 7) : (3x - 1)$

40.3. $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 5) : (2x + 5)$

40.4. $(x^6 - 4x^4 - x^2 + 1) : (2x - 4)$

Multiplicidade da raiz de um polinómio

Consideremos o polinómio $A(x) = x^2 - 2x + 1$.

É possível escrever $A(x)$ como um produto de polinómios de grau 1.

Sabemos que $A(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

	1	-2	1
	↓	+	+
1		1	-1
× ↗	1	-1	0

Da regra de Ruffini resulta que $A(x) = (x - 1) \times (x - 1) = (x - 1)^2$.

Dizemos que 1 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinómio $A(x)$.

Multiplicidade da raiz de um polinómio

Dado um polinómio, $A(x)$, e uma sua raiz, α , a multiplicidade da raiz α corresponde ao maior número n para o qual existe um polinómio, $Q(x)$, tal que $A(x) = (x - \alpha)^n \times Q(x)$.

Exemplos

1. Consideremos o polinómio $M(x) = (x + 3)(x + 3)(x - 1) = (x + 3)^2(x - 1)$.

Podemos afirmar que:

- -3 é raiz de $M(x)$ com multiplicidade 2, isto é, é uma raiz dupla;
- 1 é raiz de $M(x)$ com multiplicidade 1, isto é, é uma raiz simples.

2. Consideremos o polinómio $N(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$.

Sabe-se que $N(x)$ tem -1 e 3 como raízes.

- Podemos usar a regra de Ruffini para determinar a multiplicidade de cada uma das raízes de $N(x)$:

	1	-4	-2	12	9
	↓	+	+	+	+
-1		-1	5	-3	-9
× ↗	1	-5	3	9	0
	↓	+	+	+	
-1		-1	6	-9	
× ↗	1	-6	9	0	
	↓	+	+		
-1		-1	7		
× ↗	1	-7	16	≠ 0	

Assim, -1 é raiz de multiplicidade 2 do polinómio $N(x)$.



	1	-6	9
	↓	+	+
3		3	-9
× ↗	1	-3	0
	↓	+	
3		3	
× ↗	1	0	

Assim, 3 é raiz de multiplicidade 2 do polinómio $N(x)$.

- Atendendo aos resultados anteriores, podemos escrever $N(x)$ como um produto de polinómios: $N(x) = (x + 1)^2 \times (x - 3)^2$

Exercícios

- 41** Para cada um dos polinómios seguintes, indica a multiplicidade das raízes apresentadas.

41.1. $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$ (raiz: -1)

41.2. $x^3 - 5x^2 - x + 5$ (raiz: 5)

41.3. $x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ (raiz: 2)

41.4. $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$
(raízes: 3 e -2)

- 42** Indica a multiplicidade de cada uma das raízes dos polinómios e escreve-os como um produto de polinómios.

42.1. As raízes de $A(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ são 2 e -1.

42.2. As raízes de $B(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ são 1 e -1.

42.3. As raízes de $C(x) = x^3 - 19x - 30$ são 5, -2 e -3.

1.2.2. Fatorização de polinómios

Fatorizar um polinómio corresponde a escrevê-lo como um produto de polinómios (fatores), em que pelo menos um dos fatores é não constante. Repare que os fatores têm todos grau não superior ao do polinómio inicial.

Teorema

Se um polinómio, $A(x)$, de grau $n \in \mathbb{N}$, tem k raízes distintas, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, de multiplicidades $n_1, n_2, \dots, n_k$, respetivamente, então $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$ e existe um polinómio, $Q(x)$, sem raízes, tal que:

$$A(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \times (x - \alpha_2)^{n_2} \times \dots \times (x - \alpha_k)^{n_k} \times Q(x)$$

Seja $A(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

- Se α e β são raízes de $A(x)$, então $A(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$.
- Se α é raiz dupla de $A(x)$, então $A(x) = a(x - \alpha)^2$.
- Se $A(x)$ não tem raízes reais, então não é possível fatorizar $A(x)$.

Exemplos

Vejamos como proceder para fatorizar um polinômio de grau 2.

1. $A(x) = 2x^2 - 2x - 12$

Começamos por determinar os zeros de $A(x)$.

Como é um polinômio do 2.º grau, basta aplicar a fórmula resolvente.

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times (-12)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 10}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

Pelo teorema anterior, sabemos que $A(x) = 2(x - 3)(x + 2)$.

2. $C(x) = x^2 + 4x + 4$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

Pelo teorema anterior, sabemos que $C(x) = (x + 2)^2$.

3. $B(x) = -x^2 - 2x - 3$.

Como $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4 - 12 = -8 < 0$, $B(x)$ não tem zeros reais. Logo, não é possível fatorizar $B(x)$.

Recorda

Fórmula resolvente de equações do 2.º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Manual Interativo

Vídeos
Fatorização e raízes de um polinômio



Multiplicidade da raiz de um polinômio



Exercícios

43 Decomponha em fatores os seguintes polinômios.

43.1. $x^2 - 1$

43.2. $-x^2 + 3x + 10$

43.3. $2x^2 - 8x + 6$

43.4. $\frac{x^2}{2} - 2x + 2$

43.5. $-4x^2 - x + 3$

43.6. $-x^2 + 4x - 20$

44 Em cada um dos casos seguintes, escreva uma fatorização possível para $A(x)$, sabendo que:

44.1. -5 é uma raiz simples, 1 é uma raiz dupla e $A(x)$ tem grau 3;

44.2. 2 e 3 são raízes simples, -2 é uma raiz dupla, $A(1) = 1$ e $A(x)$ tem grau 4.

Fatorização de um polinómio de grau superior a 2

Tal como na fatorização de um polinómio de grau 2, também na fatorização de um polinómio de grau superior a 2 devemos, sempre que possível, conhecer os seus zeros.



Vídeo
Multiplicidade da
raiz de um
polinómio:
propriedades



Exemplo

Vejamos como proceder para fatorizar o polinómio $A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, sendo 2 uma das suas raízes.

Como 2 é raiz de $A(x)$, podemos usar a regra de Ruffini para determinar $Q(x)$, tal que $A(x) = (x - 2) \times Q(x)$.

	1	-2	-1	2
	↓	+	+	+
2	2	2	0	-2
× ↗	1	0	-1	0

Assim, $A(x) = (x - 2) \times (x^2 - 1)$.

Como $x^2 - 1$ é a diferença de dois quadrados, então $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Logo, $A(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$.

Recorda

Caso notável

- Diferença de quadrados:
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Repara que as raízes do polinómio (2, 1 e -1) são divisores do termo independente de $A(x)$, que é 2.

De uma forma geral:

Dado um polinómio, $A(x)$, com coeficientes inteiros, as suas raízes inteiras, caso existam, são divisores do termo independente do polinómio.

Consideremos um polinómio $A(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Seja α uma raiz inteira do polinómio $A(x)$.

Pelo teorema do resto, sabemos que:

$$A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_n \alpha^n + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -a_n \alpha^n - \dots - a_2 \alpha^2 - a_1 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 = \alpha (-a_n \alpha^{n-1} - \dots - a_2 \alpha^{2-1} - a_1)$$

Logo, a_0 é um múltiplo de α , ou seja, α é um divisor de a_0 .

Exemplo

Vamos fatorizar o polinômio $B(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4$.

Como o polinômio tem coeficientes inteiros, se tiver raízes inteiras, estas serão divisores do seu termo independente, isto é, serão divisores de -4 .

Os divisores inteiros de -4 são: $-4, -2, -1, 1, 2$ e 4 .

Como $B(x)$ tem grau 3 , então terá no máximo três raízes.

Podemos verificar quais dos divisores inteiros de -4 poderão ser raízes do polinômio, usando o teorema do resto.

$$B(-4) = -2 \times (-4)^3 + 4 \times (-4)^2 + 2 \times (-4) - 4 = 180 \neq 0$$

$$B(-2) = -2 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 4 = 24 \neq 0$$

$$B(-1) = -2 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 4 = 2 + 4 - 2 - 4 = 0$$

$$B(1) = -2 \times 1^3 + 4 \times 1^2 + 2 \times 1 - 4 = -2 + 4 + 2 - 4 = 0$$

$$B(2) = -2 \times 2^3 + 4 \times 2^2 + 2 \times 2 - 4 = -16 + 16 + 4 - 4 = 0$$

Como o polinômio $B(x)$ tem grau 3 , este tem, no máximo, três raízes.

Desta forma, como já foram encontradas as três raízes, não é preciso determinar $B(4)$.

Assim, $-1, 1$ e 2 são as raízes de $B(x)$.

Logo, $B(x) = -2(x-2)(x-1)(x+1)$.

Exercícios

45 Fatoriza cada um dos seguintes polinômios:

45.1. $x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabendo que uma das suas raízes é 1 ;

45.2. $x^3 - 13x - 12$, sabendo que -1 e 4 são duas das suas raízes;

45.3. $-x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 4x + 12$, sabendo que 2 é uma raiz dupla do polinômio.

46 Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinômios:

46.1. $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

46.2. $x^3 - x^2 - 9x + 9$

46.3. $x^4 - 5x^2 + 4$

46.4. $-x^3 - 6x^2 - 3x + 10$

46.5. $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

A saber

Se um polinômio tem coeficientes inteiros, as suas raízes inteiras, caso existam, são divisores do seu termo independente.

1.2.3. Resolução de inequações de grau superior a 1

Para resolver inequações de grau superior a 1, podemos começar por colocar todos os termos no 1.º membro da inequação. Posto isto, o polinómio obtido no 1.º membro deve ser fatorizado. Desta forma, para estudar o sinal do polinómio, procedemos ao estudo do sinal de cada um dos seus fatores.

1.º passo: Colocar todos os termos no 1.º membro.

2.º passo: Fatorizar o polinómio obtido no 1.º membro.

3.º passo: Analisar o sinal do polinómio, recorrendo a uma tabela de sinais.

Exemplos

Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, algumas inequações.

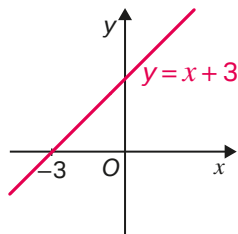
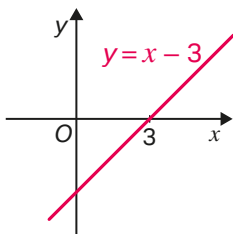
1. $x^2 \geq 9$

1.º passo: $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0$

2.º passo: Como $x^2 - 9$ é a diferença de dois quadrados, então:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

3.º passo:



x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+
$(x - 3)(x + 3)$	+	0	-	0	+

Assim, pela análise da tabela, concluímos que:

$$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

2. $(-x + 1)(x^2 + 2x - 3) > 0$

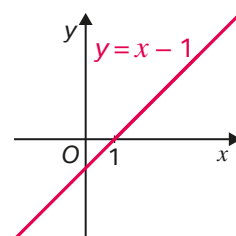
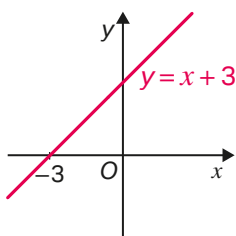
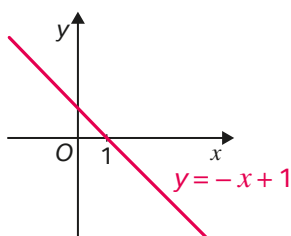
2.º passo:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$\text{Assim, } (-x + 1)(x^2 + 2x - 3) > 0 \Leftrightarrow (-x + 1)(x + 3)(x - 1) > 0.$$

3.º passo:



x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$-x+1$	+	+	+	0	-
$x+3$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$(-x+1)(x+3)(x-1)$	+	0	-	0	-

$$(-x+1)(x+3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[$$

$$3. \quad x(x^2 - 3x - 1) < -3$$

$$1.^\circ \text{ passo: } x(x^2 - 3x - 1) < -3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0$$

2.º passo: Os divisores de 3 são: -3 , -1 , 1 e 3 .

Como $1^3 - 3 \times 1^2 - 1 + 3 = 0$, pelo teorema do resto, sabemos que 1 é raiz do polinómio.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -1 & 3 \\
 1 & \downarrow & + & + & + \\
 & 1 & 1 & -2 & -3 \\
 \hline
 & 1 & -2 & -3 & 0
 \end{array}$$

$$\text{Assim, } x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

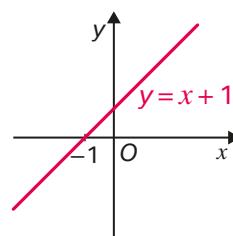
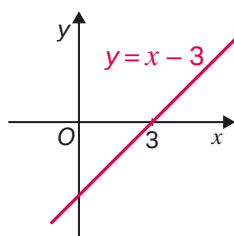
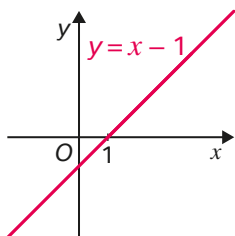
$$\text{Logo, } x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x-3)(x+1).$$

Então:

$$x(x^2 - 3x - 1) < -3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x+1) < 0$$

3.º passo:



x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$(x - 1)(x - 3)(x + 1)$	-	0	+	0	-	0	+

$$(x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, 3[$$

Exercícios

47 Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

47.1. $(-x + 3)(x^2 - 1) > 0$

47.2. $(x^2 - 16)(x - 2) \leq 0$

47.3. $x^2 - 2x > 3$

47.4. $2(x^3 - 2x - 2) < x^2 + 3x^3$

47.5. $x(x^3 - 13x) + 24 \geq 2x(x^2 - 7)$

47.6. $(x - 3)^2(x^2 + x - 2) \leq 0$

48 Considera a tabela de sinais do polinómio $A(x)$.

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$A(x)$	-	0	+	0	+	0	-

Resolve as seguintes inequações:

48.1. $(-x - 1) \times A(x) \leq 0$

48.2. $A(x) \times (x^2 - 9) > 0$

48.3. $A(x) \times (x^2 + 4) < 0$

48.4. $A(x) \times (-x - 2) \times (x^2 - 1) \geq 0$

49 Considera o polinómio $B(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$.

49.1. Mostra que 2 é raiz dupla de $B(x)$.

49.2. Resolve a inequação $B(x) \leq 0$.

49.3. Com base na alínea 49.2., qual é o conjunto-solução de $-B(x) > 0$?

Para aplicar

1 Considera os polinómios:

$$M(x) = 5x^2 - 3x + 2; N(x) = 2 - x^2 \text{ e } P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

1.1. Calcula, apresentando o resultado na forma de polinómio reduzido, e indica o grau do polinómio resultante:

a) $M(x) + N(x)$

b) $N(x) - P(x)$

c) $[N(x)]^2$

d) $M(x) \times N(x)$

1.2. Determina o quociente e o resto da divisão $P(x) : N(x)$.

1.3. Determina o polinómio $T(x)$, tal que $P(x) = T(x) \times (x - 1)$.

2 Escreve o polinómio reduzido correspondente a cada uma das seguintes expressões:

2.1. $(2x^3 - x) \times (x^2 - 3x + 1)$

2.2. $(3x^2 - 5x) - (2x - 1) \times (x + 1)$

2.3. $x(2x - 3) - (x^2 + 3x) \times (1 - x)$

2.4. $(3x - 1)^2 + (2x + 3) \times (-2 - x)$

2.5. $\frac{x}{3}(3x^2 - 6) + \left(\frac{x^3}{2} - 2x\right) \times (2x - 4)$

3 Indica o grau de cada um dos polinómios obtidos no exercício 2..

4 Através do algoritmo da divisão inteira, determina o polinómio quociente e o polinómio resto das divisões seguintes:

4.1. $(5x^3 - 2x^2 + x - 3) : (x^2 - x + 2)$

4.2. $(-6x^2 + 3x + 1) : (2x - 3)$

4.3. $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x - 3)$

4.4. $(x^5 + 2x^3 + x + 2) : (x^2 - 1)$

4.5. $(2x^3 + x^2 - 3x - 4) : (x^2 + x)$

5 Determina o polinómio $A(x)$, sabendo que, na divisão do polinómio $3x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 6x - 2$ por $A(x)$, o polinómio quociente é $x + 3$ e o resto é -2 .

6 Determina o polinómio quociente e o polinómio resto de cada uma das divisões, recorrendo à regra de Ruffini.

6.1. $(3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 1) : (x + 1)$

6.2. $(-x^3 + 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$

6.3. $(-x^4 + 2x^2 - x + 2) : (x + 2)$

6.4. $(x^4 + x^3 - 2x + 1) : (x - 3)$

6.5. $(2x^3 - x^2 + x - 1) : (2x - 4)$

6.6. $(-x^3 + 2x^2 - 3) : (3x + 3)$

6.7. $(-4x^2 + 2x + 3) : \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

6.8. $(2x^3 - 16) : (2x - 1)$

Para aplicar

- 7** Recorre à regra de Ruffini para determinar o quociente e o resto da divisão de $-3x^3 + 2x^2 - x + 1$ por:
- 7.1.** $x - 2$ **7.2.** $x + 1$ **7.3.** $2x + 4$ **7.4.** $2x - 1$
- 8** Em cada um dos casos seguintes, determina o resto sem efetuares a divisão.
- 8.1.** $(x^4 - 2x^3 + 5x - 3) : (x - 3)$ **8.2.** $(-2x^3 + x^2 + 5) : (x + 1)$
8.3. $(2x^3 - x - 1) : (2x + 1)$ **8.4.** $(2x^3 - 16) : \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$
8.5. $(2x^3 - x^2 + x - 1) : (2x - 4)$
- 9** Recorre ao teorema do resto e, em cada caso, determina o valor de $k \in \mathbb{R}$, tal que:
- 9.1.** a divisão de $5x^2 - kx + 1$ por $x - 2$ tem resto 5;
9.2. $-2x^3 + 5x + k$ é divisível por $x + 1$;
9.3. $-x^3 + 8$ é divisível por $x - k$.
- 10** Em cada um dos polinómios seguintes, determina a multiplicidade da raiz indicada.
- 10.1.** $-x^3 - 7x^2 + 15x - 7$ (raiz: 1)
10.2. $-x^3 + 8$ (raiz: 2)
10.3. $-x^4 + 13x^2 - 36$ (raiz: -2)
- 11** Considera o polinómio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$.
- 11.1.** Mostra que -2 é raiz do polinómio $A(x)$.
11.2. Escreve $A(x)$ como um produto de dois polinómios.
11.3. Decompõe em fatores de grau 1 o polinómio $A(x)$.
- 12** Considera que -1 é uma raiz do polinómio $B(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$.
- 12.1.** Determina as outras raízes de $B(x)$.
12.2. Decompõe $B(x)$ num produto de fatores de grau 1.

13 **Decompõe em fatores de grau 1 o polinômio:**

13.1. $-2x^2 + 8$

13.2. $x^3 - x$

13.3. $-x^2 + x + 6 = 0$

13.4. $-2x^2 - 10x - 12$

13.5. $6x^2 - x - 2$

13.6. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

13.7. $-x^3 + 3x^2 + x - 3$

13.8. $-4x^3 + 3x + 1$

14 Representa na forma reduzida o polinómio $A(x)$, tal que:

14.1. • tem grau 3;

- as suas únicas raízes são -1 e 2 ;
- a raiz 2 é simples;
- $A(3) = 8$.

14.2. • tem grau 4;

- as suas únicas raízes são -1 e 1 ;
- as duas raízes são duplas;
- o resto da divisão de $A(x)$ por $x - 2$ é -9 .

15 Considera a família de polinómios $C(x) = 2x^3 + kx - 3$, com $k \in \mathbb{R}$.

15.1. Determina o valor de k , sabendo que:

- a)** $C(x) : (x - 3)$ tem resto -3 ;
b) $C(x)$ é divisível por $x + 1$.

15.2. Admitindo que $k = 1$, decompõe $C(x)$ em fatores.

16 Considera os polinómios $A(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ e $B(x) = x^2 - 4x + 4$.

16.1. Mostra que $A(x) \times B(x) = x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 46x^2 - 108x + 72$.

16.2. Mostra que 2 é raiz dos polinómios $A(x)$ e $B(x)$.

16.3. Decomponha em fatores os polinômios $A(x)$ e $B(x)$.

16.4. Sem efetuar cálculos, indica a multiplicidade da raiz 2 de $A(x) \times B(x)$.

16.5. Resolva as seguintes inequações:

- a)** $A(x) \geqslant 0$
- b)** $B(x) < 0$
- c)** $A(x) \times B(x) > 0$
- d)** $A(x) \times (-x+2) \leqslant 0$
- e)** $(x^2 - 2x + 1) \times B(x) > 0$

Teste

- 1 Simplifica e escreve cada uma das expressões na forma de um único radical.

1.1. $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{\sqrt[6]{4}}$

1.2. $\frac{3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[20]{2^3}}$

1.3. $\frac{\sqrt[5]{2} \times 2^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[15]{5})^2}$

- 2 Mostra que:

2.1. $\frac{(\sqrt{2}+3)^2 - 1}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} + 2\sqrt{5}$

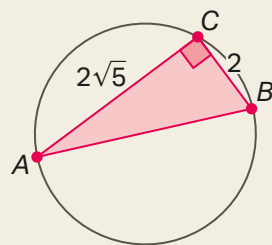
2.2. $\frac{(\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5}-1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

- 3 Na figura está representado um triângulo retângulo, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

Sabe-se que:

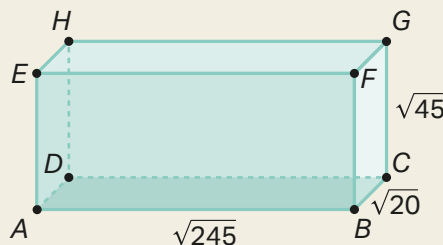
- $\overline{AC} = 2\sqrt{5}$
- $\overline{BC} = 2$

Determina $\overline{AB}$, apresentando o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+$.



- 4 Considera o paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Considerando os dados da figura, determina o volume do prisma na forma $a\sqrt{5}$, com $a \in \mathbb{R}$.



- 5 Qual das opções seguintes apresenta o resto da divisão inteira de $P(x) = -x^4 + 3x + 1$ por $x - 2$?

(A) -21

(B) -9

(C) 2

(D) 11

- 6 Determina o polinómio $T(x)$, sabendo que:

$$x^3 - 3x + 2 = T(x) \times (x - 1)$$

- 7 Considera a família de polinómios $P(x) = x^3 - kx^2 + 4$, com $k \in \mathbb{R}$.

Qual dos seguintes é o valor de k para o qual $P(x)$ é divisível por $x - 2$?

(A) -2

(B) 2

(C) -3

(D) 3

8 Considera o polinómio $Q(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$.

8.1. Determina o quociente e o resto da divisão de $Q(x)$ por $x^2 - 2$.

8.2. Sabendo que 1 é raiz de $Q(x)$, decompõe $Q(x)$ em fatores de grau 1.

8.3. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $Q(x) < 0$

b) $(-x + 3) \times Q(x) \geq 0$

c) $\frac{-Q(x)}{x+1} > 0$

9 Considera o quadro de sinais do polinómio $A(x)$, do 3.º grau.

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

9.1. Por observação do quadro de sinais anterior, indica o conjunto-solução da inequação:

a) $A(x) \geq 0$

b) $-A(x) > 0$

9.2. Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x^2 - 3x) \times A(x) \leq 0$.

10 Determine o polinómio, $P(x)$, de grau 4 tal que:

- 3 e 1 são suas raízes simples;
- -2 é raiz dupla;
- $P(0) = -2$

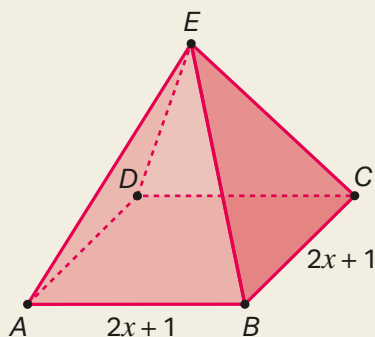
11 Considera a pirâmide quadrangular regular representada na figura.

Fixada uma unidade de medida, as dimensões da pirâmide são dadas em função de x , com $x \in \mathbb{R}^+$.

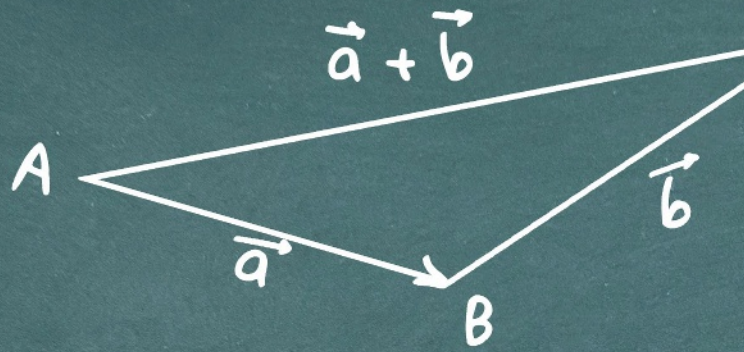
Sabe-se que:

- a medida do volume da pirâmide é dada pelo polinómio $V(x) = 12x^3 - 8x^2 - 17x - 5$;
- a medida da aresta da base da pirâmide é dada pelo polinómio $A(x) = 2x + 1$.

Determina o polinómio que representa a altura da pirâmide quadrangular.

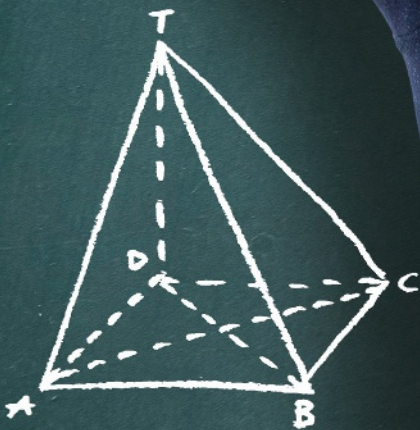


2



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



Geometria analítica



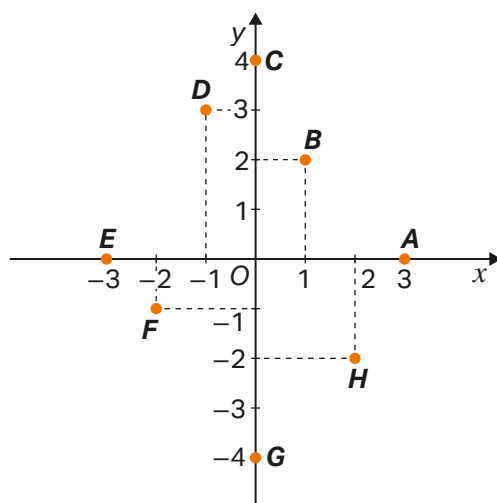
- 2.1. Geometria analítica no plano
- 2.2. Cálculo vetorial no plano
- 2.3. Geometria analítica no espaço
- 2.4. Cálculo vetorial no espaço



Antes de começar

Geometria no plano

- 1 No referencial seguinte estão representados os pontos A , B , C , D , E , F , G e H .



- 1.1. Indica as coordenadas de cada um dos pontos representados.
- 1.2. Dos pontos representados, indica:
 - a) um ponto com abcissa negativa;
 - b) um ponto com ordenada nula;
 - c) um ponto que pertença ao 3.º quadrante;
 - d) um ponto com coordenadas simétricas;
 - e) dois pontos com a mesma abcissa.
- 1.3. Determina as coordenadas do ponto E' , sabendo que é simétrico do ponto E pela reflexão no eixo das ordenadas.
- 1.4. Determina as coordenadas do ponto H' , sabendo que é simétrico do ponto H pela reflexão no eixo das abcissas.
- 1.5. Considera o triângulo $[AEG]$.
 - a) Classifica o triângulo quanto aos lados e quanto aos ângulos.
 - b) Determina a medida do perímetro do triângulo.

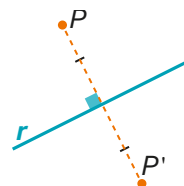
Recorda

Um ponto, P , representado num referencial cartesiano xOy é dado por duas coordenadas $P(x, y)$, em que x representa a **abcissa** e y representa a **ordenada** do ponto P .

Recorda

Simetria axial

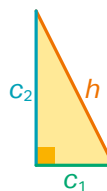
O **simétrico** de um ponto, P , em relação a uma reta, r , é o ponto P' que se situa numa reta perpendicular a r e que passa por P , tal que a distância de P a r é igual à distância de P' a r .



Recorda

Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- 2 Marca num referencial cartesiano os seguintes pontos:

$A(1, -3)$, $B(-2, 1)$, $C(0, 4)$,
 $D(-2, 0)$, $E(0, -3)$, $F(-1, -5)$,
 $G(3, 2)$, $H(-3, -3)$ e $I(4, -4)$.

- 3 Determina o declive da reta AB , sabendo que:

3.1. $A(-3, 0)$ e $B(-4, 4)$;

3.2. $A(5, -1)$ e $B(0, -1)$;

3.3. $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

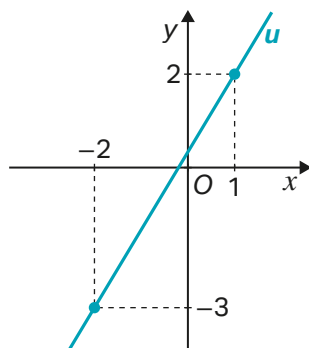
- 4 Escreve a equação reduzida da reta:

4.1. vertical que passa no ponto $A(-2, 3)$;

4.2. horizontal que passa no ponto $B(-1, -4)$;

4.3. horizontal, sendo a ordenada na origem igual à da reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 1$.

- 5 No referencial o.m. xOy da figura encontra-se representada a reta u .



Sabe-se que os pontos de coordenadas $(1, 2)$ e $(-2, -3)$ pertencem à reta u .

5.1. Escreve a equação reduzida da reta u .

5.2. Escreve a equação reduzida da reta t que contém o ponto de coordenadas $(2, -2)$ e tem a mesma ordenada na origem da reta u .

Recorda

Equação de uma reta não vertical:

$y = ax + b$, sendo a o declive da reta e b a ordenada na origem.

- Se uma reta passa nos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, então o seu declive é $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.
- Se a reta é horizontal, a sua equação é do tipo $y = b$, sendo b um número real.

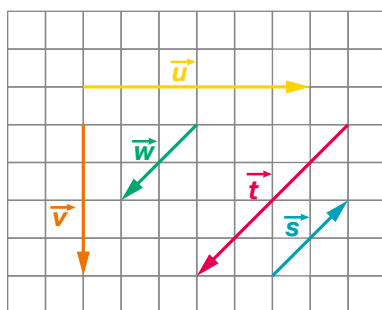
Equação de uma reta vertical:

$x = k$, sendo k um número real.

Antes de começar

Cálculo vetorial no plano

- 6 Observa a figura seguinte e completa, no teu caderno, as afirmações.

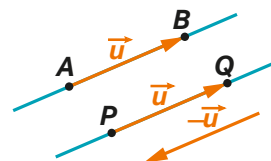


- 6.1. Os vetores ... e ... têm a mesma direção, o mesmo comprimento, mas sentidos opostos.
- 6.2. O comprimento do vetor ... é o dobro do comprimento do vetor Estes vetores têm o mesmo sentido e a mesma direção.
- 6.3. Os vetores ... e ... têm direções diferentes.

Recorda

Dois segmentos de reta orientados são **equipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Um vetor é uma coleção de segmentos orientados equipolentes.



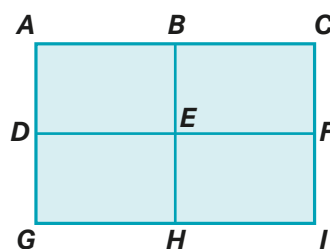
Dois vetores dizem-se **simétricos** se têm a mesma direção e o mesmo comprimento, mas sentidos opostos. O simétrico de $\vec{u}$ é $-\vec{u}$.

A soma de um ponto com um vetor é um ponto.

Assim, $Q = P + \vec{u}$, sendo P e Q pontos e $\vec{u}$ um vetor.

Conclui-se que Q é o resultado da translação de P segundo o vetor $\vec{u}$.

- 7 O retângulo $[AG/CI]$ da figura está dividido em quatro retângulos geometricamente iguais.



- 7.1. Copia e completa as igualdades, usando as letras da figura.

a) $2\overrightarrow{AD} = \dots$

b) $-\overrightarrow{DE} = \dots$

c) $-2\overrightarrow{GH} = \dots$

d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CI} = \dots$

7.2. Determina:

a) $T_{\overrightarrow{GH}}(A) = \dots$

c) $T_{\overrightarrow{DB}}([DGHE]) = \dots$

b) $T_{\overrightarrow{FI}}(H) = \dots$

d) $T_{\overrightarrow{IH}}([AGE]) = \dots$

7.3. Determina:

a) $D + \overrightarrow{DF} = \dots$

c) $A + 2\overrightarrow{AB} = \dots$

b) $H - \overrightarrow{EH} = \dots$

d) $C - 2\overrightarrow{FC} = \dots$

- 8** Na figura encontra-se representado o triângulo equilátero $[ADJ]$, dividido em nove triângulos equiláteros geometricamente iguais.

Completa as igualdades:

8.1. $3\overrightarrow{DC} = \dots$

8.2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} = \dots$

8.3. $-2\overrightarrow{FE} = \dots$

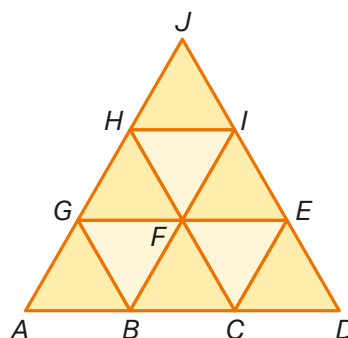
8.4. $H + \overrightarrow{HC} = \dots$

8.5. $E + \overrightarrow{JH} = \dots$

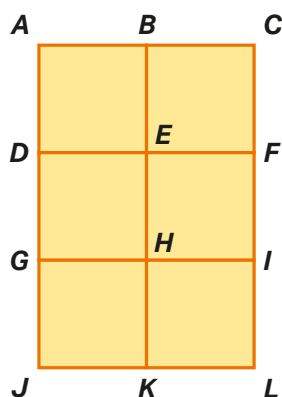
8.6. $G + 2\overrightarrow{BF} = \dots$

8.7. $F - \overrightarrow{ED} = \dots$

8.8. $B - 2\overrightarrow{JH} = \dots$



- 9** Na figura encontra-se representado um retângulo dividido em seis quadrados geometricamente iguais.



Completa, no teu caderno, as igualdades seguintes:

9.1. $D + \overrightarrow{KL} = \dots$

9.2. $B + 2\overrightarrow{DG} = \dots$

9.3. $H - \overrightarrow{IL} = \dots$

9.4. $I - 2\overrightarrow{GJ} = \dots$

9.5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \dots$

9.6. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DG} = \dots$

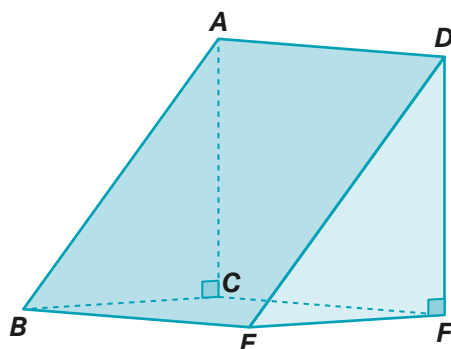
9.7. $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{EH} = \dots$

9.8. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HL} = \dots$

Antes de começar

Geometria analítica no espaço

- 10 Observa a figura seguinte, em que está representado um prisma triangular reto.



Sabe-se que $[ABC]$ e $[DEF]$ são triângulos retângulos isósceles, $\overline{CF} = 10$ cm e $\overline{DF} = 6$ cm.

- 10.1. Indica a posição relativa dos planos:

- ABC e DEF ;
- BED e DEF ;
- CFD e DAB .

- 10.2. Determina o volume do prisma triangular.

- 10.3. Recorrendo às letras da figura, indica:

- uma reta contida no plano BED ;
- uma reta secante ao plano CFD .

- 10.4. Indica a posição relativa entre:

- a reta CF e o plano FDA ;
- a reta AD e o plano CBE .

- 10.5. Vamos considerar o plano paralelo a CBE e que contém o ponto médio de $[DF]$. Este plano divide o prisma em dois: um prisma triangular reto e um prisma trapezoidal reto.

Determina o volume dos dois prismas obtidos.

Recorda

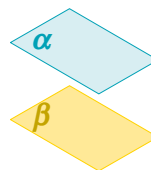
Posição relativa de planos

Se dois planos têm em comum apenas uma reta, dizem-se **concorrentes** e são:

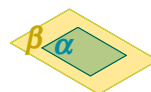
- perpendiculares** se formam entre si um ângulo de 90° ;
- obíquos**, caso contrário.

Se dois planos não são concorrentes, dizem-se **paralelos** e são:

- estritamente paralelos** se não têm nenhuma reta em comum;



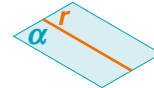
- coincidentes** se têm todas as retas em comum.



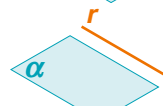
Posição relativa de uma reta em relação a um plano

No espaço, uma reta pode estar **contida** no plano, ser **paralela** ao plano ou ser **secante** ao plano.

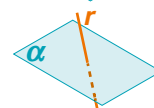
Reta contida no plano



Reta paralela ao plano

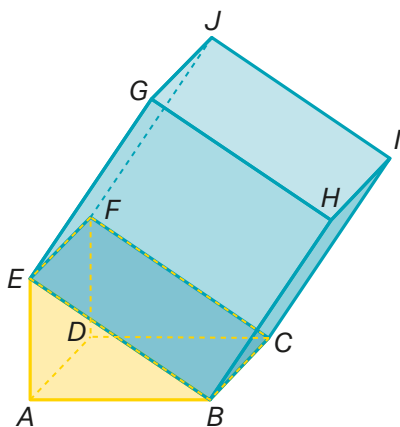


Reta secante ao plano



Cálculo vetorial no espaço

- 11** Na figura encontra-se representado um sólido constituído por dois prismas: prisma triangular reto $[ABCDEF]$, paralelepípedo retângulo $[EBCFGHIJ]$.



Recorda

- Dados dois pontos, A e B , o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser determinado como a diferença entre os dois pontos: $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = \overline{EA} = 4$ cm e $\overline{AB} = 6$ cm
- $[EAB]$ é um triângulo retângulo e $[EBHG]$ é um quadrado.

11.1. Indica:

- um vetor com o mesmo comprimento de $\overrightarrow{AB}$;
- um vetor com a mesma direção do vetor $\overrightarrow{AE}$;
- um vetor simétrico de $\overrightarrow{GH}$, isto é, um vetor com a mesma direção, o mesmo comprimento, mas sentidos opostos.

11.2. Indica a posição relativa dos planos:

- EAD e ABC ;
- EBC e ABC ;
- EBC e GHI ;

11.3. Indica a posição relativa entre:

- a reta FC e o plano ABC ;
- a reta JF e o plano EBC ;
- a reta CI e o plano GEF .

11.4. Determina:

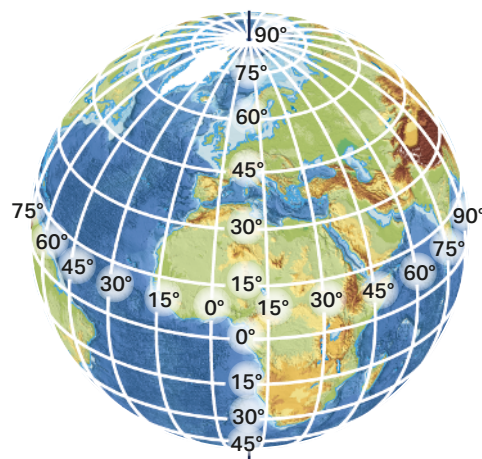
- o comprimento do segmento de reta $[EB]$, $\overline{EB}$;
- o volume do prisma retangular representado $[EBCFGHIJ]$.
- o volume do sólido apresentado na figura.

2 Geometria analítica

2.1. Geometria analítica no plano

No nosso dia a dia, deparamos com situações em que há pontos que são localizados usando coordenadas.

Para fazer saber a localização absoluta (posição exata na superfície terrestre) de um lugar, são usadas as coordenadas geográficas: a latitude e a longitude.



Também no xadrez recorreremos a coordenadas, quer para apresentar a localização de determinadas peças, quer para descrever a jogada a fazer com determinada peça.

No jogo tradicional "Batalha Naval", também são usadas coordenadas para acertar e, conseqüentemente, afundar os navios do oponente.

2.1.1. Referencial cartesiano, $\mathbb{R}^2$

Para localizar e marcar pontos no plano, podemos recorrer a um referencial cartesiano.

Um referencial cartesiano é formado por duas retas orientadas com direções diferentes, os **eixos**, que se intersectam num ponto, a **origem** do referencial.

Cada ponto do plano é identificado por um par ordenado, (x, y) . A cada ponto do plano corresponde um só par ordenado de números reais e a cada par ordenado de números reais corresponde um só ponto.

Sabias que...

René Descartes
(1596-1650)

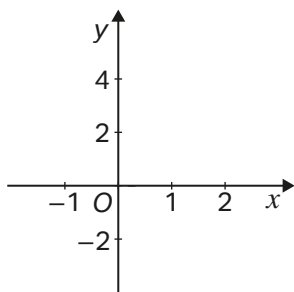
Descartes, matemático e filósofo francês, provou que a posição de um ponto no plano pode ser definida e determinada com base nas distâncias, x e y , a dois eixos perpendiculares fixos.



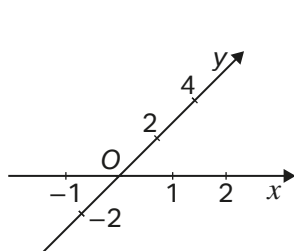
Assim, sabemos que o conjunto de todos os pares ordenados de números reais é dado por $\mathbb{R}^2$.

Existem, no entanto, vários tipos de referenciais, por exemplo:

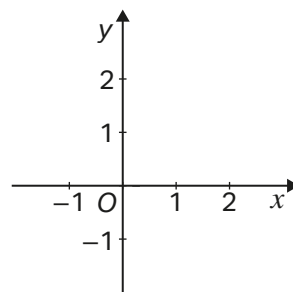
Referencial cartesiano
ortogonal dimétrico



Referencial cartesiano
não ortogonal e dimétrico

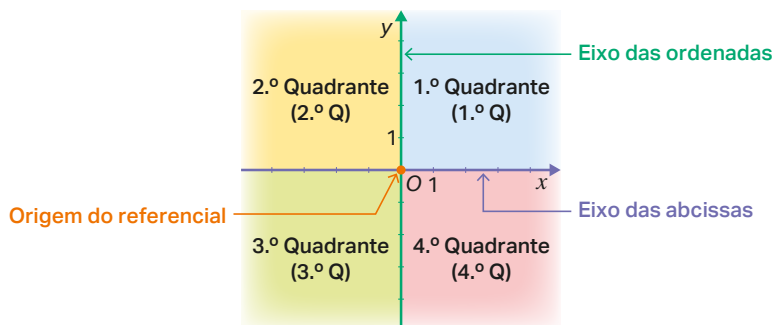


Referencial cartesiano
ortogonal monométrico



Quando os eixos têm a mesma unidade de medida e são perpendiculares entre si, o referencial diz-se **ortogonal monométrico**, de modo abreviado, o.m..

O referencial cartesiano divide o plano em quatro partes, denominadas **quadrantes**.



- O eixo das abcissas é constituído por todos os pontos com ordenada nula, isto é, todos os pontos da forma $P(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$.
- O eixo das ordenadas é constituído por todos os pontos com abcissa nula, isto é, os pontos da forma $P(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$.

Nota

Um ponto que se situe num eixo não pertence a qualquer quadrante.

Repara que, se um ponto $P(x, y)$ pertence a um determinado quadrante, sabemos que:

Quadrante	Condição:	x	y
$P \in 1.^\circ \text{ Q}$	abcissa e ordenada positivas	+	+
$P \in 2.^\circ \text{ Q}$	abcissa negativa e ordenada positiva	-	+
$P \in 3.^\circ \text{ Q}$	abcissa e ordenada negativas	-	-
$P \in 4.^\circ \text{ Q}$	abcissa positiva e ordenada negativa	+	-



Exemplos

1. Consideremos o ponto $A(k+1, 5)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Vamos determinar o valor de k , sabendo que A é um ponto que pertence ao eixo das ordenadas.

Como o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, sabemos que a sua abcissa é nula. Assim:

$$k+1=0 \Leftrightarrow k=-1$$

2. Consideremos o ponto $B(2k-1, -2-k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Vamos determinar os valores de k para os quais o ponto B pertence ao 3.º quadrante.

Como o ponto B pertence ao 3.º quadrante, sabemos que $x_B < 0 \wedge y_B < 0$.

Assim:

$$2k-1 < 0 \wedge -2-k < 0 \Leftrightarrow 2k < 1 \wedge -k < 2 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2} \wedge k > -2$$

$$\text{Logo, } k \in \left] -2, \frac{1}{2} \right[.$$

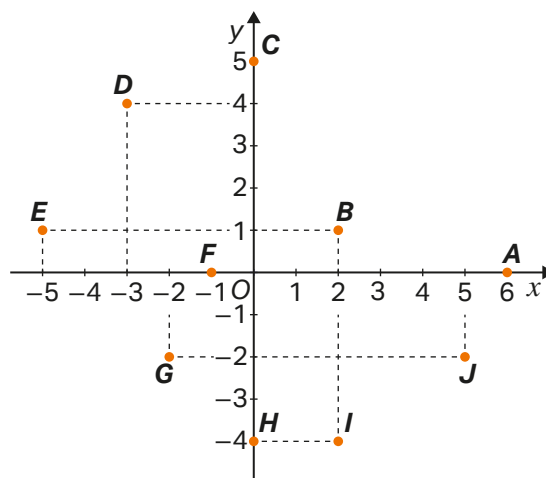
Exercícios

- 1 Na figura ao lado encontra-se representado, num referencial cartesiano o.m. xOy , os pontos $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J .

1.1. Indica as coordenadas de cada um dos pontos representados.

1.2. Dos pontos apresentados, indica:

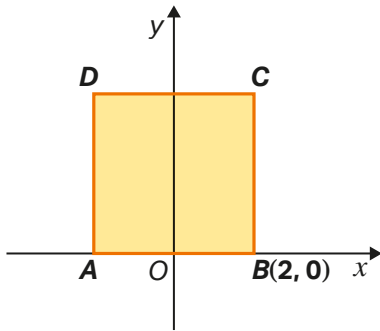
- o(s) que tem(têm) as duas coordenadas negativas;
- o(s) que se encontra(m) no 2.º quadrante;
- o(s) que tem(têm) ordenada superior à abcissa;
- o(s) que tem(têm) ordenada nula;
- o(s) que tem(têm) abcissa nula e ordenada negativa.



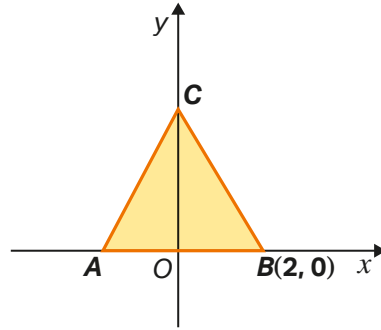
- 2 Considera os referenciais o.m. xOy , nos quais se encontram representados polígonos regulares cuja medida do lado é 4 cm.

Admitindo que a unidade do referencial é o centímetro, indica as coordenadas dos vértices dos polígonos representados.

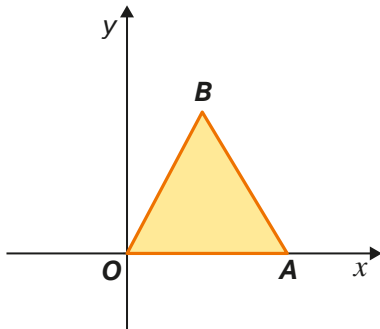
2.1.



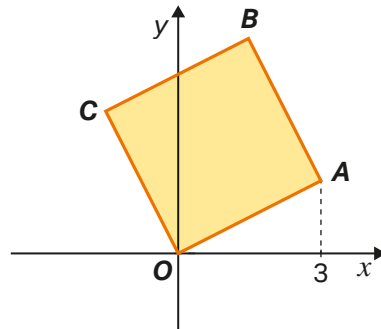
2.2.



2.3.



2.4.



3 Considera os pontos $P(2k - 1, -2k)$ e $M(k^2 - 9, 2 - k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

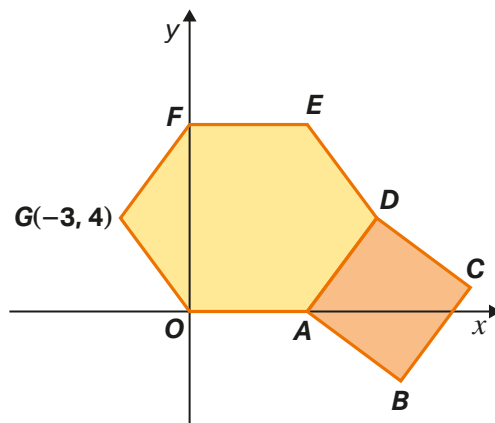
Determina os valores de k para os quais:

- 3.1.** o ponto P pertence ao eixo das ordenadas;
- 3.2.** o ponto M pertence ao eixo das ordenadas;
- 3.3.** o ponto P pertence ao segundo quadrante;
- 3.4.** o ponto M pertence ao semieixo negativo das ordenadas.

4 No referencial cartesiano o.m. xOy , estão representados um hexágono com os lados todos iguais e um quadrado.

- 4.1.** Determina a medida do lado do hexágono, admitindo para unidade de medida a unidade do referencial.
- 4.2.** Determina a medida da área do quadrado $[ABCD]$.
- 4.3.** Determina as coordenadas dos pontos:

- | | |
|---------------|---------------|
| a) F | b) E |
| c) A | d) D |



2.1.2. Distância entre dois pontos no plano

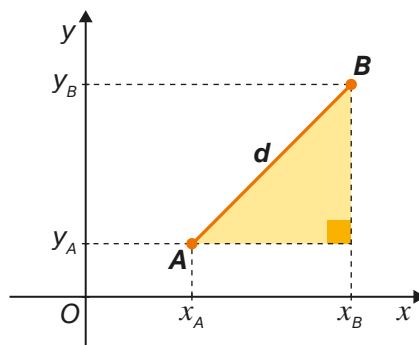
Consideremos dois pontos representados no plano, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, e d a distância entre eles.

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Logo, $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$

Assim, podemos concluir que:



Considerando dois pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, num referencial o.m. xOy , a distância entre os pontos A e B é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Exemplos

1. Em relação a um referencial o.m. xOy , consideremos os pontos $M(-1, 3)$ e $P(\frac{1}{2}, -2)$.

A saber

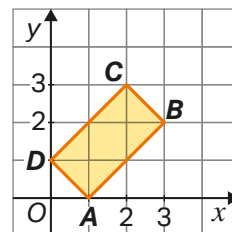
$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Admitindo a unidade do referencial como unidade de medida e aplicando a fórmula da distância entre dois pontos:

$$\overline{MP} = d(M, P) = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{\frac{109}{4}} = \frac{\sqrt{109}}{2}$$

2. Na figura está representado, num referencial o.m. xOy , um retângulo, $[ABCD]$. Tendo em consideração os dados da figura, $A(1, 0)$ e $C(2, 3)$, então:

$$\overline{AC} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$



Exercícios

- 5 Em cada uma das situações seguintes, determina $\overline{AB}$, sabendo que, em relação a um referencial o.m.:

5.1. $A(-1, 3)$ e $B(-2, -5)$;

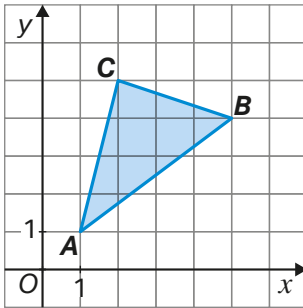
5.2. $A(5, 0)$ e $B(-3, 2)$;

5.3. $A(\frac{1}{3}, 2)$ e $B(-1, \frac{3}{2})$;

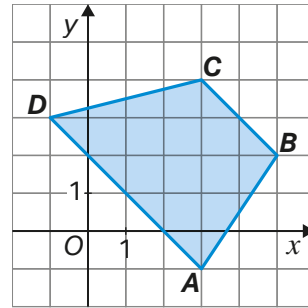
5.4. $A(-\frac{5}{2}, -1)$ e $B(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$.

- 6 Determina o perímetro da circunferência de centro $C\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ e que passa no ponto $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$. Apresenta o resultado arredondado às décimas.
- 7 Tendo em consideração os dados apresentados e considerando a unidade do referencial como unidade de medida, determina o perímetro de cada um dos polígonos representados.

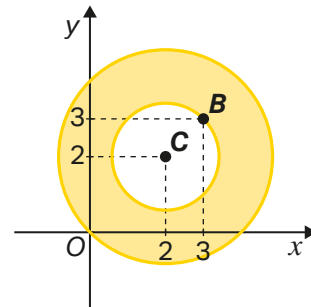
7.1.



7.2.



- 8 No referencial o.m. xOy da figura, encontra-se representada uma coroa circular. Tomando como unidade de medida a unidade do referencial e atendendo aos dados apresentados, determina a área da coroa circular. Apresenta o resultado arredondado às unidades.



2.1.3. Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

No referencial o.m. xOy , consideremos o segmento de reta $[AB]$, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

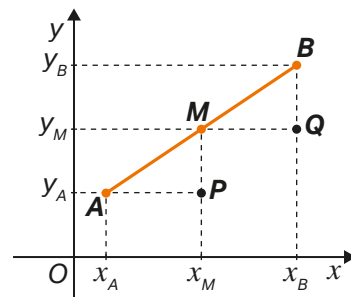
Sabemos que os triângulos $[AMP]$ e $[MBQ]$ são geometricamente iguais.

Assim:

$$x_M = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = y_A + \frac{y_B - y_A}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Desta forma, concluímos que:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$





Vídeo
Ponto médio de
um segmento de
reta



Em relação a um referencial o.m. xOy , o ponto médio de um segmento de reta é um ponto cujas coordenadas são a semissoma das coordenadas dos seus extremos. O ponto médio do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, é o ponto:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemplos

1. Considerando, num referencial o.m. xOy , os pontos $M(-3, 5)$ e $N(-1, -2)$, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[MN]$ são:

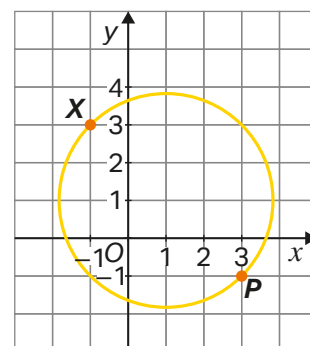
$$\left(\frac{-3 + (-1)}{2}, \frac{5 + (-2)}{2}\right) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

2. Na figura encontra-se representada uma circunferência, sendo $[XP]$ um dos seus diâmetros. Tendo em consideração os dados da figura, podemos determinar as coordenadas do centro da circunferência.

$$X(-1, 3) \text{ e } P(3, -1)$$

Como o centro da circunferência, C , é o ponto médio de qualquer diâmetro, concluímos que:

$$C = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 + (-1)}{2}\right) = (1, 1)$$



3. Em relação a um referencial o.m. xOy , consideremos os pontos $A(-1, 3)$ e $M(2, 5)$. Determina as coordenadas do ponto B , sabendo que M é o ponto médio de $[AB]$.

Seja $B(x_B, y_B)$. Então:

$$(2, 5) = \left(\frac{-1 + x_B}{2}, \frac{3 + y_B}{2}\right)$$

Deste modo:

$$\frac{-1 + x_B}{2} = 2 \wedge \frac{3 + y_B}{2} = 5 \Leftrightarrow x_B = 4 + 1 \wedge y_B = 10 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_B = 5 \wedge y_B = 7$$

Logo, $B(5, 7)$.

A saber

O **ponto médio** do segmento de reta $[AB]$, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, é o ponto de coordenadas $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Exercícios

- 9 Num referencial o.m. xOy , sabe-se que $A(-3, 5)$, $B(2, -5)$, $C(-6, -2)$, $D(-1, 4)$, $E(12, 3)$, $F(-10, 7)$, $G(\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$ e $H(\frac{2}{3}, -1)$.

Determina as coordenadas do ponto médio do segmento de reta:

9.1. $[AB]$

9.2. $[CD]$

9.3. $[EF]$

9.4. $[GH]$

- 10 Sabendo que $M(-1, 5)$ é o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$, determina as coordenadas do ponto Q se:

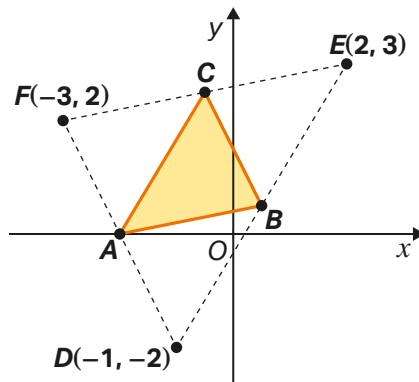
10.1. $P(2, -3)$

10.2. $P(\frac{1}{2}, -1)$

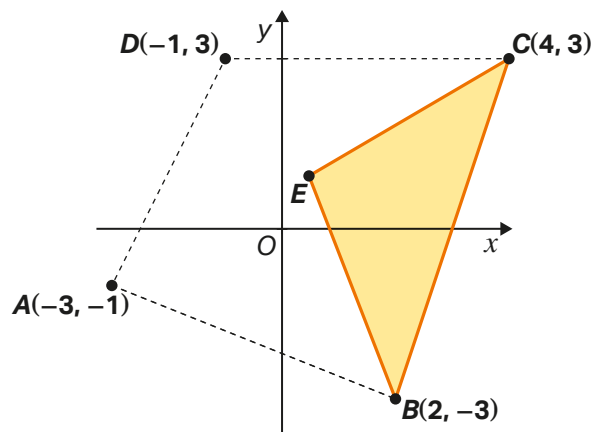
10.3. $P(0, -\frac{1}{3})$

- 11 Nas figuras seguintes, os polígonos estão representados em referenciais cartesianos o.m. do plano. Admite que a unidade de medida é a unidade do referencial.

- 11.1. Determina a medida do perímetro do triângulo $[ABC]$, sabendo que os seus vértices são pontos médios dos lados do triângulo $[DEF]$.



- 11.2. Sabendo que E é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$, qual é a medida do perímetro do triângulo $[BCE]$?



2.1.4. Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta

A mediatriz de um segmento de reta é, por definição, o conjunto dos pontos do plano que estão a igual distância dos extremos desse segmento de reta, ou seja, é a reta perpendicular ao segmento de reta no seu ponto médio.

Consideremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Sabemos que qualquer ponto $P(x, y)$ que pertença à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ está a igual distância de A e de B .

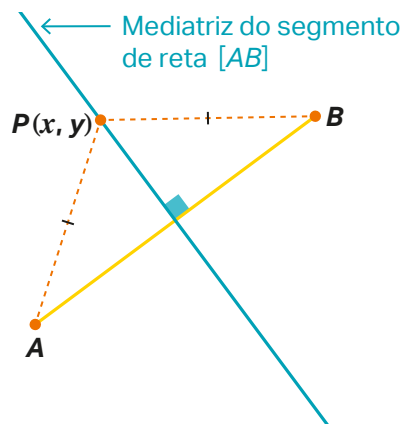
Assim:

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

$$\text{Então, } (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2.$$

Deste modo, uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é dada por:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$



Exemplo

1. Considera os pontos $A(-2, 3)$ e $B(1, -4)$ num referencial o.m. do plano. Queremos determinar a equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à mediatriz de $[AB]$.

Por definição de mediatriz de um segmento de reta:

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 4)^2}$$

Logo:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - 14y - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 7y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$$

Desta forma, $P(x, y)$ pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ se e só se $y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$.

Uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$.

Exercícios

12 Determina uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta:

12.1. $[AB]$, sendo $A(-3, 5)$ e $B(2, -5)$;

12.2. $[CD]$, sendo $C(-6, -2)$ e $D(-1, 4)$;

12.3. $[EF]$, sendo $E(12, 3)$ e $F(-10, 7)$;

12.4. $[GH]$, sendo $G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $H\left(\frac{2}{3}, -1\right)$.

13 No plano munido de um referencial o.m. xOy , considera os pontos $L(-2, 3)$ e $M(1, -5)$.

Sabe-se que o ponto A pertence à mediatriz do segmento de reta $[LM]$.

Determina as coordenadas do ponto A se:

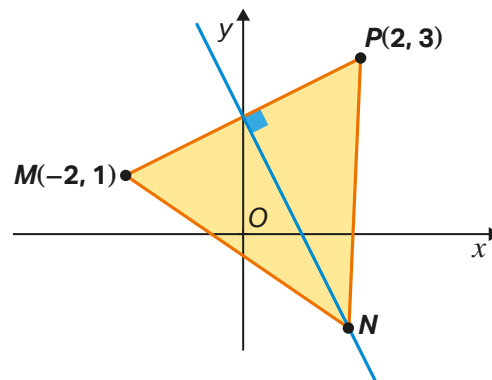
13.1. a sua abcissa for 0 ;

13.2. a sua ordenada for -3 .

14 Na figura encontra-se representado, num referencial o.m. xOy , um triângulo, $[MNP]$. Sabe-se que o ponto N pertence à mediatriz do segmento de reta $[MP]$ e tem abcissa $\frac{9}{5}$.

14.1. Determina a ordenada do ponto N .

14.2. Determina a distância entre os pontos N e Q , sabendo que Q pertence à mediatriz de $[NP]$ e tem ordenada 3 .

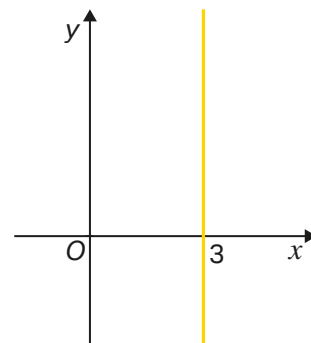


2.1.5. Retas paralelas aos eixos coordenados

Consideremos, num referencial o.m. xOy do plano, a reta paralela ao eixo das ordenadas (reta vertical) que interseja o eixo das abcissas no ponto de abcissa 3 .

Repara que todos os pontos que pertencem a essa reta têm abcissa 3 . Da mesma forma, todos os pontos com abcissa 3 pertencem a essa reta.

Concluimos que a reta é definida pela equação $x = 3$.

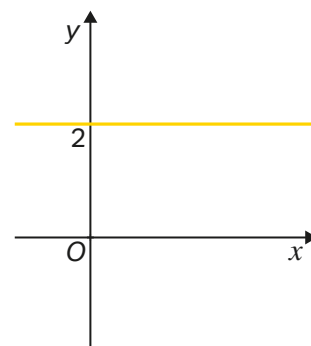


Generalizando:

Qualquer **reta paralela ao eixo das ordenadas (reta vertical)** que passa por um ponto, $P(a, b)$, é definida pela equação $x = a$.

Ao considerarmos a reta paralela ao eixo das abcissas (reta horizontal) que intersesta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 2, verificamos que todos os pontos que lhe pertencem têm ordenada 2. Do mesmo modo, podemos afirmar que todos os pontos com ordenada 2 pertencem a essa reta.

Desta forma, concluímos que a reta é definida pela equação $y = 2$.



Generalizando:

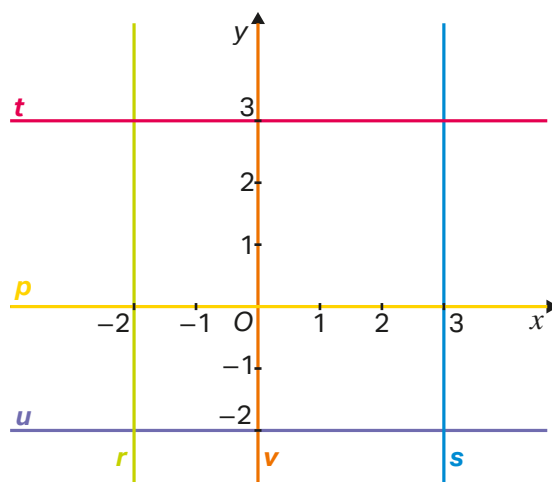
Qualquer **reta paralela ao eixo das abcissas (reta horizontal)** que passa por um ponto, $P(a, b)$, é definida pela equação $y = b$.

Exercícios

- 15** Considera as retas r, s, t, u, v e p representadas no referencial o.m. xOy da figura.

Faz corresponder a cada reta a respetiva equação.

r	•	$x = 0$
s	•	$y = 0$
t	•	$x = 3$
u	•	$y = 3$
v	•	$x = -2$
p	•	$y = -2$

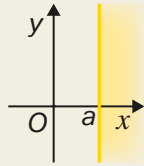
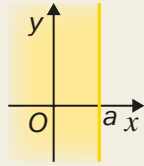
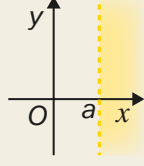
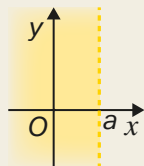


- 16** Considera o ponto P de coordenadas $(1, 5)$.
Escreve a equação da reta que contém o ponto P e é paralela ao eixo:
- 16.1.** das ordenadas;
- 16.2.** das abcissas.

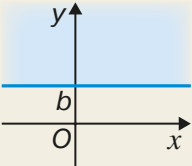
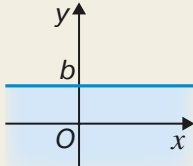
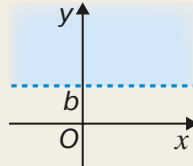
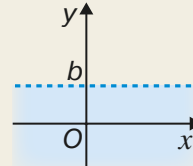
2.1.6. Semiplanos

Uma reta representada num plano divide-o em duas partes: dois semiplanos.

Semiplanos definidos por retas paralelas aos eixos coordenados

Semiplanos fechados	
No referencial xOy da figura ao lado, encontram-se representados todos os pontos do plano cuja abscissa é maior ou igual a a. Assim, estão representados todos os pontos da reta de equação $x = a$ e todos os pontos situados à sua direita.	 Condição: $x \geq a$
No referencial xOy da figura ao lado, encontram-se representados todos os pontos do plano com abscissa menor ou igual a a. Assim, estão representados todos os pontos da reta de equação $x = a$ e todos os pontos situados à sua esquerda.	 Condição: $x \leq a$
Semiplanos abertos	
No referencial xOy da figura ao lado, encontram-se representados todos os pontos cuja abscissa é maior do que a. Assim, estão representados todos os pontos à direita da reta de equação $x = a$, sendo esta representada a tracejado, uma vez que os pontos da reta não fazem parte do semiplano (a sua abscissa não é maior do que a e sim igual).	 Condição: $x > a$
No referencial xOy da figura ao lado, encontram-se representados todos os pontos cuja abscissa é menor do que a. Assim, estão representados todos os pontos à esquerda da reta de equação $x = a$, sendo esta representada a tracejado, uma vez que os pontos da reta não fazem parte do semiplano (a sua abscissa não é menor do que a e sim igual).	 Condição: $x < a$

De modo semelhante, definimos os semiplanos limitados por retas paralelas ao eixo das abcissas (retas horizontais).

Semiplanos fechados		Semiplanos abertos	
 Condição: $y \geq b$	 Condição: $y \leq b$	 Condição: $y > b$	 Condição: $y < b$

Semiplanos definidos por retas não paralelas aos eixos coordenados

No caso dos semiplanos limitados por retas não paralelas aos eixos coordenados, devemos começar por definir a reta, de equação $y = mx + b$, com $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$, que limita o semiplano.

Manual Interativo

Vídeo
Semiplanos



Exercício
Identificar
inequações de
semiplanos

Semiplanos fechados		Semiplanos abertos	
Condição: $y \geq mx + b$	Condição: $y \leq mx + b$	Condição: $y > mx + b$	Condição: $y < mx + b$

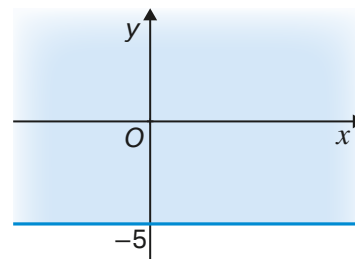
Exemplos

1. A região colorida representada na figura é definida pela condição $y \geq -5$.

Se o ponto $A(-3, 3 - 2a)$, com $a \in \mathbb{R}$, pertence à região colorida da figura, então:

$$3 - 2a \geq -5 \Leftrightarrow -2a \geq -8 \Leftrightarrow 2a \leq 8 \Leftrightarrow a \leq 4$$

Deste modo, $a \in]-\infty, 4]$.

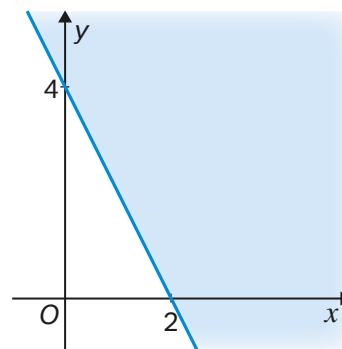


2. A reta que limita o semiplano apresentado tem ordenada na origem igual a 4 e o seu declive é $\frac{4-0}{0-2} = -2$.

Logo, a reta que limita o semiplano é definida pela equação $y = -2x + 4$.

De forma a decidir qual o sinal da desigualdade a usar, considera-se um ponto que pertença ao semiplano, por exemplo, o ponto de coordenadas $(2, 4)$.

Como $4 \geq -2 \times 2 + 4$, a condição que define o semiplano é $y \geq -2x + 4$.



Exercícios

- 17** Representa, num referencial, o conjunto definido por cada uma das seguintes condições:

17.1. $x > -2$

17.2. $y \leq -1$

17.3. $x < 3$

17.4. $y < -5$

17.5. $x \leq -3$

17.6. $x \geq 1$

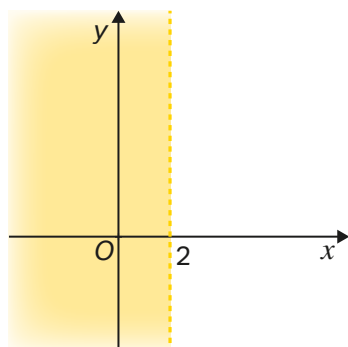
17.7. $y + x \geq 0$

17.8. $x - y > 0$

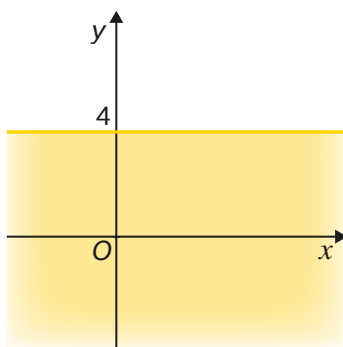
17.9. $y \leq x + 3$

- 18** Define através de uma condição o conjunto de pontos representados nos seguintes referenciais.

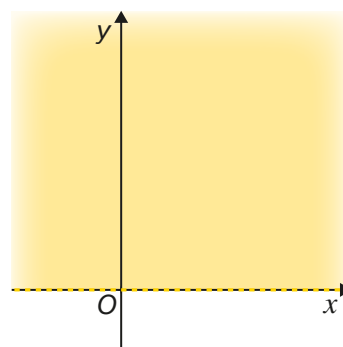
18.1.



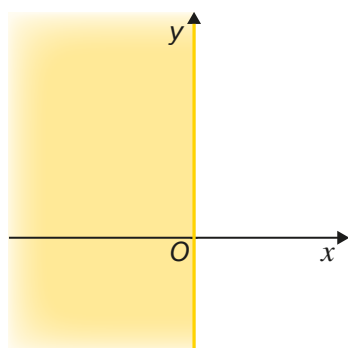
18.2.



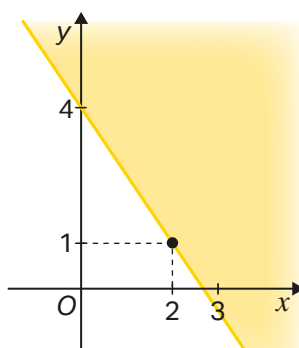
18.3.



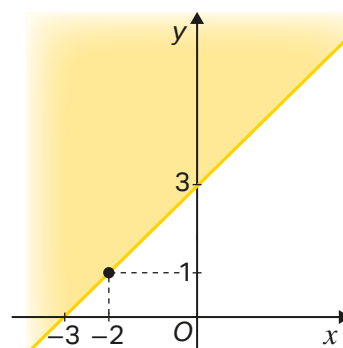
18.4.



18.5.



18.6.



- 19** Em cada uma das situações seguintes, determina $k \in \mathbb{R}$, sabendo que:

19.1. o ponto $X(2k - 1, 3)$ pertence ao semiplano definido por $x \geq 3$;

19.2. o ponto $P(5, -k + 5)$ pertence ao semiplano definido por $y < -2$;

19.3. o ponto $T(-2k + 3, -2)$ pertence ao semiplano definido por $x \geq 0$.

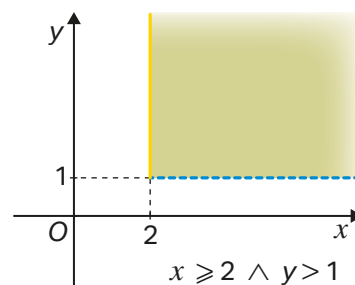
Conjuntos definidos por conjunção e disjunção de condições

A interseção de dois semiplanos é definida pela conjunção de duas condições, e vice-versa.

Nota

O símbolo $\wedge$ representa a conjunção de condições e lê-se "e".

Por exemplo, a representação do domínio plano definido por $x \geq 2 \wedge y > 1$ é a da figura ao lado.

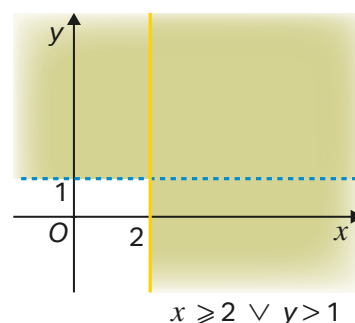


A reunião de dois semiplanos é definida pela disjunção de duas condições, e vice-versa.

Nota

O símbolo $\vee$ representa a disjunção de condições e lê-se "ou".

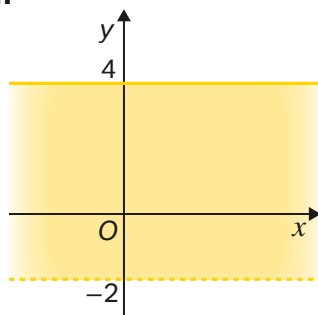
Por exemplo, a representação do domínio plano definido por $x \geq 2 \vee y > 1$ é a da figura ao lado.



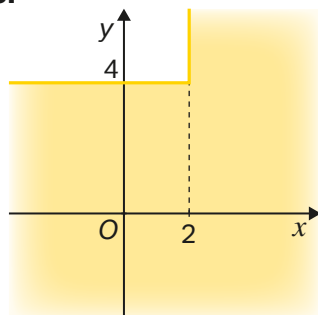
Exercícios

- 20** Define, através de uma conjunção ou disjunção de condições, o conjunto de pontos representado em cada um dos seguintes referenciais cartesianos do plano.

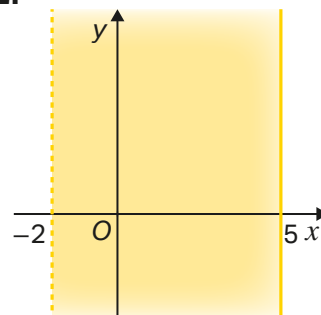
20.1.



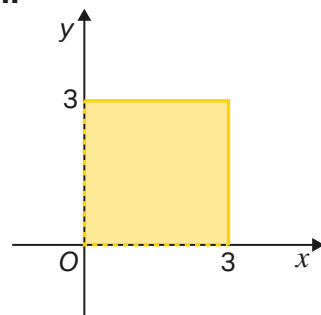
20.3.



20.2.



20.4.



21 Considera o ponto $A(3k - 1, 2 - m)$, com $k, m \in \mathbb{R}$.

Determina os possíveis valores de k e m , tais que o ponto A pertença:

21.1. ao 2.º quadrante;

21.2. à reta de equação $x = 2$ e ao semiplano definido por $y > 2$;

21.3. à região do plano definida por $x < -1 \wedge y \geq 2$.

22 Considera o referencial cartesiano xOy da figura.

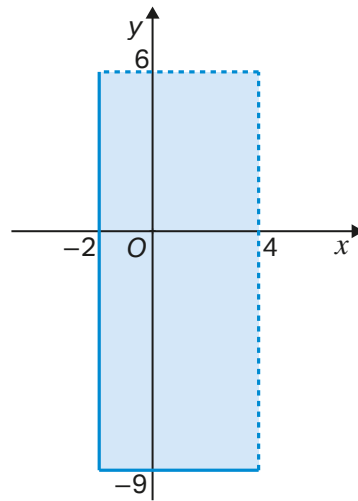
22.1. Define, através de condições, a região do plano representada no referencial.

22.2. Indica um ponto:

a) do 2.º quadrante que pertença à região colorida;

b) do 3.º quadrante que não pertença à região colorida.

22.3. Determina os valores de $k \in \mathbb{R}$, para os quais o ponto $P(1 - k, 3k)$ pertence à região colorida da figura.



e Manual Interativo

Vídeo
Equação reduzida da circunferência



2.1.7. Circunferência e círculo

Todos os pontos que pertencem a uma circunferência estão a igual distância do seu centro, sendo essa distância a medida do raio da circunferência.

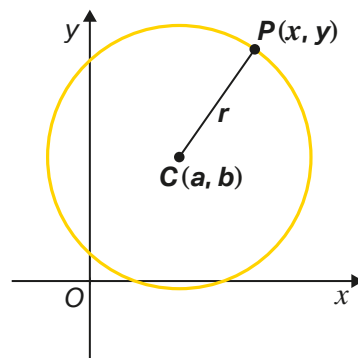
Vamos considerar uma circunferência de centro $C(a, b)$ e um ponto pertencente a essa circunferência, $P(x, y)$. Seja r a medida do raio dessa circunferência.

Por definição de circunferência, sabemos que $d(P, C) = r$.

Assim, $d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$.

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, concluímos que:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



A **circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r é o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano cuja distância a C é igual a r .

A equação cartesiana reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Exemplos

1. Determinar a equação cartesiana da circunferência de centro $A(-1, 3)$ à qual pertence o ponto $B(-2, -5)$.

Além das coordenadas do centro da circunferência, precisamos da medida do seu raio. $r = d(B, A)$, logo $r = \sqrt{(-2+1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{65}$.

A equação cartesiana reduzida da circunferência de centro $A(-1, 3)$ e raio $r = \sqrt{65}$ é a seguinte:

$$(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{65})^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 65$$

2. Determinar a equação cartesiana reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$, sendo $A(-2, 3)$ e $B(-1, 5)$.

O centro da circunferência é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. Então:

$$C = \left(\frac{-2-1}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, 4 \right)$$

A medida do raio é metade da medida do diâmetro.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{(-2+1)^2 + (3-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Desta forma, } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{5}{4}.$$

Exercícios

- 23 Indica o centro e o raio da circunferência definida por:

23.1. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

23.2. $x^2 + y^2 = 100$

23.3. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

23.4. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4}{16}$

- 24 Considera as circunferências $c_1: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ e $c_2: (x + 1)^2 + y^2 = 1$.

24.1. Indica as coordenadas do centro e o raio de cada uma das circunferências.

24.2. Escreve a equação da circunferência concêntrica com c_2 e com o mesmo raio de c_1 .

24.3. Representa, em referenciais distintos, as circunferências c_1 e c_2 .

24.4. Traça, nos referenciais da alínea **24.3.**, as retas tangentes às circunferências que são paralelas aos eixos coordenados e indica as suas equações.

Uma circunferência divide o plano em três conjuntos de pontos:

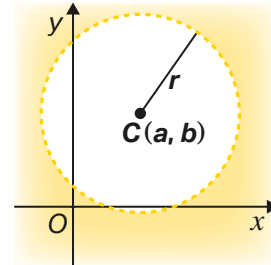
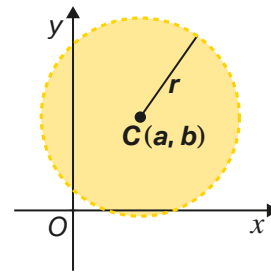
- o interior da circunferência;
- o exterior da circunferência;
- a própria circunferência.

- O conjunto dos pontos $P(x, y)$ que pertencem ao **interior** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é definido pela condição:

$$d(P, C) < r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

- O conjunto dos pontos $P(x, y)$ que pertencem ao **exterior** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é dado pela condição:

$$d(P, C) > r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$$



e Manual Interativo

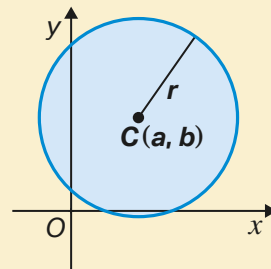
Vídeo
Equação da circunferência e inequação do círculo



O conjunto dos pontos que pertencem a uma circunferência ou ao seu interior denomina-se **círculo**.

O círculo de centro $C(a, b)$ e raio r é definido pela condição:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$



Exercício

25 Indica a posição do ponto $A(-1, 3)$ em relação à circunferência definida por:

25.1. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

25.2. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$

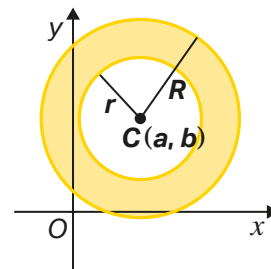
25.3. $x^2 + y^2 = 25$

25.4. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$

O conjunto dos pontos $P(x, y)$ que é limitado por duas circunferências com o mesmo centro (concêntricas) designa-se por **coroa circular**.

A coroa circular de centro $C(a, b)$ e raios r e R (com $r < R$), representada na figura, é definida por:

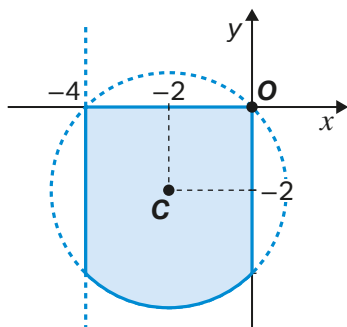
$$r^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$$



Exemplos

Que condições poderão definir os domínios planos seguintes?

1. A circunferência da figura tem centro $C(-2, -2)$ e passa no ponto $O(0, 0)$.



O raio da circunferência é:

$$r = \sqrt{(0+2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{8}$$

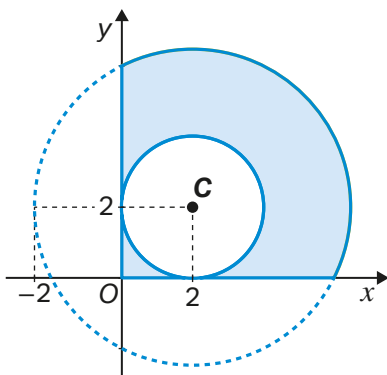
Assim, a circunferência é definida pela condição:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

Desta forma, o domínio plano é definido por:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 \leq 8 \wedge x \geq -4 \wedge x \leq 0 \wedge y \leq 0$$

2. As circunferências têm centro $C(2, 2)$ e raios 2 e 4.



A coroa circular é definida por:

$$4 \leq (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 16$$

Assim, a zona sombreada é dada pela condição:

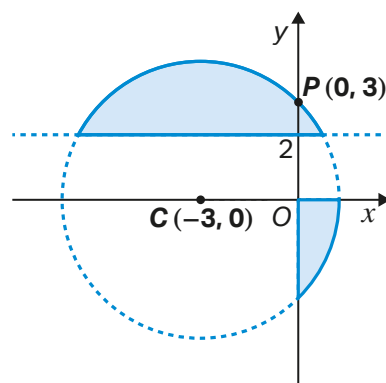
$$4 \leq (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 16 \wedge y \geq 0 \wedge x \geq 0$$

3. O centro da circunferência tem coordenadas $C(-3, 0)$ e o ponto $P(0, 3)$ pertence à circunferência.

Como $r = d(C, P) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{18}$, a zona sombreada da figura é dada por:

$$((x+3)^2 + y^2 \leq 18 \wedge y \geq 2) \vee$$

$$\vee ((x+3)^2 + y^2 \leq 18 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0)$$



Exercícios

26 Representa, num referencial cartesiano, os domínios planos seguintes:

26.1. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 4$

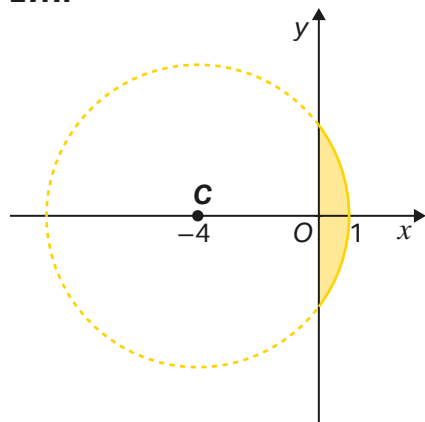
26.2. $(x + 1)^2 + y^2 \leq 25$

26.3. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \geq 1$

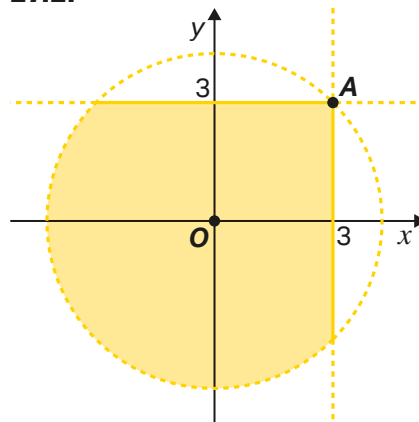
26.4. $4 \leq (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 25$

27 Define, através de condições, os domínios planos que se encontram coloridos.

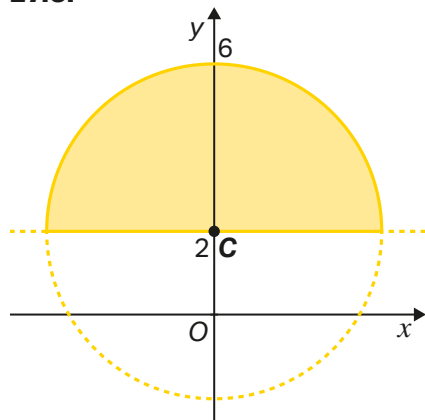
27.1.



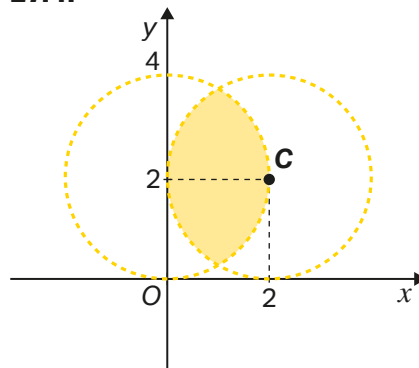
27.2.



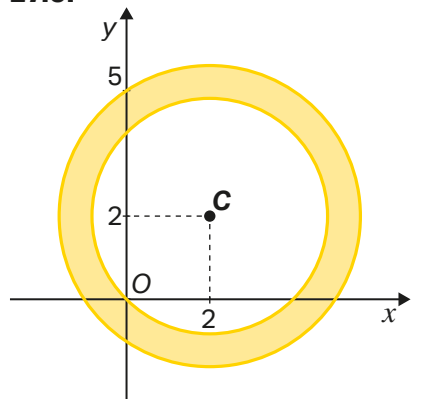
27.3.



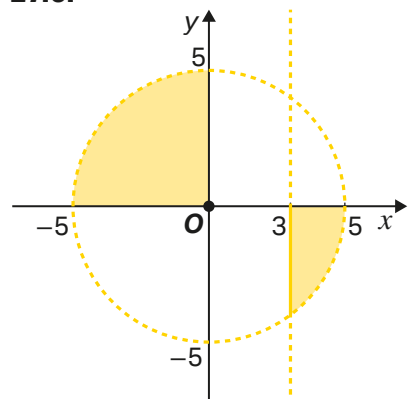
27.4.



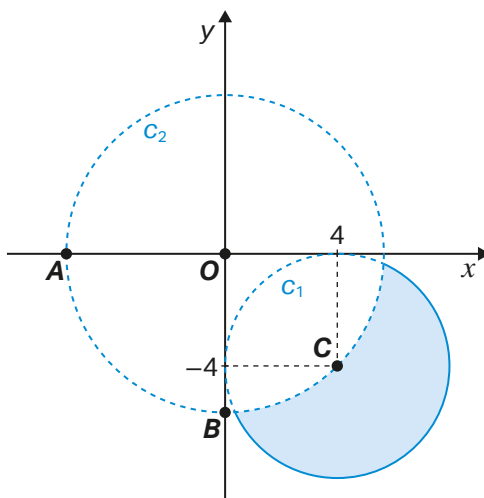
27.5.



27.6.



- 28** No referencial cartesiano o.m. xOy da figura, encontram-se representadas duas circunferências, c_1 e c_2 .



A circunferência c_1 é tangente ao eixo das abscissas e tem centro $C(4, -4)$.

A circunferência c_2 tem centro na origem do referencial e passa no centro de c_1 .

28.1. Escreve as equações reduzidas das circunferências c_1 e c_2 .

28.2. Determina as coordenadas dos pontos A e B representados na figura.

28.3. Representa, através de condições, a região colorida da figura.

Como já vimos, uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é definida por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Muitas vezes, a equação da circunferência não é apresentada desta forma, e podemos usar o método do completamento do quadrado para determinar o centro e o raio.

Para tal, é preciso relembrar o caso notável do **quadrado de um binómio**:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Repara que:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times 2x + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times 5x + 5^2 = (x - 5)^2$$

Nota

Para escrever um polinómio do 2.º grau na forma $a(x - b)^2 + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, recorremos ao método de completamento do quadrado, utilizando o caso notável do quadrado de um binómio.

Exemplos

1. A circunferência c_1 é definida pela seguinte condição:

$$x^2 - 10x + y^2 + 6y - 1 = 0$$

Para escrever a equação reduzida de c_1 , começamos por completar os quadrados:

$$\bullet \quad x^2 - 10x + (-5)^2 - (-5)^2 = (x - 5)^2 - 25$$

Metade de -10 : -5

$$\bullet \quad y^2 + 6y + 3^2 - 3^2 = (y + 3)^2 - 9$$

Metade de 6 : 3

Assim:

$$x^2 - 10x + y^2 + 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 25 + (y + 3)^2 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25 + 9 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 35$$

A circunferência c_1 tem centro $C(5, -3)$ e raio $\sqrt{35}$.

2. Determinar a equação reduzida da circunferência definida por:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 4x + 2^2 - 2^2}_{(x+2)^2} + \underbrace{y^2 - 6y + (-3)^2 - (-3)^2}_{(y-3)^2} + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 + 9 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

Exercícios

- 29 Escreva a equação reduzida de cada uma das circunferências seguintes e indica os respectivos centro e raio.

29.1. $x^2 + 12x + y^2 - 4y = 10$

29.2. $x^2 + y^2 - 16y - 10 = 0$

29.3. $x^2 + y^2 - 4x + 5y - 2 = 0$

29.4. $x^2 + y^2 - 3x = \frac{1}{4}$

29.5. $x^2 + y^2 + 9x - y = 2$

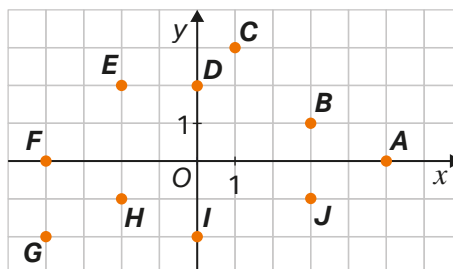
29.6. $x^2 + y^2 - y = 0$

- 30 Mostra que a equação $x^2 + x + y^2 - 4y + 10 = 0$ não define uma circunferência.

- 31 Indica o centro e o raio da circunferência definida pela equação $2x^2 - 8x + 2y^2 + y = 4$.

Para aplicar

- 1 Observa o referencial o.m. xOy da figura, em que estão representados os pontos $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J .



- 1.1. Escreve as coordenadas dos pontos representados.
- 1.2. Determina a distância entre os pontos:
 - a) I e A ;
 - b) B e C ;
 - c) G e E ;
 - d) E e C .
- 1.3. Determina o ponto médio do segmento de reta:
 - a) $[HA]$
 - b) $[HD]$
 - c) $[EB]$
 - d) $[EJ]$
- 1.4. Considera o triângulo $[EJB]$.
Usando a unidade do referencial como unidade de medida de comprimento, determina a medida do perímetro do triângulo.
- 1.5. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[EJ]$.
 - a) Verifica se o triângulo $[CMB]$ é retângulo em M .
 - b) Classifica o triângulo $[MHJ]$ quanto aos lados.
- 1.6. Escreve a equação que define a reta:

a) FG	b) BJ
c) GI	d) ED
e) HJ	f) DI
g) FA	h) EH
- 1.7. Escreve a equação da reta que passa no ponto C e é paralela ao:
 - a) eixo Ox ;
 - b) eixo Oy .
- 1.8. Escreve:
 - a) a inequação cartesiana reduzida do círculo de diâmetro $[HD]$;
 - b) a equação cartesiana reduzida da circunferência de centro C e que passa no ponto B .

2 Considera os pontos representados no referencial o.m. xOy .

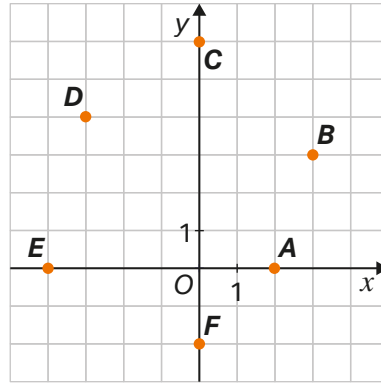
2.1. Indica as coordenadas dos pontos representados.

2.2. Escreve uma equação da mediatriz do segmento de reta:

- a) $[AD]$ b) $[CD]$
c) $[ED]$ d) $[EF]$

2.3. Determina o perímetro do pentágono $[ABCDE]$, tomando para unidade de medida de comprimento a unidade do referencial.

2.4. Escreve a inequação cartesiana reduzida do círculo de diâmetro $[DF]$.



3 Em relação a um referencial o.m. xOy , considera os pontos $C(-5, 2)$, $A(-1, -3)$ e $T(2, 3)$.

3.1. Define, através de uma condição, a circunferência:

- a) de centro A e com raio $\sqrt{3}$;
b) de centro T e que interseja o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 3)$;
c) de diâmetro $[CT]$;
d) de centro C e que é tangente à reta de equação $x = -1$.

3.2. Considera o círculo c_1 de centro A e raio $\overline{CT}$.

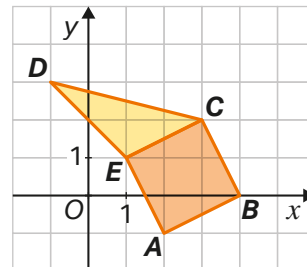
- a) Escreve a equação reduzida do círculo c_1 .
b) Indica a posição do ponto T em relação ao círculo c_1 .

4 Considera o referencial o.m. xOy da figura, em que estão representados o triângulo $[CDE]$ e o quadrado $[ABCE]$.

4.1. Indica as coordenadas dos vértices dos polígonos.

4.2. Determina o perímetro do triângulo $[CDE]$.

4.3. Considera o ponto M , ponto médio do segmento de reta $[BE]$. Escreve a equação reduzida da circunferência de centro M e a que pertence o ponto A .



Para aplicar

- 5 Considera as seguintes circunferências definidas num referencial o.m. xOy :

$$c_1: (x+2)^2 + y^2 = 36$$

$$c_2: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

$$c_3: x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$c_4: x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x = 0$$

5.1. Define c_2 , c_3 e c_4 na forma de equação reduzida.

5.2. Indica o centro e o raio de cada uma das circunferências.

- 6 Considera a circunferência de equação $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

6.1. Indica a medida do raio e as coordenadas do centro da circunferência.

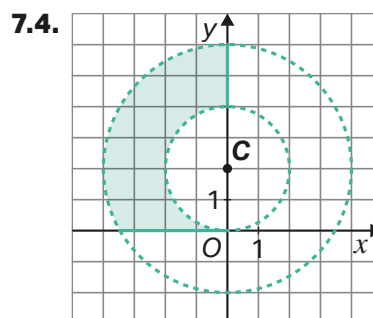
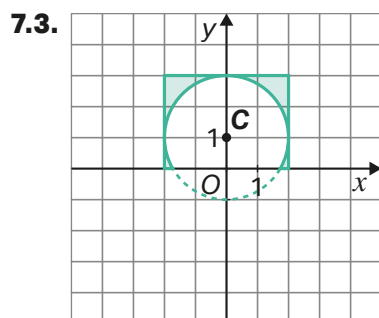
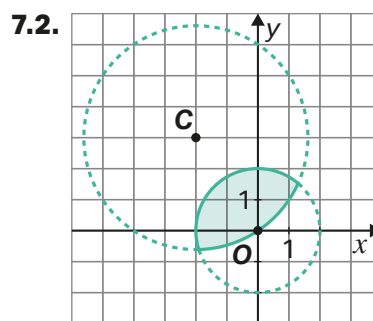
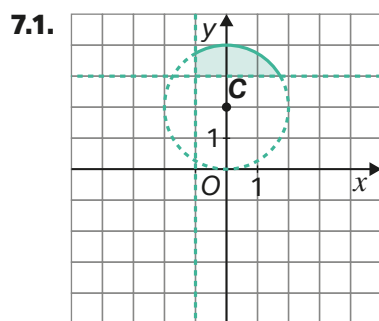
6.2. Escreve as equações das retas tangentes à circunferência que são paralelas aos eixos coordenados.

6.3. Determina a equação cartesiana reduzida da circunferência concêntrica com a circunferência dada e que passa na origem do referencial.

6.4. Define, através de condições, a coroa circular limitada pela circunferência dada e pela circunferência definida na alínea anterior.

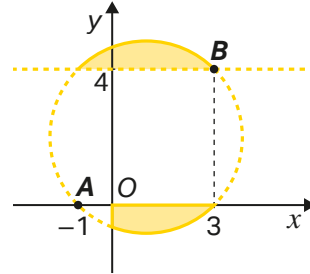
- 7 Considera as seguintes regiões coloridas, representadas em referencial o.m. xOy .

Define cada uma das regiões coloridas através de condições.



- 8 No referencial o.m. xOy da figura, encontra-se representada uma circunferência de diâmetro $[AB]$.

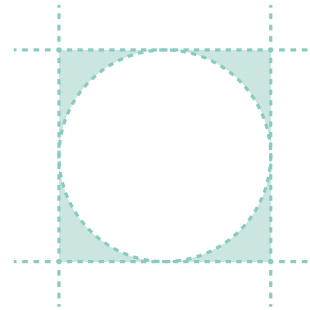
- 8.1. Escreve a equação cartesiana reduzida da circunferência.
- 8.2. Considera o ponto P de abcissa -1 . Determina a ordenada do ponto P , sabendo que ele pertence à circunferência e tem ordenada positiva.
- 8.3. Define, através de condições, a região do plano que se encontra colorida na figura.



- 9 Em relação a um referencial o.m. xOy , considera a circunferência definida pela equação:

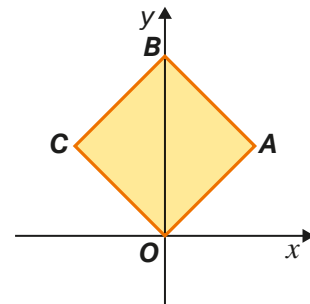
$$x^2 + y^2 - 6x + 16y = 5$$

- 9.1. Escreve a equação cartesiana da circunferência na forma reduzida.
- 9.2. Indica as equações das retas tangentes à circunferência que são paralelas aos eixos coordenados.
- 9.3. Define por uma condição a região exterior à circunferência e interior ao quadrado delimitado pelas retas definidas na alínea 9.2.



- 10 No referencial o.m. xOy da figura, encontra-se representado um quadrado, $[OABC]$, com 16 cm^2 de área.

- 10.1. Determina as coordenadas dos vértices do quadrado.
- 10.2. Escreve a equação da circunferência de centro M , ponto médio de $[OB]$, e que passa no ponto C .
- 10.3. Indica a posição do ponto $P(-1, 3)$ em relação à circunferência definida anteriormente.



- 11 Representa, num referencial o.m. xOy , os domínios planos definidos pelas seguintes condições:

- 11.1. $(x - 2)^2 + y^2 \leq 25 \wedge x \geq 1 \wedge -1 < y < 3$
- 11.2. $(x + 2)^2 + y^2 < 4 \wedge (x - 1)^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 0$
- 11.3. $x^2 + y^2 - 6x = 10 \wedge x^2 + y^2 + 10y - 9 = 0$

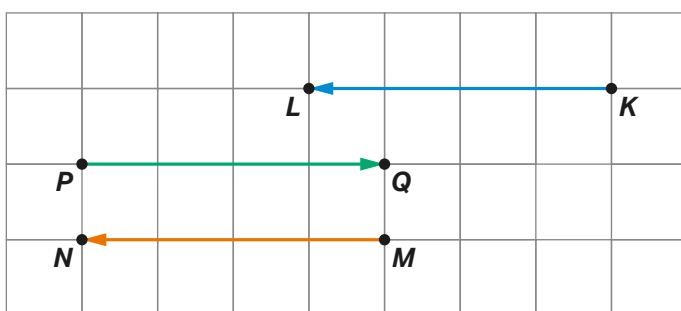
2.2. Cálculo vetorial no plano

2.2.1. Vetor no plano

Um **vetor** fica caracterizado por uma direção, um sentido e um comprimento.

Consideremos o vetor $\overrightarrow{PQ}$ da figura, que tem ponto de aplicação no ponto P e extremidade no ponto Q .

O vetor $\overrightarrow{PQ}$ tem direção horizontal, sentido da esquerda para a direita e comprimento igual a 4 u.c.



Os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{MN}$ têm a mesma direção, mas sentidos contrários.

Os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{KL}$ são iguais, porque têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Um vetor é **vetor nulo**, $\vec{0}$, se o ponto de aplicação e o ponto extremidade coincidem.

Dois vetores, não nulos, dizem-se **colineares** se têm a mesma direção.

No caso de os vetores colineares com o mesmo comprimento terem sentidos contrários, dizemos que os vetores são **simétricos**.

Os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{MN}$ são simétricos.

Assim, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{MN}$.

A saber

Um vetor é livre no plano, pois pode ser colocado em diferentes pontos de aplicação. Porém, a sua direção, o seu sentido e o seu comprimento são inalteráveis.

Nota

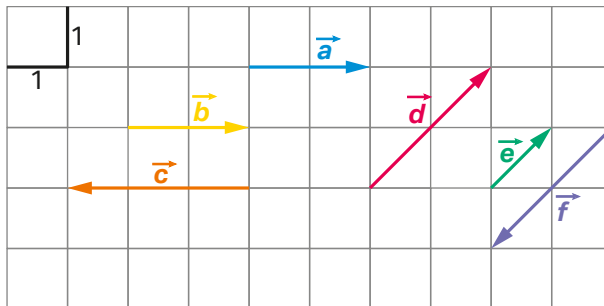
O vetor nulo, $\vec{0}$, é colinear com qualquer vetor.



Exemplos

Consideremos a figura ao lado.

1. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são iguais, pois têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.
2. Os vetores $\vec{d}$ e $\vec{f}$ são simétricos, pois têm a mesma direção, o mesmo comprimento, mas sentidos contrários.
3. O vetor $\vec{c}$ tem comprimento igual a 3.



e Manual Interativo

Vídeo
Vetores colineares e simétricos

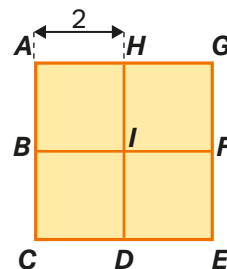


Jogo
Norma de um vetor do plano

2.2.2. Norma de um vetor

O quadrado da figura está dividido em quatro quadrados cuja medida do lado é igual a 2.

Como o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ é igual a 2, dizemos que a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 2 e representamos por $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$. Analogamente, a norma do vetor $\overrightarrow{CE}$ é 4, representando-se por $\|\overrightarrow{CE}\| = 4$.



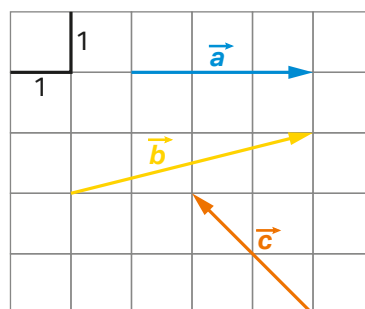
A **norma de um vetor** é a distância entre o seu ponto de aplicação e a sua extremidade.

Assim, a norma de um vetor, $\vec{u}$, é o seu comprimento, e representa-se por $\|\vec{u}\|$.

Exemplos

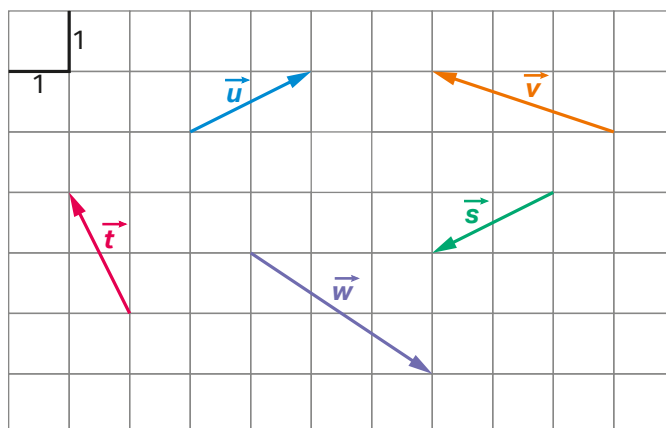
Na figura estão representados vários vetores.

1. O vetor $\vec{a}$ tem direção horizontal, sentido da esquerda para a direita e norma 3, $\|\vec{a}\| = 3$.
2. O vetor $\vec{b}$ tem norma $\sqrt{17}$, pois:
 $\|\vec{b}\|^2 = 4^2 + 1^2 \Leftrightarrow \|\vec{b}\|^2 = 17$,
então: $\|\vec{b}\| = \sqrt{17}$
 $\|\vec{c}\|^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 = 8$, então: $\|\vec{c}\| = \sqrt{8}$
A norma do vetor $\vec{c}$ é $\sqrt{8}$.



Exercícios

Observa a figura seguinte.



32 Indica:

32.1. dois vetores simétricos;

32.2. um vetor com norma $\sqrt{10}$;

32.3. um vetor com norma igual à de $\vec{u}$ mas com direções diferentes.

33 Calcula:

33.1. $\|\vec{t}\|$

33.2. $\|\vec{w}\|$

34 No teu caderno, representa:

34.1. um vetor colinear com $\vec{v}$, com norma 5 e sentido contrário ao de $\vec{v}$;

34.2. um vetor simétrico a $\vec{w}$.

2.2.3. Produto de um escalar por um vetor

Sejam $\vec{u}$ um vetor não nulo e k um número real não nulo.

$k\vec{u}$ é um vetor que tem:

- a mesma direção de $\vec{u}$;
- o mesmo sentido de $\vec{u}$ se k for um número real positivo e sentido contrário ao de $\vec{u}$ se k for um número real negativo;
- norma igual a $|k| \times \|\vec{u}\|$.

No caso de k ser nulo ou $\vec{u}$ ser o vetor nulo, então $k\vec{u}$ é vetor nulo.

Propriedade

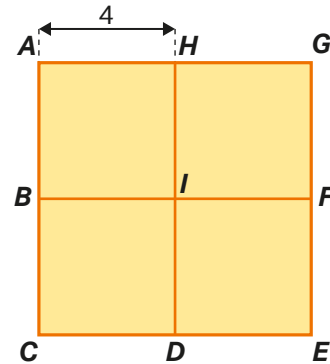
Dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, são **colineares** se existir um número real k , tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemplo

1. O quadrado da figura está dividido em quatro quadrados geometricamente iguais, com 4 u.c. de lado.

Podemos concluir que:

- $2\vec{AB} = \vec{AC}$
- $-2\vec{DI} = \vec{HD}$
- $-\frac{1}{2}\vec{EA} = \vec{AI}$
- $\|\vec{AC}\| = |2| \times \|\vec{AB}\| = 2 \times 4 = 8$
- $\|2\vec{AI}\| = |2| \times \|\vec{AI}\| = 2\sqrt{32} = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, pois $\|\vec{AI}\|^2 = 4^2 + 4^2$, logo $\|\vec{AI}\| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$;
- os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{EG}$ são colineares, sendo $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{EG}$.

**Exercício**

- 35 A figura é composta por triângulos equiláteros geometricamente iguais, cujo lado tem duas unidades de medida de comprimento.

35.1. Calcula a norma de:

a) $2\vec{HG}$

b) $\frac{1}{3}\vec{AE}$

35.2. Copia e completa, de forma a obteres afirmações verdadeiras.

a) $\vec{DF} = \dots \vec{DI}$

b) $\vec{BI} = \dots \vec{CF}$

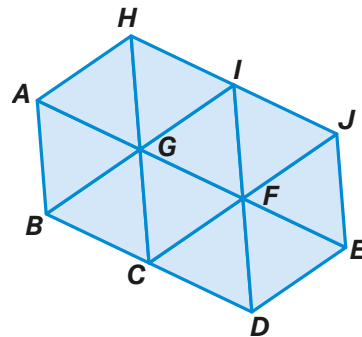
c) $\vec{HC} = \dots \vec{FI}$

d) $\vec{AE} = \dots \vec{GE}$

35.3. Indica dois vetores colineares, tais que a norma de um seja metade da norma do outro.

35.4. Indica dois vetores colineares com sentidos contrários e normas iguais.

35.5. Indica dois vetores com sentidos iguais e cuja norma de um seja o triplo da norma do outro.



2.2.4. Operações com vetores

Soma de um ponto com um vetor

Em anos letivos anteriores, aprendeste que a soma de um ponto com um vetor é um outro ponto.

Por observação da figura, verificamos que $A + \vec{u} = B$.

Assim, podemos concluir que B é a soma de A com $\vec{u}$ e que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Da mesma forma:

$$D + \vec{u} = C$$

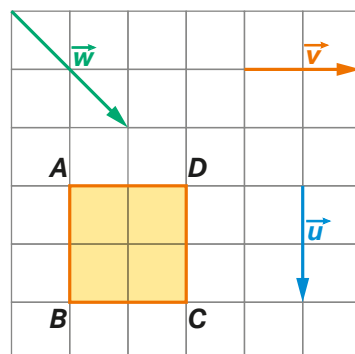
$$A + \vec{v} = D$$

$$B + \vec{v} = C$$

$$A + \vec{w} = C$$

A saber

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$



Exercícios

- 36** Na figura, os quadrados $[ABIH]$, $[BCDI]$, $[DEFI]$ e $[FGHI]$ são geometricamente iguais.

Completa as seguintes igualdades:

36.1. $A + \overrightarrow{BC} = \dots$

36.2. $H + \overrightarrow{AI} = \dots$

36.3. $C + \overrightarrow{HG} = \dots$

36.4. $D + 2 \overrightarrow{BA} = \dots$

36.5. $B + 2 \overrightarrow{HG} = \dots$

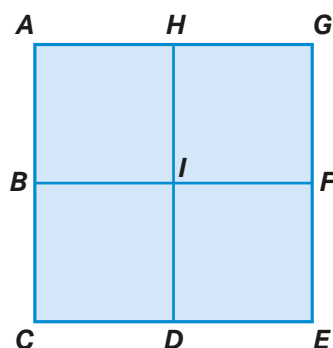
36.6. $D + 2 \overrightarrow{EF} = \dots$

36.7. $I + \frac{1}{2} \overrightarrow{CG} = \dots$

36.8. $B + \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} = \dots$

36.9. $G + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \dots$

36.10. $C - \frac{1}{2} \overrightarrow{GA} = \dots$



- 37** A figura é formada por triângulos equiláteros geometricamente iguais.

Copia e completa as igualdades seguintes:

37.1. $G + \dots = E$

37.2. $B + 2 \dots = I$

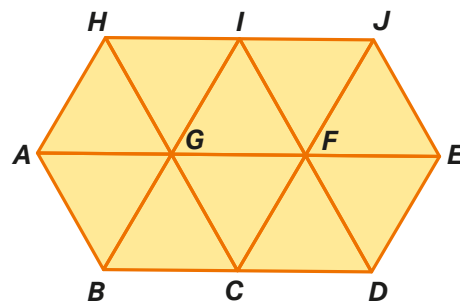
37.3. $J + \frac{1}{2} \dots = F$

37.4. $A - 2 \dots = F$

37.5. $\dots + \overrightarrow{HG} = D$

37.6. $\dots + 2 \overrightarrow{FD} = C$

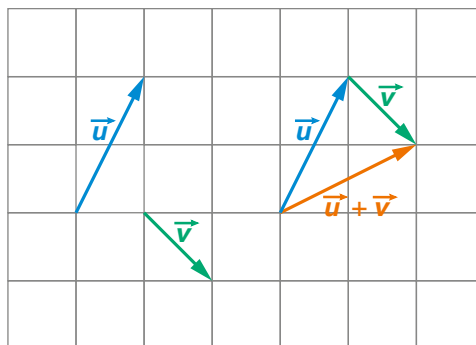
37.7. $\dots - \frac{1}{2} \overrightarrow{HC} = J$



Adição de vetores

Para adicionarmos dois vetores, podemos usar a regra do triângulo, fazendo coincidir a extremidade de um dos vetores com o ponto de aplicação do outro vetor.

Assim, **o vetor soma terá o ponto de aplicação do primeiro vetor e a extremidade do segundo vetor.**



Propriedades da adição de vetores

Consideremos três vetores quaisquer do plano: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Propriedade comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

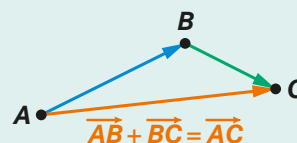
Existência de elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

O vetor nulo, $\vec{0}$, é o elemento neutro da adição de vetores.

Existência de elemento simétrico: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Propriedade associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A saber



e Manual Interativo

Vídeos

Propriedade comutativa da adição de vetores



Propriedade associativa da adição de vetores



Existência de elemento neutro para a adição de vetores



Existência de elemento simétrico para a adição de vetores



Subtração de vetores

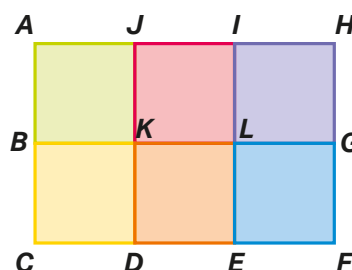
Determinar a diferença entre dois vetores corresponde a determinar a soma do aditivo pelo simétrico do subtrativo.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Exemplo

1. Na figura estão representados quadrados geometricamente iguais.

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK}$
- $\frac{1}{2} \overrightarrow{AE} + 2 \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{LE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CK}$
- $2 \overrightarrow{JK} - \frac{1}{2} \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{JD} + (-\overrightarrow{HG}) = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{JK}$
- $(\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{GF}) - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BL} + (\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BL} + (\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{BL} + (\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{BL} + \vec{0} = \overrightarrow{BL}$



Exercícios

- 38** Na figura estão representados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{t}$.

No teu caderno, representa os vetores:

38.1. $\vec{u} + \vec{v}$

38.2. $\vec{w} + \vec{v}$

38.3. $\vec{t} + \vec{v}$

38.4. $\vec{u} + \vec{w}$

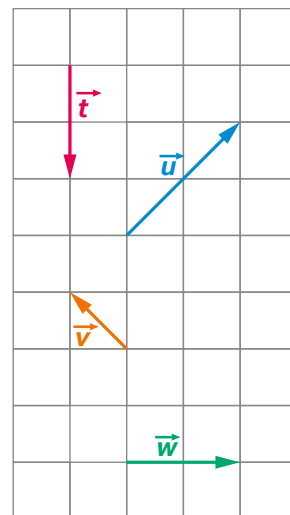
38.5. $\vec{t} + \vec{u}$

38.6. $\vec{u} - \vec{v}$

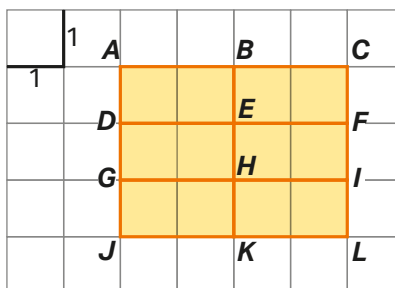
38.7. $\vec{w} - \vec{v}$

38.8. $\vec{u} - \vec{t}$

38.9. $\vec{w} - \vec{u}$



- 39** Na figura, o retângulo $[AJLC]$ está dividido em seis retângulos geometricamente iguais.



39.1. Calcula:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{GK}$

e) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BD}$

g) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{GI}$

i) $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{KI}$

b) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HI}$

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{JG}$

f) $\frac{1}{2}\overrightarrow{LJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$

h) $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{LK} - \overrightarrow{JG}$

39.2. Determina:

a) $\|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG}\|$

c) $\|\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{KJ}\|$

b) $\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FL}\|$

40 Na figura encontra-se representado o papagaio [LUAR].

A interseção das suas diagonais é o ponto O .

Copia e completa as seguintes igualdades:

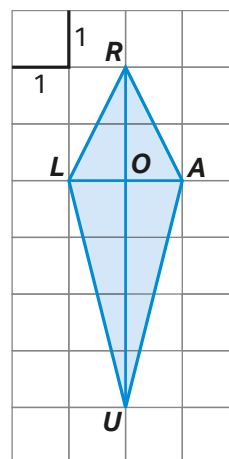
40.1. $\overrightarrow{LO} - \overrightarrow{RA} = \dots$

40.2. $\overrightarrow{LU} - \overrightarrow{LO} = \dots$

40.3. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{OU}) = \dots$

40.4. $\|\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{RO}\| = \dots$

40.5. $\|\overrightarrow{OU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{LA}\| = \dots$



e Manual Interativo

Vídeo
Coordenadas de um vetor no plano

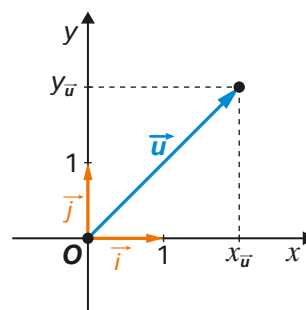


2.2.5. Coordenadas de um vetor

Num plano munido de um referencial cartesiano ortogonal e monométrico, fixada a unidade de medida, dado um vetor aplicado na origem do referencial, O , podemos dizer que as coordenadas do vetor são as coordenadas do seu ponto extremidade.

Ao considerarmos os vetores unitários com direção e sentido positivo dos eixos coordenados, obtemos os vetores $\vec{i}(1, 0)$ e $\vec{j}(0, 1)$.

Designamos por base canónica a base $(\vec{i}, \vec{j})$.



Num plano munido de um referencial o.m. xOy e de uma base canónica $(\vec{i}, \vec{j})$, um vetor $\vec{u}$ é definido por um só par ordenado de números reais $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$, tais que $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}$.

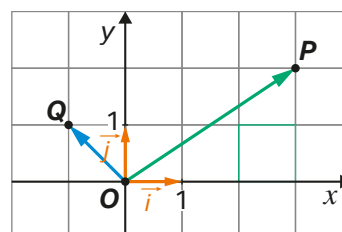
Dizemos que:

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ é um **referencial ortonormado** (o.n.);
- as **coordenadas de $\vec{u}$** são $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$;
- as **componentes de $\vec{u}$** são $x_{\vec{u}}\vec{i}$ e $y_{\vec{u}}\vec{j}$.

Exemplo

1. Observando a figura ao lado, concluímos que:

- as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ são $\overrightarrow{OP}(3, 2)$;
- as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ são $3\vec{i}$ e $2\vec{j}$;
- as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OQ}$ são $\overrightarrow{OQ}(-1, 1)$;
- as componentes do vetor $\overrightarrow{OQ}$ são $-\vec{i}$ e $\vec{j}$.



Norma de um vetor

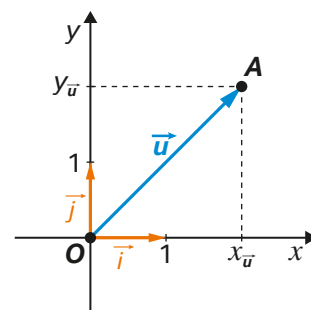
Como foi visto anteriormente, a norma de um vetor é o comprimento do segmento de reta cujos extremos são o seu ponto de aplicação e o seu extremo. Assim, a norma do vetor $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ representado na figura é igual à distância entre os pontos O e A .

$$\|\vec{u}\| = d(O, A) = \sqrt{(0 - x_{\vec{u}})^2 + (0 - y_{\vec{u}})^2} = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$$

Assim, concluímos que:

Num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a **norma** do vetor $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ é

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}.$$



e Manual Interativo

Vídeo

Vetor como diferença entre dois pontos do plano



Atividade

Norma de um vetor em função das coordenadas no plano

Exemplos

1. A norma do vetor $\vec{a}(-2, 3)$ é $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.
2. A norma do vetor $\vec{b}(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ é $\|\vec{b}\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Exercício

41 Determina a norma de cada um dos vetores apresentados.

41.1. $\vec{c}(3, -1)$

41.2. $\vec{d}(-3, \frac{1}{4})$

41.3. $\vec{u}(-2, -3)$

41.4. $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$

41.5. $\vec{t} = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$

41.6. $\vec{r} = (-\sqrt{2}, -1)$

41.7. $\vec{a}(\sqrt{2}, 3)$

41.8. $\vec{b}(2, \sqrt{3})$

41.9. $\vec{e}(\sqrt{4}, \sqrt{3})$

2.2.6. Vetor como diferença de dois pontos

Vamos considerar dois pontos, A e B , num referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tais que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

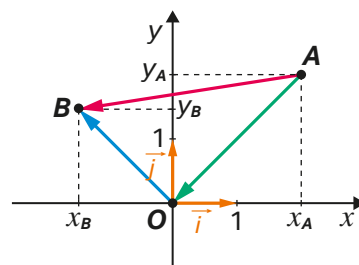
Sabemos que $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$. Logo, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Como as coordenadas de $\vec{OB}$ são iguais às coordenadas de B e, da mesma forma, as coordenadas de $\vec{OA}$ são iguais às coordenadas de A , concluímos que:

$$\vec{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Logo:

$$\vec{AB} = B - A$$



2.2.7. Coordenadas da soma e da diferença de vetores

Consideremos os vetores $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$ num referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Sabemos que:

$$\vec{u} = x_{\vec{u}} \vec{i} + y_{\vec{u}} \vec{j}$$

$$\vec{v} = x_{\vec{v}} \vec{i} + y_{\vec{v}} \vec{j}$$

Logo,

$$\vec{u} + \vec{v} = x_{\vec{u}} \vec{i} + y_{\vec{u}} \vec{j} + x_{\vec{v}} \vec{i} + y_{\vec{v}} \vec{j} = (x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}) \vec{i} + (y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}) \vec{j}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = x_{\vec{u}} \vec{i} + y_{\vec{u}} \vec{j} - x_{\vec{v}} \vec{i} - y_{\vec{v}} \vec{j} = (x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}}) \vec{i} + (y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}}) \vec{j}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}) + (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}) = (x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}, y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}) \\ \vec{u} - \vec{v} &= (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}) - (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}) = (x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}}, y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}})\end{aligned}$$

Nota: As coordenadas de um vetor que é o produto de um escalar por um vetor é dado pelo produto das coordenadas do vetor pelo mesmo escalar:

Se $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k\vec{u} = k(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}) = (kx_{\vec{u}}, ky_{\vec{u}})$

Exemplos

1. Num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, consideremos os pontos

$A(-3, 2)$, $B(-1, -5)$ e $C(4, 3)$.

Podemos determinar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$ da seguinte forma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -5) - (-3, 2) = (-1 + 3, -5 - 2) = (2, -7)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (4, 3) - (-1, -5) = (4 + 1, 3 + 5) = (5, 8)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 3) - (-3, 2) = (4 + 3, 3 - 2) = (7, 1)$$

2. Consideremos, num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, os vetores

$$\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} \text{ e } \vec{v}(2, 1).$$

Vamos determinar as coordenadas dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ e $-2\vec{u} + \vec{v}$.

As coordenadas do vetor $\vec{u}$ são $(3, -1)$.

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, -1) + (2, 1) = (5, 0)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (3, -1) - (2, 1) = (1, -2)$$

$$-2\vec{u} + \vec{v} = -2 \times (3, -1) + (2, 1) = (-6, 2) + (2, 1) = (-4, 3)$$

e Manual Interativo

Vídeos

Soma de vetores



Diferença de dois vetores



Exercícios

42 Determina as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, sabendo que:

42.1. $A(-1, 5)$ e $B(2, -3)$;

42.2. $A(-5, -2)$ e $B(2, -1)$;

42.3. $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ e $B\left(-1, \frac{1}{2}\right)$;

42.4. $A\left(0, -\frac{1}{5}\right)$ e $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

43 Considera o vetor $\overrightarrow{CD}(-3, 5)$. Determina as coordenadas do:

43.1. ponto D , sabendo que $C(-5, 1)$;

43.2. ponto C , sabendo que $D(1, -2)$.

44 Em cada uma das situações seguintes, determina o valor de $k \in \mathbb{R}$, sabendo que $\vec{m} = -3\vec{p}$.

44.1. $\vec{m}(-6, 9)$ e $\vec{p}(2k, -3)$

44.2. $\vec{p}(k-2, -2)$ e $\vec{m}(2, 6)$

44.3. $\vec{p}(2k+1, -1)$ e $\vec{m}(k-3, 3)$

44.4. $\vec{m}(k-3, k^2)$ e $\vec{p}(k-3, -3)$

45 Considera, num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, os vetores $\vec{a}(-2, 3)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{c}(3, -1)$ e $\vec{d}\left(-3, \frac{1}{4}\right)$.

Escreve as coordenadas do vetor:

45.1. $\vec{a} + \vec{b}$

45.2. $\vec{c} - \vec{b}$

45.3. $\vec{d} + 2\vec{a}$

45.4. $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

45.5. $\vec{c} - (\vec{a} + 2\vec{d})$

45.6. $2\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$

2.2.8. Vetores colineares

Considerando, num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, os vetores $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$, não nulos, sabemos que estes são **colineares** se existe um número real k , tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$\text{Assim: } \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}) = k(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}} = kx_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = ky_{\vec{v}} \end{cases}$$

Exemplo

1. Para cada situação, verificar se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

• $\vec{u}(1, -4)$ e $\vec{v}(-2, 8)$

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (1, -4) = k(-2, 8) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \times (-2) \\ -4 = k \times 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Os vetores são colineares, pois $\vec{u} = -\frac{1}{2} \times \vec{v}$.

- $\vec{u}(3, -2)$ e $\vec{v}(6, 4)$

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (3, -2) = k(6, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \times 6 \\ -2 = k \times 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

O sistema é impossível, logo os vetores não são colineares.

Exercícios

- 46** Em cada uma das situações seguintes, verifica se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

46.1. $\vec{a}(-3, 2)$ e $\vec{b}(3, -2)$

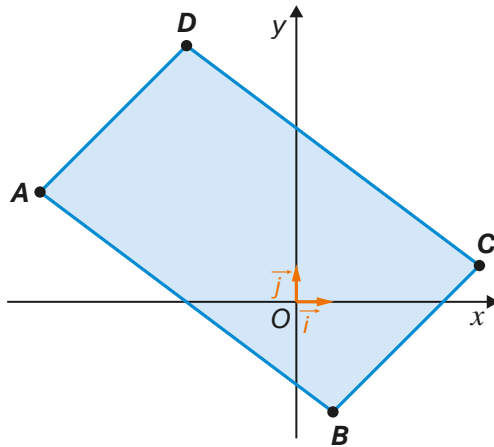
46.2. $\vec{a}(0, -3)$ e $\vec{b}(0, 6)$

46.3. $\vec{a}(4, -6)$ e $\vec{b}(0, -3)$

46.4. $\vec{a}(-4, 6)$ e $\vec{b}(2, -3)$

46.5. $\vec{a}\left(\frac{1}{4}, -3\right)$ e $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$

- 47** Na figura está representado, num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, o quadrilátero $[ABCD]$, sendo $A(-7, 3)$, $C(5, 1)$ e $D(-3, 7)$.



- 47.1.** Sabendo que $B = A + \overrightarrow{DC}$, determina as coordenadas do ponto B .

- 47.2.** Determina:

a) $\overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{CB}$

- 47.3.** Verifica se o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.

2.2.9. Vetor diretor de uma reta e seu declive

Dado um vetor, não nulo, $\vec{u}$, e uma reta, r , diz-se que $\vec{u}$ tem a direção de r quando r tem a direção de todas as retas-suporte dos segmentos orientados que representam o vetor $\vec{u}$.

Se um vetor não nulo, $\vec{u}$, tem a direção de uma reta, diz-se que $\vec{u}$ é um **vetor diretor** dessa reta.

Nota

A reta-suporte de um vetor é uma reta que contém o ponto de aplicação do vetor e tem a mesma direção que este.



Vídeos
Vetor diretor de uma reta no plano



Relação entre as coordenadas do vetor diretor e o declive de uma reta



Exemplo

1. Considera a reta t que passa nos pontos $S(-1, 5)$ e $R(2, -3)$.

Um vetor diretor da reta t é $\overrightarrow{SR} = R - S = (2, -3) - (-1, 5) = (3, -8)$.

Deste modo, qualquer vetor colinear com $\overrightarrow{SR}$ é um vetor diretor da reta t , isto é, qualquer vetor com coordenadas da forma $k(3, -8)$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é um vetor diretor da reta t .

Relação entre o vetor diretor de uma reta e o seu declive

Nos anos anteriores, aprendeste que, conhecendo dois pontos pertencentes a uma reta não vertical, é possível determinar o seu declive.

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos pertencentes a uma reta, s , não vertical.

O declive da reta s é dado por $m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, com $x_B - x_A \neq 0$.

Por outro lado, um vetor diretor da reta s é $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Assim, concluímos que o declive de uma reta é igual ao quociente entre a ordenada e a abcissa de um vetor diretor dessa reta.

O **declive**, m , de uma reta não vertical, com vetor diretor $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$, é dado por:

$$m = \frac{y_{\vec{v}}}{x_{\vec{v}}}.$$

Exemplo

1. Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(-3, 9)$.

O declive da reta s é $m_s = \frac{9}{-3} = -3$.

Exercícios

48 Determina o declive da reta a , sabendo que $\vec{a}$ é seu vetor diretor e que:

48.1. $\vec{a}(-3, 2)$

48.2. $\vec{a}(4, -6)$

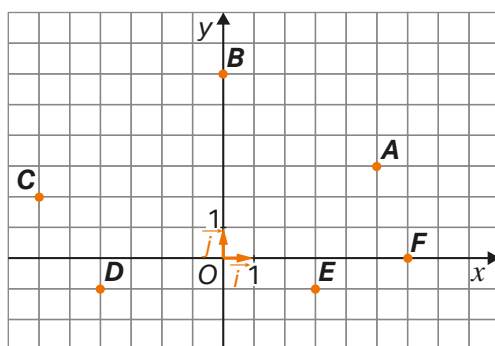
48.3. $\vec{a}(-4, 6)$

48.4. $\vec{a}\left(\frac{1}{4}, -3\right)$

48.5. $\vec{a}\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$

48.6. $\vec{a}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)$

49 Na figura estão representados, num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, os pontos A, B, C, D, E e F .



49.1. Indica as coordenadas dos pontos representados.

49.2. Determina as coordenadas do vetor:

a) $\vec{AB}$

b) $\vec{AC}$

c) $\vec{AD}$

49.3. A reta t passa nos pontos A e C . Determina o declive da reta t .

49.4. Determina o declive da reta p , que passa nos pontos B e D .

49.5. Sabe-se que a reta r tem declive 0 e passa em dois pontos representados na figura. Quais são esses pontos?

2.2.10. Equação reduzida da reta

Uma reta pode ser definida através de uma equação do tipo $y = mx + b$, em que m é o declive da reta e b é a ordenada na origem. Esta equação da reta designa-se por **equação reduzida da reta**.

A **equação reduzida de uma reta** não vertical é do tipo $y = mx + b$, em que m é o declive da reta e b é a ordenada na origem.

Se $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ é um vetor diretor da reta, então o declive da reta é $m = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$, com $x_{\vec{u}} \neq 0$.

Exemplos

1. Seja r a reta definida por $y = -2x + 5$.

O declive da reta r é $m_r = -2$.

Assim, um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1, -2)$ e qualquer vetor com coordenadas da forma $k \times (1, -2)$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é um vetor diretor da reta r .

2. A reta p é definida pela equação $x - \sqrt{5}y = 1$.

Para determinar o declive da reta p , começamos por escrever a equação que define a reta p na forma reduzida.

$$\begin{aligned} x - \sqrt{5}y = 1 &\Leftrightarrow -\sqrt{5}y = -x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}y = x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5}x - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Logo, o declive da reta p é $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. Seja t a reta que passa nos pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$.

Para escrever a equação reduzida que define a reta t , começamos por determinar o declive da reta, m_t .

Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta t .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 + 1, -3 - 3) = (3, -6)$$

Assim, $m_t = \frac{-6}{3} = -2$.

A equação reduzida da reta t é do tipo $y = -2x + b$.

Como o ponto A pertence à reta, podemos substituir x e y pelas coordenadas de A para determinar a ordenada na origem, b .

$$3 = -2 \times (-1) + b \Leftrightarrow 3 = 2 + b \Leftrightarrow b = 1$$

Logo, $y = -2x + 1$ é a equação reduzida da reta t .

Exercícios

- 50 Indica o declive da reta definida por cada uma das seguintes equações:

50.1. $y = 2x - 1$

50.2. $y = x - 5$

50.3. $y + x = 5$

50.4. $2y = \sqrt{3}x + 1$

50.5. $2y - x + 3 = 0$

50.6. $\sqrt{2}y + 3x - 1 = 0$

- 51 Em cada uma das situações seguintes, determina a equação reduzida da reta r , sabendo que:

51.1. tem declive $\frac{2}{3}$ e passa no ponto de coordenadas $(-1, 5)$;

51.2. tem $\vec{u}(-3, -9)$ como vetor diretor e passa no ponto $B(2, -3)$.

52 Escreve a equação reduzida da reta t , sabendo que passa nos pontos:

52.1. $A(-1, 5)$ e $B(2, -3)$

52.2. $C(-5, -2)$ e $D(2, -1)$

52.3. $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ e $F\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

52.4. $G\left(0, -\frac{1}{5}\right)$ e $H\left(2, \frac{1}{3}\right)$

53 Na figura está representado, num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, o triângulo $[LUA]$.

Sabe-se que as coordenadas dos vértices do triângulo são $A(7, -3)$, $L(4, 8)$ e $U(-5, 5)$.

53.1. Determina as coordenadas do vetor:

a) $\vec{AU}$

b) $\vec{LA}$

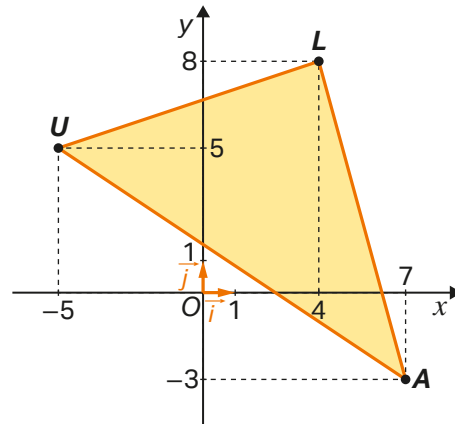
c) $\vec{UL}$

53.2. Escreve a equação reduzida da reta que contém o lado:

a) $[LU]$

b) $[UA]$

c) $[AL]$



Manual Interativo

Vídeo
Declive e vetores diretores de retas paralelas no plano



2.2.11. Posição relativa de retas no plano

Retas paralelas

Duas retas, não verticais, são **paralelas** se e só se têm o **mesmo declive**.

Se duas retas têm o **mesmo declive** e

- a **mesma ordenada na origem**, as retas dizem-se **coincidentes**;
- a **ordenada na origem for diferente**, as retas são **estritamente paralelas**.

Retas concorrentes

Duas retas, não verticais, são **concorrentes** se e só se têm **declives diferentes**.

Quando duas retas têm declives diferentes, m e m' , se o declive de uma é o simétrico do inverso do declive da outra $\left(m = -\frac{1}{m'}\right)$, então as retas são **perpendiculares**. Caso contrário, são **obíquas**.

Exemplos

Para sabermos a posição relativa de duas retas, podemos encontrar a equação reduzida de cada uma das retas, para identificar os respectivos declive e ordenada na origem.

1. $r: x - y = 2$ e $s: 2y + 2x = 4$.

$$-y = -x + 2 \Leftrightarrow y = x - 2$$

Assim, o declive da reta r é 1 e a ordenada na origem é -2 .

$$2y = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Assim, o declive da reta s é -1 e a ordenada na origem é 2.

Logo, como os declives são diferentes, as retas são concorrentes.

Como $-1 = -\frac{1}{1}$, as retas são perpendiculares.

2. $t: 2x + y = 1$ e $u: y + 2x = 4$.

$$2x + y = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

Logo, o declive da reta t é -2 e a ordenada na origem é 1.

$$y + 2x = 4 \Leftrightarrow y = -2x + 4$$

Logo, o declive da reta u é -2 e a ordenada na origem é 4.

Como os declives são iguais e as ordenadas na origem são diferentes, as retas são estritamente paralelas.

Exercícios

- 54 Considera as retas p , q , t , w e u , definidas pelas seguintes equações:

$$p: y + x = 3$$

$$q: 2y - 1 = -4x$$

$$t: x = 2 - y$$

$$w: 2x - y = 5$$

$$u: 2y - 4 = -2x$$

- 54.1. Determina, justificando, a posição relativa das retas:

a) p e q ;

b) p e t ;

c) t e u ;

d) p e w ;

e) p e u ;

f) w e q .

- 54.2. Determina o valor real de k para o qual a reta de equação $-y - kx = 3$, com $k \in \mathbb{R}$, seja estritamente paralela à reta w .

- 55 Considera as retas r e s de equações:

$$r: 2x = y - 1 \quad \text{e} \quad s: 2y - 4x = 1$$

- 55.1. Determina o declive de cada uma das retas.

- 55.2. Indica, justificando, a posição relativa das retas r e s .

- 56 Considera a reta m de equação $x - y = 5$.

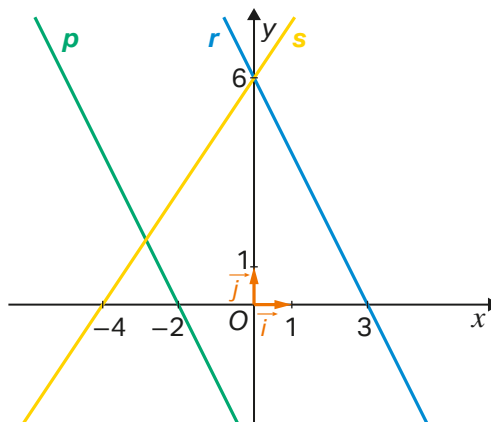
Sabendo que a reta t é estritamente paralela à reta m e passa no ponto $P\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, escreve a equação reduzida da reta t .

57 Na figura estão representadas, num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, as retas p , r e s . Tendo em consideração os dados da figura:

57.1. determina a equação reduzida da reta r ;

57.2. determina a equação reduzida da reta p , sabendo que é estritamente paralela à reta r e que passa no ponto de coordenadas $(-2, 0)$;

57.3. escreve a equação reduzida da reta s .



e Manual Interativo

Vídeo
Equação vetorial da reta no plano



2.2.12. Equação vetorial da reta

No plano, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r , que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$, uma **equação vetorial da reta r** é:

$$(x, y) = A + k \times \vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Nota que, para definir uma equação vetorial de uma reta, pode ser usado qualquer ponto e qualquer vetor diretor dessa reta. Neste sentido, há uma infinidade de equações vetoriais da mesma reta.

Exemplos

1. Consideremos a reta s de equação $(x, y) = (1, -2) + k \times (-3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.

- Qualquer vetor diretor da reta s é da forma $k \times (-3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Assim, para determinar as coordenadas de vetores diretores da reta s , basta substituir k por um número real diferente de zero. Por exemplo, para $k = 1$:

$1 \times (-3, 2) = (-3, 2)$, e, para $k = -2$, $-2 \times (-3, 2) = (6, -4)$.

Logo, os vetores de coordenadas $(-3, 2)$ e $(6, -4)$ são vetores diretores da reta s .

- Para determinar as coordenadas de pontos pertencentes à reta s , basta atribuir valores a k e substituir esses valores na equação vetorial da reta.

Por exemplo, para $k = 1$:

$(x, y) = (1, -2) + 1 \times (-3, 2) = (1, -2) + (-3, 2) = (-2, 0)$, e, para $k = -1$:

$(x, y) = (1, -2) + (-1) \times (-3, 2) = (1, -2) + (3, -2) = (4, -4)$.

Logo, os pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(4, -4)$ são dois pontos que pertencem à reta s .

2. Para escrever a equação vetorial da reta u de equação $2x + y = 5$, podemos começar por encontrar a sua equação reduzida.

$$2x + y = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$$

Assim, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1, -2)$ é um vetor diretor da reta (porque $m = \frac{-2}{1} = -2$) e $(0, 5)$ são as coordenadas de um ponto que lhe pertence.

Então, uma equação vetorial de u é:

$$(x, y) = (0, 5) + k \times (1, -2), k \in \mathbb{R}$$

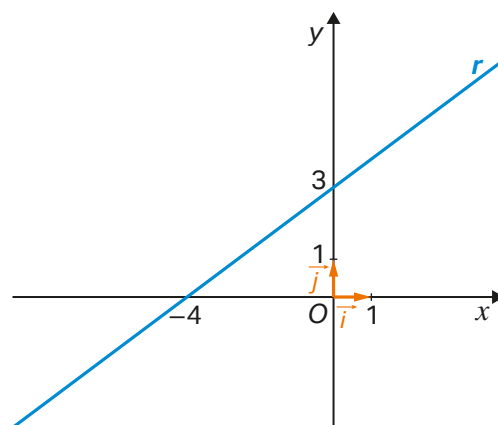
3. Na figura está representada a reta r num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Atendendo aos dados da figura, a reta passa nos pontos de coordenadas $(-4, 0)$ e $(0, 3)$, logo as coordenadas de um vetor diretor são:

$$(-4, 0) - (0, 3) = (-4, -3)$$

Então, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y) = (0, 3) + k(-4, -3), k \in \mathbb{R}$$



Exercícios

58. Escreve a equação vetorial da reta que passa:

58.1. no ponto $C(-1, -3)$ e tem $\vec{u}(-3, 2)$ como vetor diretor;

58.2. nos pontos $A(7, -3)$ e $B(1, -2)$;

58.3. nos pontos $D(-1, 5)$ e $E(2, 3)$.

59. Escreve a equação vetorial da reta:

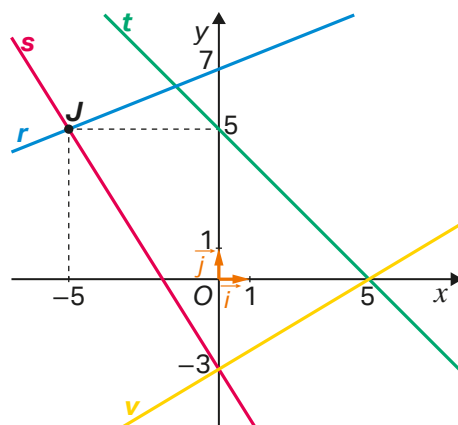
59.1. $t: y = \frac{2}{3}x - 1$

59.2. $m: y + x = 2$

59.3. $p: 2y - x = -4$

60. Escreve uma equação vetorial da reta estritamente paralela à reta de equação $2y - 6x - 2 = 0$ e que passa no ponto $F(0, -2)$.

- 61 Na figura estão representadas, num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, as retas r , s , t e v . Tendo em consideração os dados apresentados na figura, determina uma equação vetorial de cada uma das retas representadas.



Manual Interativo

Vídeo

Equação vetorial e equações paramétricas de uma reta no plano



2.2.13. Equações paramétricas da reta

Em relação a um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, consideremos a reta r , que passa no ponto $A(x_A, y_A)$ e tem $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ como vetor diretor. Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r , sabemos que uma equação vetorial da reta r é $(x, y) = A + k \times \vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$.

Assim, $(x, y) = (x_A, y_A) + k \times (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$, $k \in \mathbb{R}$.

Deste modo, $(x, y) = (x_A + k \times x_{\vec{u}}, y_A + k \times y_{\vec{u}})$, $k \in \mathbb{R}$.

Daqui resulta o sistema de equações paramétricas da reta r :

$$\begin{cases} x = x_A + k \times x_{\vec{u}} \\ y = y_A + k \times y_{\vec{u}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

No plano, consideremos uma reta, não vertical, que passa no ponto $A(x_A, y_A)$ e que tem $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ como vetor diretor. Um ponto $P(x, y)$ pertence a essa reta se:

$$\begin{cases} x = x_A + k \times x_{\vec{u}} \\ y = y_A + k \times y_{\vec{u}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1. A reta de equação $(x, y) = (-3, 1) + k(2, -1)$, $k \in \mathbb{R}$ admite as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 1 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

2. Consideremos a reta r definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3k \\ y = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Podemos determinar a abcissa do ponto da reta que tem ordenada 4 da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 3k \\ 4 = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ -2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times (-2) = -6 \\ -2 = k \end{cases}$$

Assim, a abcissa do ponto é -6 .

3. Num plano munido de um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, consideremos a reta s definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- Podemos determinar as coordenadas de pontos da reta. Por exemplo:

$$\text{Para } k = 1: \begin{cases} x = 2 - 3 \times 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } k = -1: \begin{cases} x = 2 - 3 \times (-1) \\ y = -(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Logo, os pontos de coordenadas $(-1, -1)$ e $(5, 1)$ pertencem à reta s .

- Conseguimos também determinar as coordenadas de vetores diretores da reta. Das equações paramétricas, sabemos que um vetor diretor da reta é $\vec{r} = (-3, -1)$. Qualquer vetor colinear com este tem a mesma direção da reta. Por exemplo, $\vec{u} = (3, 1)$.
- Vejamos como determinar as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados.

Qualquer ponto pertencente ao eixo das abcissas tem ordenada nula. Então:

$$\begin{cases} x = 2 - 3k \\ 0 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 \times 0 \\ 0 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ k = 0 \end{cases}$$

A reta intersesta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(2, 0)$.

Qualquer ponto pertencente ao eixo das ordenadas tem abcissa nula. Então:

$$\begin{cases} 0 = 2 - 3 \times k \\ y = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = k \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

A reta intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -\frac{2}{3})$.

Exercícios

62 Define, através de equações paramétricas, a reta que passa:

62.1. no ponto de coordenadas $(-2, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (1, -3)$;

62.2. no ponto de coordenadas $(3, -2)$ e tem a direção do vetor $\vec{s} = (0, 2)$;

62.3. no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e tem a direção do vetor $\vec{t} = (-1, 0)$;

62.4. no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = \left(-\frac{2}{5}, -1\right)$.

63 Num plano munido de um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considera a reta t definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -k \\ y - 3 = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

63.1. Determina as coordenadas do ponto da reta t que tem abcissa -2 .

63.2. Indica dois vetores que têm a mesma direção da reta t .

63.3. Determina o ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas.

64 Num plano munido de um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considera a reta p definida pela equação vetorial: $(x, y) = (-1, 3) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$.

64.1. Define a reta p através de equações paramétricas.

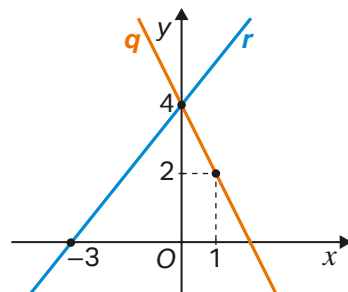
64.2. Sabendo que o ponto de coordenadas $(-1 - m, m + 5)$, com $m \in \mathbb{R}$, pertence à reta p , determina o valor de m .

64.3. Determina as coordenadas dos pontos de interseção da reta p com os eixos coordenados.

65 Na figura estão representadas, num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, as retas q e r .

Sabe-se que:

- as retas interseçam-se no ponto de coordenadas $(0, 4)$;
- a reta r interseca o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(-3, 0)$;
- a reta q passa no ponto de coordenadas $(1, 2)$.



65.1. Define a reta q através de equações paramétricas.

65.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta q com o eixo das abcissas.

65.3. Escreve um sistema de equações paramétricas da reta r .

Para aplicar

- 1 Em relação a um referencial ortonormado xOy , considera os pontos $A(-3, 4)$ e $B(-1, -2)$ e os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v}(1, -3)$.

1.1. Calcula a norma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

1.2. Determina as coordenadas de:

- a) $\overrightarrow{AB}$
- b) $\vec{u} + 2\vec{v}$
- c) $2\vec{u} - \vec{v}$
- d) $-3\vec{v} - \vec{u}$
- e) $\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{3}{2}(\vec{u} + \vec{v})$
- f) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u} + 2\overrightarrow{AB})$

1.3. Verifica se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

1.4. Considera o vetor $\vec{w}(k+1, 6)$, com $k \in \mathbb{R}$. Determina k , se:

- a) $\vec{w}$ e $\vec{v}$ forem colineares;
- b) $\vec{w}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem colineares.

- 2 Considera os pontos $R(-2, 5)$, $S(3, -1)$ e $T(1, -3)$, representados num referencial ortonormado xOy .

2.1. Determina:

- a) a norma de $\vec{v}$, sendo $\vec{v} = 3\overrightarrow{RS}$;
- b) as coordenadas do ponto P , sabendo que $P = T - 2\overrightarrow{RS}$;
- c) as coordenadas do ponto $M(t, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$, sabendo que os vetores $\overrightarrow{TM}$ e $\overrightarrow{RS}$ são colineares.

2.2. Mostra que o triângulo $[RTS]$ é um triângulo escaleno.

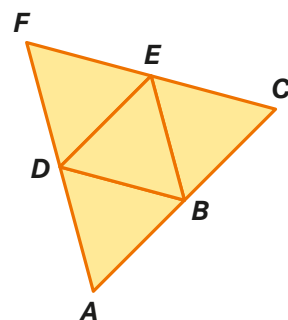
- 3 Na figura, o triângulo $[ACF]$ está dividido em quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais.

3.1. Determina:

- a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EB}$
- b) $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

3.2. Mostra que:

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC}) - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) = \vec{0}$$



- 4 Considera, num plano munido por um referencial ortonormado xOy , as retas r , s e t definidas por:

$$r: (x, y) = (-1, 5) + k(-2, -3), k \in \mathbb{R}$$

$$s: 2x - y = 5$$

$$t: \begin{cases} x = 1 - k \\ y - 2 = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- 4.1. Determina os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados.
 4.2. Escreve um sistema de equações paramétricas da reta r .
 4.3. Determina as coordenadas de dois pontos da reta t .
 4.4. Indica um vetor diretor de cada uma das retas.
 4.5. Define a reta s através de equações paramétricas.
 4.6. Indica a posição relativa das retas:

a) r e s .

b) r e t .

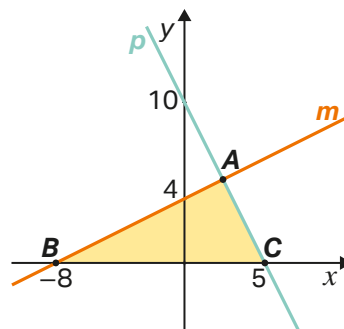
c) s e t .

- 5 Considera, num plano munido por um referencial ortonormado xOy , os pontos $A(-3, 5)$, $B(-2, 0)$ e $C(0, -5)$ e o vetor $\vec{u}(-2, 3)$.

- 5.1. Escreve uma equação vetorial da reta AB .
 5.2. Escreve a equação reduzida da reta que passa no ponto B e tem a direção do vetor $\vec{u}$.
 5.3. Escreve um sistema de equações paramétricas da reta s , sabendo que é estritamente paralela à AB e que passa no ponto C .
 5.4. Determina o ponto de interseção da reta AB com a reta de equação $3y - x = 1$.

- 6 No referencial ortonormado xOy da figura, estão representadas as retas p e m . Atenta nos dados da figura.

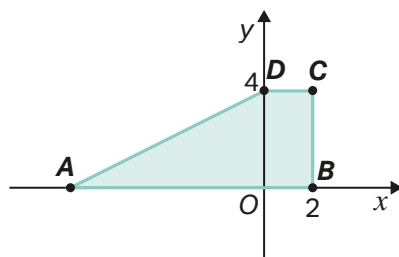
- 6.1. Escreve uma equação reduzida da reta p .
 6.2. Escreve uma equação vetorial da reta m .
 6.3. As retas interseitam-se no ponto A .
 Determina as coordenadas do ponto A .
 6.4. Determina a medida da área do triângulo $[ABC]$.



Para aplicar

- 7** Considera, num plano munido por um referencial ortonormado xOy , um trapézio retângulo, $[ABCD]$, e os dados apresentados na figura.

A reta AD é definida pela equação $2y - 8 = x$.



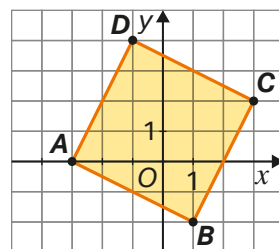
- 7.1.** Determina as coordenadas do ponto A , ponto de interseção da reta AD com o eixo das abcissas.
- 7.2.** Indica as coordenadas do ponto C .
- 7.3.** Utilizando como unidade de medida de comprimento a unidade do referencial, determina a medida da área do trapézio $[ABCD]$.
- 7.4.** Escreve a equação reduzida da reta AD .
- 7.5.** Define, através de condições, o trapézio retângulo $[ABCD]$.

- 8** Considera as retas q e r definidas por:

$$q: (x, y) = (1, -2) + k(5, -5), k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r: \begin{cases} x + 2 = 3k \\ -2y - 1 = 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

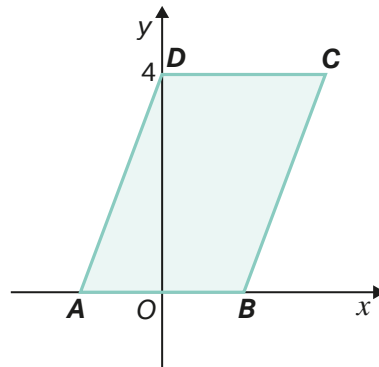
- 8.1.** Indica a posição relativa das retas q e r .
- 8.2.** Verifica se o ponto $A(-2, 5)$ pertence à reta r .
- 8.3.** Escreve a equação reduzida da reta q .
- 8.4.** Escreve uma equação vetorial da reta r .

- 9** Na figura encontra-se representado, num referencial o.m. xOy , o quadrado $[ABCD]$.



- 9.1.** Define a reta através de uma equação reduzida:
- a)** AD **b)** DC
- c)** AB **d)** BC
- 9.2.** Define o quadrado $[ABCD]$ através de condições.
- 9.3.** Mostra que as retas AD e BC são estritamente paralelas.
- 9.4.** Determina as coordenadas do ponto M , ponto médio do segmento de reta $[AC]$.
- 9.5.** Considera a circunferência em que o quadrado $[ABCD]$ está inscrito. Escreve a equação reduzida dessa circunferência.

- 10** No referencial o.n. xOy da figura, cuja unidade é o centímetro, encontra-se representado um paralelogramo, $[ABCD]$, com 12 cm^2 de área.



10.1. Determina as coordenadas dos vértices do paralelogramo, sabendo que o ponto O é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

10.2. Escreve a equação reduzida da reta:

a) AD

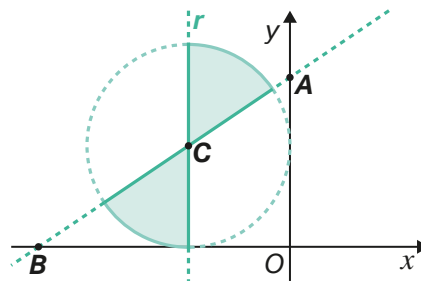
b) BC

10.3. Define, através de condições, a região do plano colorida, isto é, o paralelogramo $[ABCD]$.

- 11** Considera a figura representada num referencial o.n. xOy .

Sabe-se que:

- a circunferência representada é definida pela equação $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$;
- o ponto C é o centro da circunferência;
- $A(0, 5)$
- o ponto B é o ponto de interseção da reta CA com o eixo Ox ;
- a reta r é paralela ao eixo Oy .



11.1. Define a circunferência representada por uma equação cartesiana reduzida.

11.2. Determina as coordenadas do ponto C .

11.3. Escreve a equação reduzida da reta CA .

11.4. Determina as coordenadas do ponto B .

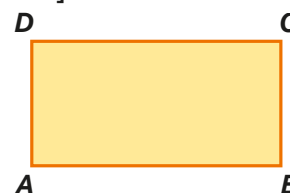
11.5. Define, por condições, a região do plano que se encontra colorida na figura.

- 12** Na figura encontra-se representado um retângulo, $[ABCD]$.

Sabe-se que $\overline{AB} = 2 \overline{BC}$.

Seja a a medida do comprimento de $[BC]$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Mostra que $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5} a$.



2.3. Geometria analítica no espaço



Vídeo
Referencial
cartesiano no
espaço



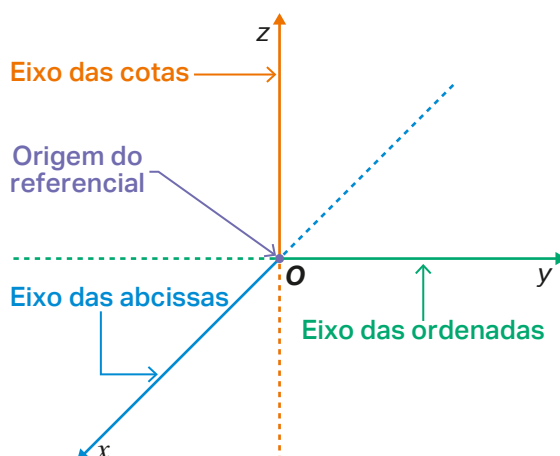
2.3.1. Referenciais no espaço

No dia a dia deparamo-nos com diversas situações em que é necessário localizar algum objeto usando três dimensões: latitude, longitude e altura.

Para localizar um objeto no espaço, é necessário definir um referencial constituído por três retas numéricas, os eixos coordenados, que se interseitam num ponto, a origem do referencial.

Definida uma unidade de comprimento no espaço, um **referencial ortogonal e monométrico** (o.m.) é constituído por três retas numéricas orientadas, com a mesma unidade de comprimento definida no espaço e perpendiculares duas a duas.

Designamos por **origem**, O , o ponto de interseção dos eixos coordenados.



Eixos do referencial:

- Ox : eixo das **abcissas**
- Oy : eixo das **ordenadas**
- Oz : eixo das **cotas**

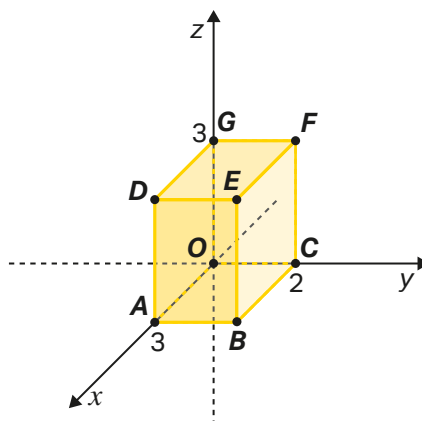
Assim, um ponto, P , no espaço é definido pelas suas coordenadas, ou seja, por um terno ordenado, (x, y, z) , sendo x a abcissa, y a ordenada e z a cota do ponto P .



Exemplos

1. As coordenadas dos vértices do prisma retangular apresentado no referencial o.m. $Oxyz$ são as seguintes:

$O(0, 0, 0)$	$A(3, 0, 0)$
$B(3, 2, 0)$	$C(0, 2, 0)$
$D(3, 0, 3)$	$E(3, 2, 3)$
$F(0, 2, 3)$	$G(0, 0, 3)$



2. Podemos determinar o valor de k , com $k \in \mathbb{R}$, tal que o ponto $P(-5, k-3, k^2-9)$ pertença ao eixo das abscissas.

Um ponto pertence ao eixo das abscissas se a ordenada e a cota são nulas ($y=0$ e $z=0$).

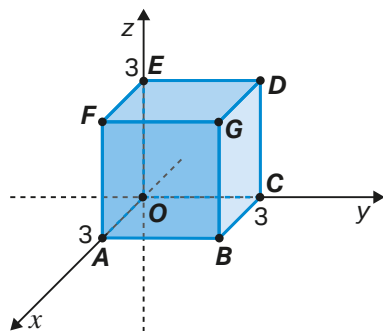
$$k-3=0 \wedge k^2-9=0 \Leftrightarrow k=3 \wedge (k=3 \vee k=-3)$$

Assim, $k=3$.

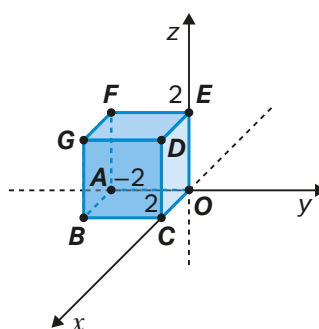
Exercícios

- 66 Em cada uma das situações seguintes foi representado um cubo num referencial o.m. $Oxyz$. Tendo em atenção os dados apresentados, indica as coordenadas dos vértices do cubo em cada um dos casos.

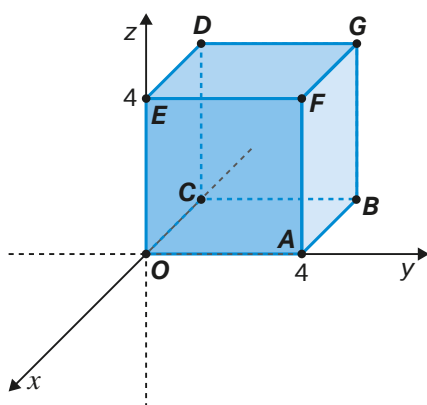
66.1.



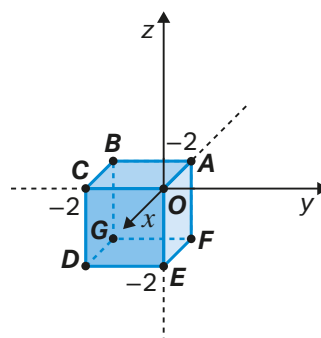
66.2.



66.3.



66.4.

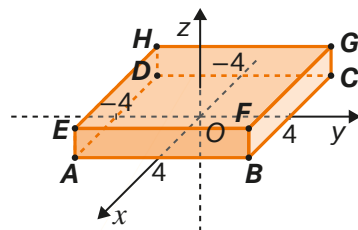




- 67 Na figura encontra-se representado um prisma quadrangular regular, $[ABCDEFGH]$, ao qual foi aplicado um referencial o.m. $Oxyz$.

Considera que a unidade do referencial é o centímetro.

Sabendo que o centro da base $[ABCD]$ corresponde à origem do referencial, $\overline{AB} = 8$ cm e $\overline{AE} = 2$ cm, escreve as coordenadas dos vértices do prisma.

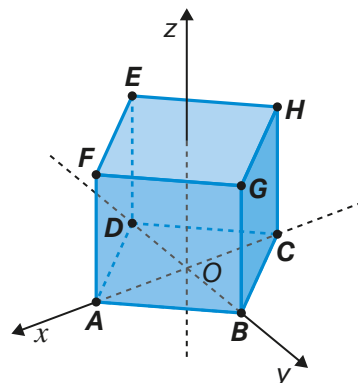


- 68 No referencial o.m. $Oxyz$ da figura, cuja unidade é o centímetro, encontra-se representado um cubo, $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o cubo tem 8 cm^3 de volume;
- os vértices A e C pertencem ao eixo das abscissas;
- os vértices B e D pertencem ao eixo das ordenadas.

Indica as coordenadas dos vértices do cubo $[ABCDEFGH]$.

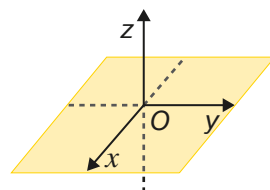


2.3.2. Planos paralelos aos planos coordenados

Planos coordenados

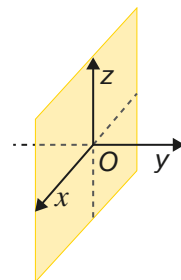
Plano xOy

Todos os pontos que pertencem ao plano xOy têm cota nula. Assim, $z = 0$ é a **equação cartesiana do plano xOy** .



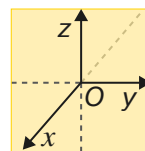
Plano xOz

Todos os pontos que pertencem ao plano xOz têm ordenada nula. Assim, $y = 0$ é a **equação cartesiana do plano xOz** .



Plano yOz

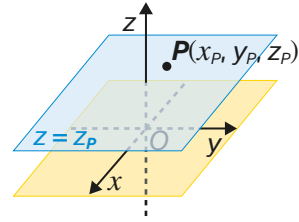
Todos os pontos que pertencem ao plano yOz têm abscissa nula. Assim, $x = 0$ é a **equação cartesiana do plano yOz** .



Planos paralelos aos planos coordenados

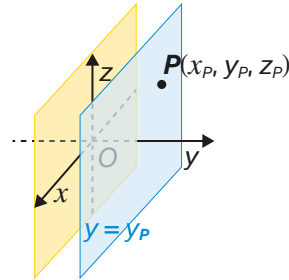
Consideremos um ponto $P(x_P, y_P, z_P)$, representado num referencial o.m. $Oxyz$.

Qualquer plano paralelo a xOy e que passa no ponto $P(x_P, y_P, z_P)$ é constituído por pontos que têm cota igual à cota do ponto P .



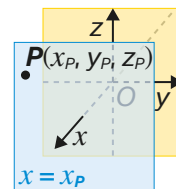
Qualquer **plano paralelo ao plano xOy** e que passa no ponto $P(x_P, y_P, z_P)$ é definido pela equação $z = z_P$.

Todos os pontos com ordenada y_P pertencem a um plano paralelo ao plano coordenado xOz que passa no ponto P .



Qualquer **plano paralelo ao plano xOz** e que passa no ponto $P(x_P, y_P, z_P)$ é definido pela equação $y = y_P$.

Da mesma forma, todos os pontos que têm abcissa igual a x_P pertencem ao plano paralelo ao plano yOz e que passa no ponto P .

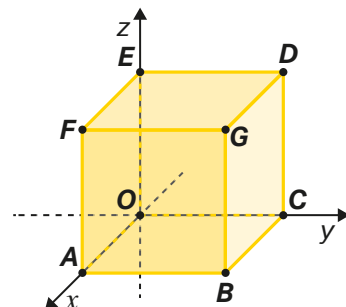


Qualquer **plano paralelo ao plano yOz** e que passa no ponto $P(x_P, y_P, z_P)$ é definido pela equação $x = x_P$.

Exemplos

Na figura está representado, num referencial o.m. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$ com 4 cm de medida de aresta. A unidade do referencial é o centímetro.

1. Como o plano ABG é paralelo ao plano coordenado yOz , todos os seus pontos têm a mesma abcissa. Assim, a equação cartesiana do plano ABG é $x = 4$.



2. Como o plano DEF é paralelo ao plano coordenado xOy , todos os seus pontos têm a mesma cota.

Assim, o plano DEF é definido pela equação cartesiana $z = 4$.

3. Como o plano BCD é paralelo ao plano coordenado xOz , todos os seus pontos têm a mesma ordenada.

Assim, o plano BCD é definido pela equação cartesiana $y = 4$.

4. A equação cartesiana do plano COE é $x = 0$.

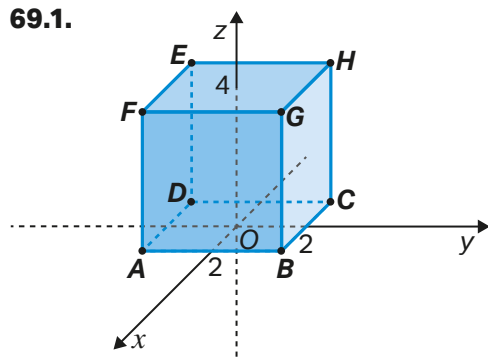
5. Consideremos o plano paralelo ao plano DEF e que passa no ponto $P(1, -2, 5)$.

Como o plano DEF é definido pela equação $z = 4$, a equação cartesiana do plano que lhe é paralelo e que passa no ponto P é $z = 5$.

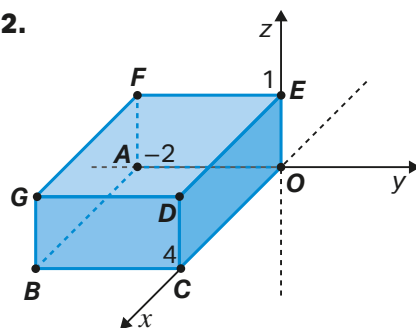
Exercícios

- 69 Em cada uma das situações seguintes, escreve as equações cartesianas dos planos que contêm as faces do prisma representado em cada referencial o.m. $Oxyz$.

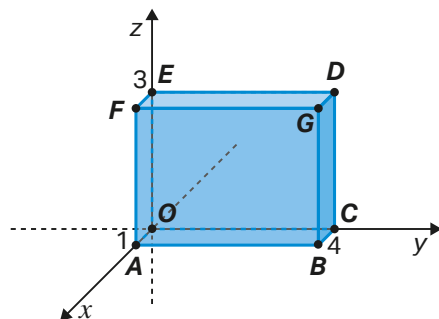
69.1.



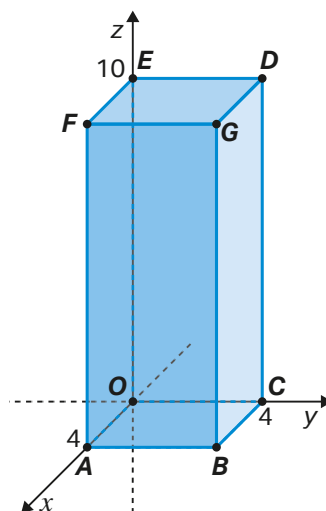
69.2.



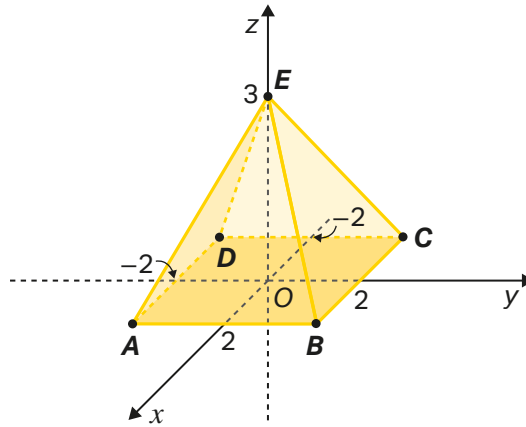
69.3.



69.4.



- 70** Considera a pirâmide quadrangular regular que se encontra representada no referencial o.m. $Oxyz$ da figura.



- 70.1.** Indica as coordenadas dos vértices da pirâmide.
- 70.2.** Escreve a equação cartesiana do plano:
- a) que contém a base da pirâmide;
 - b) paralelo à base da pirâmide e que passa no vértice E ;
 - c) paralelo ao plano coordenado yOz e que passa no vértice D ;
 - d) paralelo ao plano coordenado xOz e que contém a reta BC .

e Manual Interativo

Vídeo
Equações
cartesianas de
retas paralelas a
um dos eixos



2.3.3. Retas paralelas aos eixos coordenados

Eixos coordenados

Como os eixos coordenados são a interseção de dois planos, definimos cada eixo coordenado como conjunção das equações cartesianas desses planos.

Eixo Ox

Todos os pontos que pertencem ao eixo Ox têm ordenada e cota nulas. Desta forma, o **eixo Ox** é definido pelo **sistema de equações cartesianas** $y = 0 \wedge z = 0$.

Eixo Oy

Todos os pontos que pertencem ao eixo Oy têm abcissa e cota nulas. Desta forma, o **eixo Oy** é definido pelo **sistema de equações cartesianas** $x = 0 \wedge z = 0$.

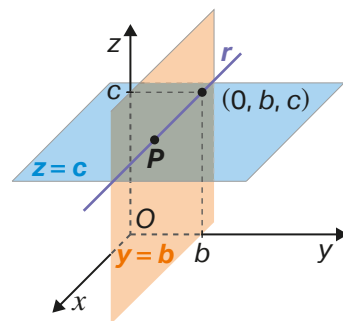
Eixo Oz

Todos os pontos que pertencem ao eixo Oz têm abcissa e ordenada nulas. Desta forma, o **eixo Oz** é definido pelo **sistema de equações cartesianas** $x = 0 \wedge y = 0$.

Retas paralelas aos eixos coordenados

Consideremos, num referencial o.m. $Oxyz$, um ponto, P , de coordenadas (a, b, c) , com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

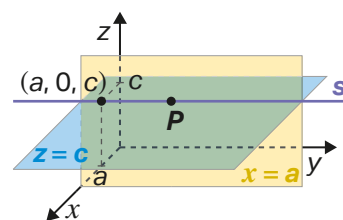
Consideremos a reta r que é a interseção dos planos definidos por $y = b$ e $z = c$. Esta reta é paralela ao eixo coordenado Ox e intersesta o plano yOz no ponto de coordenadas $(0, b, c)$.



Assim, concluímos que:

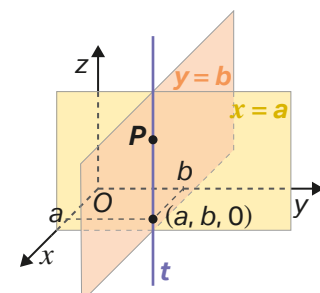
Qualquer **reta paralela ao eixo Ox** pode ser definida por um sistema de equações do tipo $y = b \wedge z = c$, com $b, c \in \mathbb{R}$.

Da mesma forma, verificamos que a reta que é a interseção dos planos definidos por $x = a$ e $z = c$ intersesta o plano coordenado xOz no ponto de coordenadas $(a, 0, c)$ e é paralela ao eixo coordenado Oy .



Qualquer **reta paralela ao eixo Oy** pode ser definida por um sistema de equações do tipo $x = a \wedge z = c$, com $a, c \in \mathbb{R}$.

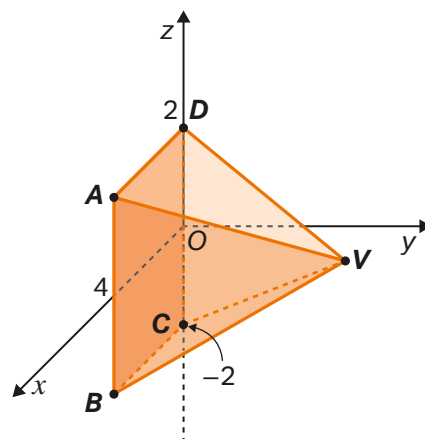
A interseção dos planos definidos por $x = a$ e $y = b$ é uma reta, t , que intersesta o plano xOy no ponto de coordenadas $(a, b, 0)$ e é paralela ao eixo das cotas, Oz .



Qualquer **reta paralela ao eixo Oz** pode ser definida por um sistema de equações do tipo $x = a \wedge y = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

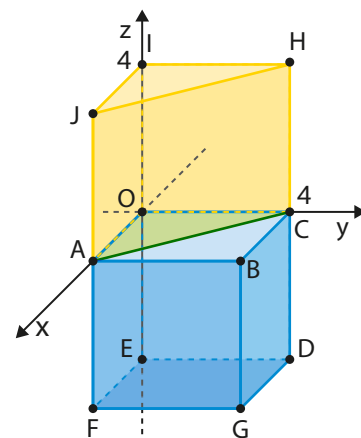
Exercícios

- 71** Considera a pirâmide quadrangular regular representada no referencial o.m. $Oxyz$. Sabe-se que, fixado o centímetro como unidade do referencial, a medida da altura da pirâmide é 4 cm.



- 71.1.** Indica as coordenadas dos vértices da pirâmide.
- 71.2.** Escreve o sistema de equações da reta:
- a) AB b) BC
c) CD d) AD
- 71.3.** Escreve o sistema de equações que define a reta que passa no ponto V e:
- a) é paralela à reta AB ;
b) é paralela à reta AD ;
c) é paralela ao eixo coordenado Oy .

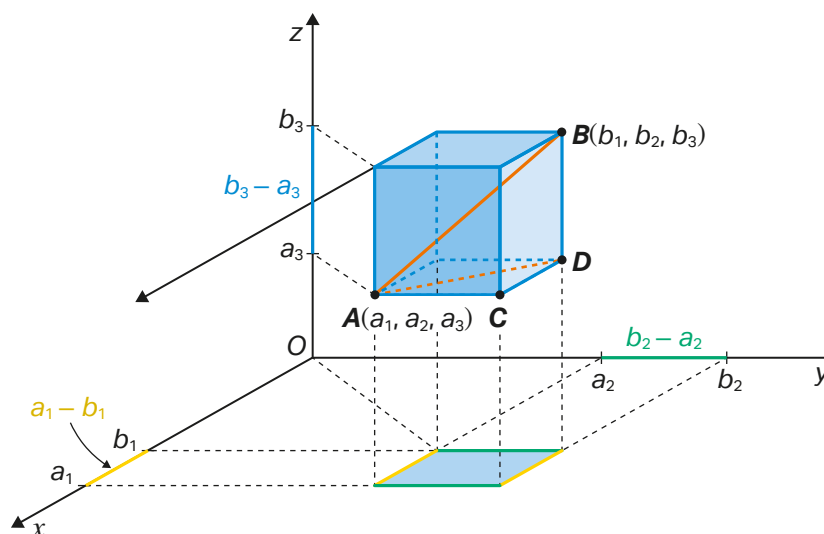
- 72** No referencial o.m. $Oxyz$ da figura, encontram-se representados dois sólidos geométricos: o cubo $[OABCDEFG]$ e o prisma triangular $[OACHIJ]$, em que O é o ponto médio de $[IE]$.



- 72.1.** Escreve as coordenadas dos vértices dos sólidos representados.
- 72.2.** Escreve a equação do plano:
- a) paralelo a xOy e que passa no ponto E ;
b) que contém a face $[BGDC]$;
c) paralelo a xOz e que passa no ponto H .
- 72.3.** Escreve o sistema de equações que define a reta:
- a) paralela ao eixo Oy e que passa no ponto A ;
b) paralela ao eixo Ox e que passa no ponto H ;
c) paralela ao eixo Oz e que passa no ponto D .
- 72.4.** Escreve a conjunção de condições que define o segmento de reta:
- a) $[BG]$ b) $[IJ]$ c) $[JA]$
- 72.5.** Escreve a conjunção de condições que define o polígono:
- a) $[AOIJ]$ b) $[EDHI]$ c) $[FGDE]$

2.3.4. Distância entre dois pontos no espaço

Consideremos, num referencial o.m. $Oxyz$, dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$. Para determinar a distância entre esses dois pontos, $d(A, B) = \overline{AB}$, basta aplicar o Teorema de Pitágoras.



Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$, ou seja:

$$\overline{AD}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

Aplicando, novamente, o Teorema de Pitágoras, temos $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, ou seja:

$$\overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

Logo, $\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Assim, podemos concluir que:

Considerando dois pontos, $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, num referencial o. m. $Oxyz$, a **distância entre os pontos A e B** é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Ponto médio de um segmento de reta no espaço

Consideremos os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, representados num referencial o.m. $Oxyz$.

Tal como foi visto no plano, as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

$[AB]$ no espaço são: $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

e Manual Interativo

Vídeos
Distância entre dois pontos no espaço



Ponto médio entre dois pontos no espaço



Exemplo

1. Considera, num referencial o.m. $Oxyz$, os pontos $L(-1, 3, 5)$, $U(2, -3, 0)$ e $A(0, 5, -3)$.

Classifica o triângulo $[LUA]$ quanto aos lados.

$$\begin{aligned}\overline{LU} &= \sqrt{(-1-2)^2 + (3+3)^2 + (5-0)^2} = \\ &= \sqrt{9+36+25} = \sqrt{70}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{UA} &= \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2 + (0+3)^2} = \\ &= \sqrt{4+64+9} = \sqrt{77}\end{aligned}$$

$$\overline{LA} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-5)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{1+4+64} = \sqrt{69}$$

Logo, o triângulo $[LUA]$ é escaleno.

A saber

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Exercícios

73. Num referencial o.m. $Oxyz$, considera os pontos $M(-2, 0, 5)$, $A(1, -4, -2)$, $R(1, -3, 0)$ e $T(-1, 1, 3)$. Determina o valor exato de:

73.1. $\overline{MA}$

73.2. $\overline{AR}$

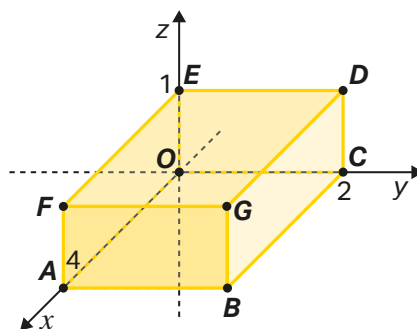
73.3. $\overline{RT}$

73.4. $\overline{MR}$

73.5. $\overline{MT}$

73.6. $\overline{AT}$

74. No referencial o.m. $Oxyz$ da figura está representado um paralelepípedo retângulo. Considera os dados apresentados na figura e considera para unidade de medida a unidade do referencial.



- 74.1. Escreve as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.
- 74.2. Qual é a medida do perímetro do triângulo $[DEF]$?
- 74.3. Determina a medida do segmento de reta $[AD]$, diagonal espacial do paralelepípedo.

2.3.5. Equação do plano mediador de um segmento de reta

O plano mediador de um segmento de reta é o conjunto de pontos do espaço que se encontram à mesma distância dos extremos desse segmento de reta.

Consideremos os pontos A , B e P num referencial o.m. $Oxyz$ e α o **plano mediador** do segmento de reta $[AB]$.

Um ponto P pertence a α se e só se $\overline{AP} = \overline{BP}$.

Exemplo

1. Consideremos, num referencial o.m. $Oxyz$, os pontos $S(-1, 3, 0)$ e $T(0, 2, -1)$.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto pertencente ao plano mediador de $[ST]$.

Pela definição de plano mediador, sabemos que $\overline{SP} = \overline{TP}$. Assim:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

$$\text{Então: } (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2z + 5 = 0$$



Vídeos
Plano mediador



Equação do plano mediador de um segmento de reta



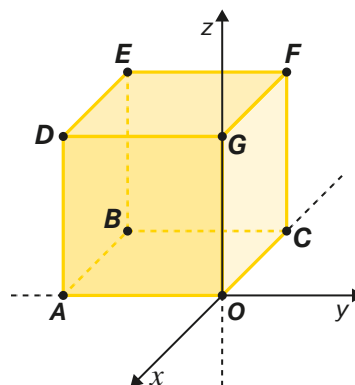
Exercícios

- 75 Num referencial o.m. $Oxyz$, considera os pontos $R(2, 1, 0)$, $S(-1, 0, 2)$, $T(0, 3, 0)$ e $U(1, 1, -2)$. Escreve a equação do plano mediador do segmento de reta:

75.1. $[RS]$ 75.2. $[ST]$ 75.3. $[SU]$ 75.4. $[TU]$ 75.5. $[RT]$ 75.6. $[RU]$

- 76 Observa a figura, em que está representado um cubo num referencial o.m. $Oxyz$. Sabendo que a unidade do referencial é o centímetro e que o cubo tem 6 cm de medida de aresta, determina:

- 76.1. as coordenadas dos vértices do cubo;
76.2. a equação do plano mediador do segmento de reta $[AE]$;
76.3. as coordenadas de um ponto P , ponto de interseção do plano mediador do segmento de reta $[AE]$ com o plano mediador do segmento de reta $[EO]$.

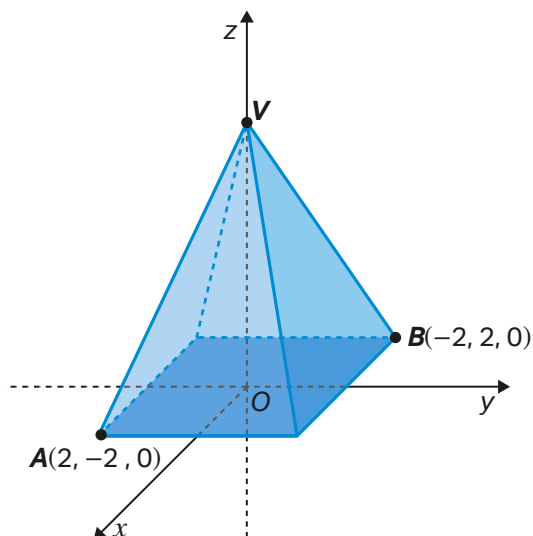


77 Considera a pirâmide quadrangular regular da figura, à qual foi aplicado um referencial o.m. $Oxyz$.

77.1. Mostra que o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ pode ser definido pela equação $y - x = 0$.

77.2. Admitindo que a medida do volume da pirâmide é igual a 32 e que uma unidade de medida corresponde a uma unidade do referencial, determina as coordenadas do vértice V da pirâmide.

77.3. Determina as coordenadas do ponto P pertencente ao eixo das cotas e ao plano mediador do segmento de reta $[AV]$.



2.3.6. Equação cartesiana reduzida da superfície esférica

Uma superfície esférica é o conjunto de pontos do espaço que se encontram à mesma distância (raio) do centro da superfície esférica.

Num referencial o.m. $Oxyz$, considera um ponto, $P(x, y, z)$, pertencente à superfície esférica de centro $C(x_c, y_c, z_c)$ e raio r (com $r > 0$), tal que $\overline{PC} = r$.

A **equação cartesiana reduzida da superfície esférica** de centro C e raio r é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

Exemplos

1. Conhecendo a equação cartesiana de uma superfície esférica, podemos determinar as coordenadas do centro e o raio dessa superfície esférica. Considerando a superfície esférica definida pela equação:

$$x^2 + (y - 3)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

O centro é $C\left(0, 3, -\frac{1}{2}\right)$ e o raio é $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

2. Do mesmo modo, para:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 6z - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + z^2 + 6z + 9 - 9 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 + (z + 3)^2 - 9 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 16$$

O centro é $C(1, 0, -3)$ e o raio é 4.

Repara que

$$x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$$

$$z^2 + 6z + 9 - 9 = (z + 3)^2 - 9$$

3. Consideremos, num referencial o.m. $Oxyz$, os pontos $A(-1, 0, 3)$ e $B(2, -1, 5)$ e determinemos a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AB]$.

$$C\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+(-1)}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$r = d(A, C) = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Logo, a equação cartesiana da superfície esférica é definida por:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 4)^2 = \frac{7}{2}$$

Exercícios

78 Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, escreve a equação cartesiana da superfície esférica de centro em P e raio r , sendo:

78.1. $P(0, -2, 5)$ e $r = \sqrt{2}$;

78.2. $P(\sqrt{3}, -1, 0)$ e $r = \frac{2}{3}$;

78.3. $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e $r = 2\sqrt{5}$.

A saber

Equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro $C(x_c, y_c, z_c)$ e raio r :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

79 Considera, num referencial o.m. $Oxyz$, as superfícies esféricas definidas pelas equações apresentadas. Indica as coordenadas do centro e o raio de cada uma das superfícies esféricas.

79.1. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \sqrt{3})^2 + z^2 = 7$

79.2. $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + z^2 = \sqrt{3}$

79.3. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 6\sqrt{2}z - 9 = \frac{1}{4}$

79.4. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 30 = 0$

79.5. $x(x + 2) - (6y - y^2) = 3 - z^2$

79.6. $2z - z^2 = x(4 + x) - \left(\frac{1}{2}y - y^2\right)$



- 80** Considera, num referencial o.m. $Oxyz$, as superfícies esféricas definidas por:

$$c_1: (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9 \quad \text{e} \quad c_2: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z = 0$$

80.1. Indica as coordenadas do centro e o raio de cada uma das superfícies esféricas.

80.2. Relativamente a cada uma das superfícies esféricas, indica a posição do ponto $P(-1, 5, 1)$.

- 81** Considera, num referencial o.m. $Oxyz$, a superfície esférica definida por:

$$(x-2)^2 + y^2 + (x+1)^2 = 4$$

81.1. Indica as coordenadas do centro e o raio da superfície esférica.

81.2. Identifica os planos tangentes à superfície esférica e que são paralelos ao:

a) plano xOz ;

b) plano yOz ;

c) plano xOy .

2.3.7. Inequação cartesiana reduzida da esfera

O conjunto de pontos do espaço que pertencem a uma superfície esférica ou ao seu interior designa-se por esfera. A distância de qualquer um desses pontos ao centro é menor ou igual ao raio.

Num referencial o.m. $Oxyz$, seja $P(x, y, z)$ um ponto da esfera de centro $C(x_c, y_c, z_c)$ e raio r (com $r > 0$).

A **equação cartesiana reduzida da esfera** de centro C e raio r é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq r^2$$

Exemplos

Consideremos, num referencial o.m. $Oxyz$, a esfera definida por:

$$x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 \leq 9$$

- 1.** Vamos verificar se o ponto $P(0, 4, -1)$ pertence à esfera.

Como $0^2 + (4-3)^2 + (-1+2)^2 = 0 + 1 + 1 = 2 \leq 9$, então o ponto P pertence à esfera.

- 2.** Podemos determinar as equações cartesianas dos planos paralelos aos planos coordenados e que são tangentes à esfera. Os planos coordenados são definidos pelas equações: $x=0$, $y=0$ e $z=0$.



A esfera tem centro $C(0, 3, -2)$ e raio 3.

- Equações dos planos tangentes à esfera e paralelos ao plano yOz : $x = 3$ e $x = -3$;
- Equações dos planos tangentes à esfera e paralelos ao plano xOz : $y = 0$ e $y = 6$;
- Equações dos planos tangentes à esfera e paralelos ao plano xOy : $z = -5$ e $z = 1$.

3. Vamos determinar o lugar geométrico definido pela interseção da esfera com o plano de equação $z = 0$.

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \leq 9 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 + (0 + 2)^2 \leq 9 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 \leq 5 \\ z = 0 \end{cases}$$

É o círculo de centro $C(0, 3, 0)$ e raio $\sqrt{5}$, contido no plano de equação $z = 0$.

Exercícios

- 82 Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, escreve a equação cartesiana da esfera de centro em P e raio r , sendo:

82.1. $P(1, -1, 0)$ e $r = 2$;

82.2. $P(1, -1, \sqrt{2})$ e $r = \sqrt{3}$;

82.3. $P(-\frac{1}{3}, 0, 0)$ e $r = \frac{1}{2}$.

A saber

Inequação cartesiana reduzida da esfera de centro $C(x_c, y_c, z_c)$ e raio r :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq r^2$$

- 83 Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, considera uma esfera de diâmetro $[XP]$, sendo $X(-1, 2, 0)$ e $P(3, 0, 5)$.

Determina a inequação cartesiana reduzida da esfera de diâmetro $[XP]$.

- 84 Considera, num referencial o.m. $Oxyz$, as esferas definidas por:

$$e_1: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 \leq 16 \quad \text{e} \quad e_2: x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \leq 9$$

84.1. Indica o raio e as coordenadas do centro de cada uma das esferas.

84.2. Escreve a equação dos planos tangentes às esferas e que são paralelos ao plano xOz .

84.3. Identifica o lugar geométrico dos pontos definidos pela interseção:

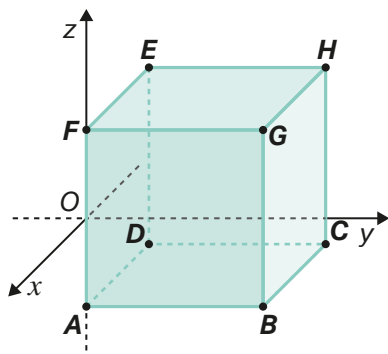
- do plano de equação $x = 2$ com a esfera e_1 ;
- do plano de equação $y = 5$ com a esfera e_2 ;
- do plano de equação $z = 4$ com a esfera e_1 .

Para aplicar

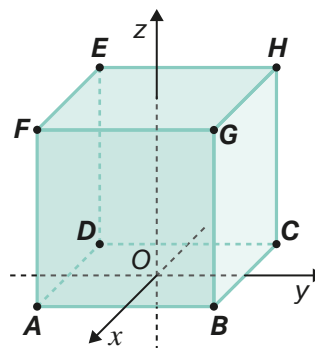
- 1** Em cada uma das figuras seguintes encontra-se representado um cubo, $[ABCDEFGH]$, com 6 cm de aresta, ao qual foi aplicado um referencial o.m. $Oxyz$.

Em cada uma das situações, indica as coordenadas dos vértices do cubo.

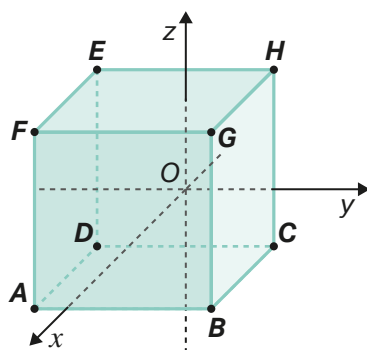
- 1.1.** A origem do referencial é o ponto médio da aresta $[AF]$ do cubo e $[AF]$ pertence ao eixo Oz .



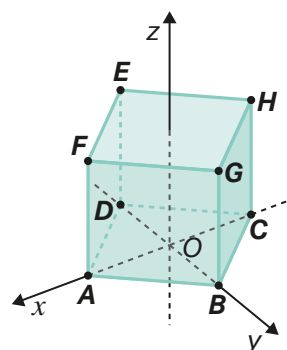
- 1.2.** A origem do referencial é o centro da face $[ABCD]$, que está contida no plano xOy .



- 1.3.** A origem do referencial é o centro do cubo e $[ABCD]$ é paralela ao plano xOy .



- 1.4.** A origem do referencial é o centro da face $[ABCD]$ do cubo e $[AC]$ pertence a Ox .



- 2** Considera, novamente, o cubo representado em 1.1..

- 2.1.** Indica as coordenadas de um ponto que pertença à:

a) aresta $[FE]$; **b)** face $[DCHE]$; **c)** aresta $[HC]$; **d)** face $[ABCD]$.

- 2.2.** Indica a condição do plano que:

a) contém a face $[DCHE]$;
b) contém a face $[ABCD]$;
c) passa no ponto B e é paralelo ao plano xOz ;
d) passa no ponto D e é paralelo ao plano yOz .

- 3 Considera os pontos $A(1, 2, -5)$, $B(-2, 0, 3)$ e $C(-3, 4, 0)$ em relação a um referencial o.m. $Oxyz$.

3.1. Calcula a distância entre os pontos A e B .

3.2. Determina a equação do plano mediador do segmento de reta:

a) $[BC]$

b) $[AC]$

c) $[BA]$

3.3. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[BC]$. Escreve a equação cartesiana da superfície esférica de centro M e que passa no ponto A .

3.4. Escreve a equação do plano que passa no ponto A e é paralelo:

a) ao plano coordenado xOy ;

b) ao plano coordenado yOz .

3.5. Escreve as condições que definem a reta que passa no ponto C e é paralelo:

a) ao eixo coordenado Oy ;

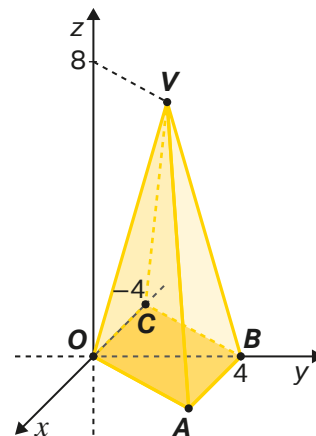
b) ao eixo coordenado Oz .

- 4 Considera a pirâmide quadrangular $[OABCV]$ cuja base, contida no plano xOy , é um paralelogramo, à qual foi aplicado um referencial o.m. $Oxyz$.

4.1. Determina as coordenadas dos vértices da pirâmide.

4.2. Determina o volume da pirâmide $[OABCV]$, sendo a unidade do referencial a unidade de medida de comprimento.

4.3. Escreve a equação do plano paralelo à base da pirâmide e que contém o vértice V .



- 5 Na figura encontra-se representado um prisma quadrangular regular, tal que $[ABCO]$ está contida no plano xOy , num referencial o.m. $Oxyz$.

Sabe-se que o vértice D tem coordenadas $(4, 0, -6)$.

5.1. Indica as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

5.2. Indica a equação do plano:

a) ABG

b) GDC

c) FGD

5.3. Escreve as condições que definem a reta:

a) AB

b) CD

c) GD

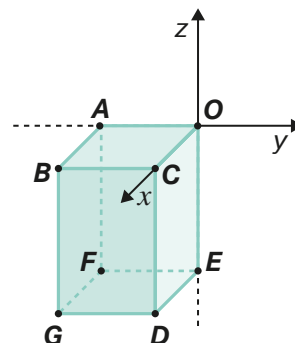
5.4. Define através de condições:

a) $[AB]$

b) $[BG]$

c) $[BGDC]$

d) $[GDEF]$



Para aplicar

- 6** Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, considera os pontos $P(2, -1, -5)$, $Q(-1, 0, 3)$, $R(2, \sqrt{3}, 0)$ e $S(3, -2, 5)$.

6.1. Determina a equação cartesiana reduzida da superfície esférica:

- a)** de centro P e raio $\frac{1}{2}$; **b)** de centro Q e raio $\sqrt{2}$.

6.2. Determina a inequação cartesiana reduzida da esfera:

- a)** de centro R e raio $2\sqrt{5}$; **b)** de diâmetro $\overline{SO}$.

- 7** Considera, num referencial o.m. $Oxyz$, as superfícies esféricas e as esferas definidas a seguir. Em cada uma das situações, indica as coordenadas do centro e a medida do raio.

7.1. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = 5$

7.2. $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \leq 9$

7.3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 11$

7.4. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}y + \frac{2}{5}z - \frac{1}{25} = 0$

7.5. $x(x - 2) + y(y - 10) + z^2 + \frac{101}{4} = 0$

7.6. $x(x + 4) + y^2 + z(z - 6) - \frac{61}{4} \leq 0$

- 8** Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, considera as superfícies esféricas definidas por:

$s_1: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 - 2z = 10$ e $s_2: x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 9$

8.1. Indica as coordenadas do centro e a medida do raio de cada uma das superfícies esféricas.

8.2. Indica a posição do ponto $P(2, -1, 3)$ em relação à superfície esférica s_1 .

8.3. Escreve as equações dos planos tangentes à superfície esférica s_2 que são paralelos aos planos coordenados.

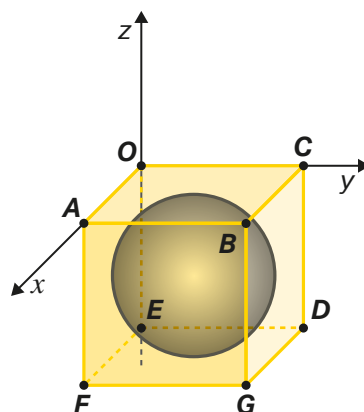
8.4. Determina o(s) ponto(s) de interseção da superfície esférica s_1 com:

- a)** o eixo coordenado Ox ;
b) o eixo coordenado Oy ;
c) o eixo coordenado Oz .

8.5. Sejam A e B os centros das superfícies esféricas s_1 e s_2 , respetivamente. Escreve a inequação cartesiana reduzida da esfera de diâmetro $\overline{AB}$.

- 9 Na figura está representada uma esfera inscrita num cubo, ao qual foi aplicado um referencial o.m. $Oxyz$, cuja unidade é o centímetro.

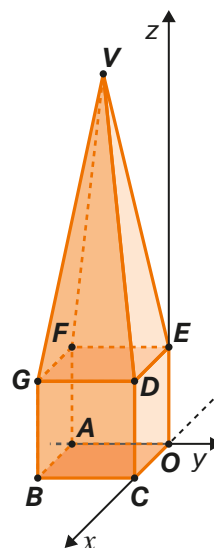
A medida da aresta do cubo é 4 cm.



- 9.1.** Indica as coordenadas dos vértices do cubo.
- 9.2.** Determina as coordenadas do centro da esfera e a medida do seu raio.
- 9.3.** Escreve a inequação cartesiana reduzida da esfera.
- 9.4.** Indica as coordenadas dos pontos de tangência da esfera com o cubo.
- 9.5.** Define, por uma condição, o lugar geométrico que representa a interseção da esfera com:
- a)** o plano de equação $y = 2$; **b)** o plano de equação $x = 3$;
- c)** o plano de equação $z = -1$.

- 10 Considera um cubo com 2 cm de aresta, ao qual foi aplicado um referencial o.m. $Oxyz$, tal como representado na figura.

Na base superior do cubo foi colocada uma pirâmide quadrangular regular, fazendo coincidir a base da pirâmide com a face superior do cubo.



- 10.1.** Indica as coordenadas dos vértices do cubo.
- 10.2.** Sabendo que o volume da pirâmide é igual ao volume do cubo, determina as coordenadas do vértice V da pirâmide, admitindo que a unidade de medida de comprimento é a unidade do referencial.
- 10.3.** Calcula a distância entre os pontos:
- a)** B e E ; **b)** G e V ;
- c)** C e V ; **d)** A e V .
- 10.4.** Escreve a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro V e que tem como plano tangente o plano FGD .
- 10.5.** Escreve a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[GV]$.
- 10.6.** Escreve a equação do plano mediador de $[GV]$ e determina as coordenadas do seu ponto de interseção com o eixo Ox .

2.4. Cálculo vetorial no espaço

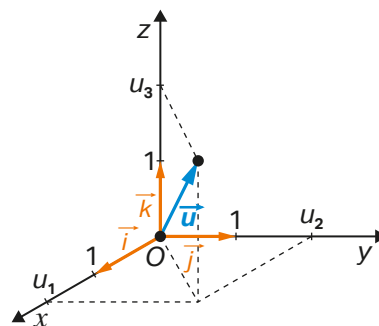
2.4.1. Generalização dos conceitos abordados no plano

Coordenadas de um vetor no espaço

No espaço munido de um referencial ortonormado $Oxyz$ e de uma base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dado um vetor aplicado na origem do referencial, O , podemos dizer que as coordenadas do vetor são as coordenadas do seu ponto extremidade.

Ao considerarmos os vetores unitários com direção dos eixos e sentido positivo dos eixos, obtemos os vetores $\vec{i}(1, 0, 0)$, $\vec{j}(0, 1, 0)$ e $\vec{k}(0, 0, 1)$.

Designamos por base canónica a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



No espaço munido de um referencial o.m. $Oxyz$ e de uma base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, um vetor $\vec{u}$ é definido por um só terno ordenado de números reais, $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$, tal que:

$$\vec{u} = x_{\vec{u}} \vec{i} + y_{\vec{u}} \vec{j} + z_{\vec{u}} \vec{k}$$

Dizemos que:

- $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é um **referencial ortonormado** (o.n.);
- as **coordenadas** de $\vec{u}$ são $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$;
- as **componentes** de $\vec{u}$ são $x_{\vec{u}} \vec{i}$, $y_{\vec{u}} \vec{j}$ e $z_{\vec{u}} \vec{k}$.

Operar com coordenadas de vetores no espaço é semelhante ao que já abordámos no plano.

A norma de um vetor no espaço é determinada de forma análoga à do plano.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabemos que:

A **norma** de um vetor $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$, num referencial ortonormado $Oxyz$, é dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 + z_{\vec{u}}^2}$$



Vídeo
Componentes
de um vetor no
espaço



Consideremos dois vetores, $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$, num referencial ortonormado $Oxyz$.

Adição e subtração de vetores

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) + (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}}) = (x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}, y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}, z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}})$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) - (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}}) = (x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}}, y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}}, z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}})$$

Produto de um escalar por um vetor

$$\lambda \vec{u} = (\lambda x_{\vec{u}}, \lambda y_{\vec{u}}, \lambda z_{\vec{u}}), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota

Se $\lambda < 0$, o vetor $\lambda \vec{u}$ tem sentido oposto ao de $\vec{u}$.

Vetores colineares

Os vetores $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ são colineares se e só se $\vec{v}$ é o vetor nulo ou se existe um único número real, k , tal que $\vec{u} = k \vec{v}$.

Vetor como diferença entre dois pontos

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Soma de um ponto com um vetor

Para qualquer ponto $A(x_A, y_A, z_A)$:

$$A + \vec{u} = (x_A, y_A, z_A) + (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) = (x_A + x_{\vec{u}}, y_A + y_{\vec{u}}, z_A + z_{\vec{u}})$$

Exemplos

Consideremos os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(3, -5, 1)$ e o vetor $\vec{u}(1, -3, -2)$.

1. A norma do vetor $\vec{u}$ é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

2. Podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -5, 1) - (-1, 0, 2) = (4, -5, -1)$$

3. $A + \vec{u} = (-1, 0, 2) + (1, -3, -2) = (0, -3, 0)$

4. $-2\vec{u} = -2 \times (1, -3, -2) = (-2, 6, 4)$

5. $\overrightarrow{AB} - \vec{u} = (4, -5, -1) - (1, -3, -2) = (3, -2, 1)$

Vídeo

Vetor como
diferença entre
dois pontos do
espaço



6. Podemos verificar que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ não são colineares.

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ são colineares se $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$.

$$(4, -5, -1) = k(1, -3, -2) \Leftrightarrow (4, -5, -1) = (k, -3k, -2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \\ -5 = -3k \\ -1 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = \frac{5}{3} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

O sistema é impossível, logo os vetores não são colineares.

Exercícios

85. Num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ considera os pontos $P(-3, 2, 1)$, $Q(0, 1, -5)$, $R(5, 3, -1)$ e $S(0, -5, 2)$.

85.1. Determina as coordenadas do vetor:

a) $\overrightarrow{PQ}$

b) $\overrightarrow{QR}$

c) $\overrightarrow{RS}$

d) $\overrightarrow{PR}$

e) $\overrightarrow{QS}$

85.2. Determina a norma de:

a) $\overrightarrow{PQ}$

b) $\overrightarrow{QR}$

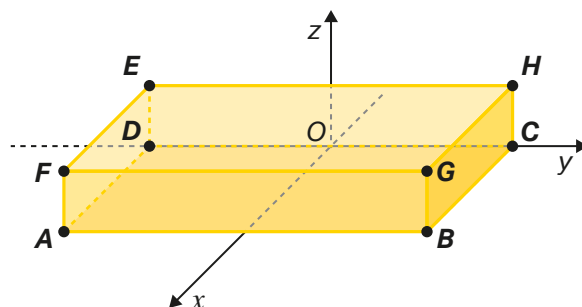
c) $\overrightarrow{PR}$

85.3. Calcula:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$;

b) $\overrightarrow{PR} - 2\overrightarrow{QS}$.

86. No referencial ortonormado da figura, está representado um paralelepípedo retângulo, $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- o vértice F tem coordenadas $(4, -3, 1)$;
- a origem do referencial é o ponto médio da aresta $[DC]$;
- os pontos D e C pertencem ao eixo Oy .

86.1. Determina as coordenadas do vetor:

a) $\overrightarrow{OG}$

b) $\overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{AH}$

e) $\overrightarrow{EB}$

f) $\overrightarrow{BC}$

g) $\overrightarrow{AF}$

h) $\overrightarrow{EH}$

i) $\overrightarrow{FH}$

86.2. Verifica se os seguintes vetores são colineares.

a) $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{HC}$;

b) $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{AC}$;

c) $\overrightarrow{EB}$ e $\overrightarrow{FC}$;

d) $\overrightarrow{EH}$ e $\overrightarrow{AB}$.

86.3. Calcula as coordenadas do ponto P , sabendo que:

a) $P = F + \overrightarrow{OA}$

b) $P = B + \overrightarrow{EH}$

c) $P = D + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{FA}$

87 Considera, num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, os vetores $\vec{v}(-1, 0, 3)$ e $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

87.1. Indica as coordenadas do vetor $\vec{u}$.

87.2. Calcula:

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$;

b) $\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$.

c) $\|\vec{v} - 2\vec{u}\|$.

87.3. Verifica se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

e Manual Interativo

Vídeo
Equação vetorial de uma reta no espaço



2.4.2. Equação vetorial da reta no espaço

Considera, num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, um ponto, $P(x_P, y_P, z_P)$, e um vetor, $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$. A reta que passa no ponto P e tem a direção de $\vec{u}$ pode ser representada por uma equação vetorial.

No espaço, seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da reta r que passa no ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$. A reta r pode ser definida pela **equação vetorial**:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}), k \in \mathbb{R}$$

Esta reta também pode ser definida, no espaço, através de um **sistema de equações paramétricas**:

$$\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1. Num referencial ortonormado do espaço, consideremos os pontos $X(-3, 2, 0)$ e $P(1, 0, -2)$.

$$\overrightarrow{XP} = P - X = (1, 0, -2) - (-3, 2, 0) = (4, -2, -2)$$

Uma equação vetorial da reta XP é:

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) + k(4, -2, -2), k \in \mathbb{R}$$

2. Num referencial ortonormado do espaço, as retas r e t são definidas pelas seguintes equações:

$$r: (x, y, z) = (-2, 1, 3) + k(1, 1, 3), k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t: \begin{cases} x = 2k \\ y = 1 \\ z = -1 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- Sabemos que o ponto $P_r(-2, 1, 3)$ pertence à reta r e que um vetor diretor da reta r é o vetor $\vec{r}(1, 1, 3)$.
- Um ponto da reta t é, por exemplo, o ponto $P_s(0, 1, -1)$ e um vetor diretor é o vetor $\vec{t}(2, 0, 3)$.
- A reta r pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 1 + k \\ z = 3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- Podemos determinar o ponto de interseção da reta r com o eixo das abcissas. Se um ponto pertence ao eixo das abcissas, então tem ordenada e cota nulas.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = -2 + k \\ 0 = 1 + k \\ 0 = 3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + k \\ -1 = k \\ -\frac{3}{3} = k \end{cases}, k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ k = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

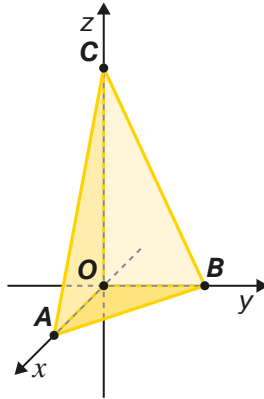
Logo, o ponto de interseção da reta r com o eixo das abcissas tem coordenadas $(-3, 0, 0)$.

- Vamos determinar as coordenadas do ponto A , sabendo que pertence à reta t e ao plano coordenado yOz .

$$\begin{cases} 0 = 2k \\ y = 1 \\ z = -1 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k \\ y = 1 \\ z = -1 + 3 \times 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Concluimos que o ponto de interseção da reta t com o plano yOz é o ponto $A(0, 1, -1)$.

3. Na figura está representada, num referencial ortonormado do espaço, uma pirâmide triangular com 7 cm^3 de volume.



Sabe-se que:

- a unidade do referencial é o centímetro;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa $\frac{7}{3}$;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada $\frac{5}{3}$;
- o ponto C pertence ao eixo Oz .
- Para determinar as coordenadas do ponto C , procedemos do seguinte modo:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times h}{3} \Leftrightarrow 7 = \frac{\frac{7}{3} \times \frac{5}{3} \times h}{3} \Leftrightarrow 7 = \frac{35}{54} \times h \Leftrightarrow h = \frac{378}{35} = \frac{54}{5}$$

Assim, as coordenadas do ponto C são $(0, 0, \frac{54}{5})$.

- $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, \frac{54}{5}) - (\frac{7}{3}, 0, 0) = (-\frac{7}{3}, 0, \frac{54}{5})$

Logo, uma equação vetorial da reta AC é:

$$(x, y, z) = (\frac{7}{3}, 0, 0) + k(-\frac{7}{3}, 0, \frac{54}{5}), k \in \mathbb{R}$$

- $\overrightarrow{CB} = B - C = (0, \frac{5}{3}, 0) - (0, 0, \frac{54}{5}) = (0, \frac{5}{3}, -\frac{54}{5})$

Assim, um sistema de equações paramétricas que definem a reta CB é:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}k, k \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{54}{5}k \end{cases}$$

Exercícios

- 88** Num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considera um ponto, P , e um vetor, $\vec{v}$.

Em cada uma das situações seguintes, escreve uma equação vetorial e um sistema de equações paramétricas da reta que passa no ponto P e tem a direção do vetor $\vec{v}$.

- 88.1.** $P(0, -3, 1)$ e $\vec{v}(-3, 2, 0)$; **88.2.** $P(2, -1, 0)$ e $\vec{v}(0, -2, 5)$;
88.3. $P(0, 5, 0)$ e $\vec{v}(-1, 1, 3)$; **88.4.** $P(0, 0, 0)$ e $\vec{v}(5, 0, 2)$.

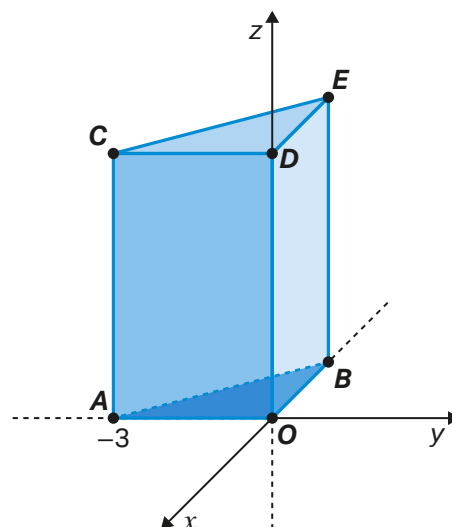
- 89** Num referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considera os pontos $R(-3, 2, 1)$ e $S(0, -1, -5)$ e as retas:

$$t: (x, y, z) = (1, 0, 3) + k(-2, -3, 1), k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p: \begin{cases} x = -k \\ y = 3 \\ z = 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

- 89.1.** Define a reta p através de uma equação vetorial.
89.2. Escreve uma equação vetorial da reta RS .
89.3. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta t com o plano coordenado yOz .
89.4. Indica o valor lógico da afirmação "A reta p não intersesta o eixo Ox ".

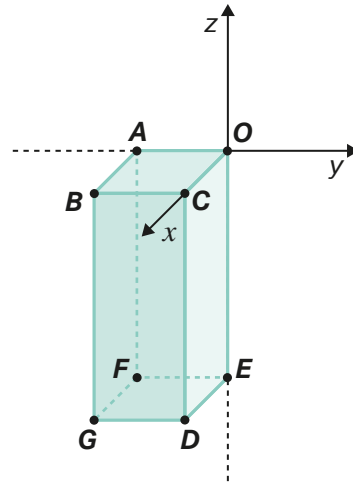
- 90** Na figura encontra-se representado um prisma triangular reto num referencial ortonormado do espaço. Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é isósceles e está contido no plano xOy , e que $\overline{OD} = 5$.

- 90.1.** Escreve as coordenadas dos vértices do prisma triangular representado.
90.2. Define a reta CE através de uma equação vetorial.
90.3. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. Define por um sistema de equações cartesianas a reta CM .
90.4. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta CM com o plano yOz .



Para aplicar

- 1 Na figura ao lado está representado um prisma quadrangular reto, ao qual foi aplicado um referencial o.n. $Oxyz$.



1.1. Determina:

- a) $\vec{G} + \vec{EO}$
- b) $\vec{B} + \vec{AE}$
- c) $\vec{BG} + \vec{AO}$
- d) $\vec{AF} + \vec{GD}$
- e) $\vec{CB} - \vec{FA}$
- f) $\vec{B} + \vec{AE} - \vec{FG}$

1.2. Sabe-se que o vértice G tem coordenadas $(2, -2, -5)$.

Indica as coordenadas dos vetores:

- a) $\vec{BD}$
- b) $\vec{AC}$
- c) $\vec{AD}$
- d) $\frac{1}{2}\vec{GE}$
- e) $\vec{BD} + 2\vec{DE}$
- f) $2\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BE}$

- 2 Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(3, 1, 0)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(5, 1, -2)$ e $D(3, 0, -2)$. Determina as coordenadas de:

- 2.1. $\vec{AB}$
- 2.2. $\vec{BC}$
- 2.3. $\vec{CD}$
- 2.4. $\vec{D} - 3\vec{AB}$
- 2.5. $2\vec{AB} - \vec{CD}$
- 2.6. $\frac{1}{2}\vec{CB} - 2\vec{AD}$

- 3 Considera num referencial o.n. $Oxyz$ os vetores $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v}(1, -3, 2)$ e $\vec{w}(-3, 6, -4)$.

3.1. Escreve as coordenadas dos vetores:

- a) $\vec{u}$
- b) $\vec{u} - \vec{v}$
- c) $\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$
- d) $\vec{w} - \vec{v} - \vec{u}$
- e) $3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$
- f) $-3\vec{w} + \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u}$

3.2. Determina a norma dos vetores:

- a) $\vec{u}$
- b) $\vec{u} - \vec{v}$
- c) $\vec{u} + \vec{v}$
- d) $\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

3.3. Verifica se são colineares os vetores:

- a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- b) $\vec{u}$ e $\vec{w}$;
- c) $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

3.4. Considera o vetor $\vec{t}(3k, -1, 2k)$, com $k \in \mathbb{R}$, colinear com $\vec{u}$. Determina o valor de k , tal que $\|\vec{t}\| = \sqrt{14}$.

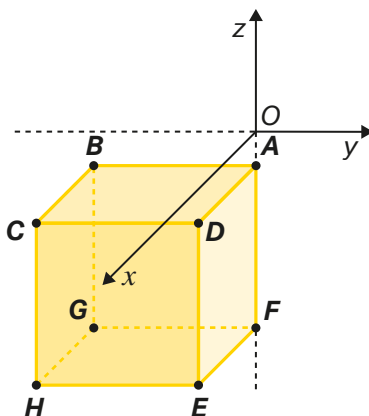
Para aplicar

- 4 Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por:

$$(x, y, z) = (-2, 3, 1) + k(3, -1, -3), k \in \mathbb{R}$$

- 4.1.** Verifica se o ponto $P(1, 2, -2)$ pertence à reta r .
4.2. Determina o valor de m para o qual o ponto $M(-m-3, m, m+2)$, com $m \in \mathbb{R}$, pertence à reta r .
4.3. Escreve a equação vetorial da reta estritamente paralela a r e que passa no ponto $A(-3, 5, 1)$.

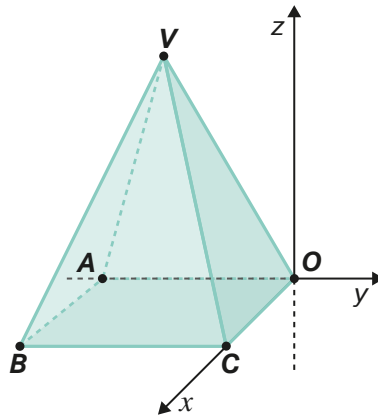
- 5 No referencial o.n. $Oxyz$ da figura encontra-se representado um cubo com 5 unidades de medida de aresta.



Sabe-se que o vértice A tem coordenadas $(0, 0, -1)$ e $[ADEF]$ pertence ao plano xOz .

- 5.1.** Determina as coordenadas dos outros vértices do cubo.
5.2. Escreve uma equação vetorial da reta CF .
5.3. Determina as coordenadas do centro do cubo e mostra que esse ponto pertence à reta CF .
5.4. Escreve uma equação vetorial da reta estritamente paralela à reta GA e que passa no ponto C .
5.5. Considera um ponto M , tal que $M = H + \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
a) Determina as coordenadas do ponto M .
b) Escreve uma equação vetorial da reta estritamente paralela a MF e que passa no ponto D .
c) Determina o ponto de interseção, se existir, da reta definida anteriormente com o eixo das cotas.

- 6 Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular num referencial o.n. $Oxyz$.



Sabe-se que $V(3, -3, 8)$ e que $[ABCO]$ pertence ao plano xOy .

6.1. Indica as coordenadas dos outros vértices da pirâmide.

6.2. Determina as coordenadas dos vetores:

a) $\overrightarrow{BV}$
c) $\overrightarrow{CV}$

b) $\overrightarrow{AB}$
d) $\overrightarrow{AV}$

6.3. Escreve uma equação vetorial da reta:

a) BV
c) AC

b) OV
d) CV

6.4. Indica as coordenadas do ponto de interseção, se existir, da reta BV com o eixo Oz .

6.5. De um ponto P pertencente à reta AC , sabe-se que a abcissa é o dobro da ordenada. Determina as coordenadas do ponto P .

6.6. Escreve uma equação vetorial da reta estritamente paralela a:

- a) BC e que passa no ponto V ;
b) CV e que passa no ponto B .

6.7. Considera o ponto M , ponto médio de $[VC]$.

- a) Escreve a equação vetorial da reta paralela a VB e que contém o ponto M ;
b) A reta definida anteriormente intersesta algum dos eixos coordenados?

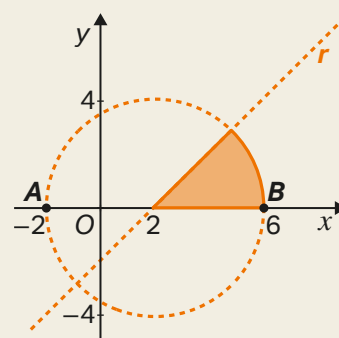
Teste

- 1 A condição que define a reta que passa pelo ponto $(-2, 3)$ e é perpendicular à reta $y = 1$ é:
- (A) $x = -2$ (B) $y = -2$ (C) $x = 3$ (D) $y = 3$
- 2 O valor de k para o qual o ponto P de coordenadas $(1 - 2k, 3k)$ pertence à reta $x = 5$ é:
- (A) 2 (B) -2 (C) -1 (D) 1

- 3 No referencial o.n. xOy da figura encontra-se representada uma circunferência de diâmetro $[AB]$ e uma reta r .

Tendo em consideração os dados da figura, indica qual das opções seguintes define a região sombreada.

- (A) $(x - 2)^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \leq x - 2 \wedge x \geq 0$
 (B) $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge y \leq -x - 2 \wedge y \geq 0$
 (C) $(x - 2)^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \leq x - 2 \wedge y \geq 0$
 (D) $(x + 2)^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \leq x - 2 \wedge y \geq 0$



- 4 No referencial $Oxyz$ está representado um cubo em que as arestas são paralelas aos eixos coordenados, a base $[ABCD]$ está contida no plano $z = 0$ e o vértice H tem coordenadas $(-2, -2, 4)$.

4.1. A distância de G a A é:

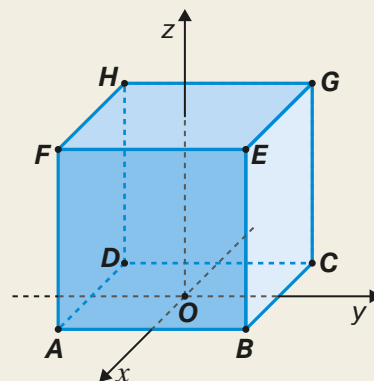
- (A) 4 (B) $4\sqrt{3}$
 (C) $3\sqrt{4}$ (D) $16\sqrt{3}$

4.2. Considera as seguintes afirmações.

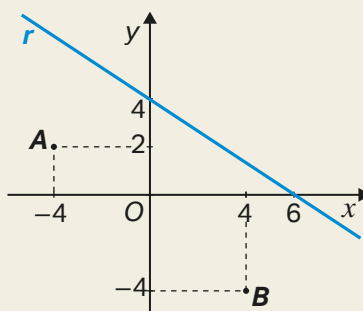
- (i) A reta EF é definida pela condição $z = 4 \wedge y = 2$
 (ii) O plano ABE é definido pela condição $x = 2$.

Qual é a opção verdadeira?

- (A) As afirmações (i) e (ii) são falsas.
 (B) As afirmações (i) e (ii) são verdadeiras.
 (C) A afirmação (i) é falsa e a (ii) é verdadeira.
 (D) A afirmação (i) é verdadeira e a (ii) é falsa.



- 5 Na figura encontra-se um referencial o.n. Oxy no qual está representada a reta r e os pontos A e B .

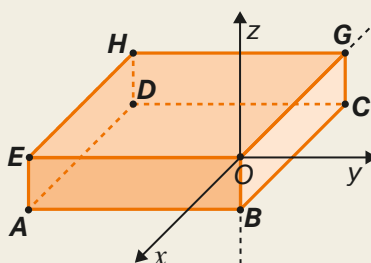


- 5.1. Representa a reta r por uma equação reduzida.
- 5.2. Escreve a equação vetorial da reta s , paralela à reta r e que contém o ponto A .
- 5.3. Escreve as equações paramétricas da reta AB .
- 5.4. Determina a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
- 5.5. Escreve a equação reduzida do círculo de diâmetro $[AB]$.

- 6 No referencial $Oxyz$ da figura encontra-se representado um prisma retangular.

Sabe-se que:

- a face $[EOGH]$ está contida no plano xOy ;
- a face $[ADHE]$ está contida no plano $y = -6$;
- o vetor $\overrightarrow{CA}$ tem coordenadas $(10, -6, 0)$ e o vértice B tem coordenadas $(0, 0, -2)$.



- 6.1. Determina as coordenadas dos vértices G e D .
- 6.2. Escreve a inequação da esfera que tem como centro o ponto médio de $[BD]$ e diâmetro $[HB]$.
- 6.3. Determina o ponto de interseção do plano mediador de $[EG]$ com o eixo Ox .

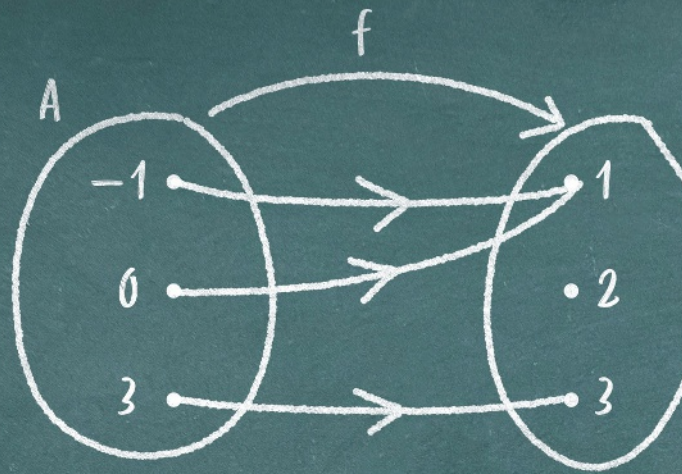
- 7 Considera a superfície esférica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 4$$

- 7.1. Escreve a equação da superfície esférica na forma reduzida.
- 7.2. Determina as equações dos planos paralelos aos planos coordenados que são tangentes à esfera.
- 7.3. Determina a interseção da superfície esférica com o plano xOy e determina o seu perímetro.

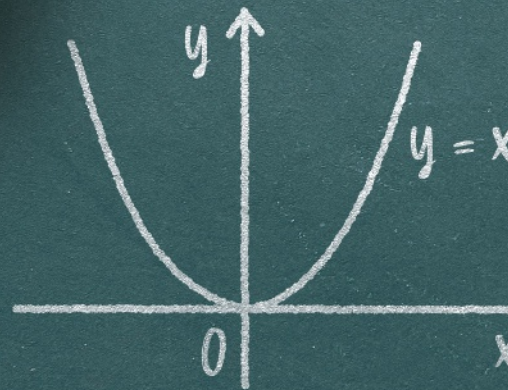


3



$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

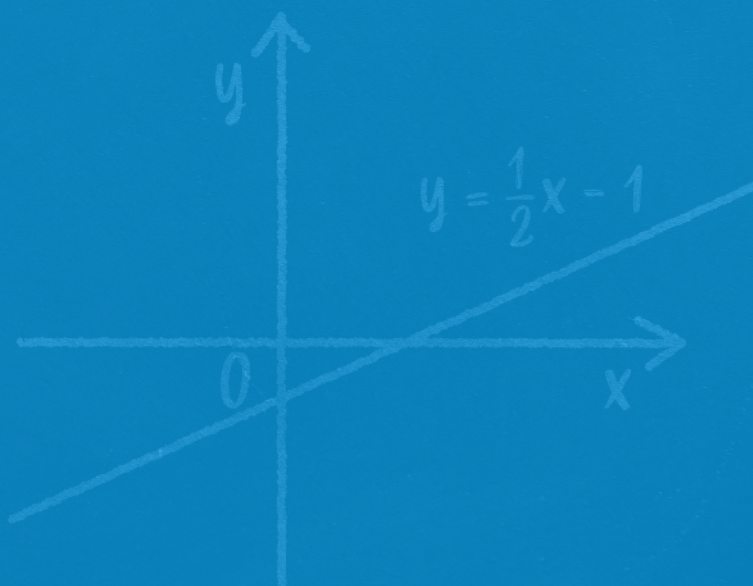
$y \mapsto$



$$(g \circ f)$$

Funções reais de variável real

- 3.1. Generalidades acerca de funções
- 3.2. Generalidades acerca de funções reais de variável real
- 3.3. Monotonia, extremos e concavidade
- 3.4. Estudo elementar das funções quadráticas, funções definidas por ramos e funções modulares



Antes de começar

e Manual Interativo

Vídeos
Funções:
conceito

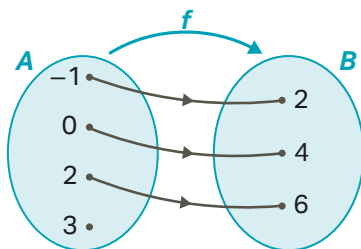


Formas de
representar uma
função

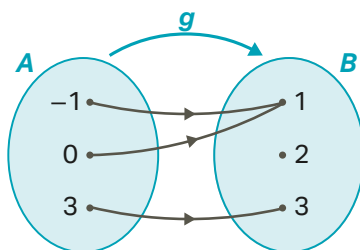


- 1 Verifica se cada uma das correspondências seguintes é uma função, justificando a tua resposta.

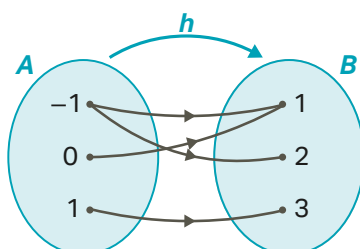
1.1.



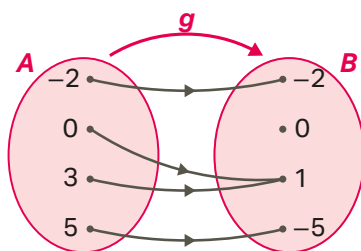
1.2.



1.3.



- 2 Considera a função g , representada pelo seguinte diagrama de setas:



Indica:

- 2.1. o domínio da função, D_g ;
- 2.2. o contradomínio da função, D'_g ;
- 2.3. a imagem de 0;
- 2.4. um objeto que tem por imagem -5 ;
- 2.5. dois objetos com a mesma imagem.

Recorda

Função

Consideremos dois conjuntos, A e B . Uma função, f , de A em B , é uma correspondência que a cada elemento, x , de A faz corresponder um e um só elemento, $f(x)$, de B . Os elementos de A designam-se por **objetos**, e o conjunto dos objetos (conjunto A) denomina-se **domínio** de f , D_f . O conjunto B é o **conjunto de chegada** de f , CC_f . O conjunto das imagens de f designa-se por **contradomínio** de f , D'_f .

Recorda

Formas de representar uma função

- Diagrama de setas
- Tabela
- Gráfico
- Representação gráfica
- Expressão algébrica

- 3 Na tabela seguinte encontra-se representada a função h .

x	-2	-1	0	3	4
$h(x)$	4	2	4	-6	-8

3.1. Representa a função h através de um diagrama de setas.

3.2. Indica:

- a) D_h
- b) D'_h
- c) a imagem de 4;
- d) o objeto que tem por imagem 2.

- 4 Considera a função p , definida por:

$$G_p = \{(-1, 3), (0, 5), (2, -3), (4, -1)\}$$

4.1. Representa p através de uma tabela.

4.2. Indica:

- a) D_p
- b) D'_p
- c) a imagem de -1;
- d) o objeto que tem por imagem 5.

Recorda

Gráfico de uma função

É o conjunto de pares ordenados cuja abcissa corresponde ao objeto do domínio e a ordenada é a imagem desse objeto.

Seja $f: A \rightarrow B$.

Então, o gráfico de f é:

$$G_f = \{(x, y) : x \in D_f \wedge y = f(x)\}.$$

- 5 Considera a função m , de domínio $D_m = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, definida pela seguinte expressão algébrica:

$$m(x) = 2x - 1$$

5.1. Determina a imagem do objeto -1 por m .

5.2. Indica o contradomínio da função m .

5.3. Representa a função m através de:

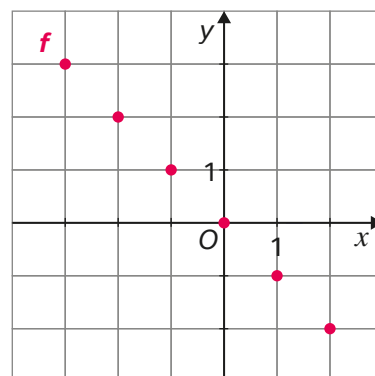
- a) uma tabela;
- b) um gráfico cartesiano.

Antes de começar

- 6 No referencial cartesiano xOy da figura, encontra-se representada graficamente a função f .

6.1. Indica:

- a) o domínio da função, D_f ;
- b) o contradomínio da função, D'_f ;
- c) a imagem, por f , do objeto -2 ;
- d) o objeto que, por f , tem imagem 1 .



6.2. Representa f através de uma tabela.

6.3. Qual das seguintes expressões algébricas poderá definir, no seu domínio, a função f ?

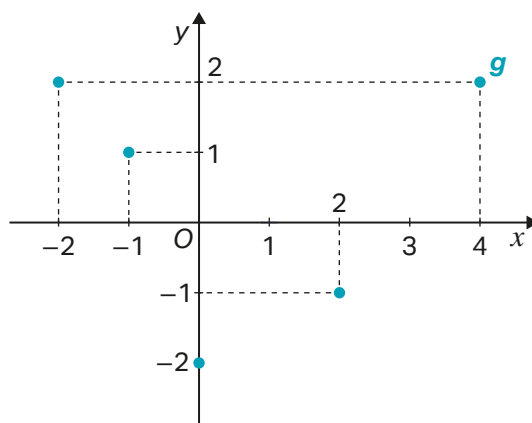
(A) $f(x) = -x - 1$

(B) $f(x) = -x$

(C) $f(x) = -1$

(D) $f(x) = x - 1$

- 7 Considera a função f , tal que $f(x) = -2x + 1$ e $D_f = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$, e a função g representada no gráfico cartesiano da figura.



7.1. Representa a função g através de uma tabela.

7.2. Indica:

- a) a imagem de 0 por f ;
- b) D_g
- c) dois objetos que têm a mesma imagem por g .

7.3. Determina o contradomínio de f , D'_f .

7.4. Calcula o valor numérico de:

a) $f(-1) - g(0)$

b) $2g(2) - \frac{g(4)}{f(-2)}$



- 8 Resolve cada uma das seguintes equações do 2.º grau, recorrendo à fórmula resolvente.

8.1. $x^2 + x - 6 = 0$ 8.2. $-x^2 - 3x - 2 = 0$

8.3. $2x^2 - 6x - 20 = 0$ 8.4. $x^2 + 2x - 3 = 0$

8.5. $-x^2 + x + 6 = 0$ 8.6. $3x^2 + 9x + 6 = 0$

- 9 Escreve cada um dos seguintes polinómios do 2.º grau na forma $a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

9.1. $x^2 + 2x + 3$

9.2. $-x^2 + 2x - 4$

9.3. $2x^2 - 4x + 5$

9.4. $-2x^2 + 12x - 8$

9.5. $3x^2 - 6x + 9$

9.6. $-3x^2 - 2x + 5$

Recorda

Fórmula resolvente de uma equação do 2.º grau

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recorda

Completar o quadrado

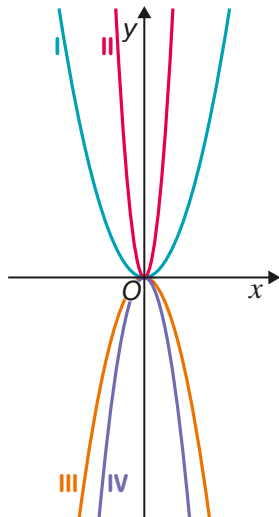
Para escrever um polinómio do 2.º grau $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, na forma $a(x - h)^2 + k$, podemos considerar

$$h = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = -\frac{b^2}{4a} + c.$$

- 10 Considera as funções quadráticas f, g, h e j , definidas por:

$$f(x) = 3x^2, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad h(x) = -x^2 \text{ e } j(x) = \frac{1}{3}x^2$$

Faz corresponder a cada função a respetiva representação gráfica, apresentada na figura seguinte:



Recorda

Funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

As representações gráficas de funções quadráticas designam-se por **parábolas**.

- Se $a > 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**.
- Se $a < 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**.

3 Funções reais de variável real

3.1. Generalidades acerca de funções

3.1.1. Produto cartesiano de dois conjuntos

Dados dois conjuntos, A e B , designa-se por **produto cartesiano de A por B** , $A \times B$, o conjunto de pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplos

Sejam $A = \{-3, -1, 0, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

1. Conseguimos formar $4 \times 3 = 12$ pares ordenados com um elemento de A e um de B .

$$A \times B = \{(-3, 1), (-3, 2), (-3, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

2. Se pretendermos determinar o produto cartesiano de B por B , $B \times B = B^2$, conseguimos formar $3 \times 3 = 9$ pares ordenados.

$$B^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Exercício

- 1 Considera os conjuntos:

$$T = \{0, 2, 3, 5\} \text{ e } S = \{1, 3, 5\}$$

Determina o produto cartesiano:

1.1. $T \times S$

1.2. $S \times T$

1.3. T^2

1.4. S^2

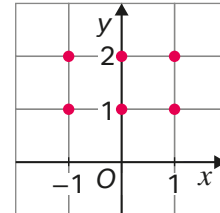
3.1.2. Gráfico de uma função

Consideremos os conjuntos $C = \{-1, 0, 1\}$ e $D = \{1, 2\}$.

O produto cartesiano de C por D é:

$$C \times D = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$$

Na figura ao lado encontra-se a sua representação gráfica, que não representa uma função. Para representar uma função de C em D , a cada elemento de C corresponderia um e um só elemento de D .



Vídeo
Produto
cartesiano de
conjuntos e
gráfico de
funções



Um conjunto G_f , contido em $A \times B$, é **gráfico de uma função** f de A em B se e só se a todo o elemento de A corresponder um e um só elemento de B .

$$G_f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$$

Exemplos

Consideremos os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{-2, 2, 4\}$. Vejamos em quais das situações seguintes estamos perante o gráfico de uma função de Y em X .

1. $\{(-2, 2), (2, 4)\}$

Não é gráfico de uma função de Y em X , pois ao elemento 4 de Y não está associado qualquer elemento de X .

2. $\{(-2, 2), (2, 2), (2, 3), (4, 1)\}$

Não é gráfico de uma função de Y em X , pois ao elemento 2 de Y estão associados dois elementos de X , 2 e 3.

3. $\{(-2, 2), (2, 2), (4, 2)\}$

É gráfico de uma função de Y em X , pois a cada elemento de Y corresponde um e um só elemento de X .

Exercícios

- 2 Considera os conjuntos $J = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ e $H = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Qual dos conjuntos seguintes é gráfico de uma função de J em H ? Justifica a tua resposta.

- (A) $\{(0, -3), (2, -1), (4, 1), (6, 3), (8, 1)\}$
- (B) $\{(-2, 1), (0, 1), (2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1)\}$
- (C) $\{(-2, -1), (-2, 1), (2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1)\}$

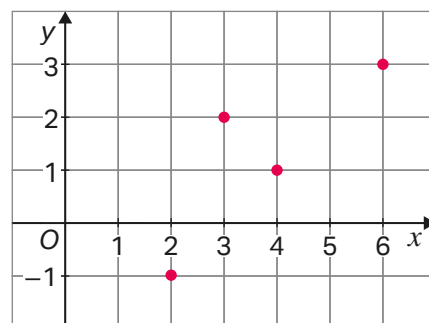
3 Considera os conjuntos $E = \{-1, 1, 3, 5\}$ e $F = \{2, 4, 6\}$.

3.1. Define uma função de E em F através do seu gráfico.

3.2. Justifica que

$\{(2, -1), (4, 1), (6, 3), (1, 5)\}$
não é gráfico de uma função de F em E .

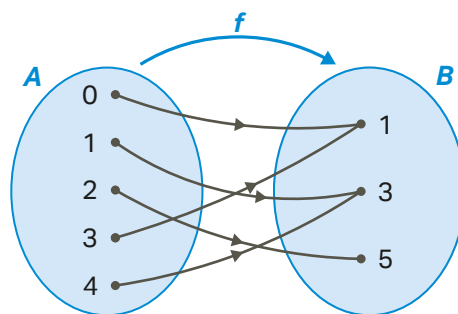
3.3. Poderá o gráfico cartesiano da figura representar uma função de F em E ? Justifica.



3.1.3. Restrição de uma função e imagem de um conjunto por uma função

Consideremos os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

O diagrama de setas seguinte define uma função, f , de A em B , $f: A \rightarrow B$.



Consideremos um novo conjunto, $C = \{-1, 0, 2, 4, 5\}$.

Seja g a função de $C \cap A$ em B tal que $f(x) = g(x)$, para todo o elemento de $C \cap A$.

Assim, $G_g = \{(0, 1), (2, 5), (4, 3)\}$.

Deste modo, podemos concluir que $G_g \subset G_f$. Dizemos que a função g é a restrição da função f a C , que se representa por $f|_C$.

Considerando um novo conjunto, $D = \{0, 2, 4\}$, sendo $D \subset A$, verificamos que a imagem de D por f é igual ao contradomínio da restrição de f a D .

Sejam A , B e C conjuntos e f uma função de A em B , $f: A \rightarrow B$.

- A **restrição de f a C** é a função $f|_C: C \cap A \rightarrow B$ tal que, para todo o elemento x de $C \cap A$, $f|_C(x) = f(x)$.
- A **imagem de um conjunto, C , por f** , com $C \subset A$, é $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$.

Exemplo

1. Consideremos uma função g , de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 2x - 1$, e os conjuntos $R = \{-1, 0, 2, 3\}$ e $S = \{-5, -3, -1\}$.
- O contradomínio da restrição de g a R é $\{-3, -1, 3, 5\}$, uma vez que $g(-1) = -3$, $g(0) = -1$, $g(2) = 3$ e $g(3) = 5$.
 - O contradomínio da restrição de g a S é $\{-11, -7, -3\}$, uma vez que $g(-5) = -11$, $g(-3) = -7$ e $g(-1) = -3$.

Manual Interativo

Vídeo
Função injetiva**Exercícios**

4. Considera a função h , de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$ em $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$.
- 4.1. Determina o contradomínio de h .
- 4.2. Determina o gráfico da restrição de h a A , sendo $A = \{2, 4, 6\}$.
- 4.3. Determina o conjunto-imagem de $h(B)$, sendo $B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$.
5. Considera a função p , de $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ em $\mathbb{Z}$, definida pelo gráfico $G_p = \{(-1, 1), (0, 1), (1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$.
- 5.1. Indica o domínio e o contradomínio da função p .
- 5.2. Define, por um gráfico, a restrição de p a C , sendo $C = \{-1, 0, 1\}$.
- 5.3. Qual é o contradomínio da restrição de p a D , sendo $D = \{1, 2, 3\}$?

3.1.4. Funções injetivas

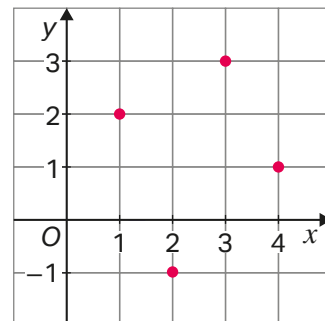
Consideremos a função f , representada graficamente na figura ao lado.

O gráfico da função f é:

$$G_f = \{(1, 2), (2, -1), (3, 3), (4, 1)\}$$

Verificamos que quaisquer dois elementos distintos do domínio têm imagens distintas.

Então, dizemos que a função **f é injetiva**.



Considera agora a função g definida pelo gráfico:

$$G_g = \{(1, 2), (2, -1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Como há dois elementos distintos do domínio com a mesma imagem, $g(1) = g(3) = 2$, concluímos que a função g **não é injetiva**.

Dados dois conjuntos, A e B , uma função f , de A em B , é **injetiva** se e só se quaisquer dois elementos distintos de A tiverem imagens distintas.

$f: A \rightarrow B$ é injetiva se e só se:

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Desta forma, sendo f injetiva, sabemos que se $f(a) = f(b)$, então $a = b$.

Nota

A expressão "**qualquer que seja**" é representada pelo **quantificador universal**, $\forall$.

A expressão "**existe pelo menos um**" é representada pelo **quantificador existencial**, $\exists$.

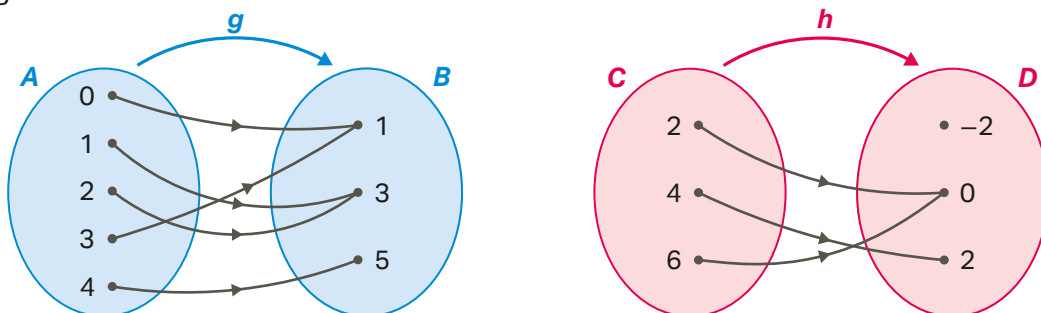
Manual Interativo

Vídeo
Função
sobrejetiva



3.1.5. Funções sobrejetivas

Consideremos as funções g e h , representadas nos diagramas de setas da figura seguinte:



Relativamente à função g , por observação direta, verificamos que qualquer elemento de B é imagem de um ou mais elementos de A . Assim, diz-se que a função g **é sobrejetiva**.

O mesmo não acontece na função h , pois o elemento -2 de B não é imagem de qualquer objeto de A . Assim, dizemos que a função h **não é sobrejetiva**.

Dados dois conjuntos, A e B , uma função f , de A em B , é **sobrejetiva** se, para qualquer elemento, b , de B , existir um elemento de A , a , tal que $b = f(a)$.

$$\forall b \in B, \exists a \in A: f(a) = b$$

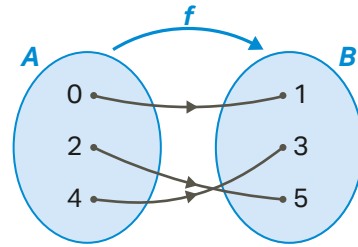
Concluimos que uma função é sobrejetiva se e só se o seu contradomínio coincidir com o conjunto de chegada.

3.1.6. Funções bijetivas

Consideremos a função f , representada pelo diagrama de setas da figura.

Por observação direta, verificamos que objetos diferentes têm imagens diferentes e que todo o elemento de B é imagem de um elemento de A . Assim, a função f é injetiva e sobrejetiva.

Dizemos que a função f é **bijetiva**.



Dados dois conjuntos, A e B , uma função f , de A em B , é **bijetiva** se for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva.

Assim, uma função f , de A em B , é **bijetiva** se e só se, para todo o elemento b , de B , existir um e só um elemento a de A tal que $b = f(a)$.

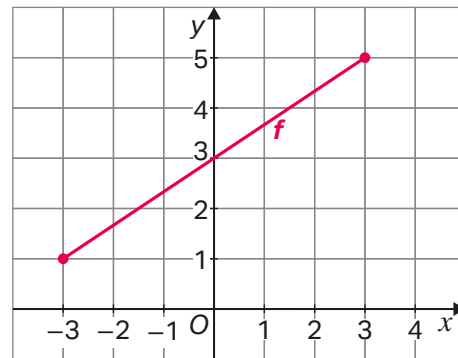
Exemplos

1. Vamos verificar se as funções representadas graficamente nas figuras seguintes são bijetivas.

$$f: [-3, 3] \rightarrow [1, 5]$$

- Como objetos diferentes têm imagens diferentes, a função f é injetiva.
- O contradomínio da função f coincide com o conjunto de chegada, logo a função f é sobrejetiva.

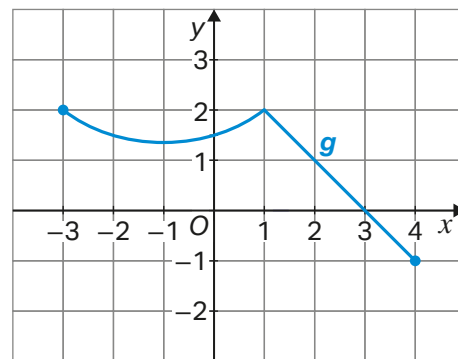
Assim, a função f é bijetiva.



$$g: [-3, 4] \rightarrow [-1, 2]$$

- Como há objetos diferentes com a mesma imagem (por exemplo, $-3 \neq 1$ e $g(-3) = g(1) = 2$), a função g não é injetiva.

Logo, a função g não é bijetiva.



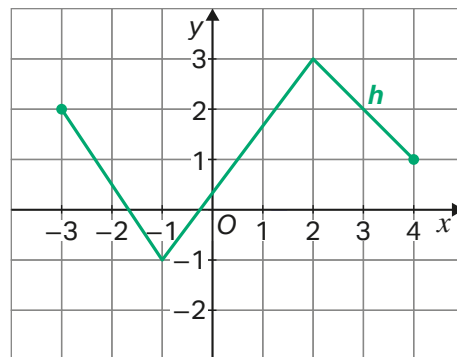
Nota

Se uma reta horizontal interseca o gráfico de uma função em mais do que um ponto, podemos concluir que a função não é injetiva.

$$h: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

- O contradomínio de h , $D'_h = [-1, 3]$, é diferente do conjunto de chegada, $CC_h = \mathbb{R}$, logo a função h não é sobrejetiva.

Assim, h não é bijetiva.



2. Consideremos a função $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $p(x) = -x + 5$.

Vamos verificar se a função p é bijetiva, isto é, se é injetiva e sobrejetiva.

- p é injetiva se e só se: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \Rightarrow p(a) \neq p(b)$

$$a \neq b \Rightarrow -a \neq -b \Rightarrow \underbrace{-a+5}_{p(a)} \neq \underbrace{-b+5}_{p(b)} \Rightarrow p(a) \neq p(b).$$

Logo, p é injetiva.

- p é sobrejetiva se e só se: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} : p(a) = y$

$$p(a) = y \Leftrightarrow -a + 5 = y \Leftrightarrow -a = y - 5 \Leftrightarrow a = -y + 5.$$

Assim, $\forall y \in \mathbb{R}$, existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = -y + 5$, em que $p(a) = y$.

Logo, a função p é sobrejetiva.

Como é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, a função p é bijetiva.

3. Consideremos a função $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m(x) = x^2 - 1$.

- Vamos mostrar que a função m não é injetiva.

Para tal, consideremos, por exemplo, os objetos 2 e -2.

$$m(2) = 2^2 - 1 = 3$$

$$m(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$$

Assim, como $2 \neq -2$ e $m(-2) = m(2)$, m não é injetiva.

- Mostremos, agora, que a função m não é sobrejetiva.

A função m é sobrejetiva se o conjunto de chegada, $\mathbb{R}$, for igual ao seu contradomínio.

$$\text{Como sabemos: } \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -1.$$

$$\text{Assim, } D'_m = [-1, +\infty[\neq CC_m.$$

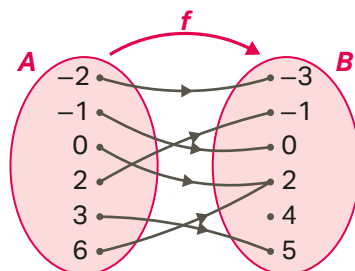
Logo, a função m não é sobrejetiva.

Exercícios

- 6 Considera a função f , definida pelo diagrama de setas da figura.

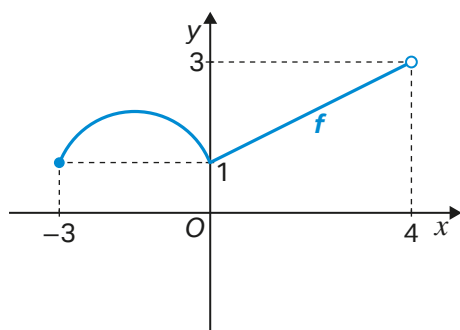
Justifica a afirmação:

"A função f é injetiva, mas não é sobrejetiva, logo não é bijetiva."

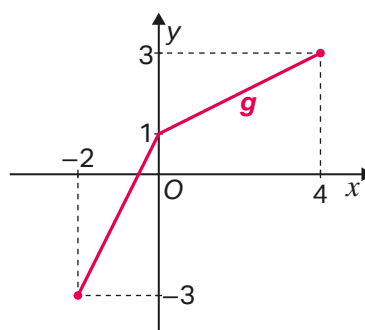


- 7 Nas figuras seguintes estão representadas graficamente as funções f , g , h e j .

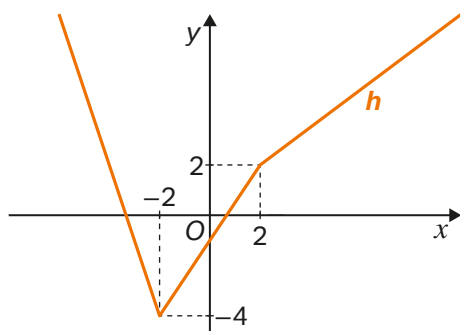
$$f: [-3, 4[\rightarrow \mathbb{R}$$



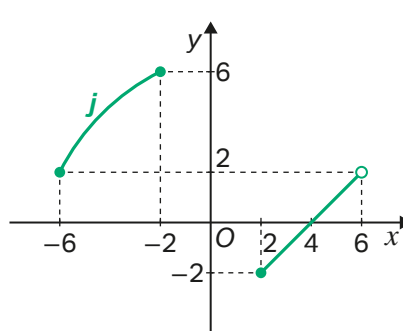
$$g:]-2, 4[\rightarrow \mathbb{R}$$



$$h: \mathbb{R} \rightarrow [-4, +\infty[$$



$$j: [-6, -2] \cup [2, 6[\rightarrow [-2, 6]$$



Identifica uma função:

7.1. injetiva e não sobrejetiva;

7.2. sobrejetiva e não injetiva;

7.3. bijetiva.

- 8 Nas alíneas seguintes encontram-se definidas funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, através da sua expressão algébrica. Verifica se essas funções são bijetivas.

8.1. $f(x) = 2x + 3$

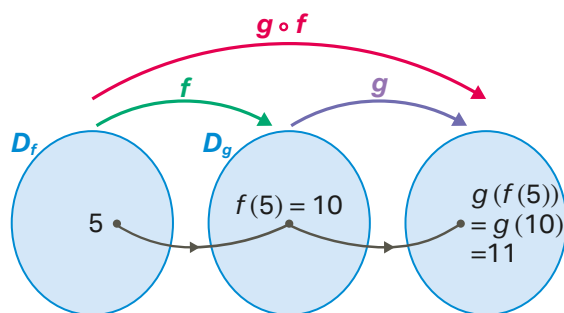
8.2. $g(x) = \frac{x-2}{3}$

8.3. $h(x) = x^2$

8.4. $j(x) = 2 - x^2$

3.1.7. Composição de funções

Consideremos as funções f e g , definidas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 1$.



Vamos determinar $f(5)$ e, em seguida, a imagem de $f(5)$ por g .

$$f(5) = 2 \times 5 = 10 \quad \text{e} \quad g(10) = 10 + 1 = 11$$

Repara que $g(10) = g(f(5))$, ou seja, ao resultado de $f(5)$ aplicamos a função g .

Desta forma, temos uma nova função que designamos por **função composta de g com f** , que se representa por $g \circ f$.

Consideremos duas funções, f e g , tais que $f: D_f \rightarrow A$ e $g: D_g \rightarrow B$.

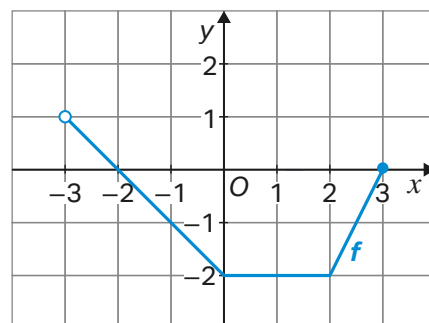
A **função composta de g com f** ou **g após f** ou **f seguida de g** representa-se por $g \circ f$ e é tal que:

- $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$
- $\forall x \in D_{g \circ f}, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Exemplos

1. Consideremos a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida algebricamente por $g(x) = x + 2$, e a função f , representada graficamente na figura.

- $D_f =]-3, 3]$ e $D'_f = [-2, 1[$
- $D_g = \mathbb{R}$ e $D'_g = \mathbb{R}$
- $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-1) = -1 + 2 = 1$
- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-2) = -2 + 2 = 0$
- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-2) = 0$
- $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = -2$



Como $(g \circ f)(-1) \neq (f \circ g)(-1)$, podemos concluir que **a composta de funções não é comutativa**.

2. Consideremos as funções $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$m(x) = 2x \text{ e } p(x) = -x + 5$$

Vamos caracterizar a função $m \circ p$.

$$D_m = \mathbb{R} = D_p$$

$$D_{m \circ p} = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(m \circ p)(x) = m(p(x)) = m(-x + 5) = 2(-x + 5) = -2x + 10$$

$$m \circ p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -2x + 10$$

Exercícios

- 9 Considera a função $j: \{-3, -2, 0, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela tabela, e a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela expressão analítica $h(x) = -2x + 1$.

x	-3	-2	0	1	3
$j(x)$	2	1	3	-2	1

Calcula:

9.1. $(h \circ j)(1)$

9.2. $(h \circ j)(0)$

9.3. $(h \circ j)(-2)$

9.4. $(j \circ h)(0)$

9.5. $(j \circ h)(-1)$

9.6. $(j \circ h)(2)$

- 10 Considera as funções r e s , definidas em $\mathbb{R}$ por $r(x) = x^2$ e $s(x) = x - 2$.

10.1. Caracteriza as funções:

a) $r \circ s$

b) $s \circ r$

10.2. Determina:

a) $(r \circ s)(-1)$

b) $(s \circ r)(1)$

c) $(s \circ r)(0)$

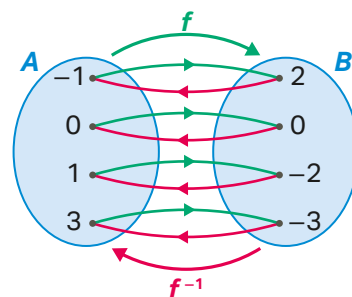
d) $(r \circ s)(2)$

e) $(s \circ r)(-3)$

f) $(r \circ s)(0)$

3.1.8. Função inversa de uma função bijetiva

Consideremos a função $f: A \rightarrow B$, definida através do diagrama de setas ao lado.



Como a função f é bijetiva, sabemos que a cada elemento de B corresponde um e um só elemento de A . Desta forma, é possível definir uma nova função, $g: B \rightarrow A$, tal que $\forall (x, y) \in A \times B, f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$.

Designamos esta função por **função inversa** de f , f^{-1} .

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

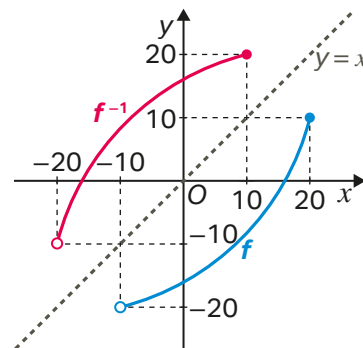
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

tal que $f(x) = y$.

Dada uma função $f: A \rightarrow B$ bijetiva, a **função inversa** de f é a função $f^{-1}: B \rightarrow A$, tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ é o único elemento de $x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Pela definição de função inversa, sabemos que um ponto de coordenadas (a, b) pertence ao gráfico de f^{-1} se e só se o ponto de coordenadas (b, a) pertencer ao gráfico de f .

Assim, o gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f através de uma **simetria axial de eixo $y = x$** .

**Exemplo**

1. Consideremos a função g definida, em $\mathbb{R}$, pela expressão analítica $g(x) = -3x + 2$.

Vamos caracterizar a função inversa de g , g^{-1} . Como a função g é bijetiva, sabemos que g^{-1} existe.

- $D_{g^{-1}} = D'_g = \mathbb{R}$ e $D'_{g^{-1}} = D_g = \mathbb{R}$

- Expressão analítica de g^{-1} :

Vamos resolver a equação $g(x) = y$ em ordem a x .

$$g(x) = y \Leftrightarrow -3x + 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{-3} = \frac{2-y}{3}$$

Como $g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$, substituímos x por $g^{-1}(y)$ e y por x .

Desta forma,

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2-x}{3}$$

A saber

Na função inversa:

- $D_{f^{-1}} = D'_f$
- $D'_{f^{-1}} = D_f$

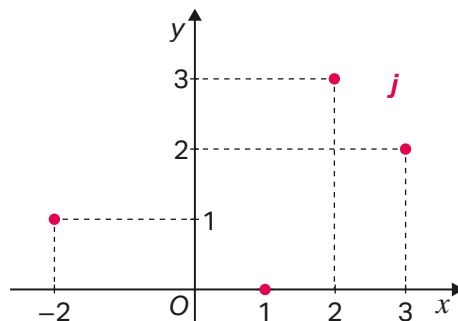


Vídeo
Função inversa
de uma função
bijetiva



Exercícios

- 11** Observa a figura, em que está representada graficamente a função $j: \{-2, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$.



11.1. Justifica a afirmação: "A função j é bijetiva."

11.2. Indica o valor de:

a) $j(-2)$

b) $j(1)$

c) $j^{-1}(2)$

d) $j^{-1}(0)$

11.3. Caracteriza a função j^{-1} .

- 12** Considera a função $h: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 2, 3\}$, definida pelo gráfico:

$$G_h = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 3), (2, -1)\}$$

12.1. Mostra que existe h^{-1} .

12.2. Define h^{-1} através do seu gráfico.

12.3. Caracteriza a função h^{-1} .

- 13** Seja g uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x - 5$.

13.1. Mostra que a função g é bijetiva.

13.2. O ponto $P(1, -3)$ pertence ao gráfico da função g . Indica a ordenada do ponto do gráfico de g^{-1} que tem abcissa -3 .

13.3. Caracteriza a função g^{-1} .

- 14** Considera as funções bijetivas f , g e h , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$g(x) = -2x + 1$$

$$h(x) = \frac{2-x}{3}$$

Caracteriza as funções f^{-1} , g^{-1} e h^{-1} .

Para aplicar

- 1 Considera os conjuntos $P = \{-1, 2, 3\}$ e $Q = \{0, 1, 2\}$. Determina:

1.1. $P \times Q$

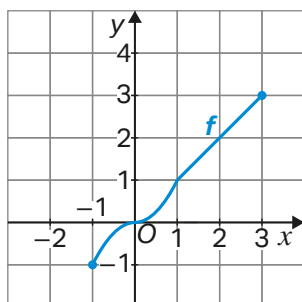
1.2. $Q \times P$

1.3. P^2

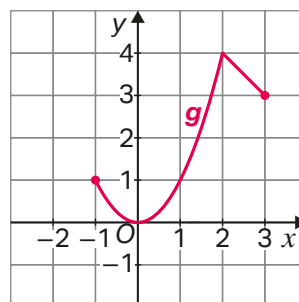
1.4. Q^2

- 2 Nas figuras seguintes encontram-se representadas funções.

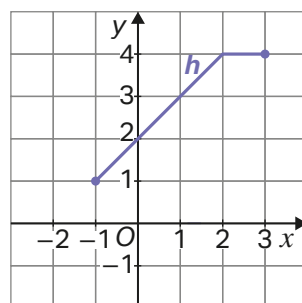
$f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$



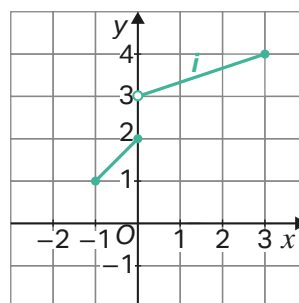
$g: [-1, 3] \rightarrow [0, 4]$



$h: [-1, 3] \rightarrow [1, 4]$



$i: [-1, 3] \rightarrow [1, 2] \cup [3, 4]$



Das funções anteriores, indica, justificando, as que são:

2.1. injetivas;

2.2. sobrejetivas;

2.3. bijetivas.

- 3 Considera a função f , de $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$, definida por:

$$G_f = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$$

3.1. Indica o contradomínio da:

a) função f ;

b) restrição da função f ao conjunto $C = \{-1, 0, 1\}$.

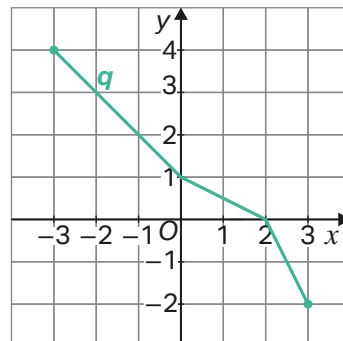
3.2. A função f é injetiva? E sobrejetiva? Justifica.

- 4 Considera a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 3x^2 - 1$.

4.1. Determina as imagens de -1 e 1 .

4.2. Mostra que a função g não é injetiva.

- 5 Considera a função q , representada graficamente no referencial da figura ao lado.



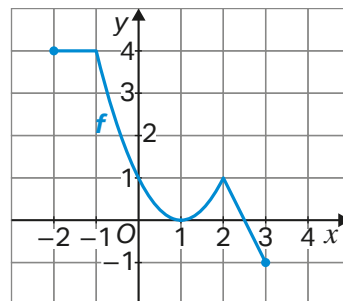
- 5.1. Indica o domínio e o contradomínio da função q .
- 5.2. Sabendo que q^{-1} é a função inversa de q , determina:
- a) $q^{-1}(4)$ b) $q^{-1}(2)$
 c) $q^{-1}(0)$ d) $q^{-1}(-2)$

- 6 Considera as funções m e p , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$m(x) = -5x^2 \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{x-2}{5}$$

- 6.1. Mostra que:
- a) a função p é bijetiva;
 b) a função m é não injetiva.
- 6.2. Dá um exemplo de uma restrição da função m , de modo que a função seja injetiva.
- 6.3. Caracteriza a função inversa da função p , p^{-1} .

- 7 Considera a função f , representada no referencial da figura, e a função g , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$.



- 7.1. Determina o domínio das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.
- 7.2. Calcula:
- a) $(f \circ g)(0)$ b) $(g \circ f)(-2)$
 c) $(f \circ g)(1)$ d) $(g \circ f)(3)$
 e) $(f \circ g)(3)$ f) $(g \circ f)(0)$

- 8 Considera as funções h e j , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$h = \frac{x-3}{x+1} \quad \text{e} \quad j = \sqrt{x+1}$$

- 8.1. Calcula, se possível:
- a) $(j \circ h)(-2)$ b) $(j \circ h)(0)$ c) $(h \circ j)(8)$ d) $(h \circ j)(15)$
- 8.2. Determina as expressões algébricas das funções:
- a) $j \circ h$ b) $h \circ j$

3.2. Generalidades acerca de funções reais de variável real

3.2.1. Conceito de função real de variável real

Designamos por **função real de variável real** qualquer função com domínio e conjunto de chegada contidos em $\mathbb{R}$.

Para caracterizarmos uma função real de variável real, devemos indicar o seu **domínio**, o seu **conjunto de chegada** e uma **expressão analítica** que a descreva. Quando nada é indicado, consideramos que $\mathbb{R}$ é o conjunto de chegada.

Exemplos

Vamos caracterizar as funções reais de variável real definidas por:

$$1. f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Cálculos auxiliares:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x+2}{x-1}$$

$$2. g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = [1, +\infty[$$

Cálculos auxiliares:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$g: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x-1}$$

$$3. h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3x+6}$$

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0 \wedge 3x + 6 \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge x \neq -2\} = [1, +\infty[\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{3} \Leftrightarrow x = -2$$

$$h: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{3x+6}$$

Exercício

15 Caracteriza a função real de variável real definida por:

$$15.1. f(x) = \frac{x^2 - 2}{3}$$

$$15.2. g(x) = \frac{x}{x-3}$$

$$15.3. h(x) = \frac{x+1}{-x+3}$$

$$15.4. j(x) = \sqrt{-x+3}$$

$$15.5. k(x) = \sqrt{2x-6}$$

$$15.6. \ell(x) = -\frac{2}{\sqrt{x+5}}$$

3.2.2. Paridade de uma função

Seja f uma função real de variável real. Dizemos que:

- f é uma **função par** se $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$;
- f é uma **função ímpar** se $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$.

Graficamente, uma função é par se o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas e uma função é ímpar se o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.

Exemplos

Estudemos as funções definidas pelas seguintes expressões analíticas, quanto à paridade.

1. $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Logo, f é uma função par.

2. $g(x) = -2x$

$$g(-x) = -2 \times (-x) = 2x = -g(x)$$

Logo, g é uma função ímpar.

3. $h(x) = x - x^2$

$$h(-x) = (-x) - (-x)^2 = -x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, a função h não é par nem é ímpar.

4. $j(x) = 5(x-1)^2$

$$j(-x) = 5(-x-1)^2$$

Como $j(-x) \neq j(x)$ e $j(-x) \neq -j(x)$, a função j não é par nem é ímpar.

e Manual Interativo

Vídeos
Função par



Função ímpar



Exercícios

16 Verifica se as funções a seguir definidas são pares.

16.1. $f(x) = -3x^2$

16.2. $g(x) = (x+1)^2$

16.3. $h(x) = x - x^3$

16.4. $j(x) = 5x^2 - x^4$

17 Estuda, quanto à paridade, a função definida por:

17.1. $f(x) = x - 2x^3$

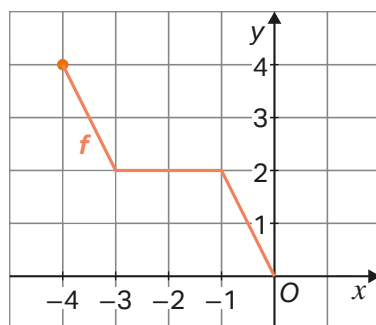
17.2. $g(x) = -x^2 + x^4$

17.3. $h(x) = \frac{x^2 - 2}{3}$

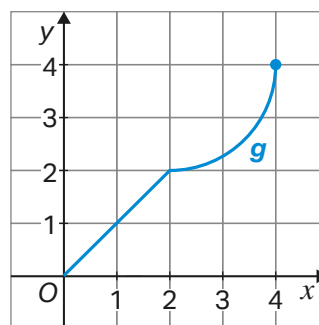
17.4. $j(x) = -\frac{2}{x^2}$

18 No teu caderno, completa a representação gráfica de cada uma das funções, tendo em consideração a informação apresentada.

18.1. f é uma função par.



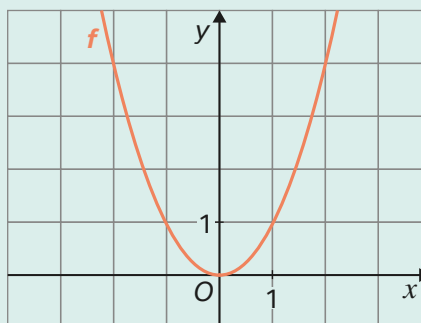
18.2. g é uma função ímpar.



3.2.3. Transformações geométricas de gráficos de funções

Tarefa de desenvolvimento

1 Considera a função f , definida por $f(x) = x^2$, que se encontra representada graficamente no referencial da figura seguinte:



1.1. Copia a figura para o teu caderno e, no mesmo referencial, representa as funções g e h , sabendo que:

- $g(x) = f(x) + 2$
- $h(x) = f(x) - 1$

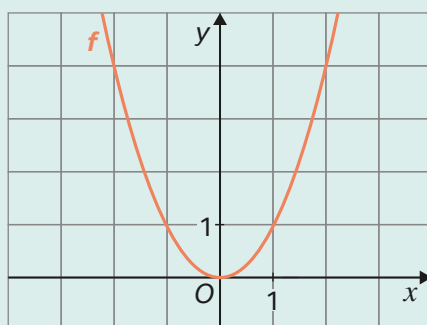
Nota: Podes utilizar o GeoGebra, nomeadamente a aplicação associada a este exercício.

1.2. Copia e completa.

Por observação das representações gráficas anteriores, podemos concluir que:

- o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor de coordenadas _____;
- o gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor de coordenadas _____.

2 Considera novamente a função f , definida por $f(x) = x^2$.



2.1. Copia a figura e representa, no mesmo referencial, as funções p e m , sabendo que:

- $p(x) = f(x - 2)$
- $m(x) = f(x + 1)$

Nota: Podes utilizar o GeoGebra, nomeadamente a aplicação associada a este exercício.

2.2. Copia e completa.

Por observação das representações gráficas anteriores, podemos concluir que:

- o gráfico de p é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor _____;
- o gráfico de m é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor _____.

e Manual Interativo

GeoGebra
Gráficos obtidos
por translação
vertical



Gráficos obtidos
por translação
horizontal





GeoGebra
Gráficos obtidos
por translação
segundo um
vetor de
coordenadas
(h, k)



Vídeo
Transformações
de funções



Consideremos uma função real de variável real, f , e um número real, k .

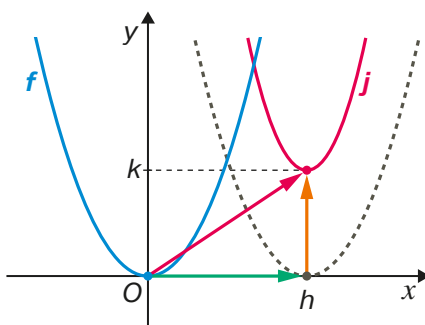
Translação vertical

O gráfico cartesiano de uma função g , tal que $g(x) = f(x) + k$, é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{v} = (0, k)$.

Translação horizontal

O gráfico cartesiano de uma função h , tal que $h(x) = f(x - k)$, é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{v} = (k, 0)$.

Translação de vetor $\vec{v} = (h, k)$



Como sabemos, $\vec{v} = (h, k) = (h, 0) + (0, k)$.

Assim, o gráfico de j obtém-se do gráfico de f através da translação segundo o vetor de coordenadas $(h, 0)$, seguida da translação segundo o vetor de coordenadas $(0, k)$, ou vice-versa.

Nota: Podes utilizar o GeoGebra como auxílio a esta exploração, nomeadamente a aplicação associada a esta página.

Exercícios

19 Considera a função m de domínio $[-5, 1]$ e contradomínio $]-3, 2[$.

19.1. Indica o domínio de:

a) $p(x) = m(x - 3)$

b) $q(x) = m(x + 5)$

c) $r(x) = m(x - 3) - 1$

d) $s(x) = 2 + m(x + 1)$

19.2. Indica o contradomínio de:

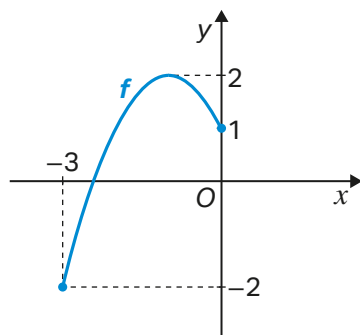
a) $p(x) = m(x) - 3$

b) $q(x) = m(x) + 5$

c) $r(x) = m(x - 3) - 1$

d) $s(x) = 2 + m(x + 1)$

- 20** Na figura está representada graficamente a função real de variável real f .



20.1. Indica o domínio e o contradomínio da função f .

20.2. Indica o domínio da função tal que:

a) $g(x) = f(x - 1)$

b) $h(x) = f(x + 2)$

c) $j(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

20.3. Indica o contradomínio de:

a) $g(x) = f(x) + 1$

b) $h(x) = f(x) - 2$

c) $j(x) = f(x) + \frac{2}{5}$

20.4. Indica o domínio e o contradomínio da função tal que:

a) $g(x) = f(x + 3) - 2$

b) $h(x) = f(x - 2) + 1$

- 21** Considera uma função real de variável real $g: [-3, 2[\rightarrow \mathbb{R}$. Sabe-se que o ponto $P(1, 3)$ pertence ao gráfico de g .

21.1. Qual é o domínio da função h , sendo $h(x) = g(x + 3) - 2$?

21.2. O ponto $P(1, 5)$ pertence ao gráfico de uma função i , definida por $i(x) = g(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Determina o valor de k .

21.3. Sabe-se que $j(x) = g(x + 1) + 2$. Qual é a ordenada do ponto que pertence ao gráfico de j e tem abcissa 0?

- 22** Considera a função real de variável real h . Sabe-se que:

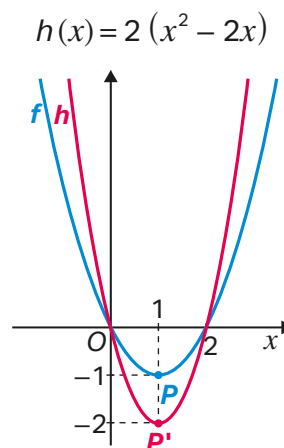
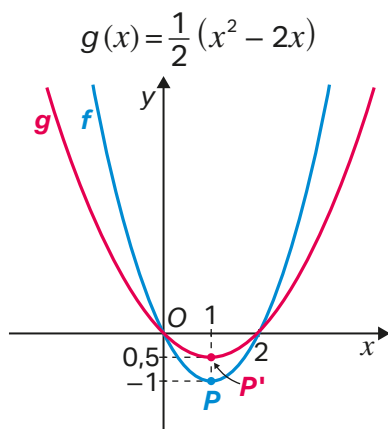
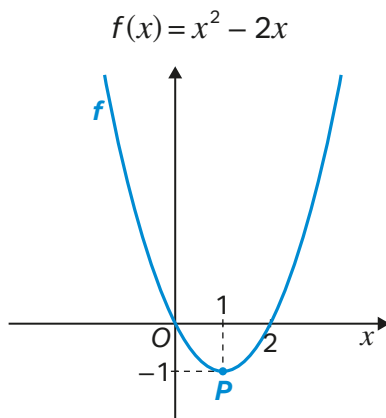
- h é uma função ímpar;
- o ponto $P(-2, 5)$ pertence ao gráfico da função h .

Considera a função p , definida por $p(x) = h(x + 1) + 1$. Seja A um ponto do gráfico da função p .

Sabendo que a abcissa de A é 1, determina a sua ordenada.

Dilatação e contração do gráfico de uma função

Considerando a função f , definida por $f(x) = x^2 - 2x$, e a sua representação gráfica, vamos analisar a relação entre a função f e a família das funções do tipo $y = kf(x)$, $k \in \mathbb{R}$.



Por observação das representações gráficas anteriores, verificamos que:

- o gráfico de g é imagem do gráfico de f , através de uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$;
- o gráfico de h é imagem do gráfico de f , através de uma dilatação vertical de coeficiente 2.

Nota: Podes utilizar o GeoGebra como auxílio a esta exploração, nomeadamente a aplicação associada a esta página.

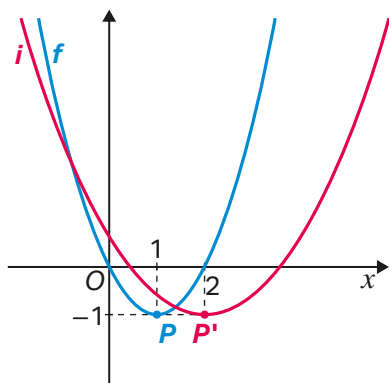
Dada uma função real de variável real f e um número real k , o gráfico da função g tal que $g(x) = kf(x)$, com $D_g = D_f$, é uma:

- **contração vertical** de coeficiente k , se $0 < k < 1$;
- **dilatação vertical** de coeficiente k , se $k > 1$.

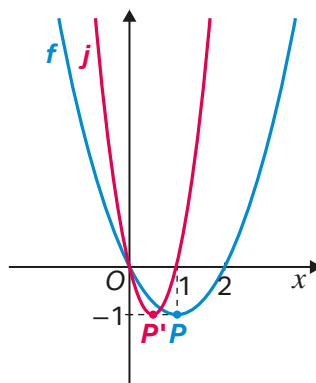


A partir do gráfico da função f , definida por $f(x) = x^2 - 2x$, vamos analisar de que forma o número real k poderá influenciar o gráfico das funções da família $y = f(kx)$.

$$i(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x\right)$$



$$j(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2(2x)$$



Na primeira situação, verificamos que o gráfico de i é a imagem do gráfico de f por uma dilatação horizontal de coeficiente 2. Já o gráfico da função j é a imagem do gráfico de f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Nota: Podes utilizar o GeoGebra como auxílio a esta exploração, nomeadamente a aplicação associada a esta página.

Manual Interativo

GeoGebra
Dilatação/
Contração
horizontal



Atividade
Transformações
geométricas da
função
quadrática:
Translação
horizontal

Dada uma função real de variável real f e um número real k , tal que $kx \in D_f$, o gráfico da função g , tal que $g(x) = f(kx)$, com $D_g = \left\{\frac{x}{k}, x \in D_f\right\}$, é uma:

- **contração horizontal** de coeficiente $\frac{1}{k}$, se $k > 1$;
- **dilatação horizontal** de coeficiente $\frac{1}{k}$, se $0 < k < 1$.

Exemplos

Consideremos a função real de variável real g definida pelo gráfico:

$$G_g = \left\{(-4, 2), \left(-2, \frac{1}{2}\right), (0, -1), (1, 4)\right\}$$

1. Seja h a função definida por $h(x) = g(4x)$. O gráfico de h é a imagem do gráfico de g por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$, logo:

$$D_h = \{x : 4x \in D_g\} = \left\{\frac{x}{4} : x \in D_g\right\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right\}$$

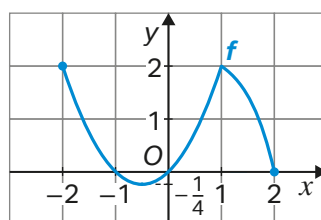
2. Seja j a função definida por $j(x) = g\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Como o gráfico de j é a imagem do gráfico de g por uma dilatação horizontal de coeficiente 2, vem que:

$$D_j = \left\{x : \frac{1}{2}x \in D_f\right\} = \{2x : x \in D_f\} = \{-8, -4, 0, 2\}$$

Exercícios

23 Considera a função real de variável real f , representada na figura, e sejam g , h , i e j as funções tais que:



- $g(x) = 3f(x)$
- $h(x) = f(3x)$
- $i(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$
- $j(x) = \frac{1}{3}f(x)$

23.1. Indica o domínio e o contradomínio da função f .

23.2. Determina o domínio das funções g , h , i e j .

23.3. Determina o contradomínio das funções g , h , i e j .

23.4. O ponto $P(1, 2)$ pertence ao gráfico da função f . Determina a ordenada de um ponto P' , de abcissa 1, que pertença ao gráfico de:

a) $m(x) = 4f(x)$

b) $n(x) = \frac{1}{2}f(x)$

24 Considera a função real de variável real p , definida pelo gráfico:

$$G_p = \left\{(-4, 2), \left(-2, \frac{1}{2}\right), (0, -1), (1, 4)\right\}$$

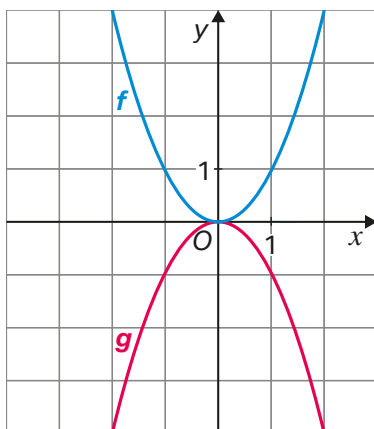
24.1. Considera a função h , definida por $h(x) = p\left(\frac{1}{4}x\right)$.

Determina o domínio e o contradomínio da função h .

24.2. Define a função q através do seu gráfico, sabendo que $q(x) = p(2x)$.

Reflexões do gráfico de uma função

Consideremos as funções f e g , definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ e representadas na figura.

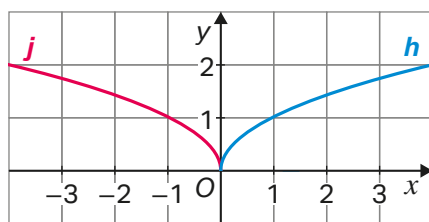


Verificamos que o gráfico da função g , sendo $g(x) = -f(x) = -x^2$, definida em $D_g = D_f$, é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox .

Reflexão de eixo Ox

O gráfico de uma função g , definida em $D_g = D_f$, por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox .

Na figura encontram-se representadas as funções h e j , definidas por $h(x) = \sqrt{x}$ e $j(x) = \sqrt{-x}$.



Verificamos que o gráfico da função j , sendo $j(x) = h(-x) = \sqrt{-x}$, definida em $D_j = \{-x : x \in D_h\}$, é a imagem do gráfico de h pela reflexão de eixo Oy .

Reflexão de eixo Oy

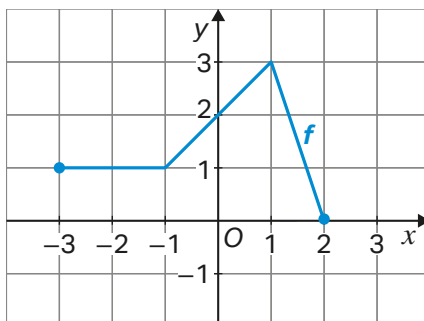
O gráfico de uma função h , definida em $D_h = \{-x : x \in D_f\}$, por $h(x) = f(-x)$ é a imagem de gráfico de f pela reflexão de eixo Oy .

Manual Interativo

Atividade
Transformações geométricas da função quadrática: reflexão e a dilatação e contração vertical

Exercícios

- 25** No referencial o.m. Oxy da figura, está representada uma função real de variável real, f .



No teu caderno, faz a representação gráfica da função tal que:

25.1. $g(x) = -f(x)$

25.2. $h(x) = -f(x) - 1$

25.3. $i(x) = -f(x - 1) - 2$

25.4. $j(x) = f(-x)$

25.5. $l(x) = f(-x) - 3$

25.6. $m(x) = -f(-x + 2) - 1$

- 26** De uma função real de variável real h , sabe-se que $D_h = [-1, 5]$ e $D'_h = [-2, 3]$. Indica o domínio e o contradomínio das funções tais que:

26.1. $f(x) = -h(x)$

26.2. $g(x) = h(-x)$

26.3. $j(x) = -2h(x)$

26.4. $l(x) = h(-3x)$

26.5. $m(x) = -\frac{1}{2}h(-x)$

26.6. $n(x) = -3h\left(-\frac{1}{2}x\right)$

- 27** Considera a função real de variável real p .

Sabe-se que:

- a função p tem três zeros: -2 , 0 e 3 ;
- $D'_p = [-5, 5[$

Determina:

27.1. o contradomínio da função m , sabendo que $m(x) = -p(x) + 3$;

27.2. os zeros da função n , sabendo que $n(x) = -p(-x + 2)$.

Para aplicar

1 Determina o domínio da função real de variável real definida por:

1.1. $f(x) = \frac{2x-3}{5-x}$

1.2. $g(x) = \sqrt{2x-6}$

1.3. $j(x) = \frac{5}{5x-x^2}$

1.4. $m(x) = \sqrt{2x-1} - 4$

1.5. $h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$

1.6. $n(x) = \sqrt{\frac{2}{9-3x}}$

2 Considera a função f , de domínio $[-4, 4]$, com parte do gráfico representado no referencial da figura.

Sabe-se que a função f é par.

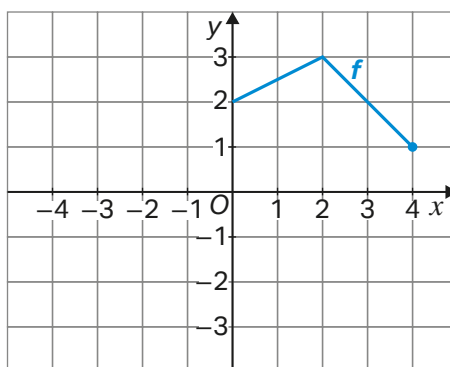
2.1. Copia e completa a representação gráfica da função f .

2.2. Calcula:

a) $(f \circ f)(2)$

b) $(f \circ f)(0)$

c) $(f \circ f)(-2)$



3 De uma função real de variável real, f , sabe-se que:

- f é uma função par;
- o ponto $A(-3, 2)$ pertence ao gráfico de f .

Determina a área do triângulo $[AOB]$, sendo $O(0, 0)$ e B o ponto do gráfico de f com abcissa 3.

4 Na figura encontra-se representada graficamente a função f .

4.1. Indica:

a) o domínio da função g tal que $g(x) = f(x-3)$;

b) o contradomínio da função h tal que $h(x) = -f(x) + 2$;

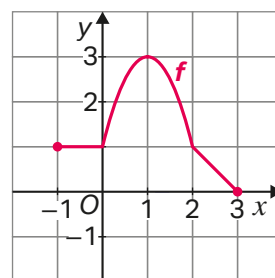
c) o domínio da função i tal que $i(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

4.2. Quais são as coordenadas do ponto P do gráfico de j , sendo

$j(x) = \frac{1}{2}f(-x)$, sabendo que tem abcissa 1?

4.3. Considera a função i , definida por $i(x) = f(x-a) + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

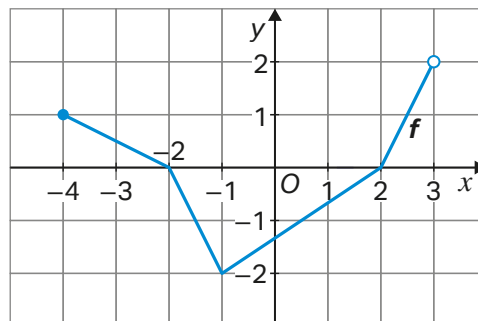
Sabendo que o ponto $A(-1, -2)$ é o ponto do gráfico de i que tem ordenada máxima, determina os valores de a e b .



3.3. Monotonia, extremos e concavidade

3.3.1. Sinal e zeros de uma função

Na figura está representada graficamente a função real de variável real f .



Através da representação gráfica de uma função, é possível identificar as partes do domínio em que a função é positiva, negativa ou nula.

Sinal

Intervalos em que f é **positiva**:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-4, -2[\cup]2, 3[$$

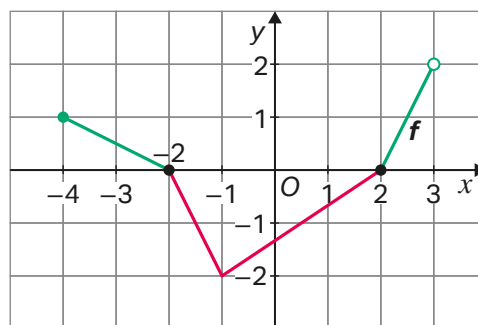
Intervalos em que f é **negativa**:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[$$

Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$$

Os zeros da função são -2 e 2 .



Esse estudo pode ser simplificado através de uma **tabela** (ou **quadro**) de sinais.

x	-4		-2		2		3
$f(x)$	+	+	0	-	0	+	Não definida

Consideremos uma função real de variável real f e um conjunto $A \subset D_f$.

- f é **positiva** em A se e só se $\forall x \in A, f(x) > 0$.

Se $A = D_f$, diz-se que f é positiva no seu domínio.

- f é **negativa** em A se e só se $\forall x \in A, f(x) < 0$.

Se $A = D_f$, diz-se que f é negativa no seu domínio.

Os **zeros** de uma função f são todos os elementos de D_f cuja imagem, por f , é zero. Graficamente, correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico da função f intersesta o eixo Ox .

Vídeo

Sinal de uma função



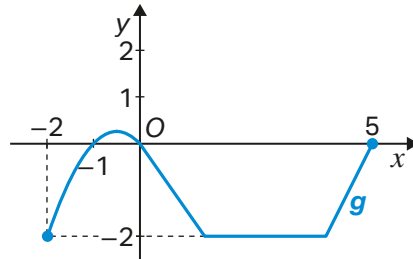
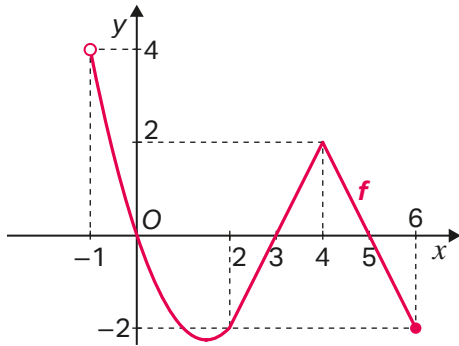
Vídeo

Intervalos de monotonia de uma função



Exercícios

28 Na figura estão representadas as funções reais de variável real f e g .



28.1. Indica os zeros de cada uma das funções.

28.2. Indica um intervalo em que:

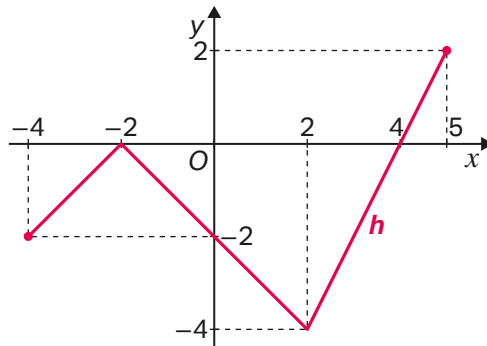
a) $f(x) > 0$

b) $g(x) < 0$

28.3. Copia e completa a tabela de sinais da função g .

x	-2		-1		0		5
$g(x)$							

29 Na figura seguinte está representada a função real de variável real h , de domínio $[-4, 5]$.



29.1. Indica o sinal de:

a) $h(-4)$

b) $h(0)$

c) $-h(2)$

d) $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(3)$

e) $-h\left(\frac{9}{2}\right) \times h(-3)$

f) $h(\pi) \times h\left(-\frac{1}{3}\right)$

29.2. Constrói o quadro de sinais da função h .

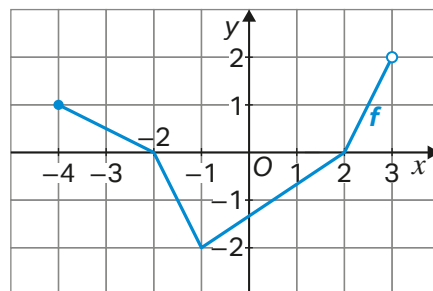
29.3. Determina os valores de $x \in D_h$ para os quais $h(x) \times h(1) < 0$.

3.3.2. Monotonia de uma função

Vamos estudar a monotonia de uma função através da observação da sua representação gráfica.

Analisando a representação gráfica da função f na figura, podemos observar que:

- f é estritamente decrescente em $[-4, -1]$;
- f é estritamente crescente em $[-1, 3]$.



O estudo da monotonia de uma função pode ser feito através de uma **tabela** (ou **quadro**) de **variação**.

x	-4		-1		3
$f(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	Não definida

Consideremos uma função real de variável real f e um conjunto $A \subset D_f$.

- f é **estritamente crescente** em A se $\forall a, b \in A, a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.
Se $A = D_f$, diz-se que f é estritamente crescente.
- f é **estritamente decrescente** em A se $\forall a, b \in A, a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.
Se $A = D_f$, diz-se que f é estritamente decrescente.
- f é **constante** em A se $\forall a, b \in A, f(a) = f(b)$.

Nota:

- f é **crescente em sentido lato** em A se:
 $\forall a, b \in A, a < b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$
- f é **decrescente em sentido lato** em A se:
 $\forall a, b \in A, a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$

Atenção

O facto de uma função ser crescente ou decrescente em dois intervalos não significa que o seja na reunião desses intervalos.

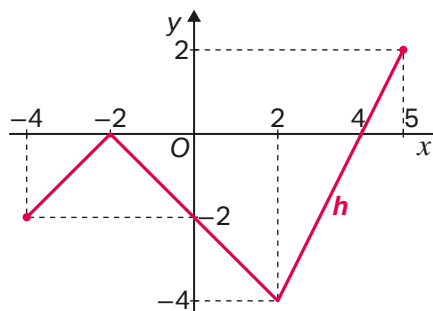
Exercício

30 Na figura está representada a função h , real de variável real, de domínio $[-4, 5]$.

30.1. Constrói o quadro de variação da função h .

30.2. Indica os intervalos de monotonia da função h .

30.3. Constrói o quadro de variação da função g tal que $g(x) = -h(x)$.

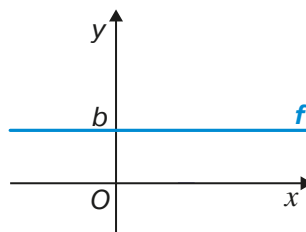


Monotonia de uma função afim

Como já foi abordado, o gráfico de uma função afim, f , definida por $f(x) = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$, é uma reta de declive m .

- Se $m = 0$, $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

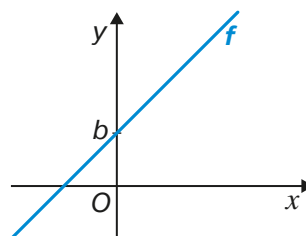
Neste caso, estamos perante uma função constante, representada por uma reta horizontal.



- Se $m > 0$, a função f é estritamente crescente.

Sejam $a_1, a_2 \in D_f$ tais que $a_1 < a_2$.

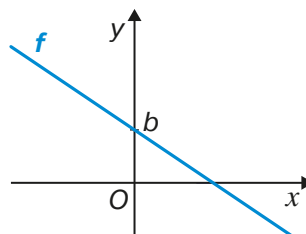
$$\begin{aligned} a_1 < a_2 &\Leftrightarrow ma_1 < ma_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ma_1 + b < ma_2 + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(a_1) < f(a_2) \end{aligned}$$



- Se $m < 0$, a função f é estritamente decrescente.

Sejam $a_1, a_2 \in D_f$ tais que $a_1 < a_2$.

$$\begin{aligned} a_1 < a_2 &\Leftrightarrow ma_1 > ma_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ma_1 + b > ma_2 + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(a_1) > f(a_2) \end{aligned}$$



e Manual Interativo

Vídeo interativo

Sinal e monotonia da função afim



Exercícios

- 31** Estuda a função afim h quanto à monotonia, sendo:

31.1. $h(x) = -3x + 1$

31.2. $h(x) = -5 + x$

31.3. $h(x) = \frac{x-1}{2}$

- 32** Em cada um dos casos seguintes, determina os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a função afim, definida por:

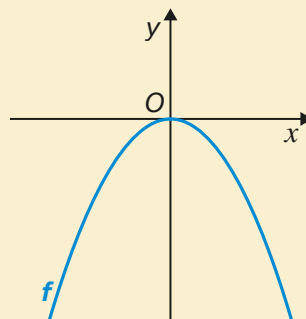
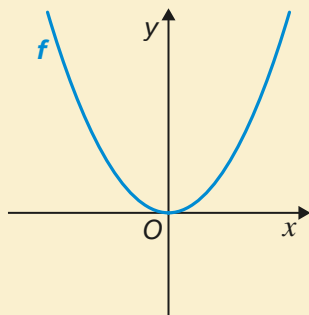
32.1. $f(x) = kx - 1$, é estritamente crescente;

32.2. $f(x) = 2x - kx + 3$, é estritamente decrescente.

Monotonia de uma função quadrática

Consideremos uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Se $a > 0$, f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.
- Se $a < 0$, f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.



3.3.3. Extremos de uma função

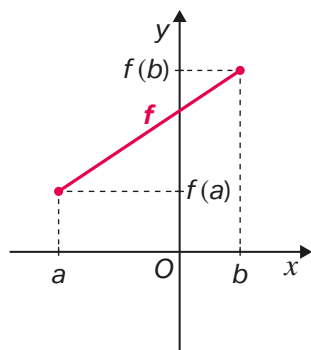
Dada uma função real de variável real f de domínio A e $f(a) \in D_f'$:

- $f(a)$ é **mínimo absoluto** de f se $\forall x \in A, f(a) \leq f(x)$;
- $f(a)$ é **máximo absoluto** de f se $\forall x \in A, f(a) \geq f(x)$;

Designamos por **extremos absolutos** o mínimo absoluto de f e o máximo absoluto de f .

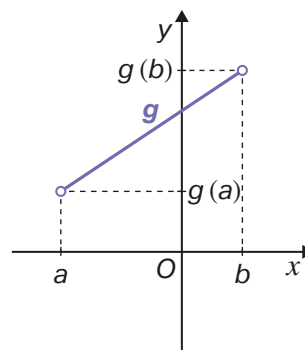
Exemplos

1.



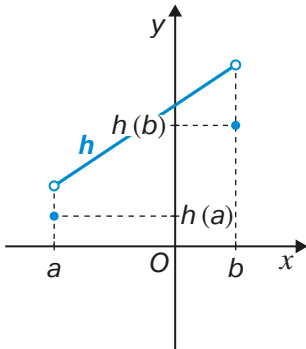
$f(a)$ é mínimo absoluto de f .
 $f(b)$ é máximo absoluto de f .

2.



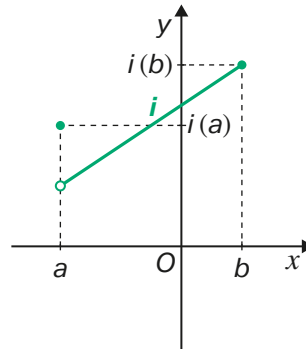
A função g não tem extremos absolutos.

3.



$h(a)$ é mínimo absoluto de h .
 h não tem máximo absoluto.

4.



$i(b)$ é máximo absoluto de i .
 i não tem mínimo absoluto.

e Manual Interativo

Vídeo
 Extremos absolutos e relativos de uma função



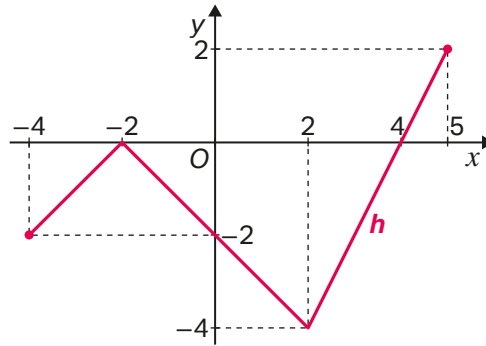
Exercício

33 Na figura está representada a função h , real de variável real, de domínio $[-4, 5]$.

33.1. Qual é o contradomínio da função h ?

33.2. Indica, caso exista:

- a) o máximo absoluto da função h ;
- b) o mínimo absoluto da função h .



Vizinhança de raio r de x

Consideremos um número real, x , e um número real positivo, r .

Designamos por **vizinhança de raio r de x** o intervalo $]x - r, x + r[$ e representamos por $V_r(x)$.

Dada uma função real de variável real f de domínio A , f tem um extremo relativo em $a \in A$ se existe $r > 0$ tal que:

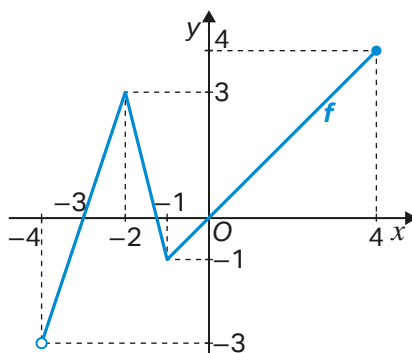
- $\forall x \in A \cap V_r(a), f(a) \geq f(x)$. Neste caso, $f(a)$ é um **máximo relativo** e a é um **maximizante**;
- $\forall x \in A \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$. Neste caso, $f(a)$ é um **mínimo relativo** e a é um **minimizante**.

Nota

Qualquer extremo absoluto de uma função é também um extremo relativo.

Exemplos

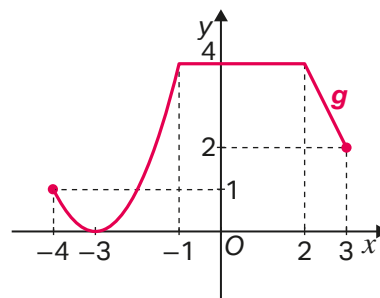
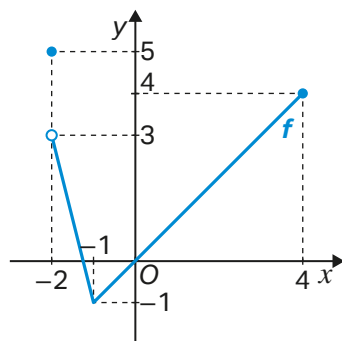
Consideremos a função real de variável real f , de domínio $]-4, 4]$.



1. O contradomínio de f é $D_f' =]-3, 4]$.
2. $f(4) = 4$ é máximo absoluto de f .
3. Não existe mínimo absoluto de f .
4. Os extremos relativos de f são:
 - o máximo relativo 3, sendo -2 o respetivo maximizante;
 - o máximo relativo 4, sendo 4 o respetivo maximizante;
 - o mínimo relativo -1 , sendo -1 o respetivo minimizante.

Exercício

- 34 Considera as funções reais de variável real f e g , representadas graficamente.

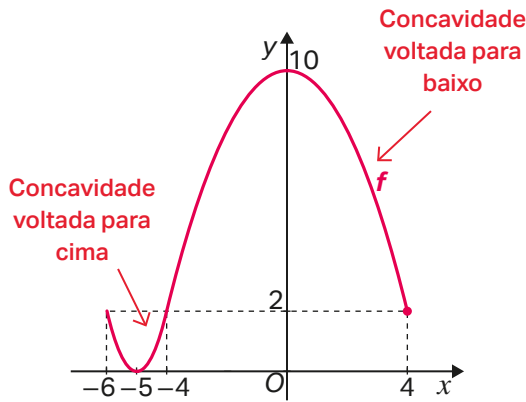


Para cada uma das funções:

- 34.1. constrói a tabela de variação e indica os intervalos de monotonia da função;
- 34.2. indica, se existirem, os extremos absolutos da função;
- 34.3. indica os extremos relativos da função e os respetivos maximizantes e minimizantes.

3.3.4. Sentido das concavidades do gráfico de uma função

Consideremos a função real de variável real f , representada na figura.



- O gráfico da função f tem a **concavidade voltada para cima** num intervalo $I \subset D_f$ se, dados três pontos, A , B e C , do gráfico de f , com abscissas em I tais que $x_A < x_B < x_C$, o declive da reta AB é inferior ao declive da reta BC .
- O gráfico da função f tem a **concavidade voltada para baixo** num intervalo $I \subset D_f$ se, dados três pontos, A , B e C , do gráfico de f , com abscissas em I tais que $x_A < x_B < x_C$, o declive da reta AB é superior ao declive da reta BC .

Exemplos

1. Na figura encontra-se a representação gráfica da função g , real de variável real.

Sabemos que $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ e $C(3, 4)$.

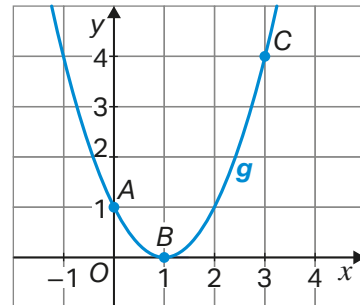
O declive da reta AB é dado por:

$$m_{AB} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = \frac{-1}{1} = -1$$

O declive da reta BC é dado por:

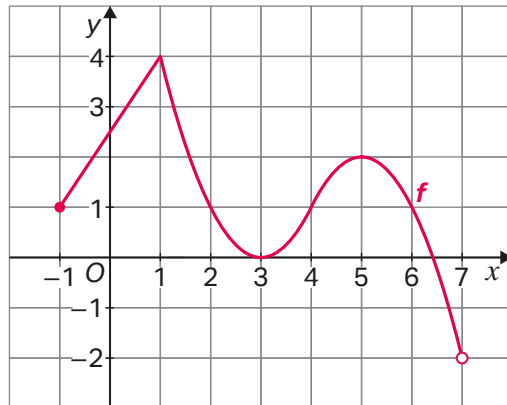
$$m_{BC} = \frac{4 - 0}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Reparemos que $x_A < x_B < x_C$ e $m_{AB} < m_{BC}$, o gráfico de g em $[0, 3]$ tem a concavidade voltada para cima.



2. Consideremos a função f , representada graficamente na figura.

- A função f tem um máximo absoluto, que é 4, sendo 1 o respetivo maximizante.
- A função f não tem mínimo absoluto.
- A concavidade de f é voltada para cima no intervalo $[1, 4]$.
- A função f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[4, 7]$.



Para aplicar

- 1** Na figura encontra-se representada uma função real de variável real, f , de domínio $[-4, 3]$.

1.1. Quais são os zeros da função f ?

1.2. Constrói um quadro de sinais da função f .

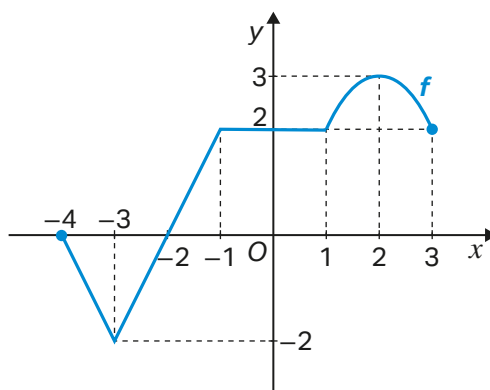
1.3. Determina os valores de x tais que:

a) $f(x) \geq 2$

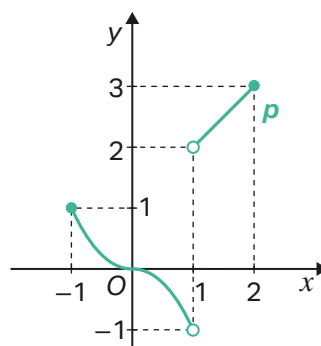
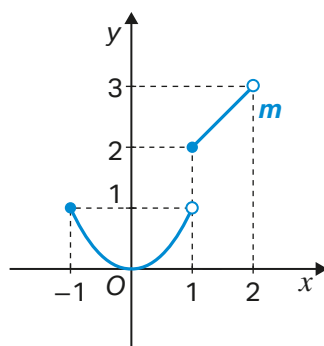
c) $-f(x) > 0$

b) $f(-x) \leq 0$

d) $f(x) \times f(-1) > 0$



- 2** Considera as representações gráficas das funções reais de variável real m e p .



2.1. Relativamente à função m :

- a)** indica, se existirem, os extremos absolutos da função;
b) constrói a tabela de variação.

2.2. Relativamente à função p :

- a)** indica os zeros;
b) constrói a tabela de sinais.

- 3** Considera as funções reais de variável real r e s , definidas por:

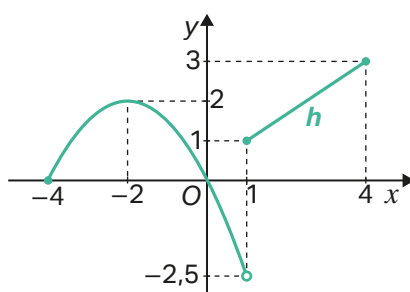
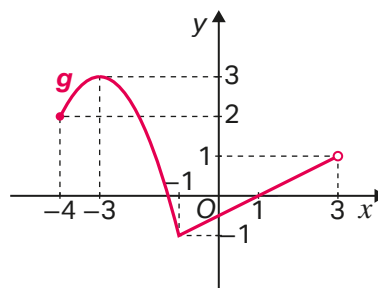
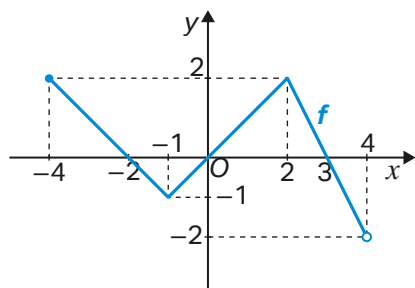
$$r(x) = 2x - 1 \quad \text{e} \quad s(x) = 3 - 2x$$

3.1. Estuda as funções quanto à paridade.

3.2. Constrói o quadro de sinais da função r .

3.3. Estuda as funções r e s quanto à monotonia.

4 Nas figuras seguintes estão representadas graficamente as funções f , g e h .



- 4.1. Indica o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.
- 4.2. Relativamente à função f , indica os zeros e constrói a tabela de sinais.
- 4.3. Mostra que a função f não é par.
- 4.4. Indica os extremos absolutos da função g .
- 4.5. Constrói a tabela de variação da função g e indica os seus intervalos de monotonia.
- 4.6. Indica uma restrição da função h em que:
 - a) a função é injetiva;
 - b) a representação gráfica da função tem a concavidade voltada para baixo.

5 Considera as funções reais de variável real m e p , definidas por $m(x) = -5x^2$ e $p(x) = 4x^2$.

- 5.1. Mostra que:
 - a) a função p é par;
 - b) a função m não é injetiva.
- 5.2. Justifica a razão pela qual a representação gráfica da função m tem a concavidade voltada para baixo.

3.4. Estudo elementar das funções quadráticas, funções definidas por ramos e funções modulares

Manual Interativo

Geogebra
Gráficos de
funções
quadráticas



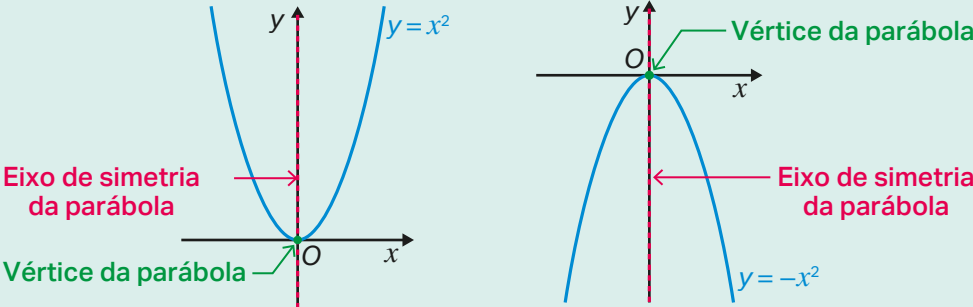
3.4.1. Funções quadráticas

Funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

No ano letivo anterior, estudaste as funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e as características dos seus gráficos.

Tarefa de desenvolvimento

- 1 Observa as representações gráficas das funções quadráticas definidas por $y = x^2$ e $y = -x^2$.



Por observação das representações gráficas, completa a tabela seguinte:

	$y = x^2$	$y = -x^2$
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Sentido da concavidade da parábola		
Coordenadas do vértice da parábola		
Sinal		
Monotonia		
Extremos		
Equação do eixo de simetria da parábola		

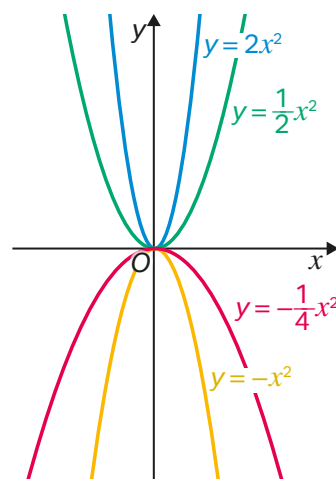
Nota: Podes utilizar o GeoGebra, nomeadamente a aplicação associada a este exercício.

Recorda que os diferentes valores atribuídos ao coeficiente, a , influenciam a abertura da parábola, gráfico da função quadrática.

Por observação das representações gráficas da figura, podemos concluir que:

Quanto maior é o valor absoluto do coeficiente, a , menor é a abertura da parábola.

Nota: Podes utilizar o GeoGebra como auxílio a esta exploração, nomeadamente a aplicação associada a esta página.



Manual Interativo

GeoGebra
Abertura da parábola



O estudo das funções quadráticas do tipo

$$y = ax^2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

pode ser sintetizado da seguinte forma:

	$a > 0$	$a < 0$
Representação gráfica		
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Zeros	0	0
Sentido da concavidade da parábola	Concavidade voltada para cima	Concavidade voltada para baixo
Coordenadas do vértice da parábola	(0, 0)	(0, 0)
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ Crescente em $[0, +\infty[$	Crescente em $]-\infty, 0]$ Decrescente em $[0, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto: 0	Máximo absoluto: 0
Equação do eixo de simetria da parábola	$x = 0$	$x = 0$

Exemplo

1. Considera a função quadrática f , representada na figura.

O ponto A pertence ao gráfico da função f e tem coordenadas $\left(-\frac{7}{5}, 2\right)$.

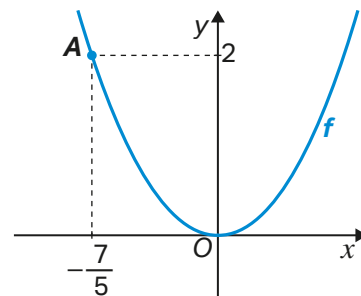
Vamos determinar a expressão algébrica da função f .

Como é uma função quadrática com vértice na origem do referencial, a expressão algébrica da função f é do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

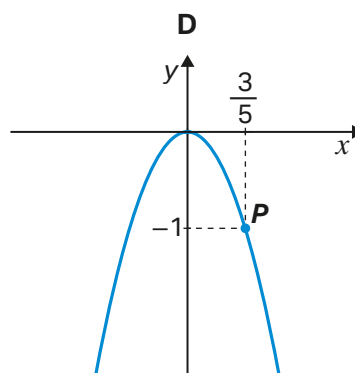
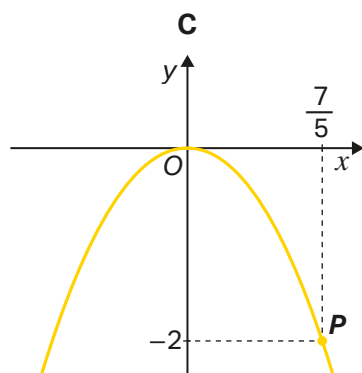
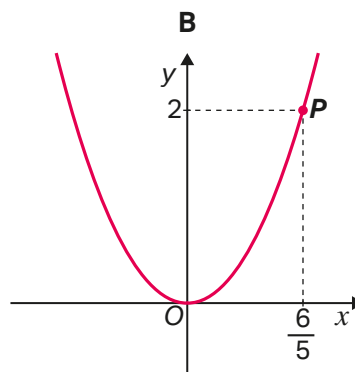
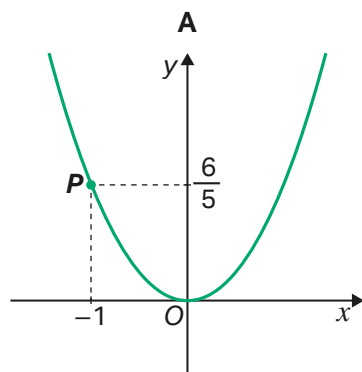
O ponto $A\left(-\frac{7}{5}, 2\right)$ pertence ao gráfico da função, logo:

$$2 = a\left(-\frac{7}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = a \times \frac{49}{25} \Leftrightarrow a = \frac{50}{49}$$

$$\text{Então, } f(x) = \frac{50}{49}x^2.$$

**Exercício**

- 35 Faz corresponder a expressão analítica à respetiva representação gráfica.



I. $y = -\frac{25}{9}x^2$

II. $y = -\frac{50}{49}x^2$

III. $y = \frac{6}{5}x^2$

IV. $y = \frac{25}{18}x^2$

Funções quadráticas do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

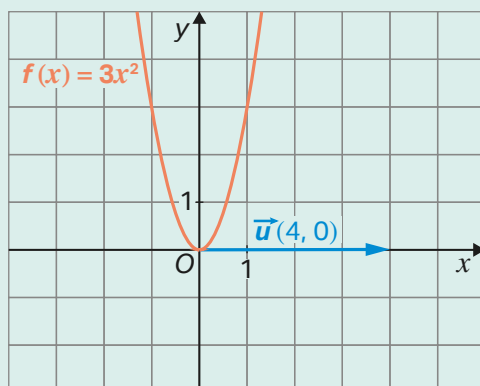
O estudo das funções quadráticas do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, será feito através das transformações geométricas dos gráficos que já abordámos anteriormente.

Tarefa de desenvolvimento

Considera a função f , definida por $f(x) = 3x^2$.

- 1 Considera a função g , cujo gráfico é a imagem do gráfico f através da translação de vetor $\vec{u} = (4, 0)$.

- 1.1. Copia a figura seguinte e completa-a com a representação gráfica da função g .



Nota: Podes utilizar o GeoGebra, nomeadamente a aplicação associada a este exercício.

- 1.2. Relativamente à função g e ao seu gráfico, completa a tabela seguinte:

Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sentido da concavidade do gráfico	
Sinal	
Monotonia	
Extremos	

- 1.3. Indica as coordenadas do vértice da parábola que representa a função g e a equação do seu eixo de simetria.
- 1.4. Sabe-se que a expressão algébrica da função g é do tipo $y = a(x - h)^2$, com $a, h \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, sendo o vértice da parábola o ponto $V(h, 0)$. Escreve a expressão algébrica da função g .

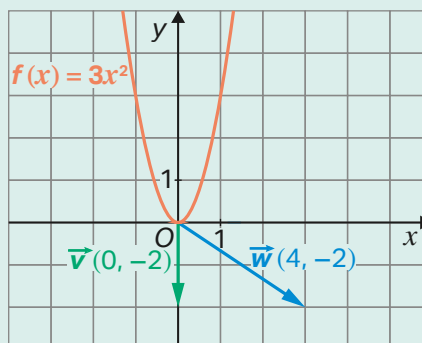


2 Considera as funções h e j .

Sabe-se que:

- o gráfico da função h é obtido a partir do gráfico de f , através da translação de vetor $\vec{v} = (0, -2)$;
- a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{w} = (4, -2)$ é o gráfico de j .

2.1. Copia a figura e completa-a com a representação gráfica das funções h e j .

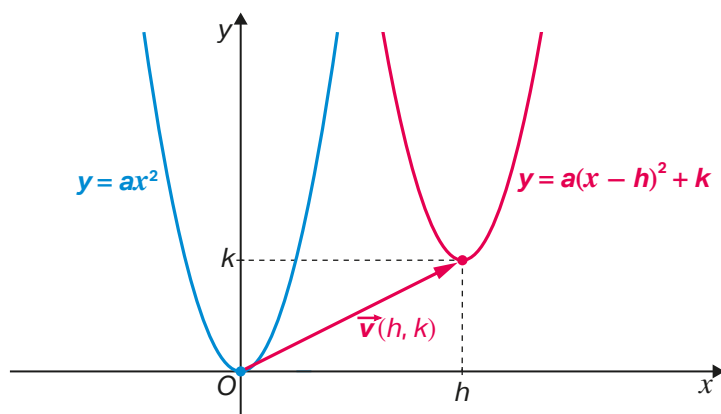


2.2. Em relação à representação gráfica de cada uma das funções h e j , indica:

- as coordenadas do vértice;
- a equação do eixo de simetria.

2.3. Escreve as expressões algébricas das funções h e j na forma $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, sabendo que os vértices que as representam têm coordenadas (h, k) .

O gráfico de uma função do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é a imagem do gráfico da função definida por $y = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pela translação de vetor $\vec{v} = (h, k)$.



Nota

A função quadrática pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ou do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Neste caso, consideramos h e k números reais positivos.

Uma função real de variável real definida por uma expressão do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma **função quadrática**.

O seu gráfico é uma parábola com eixo de simetria de equação $x = h$ e vértice $V(h, k)$.

Podemos concluir que:

	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Sentido da concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Coordenadas do vértice da parábola	$V(h, k)$	$V(h, k)$
Equação do eixo de simetria da parábola	$x = h$	$x = h$
Extremos	Mínimo absoluto: k	Máximo absoluto: k

 Manual Interativo

Vídeo interativo
Transformações
geométricas da
função
quadrática

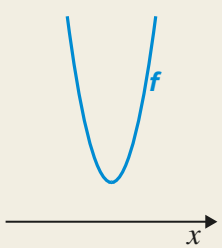
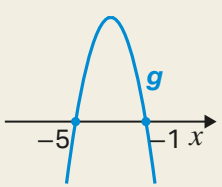


Exemplos

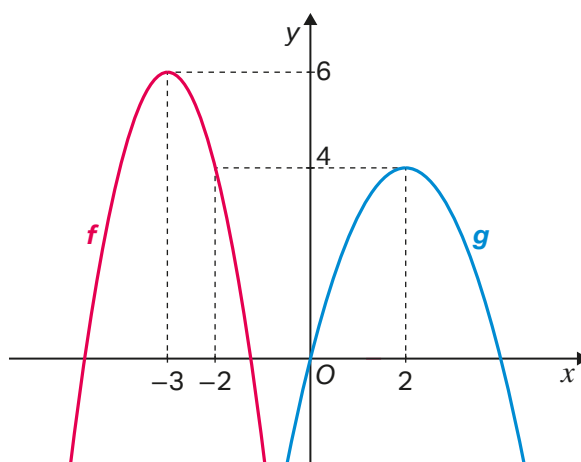
1. Consideremos as funções f e g , definidas por:

$$f(x) = 3(x - 1)^2 + 5 \quad \text{e} \quad g(x) = -2(x + 3)^2 + 8$$

	Função f	Função g
Sentido da concavidade	Como $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.	Como $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
Coordenadas do vértice	$(1, 5)$	$(-3, 8)$
Domínio	$D_f = \mathbb{R}$	$D_g = \mathbb{R}$
Contradomínio	$D'_f = [5, +\infty[$	$D'_g =]-\infty, 8]$
Zeros	$3(x - 1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 = -\frac{5}{3}$ Equação impossível, pois $(x - 1)^2 \geq 0$. A função f não tem zeros.	$-2(x + 3)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 3 = 2 \vee x + 3 = -2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2 - 3 \vee x = -2 - 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$ A função g tem dois zeros: -5 e -1 .

	Função f	Função g
Sinal	Esboço da representação gráfica:  A função f é positiva em $\mathbb{R}$.	Esboço da representação gráfica:  A função g é positiva quando $x \in]-5, -1[$ e é negativa quando $x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$.

2. Consideremos as funções f e g , representadas no referencial da figura.



- As coordenadas do vértice da parábola que representa f são $(-3, 6)$ e da parábola que representa g são $(2, 4)$.
- Os zeros de g são 0 e 4.
- As expressões algébricas das funções são do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, com $a \neq 0$, sendo (h, k) as coordenadas do vértice.
 - $f(x) = a(x + 3)^2 + 6$
 $(-2, 4) \in G_f$, logo: $4 = a(-2 + 3)^2 + 6 \Leftrightarrow 4 - 6 = a \Leftrightarrow a = -2$
Então, $f(x) = -2(x + 3)^2 + 6$.
 - $g(x) = a(x - 2)^2 + 4$
4 é zero de g , logo: $a(4 - 2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1$
Então, $g(x) = -(x - 2)^2 + 4$.

3. Seja m a função quadrática definida por $m(x) = 5x^2 - 5$.

- Coordenadas do vértice da parábola que representa m : $(0, -5)$
- Zeros:

$$5x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Os zeros da função m são -1 e 1 .

- Estudo do sinal:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$m(x)$	+	0	-	0	+

$$m(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$m(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

- Extremo:

Mínimo absoluto: -5 (minimizante: 0)

- Monotonia:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$m(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

m é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

4. Uma função quadrática, de contradomínio $]-\infty, 4]$ e cujos zeros são -3 e 1 , poderá ser definida por uma expressão algébrica do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

$$h = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$k = 4$$

Logo, $y = a(x + 1)^2 + 4$.

Como o ponto de coordenadas $(-3, 0)$ pertence ao gráfico da função, então:

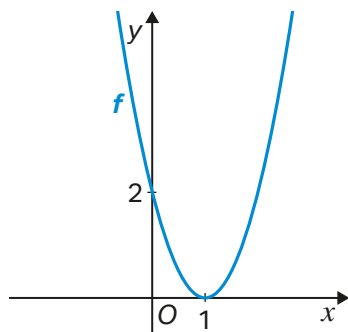
$$0 = a(-3 + 1)^2 + 4 \Leftrightarrow -4 = a \times 4 \Leftrightarrow a = -1$$

Assim, a função pode ser definida por $y = -(x + 1)^2 + 4$.

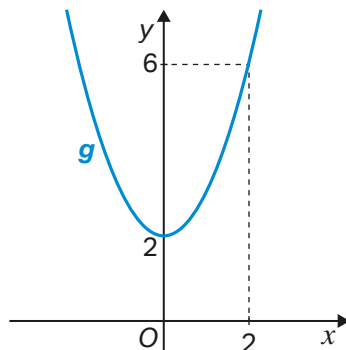
Exercícios

- 36** Escreve na forma $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, as expressões algébricas das funções que têm as seguintes representações gráficas:

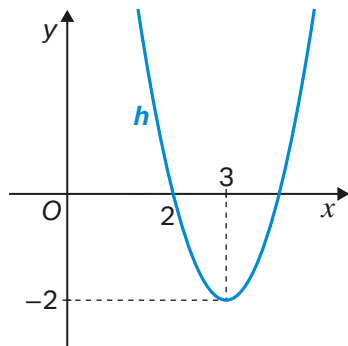
36.1.



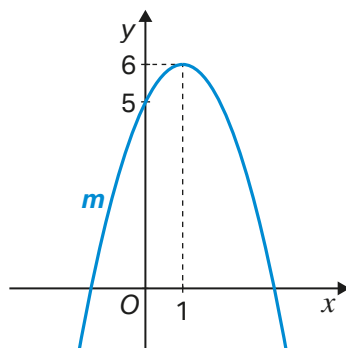
36.2.



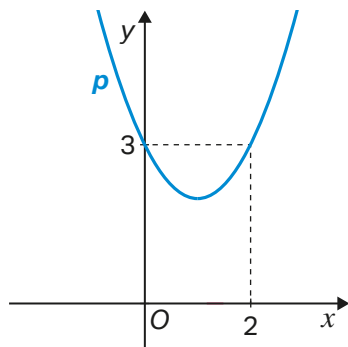
36.3.



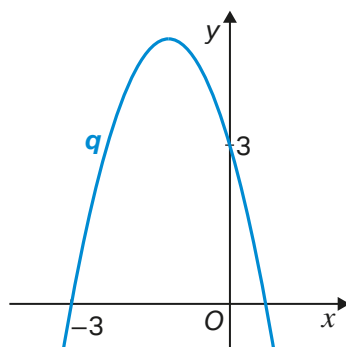
36.4.



36.5.



36.6.



- 37** Estuda cada uma das funções, definidas pelas seguintes expressões algébricas, quanto à existência de zeros e à variação de sinal.

37.1. $m(x) = 3(x - 1)^2$

37.2. $f(x) = -2x^2 + 8$

37.3. $g(x) = 2x^2 - 10$

37.4. $h(x) = (x - 3)^2 - 4$

37.5. $p(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 4$

37.6. $q(x) = -\sqrt{2}(x - 1)^2 + 2$

38 Determina a expressão algébrica que define a função j , sabendo que:

- 38.1.**
- a equação do eixo de simetria do seu gráfico é $x = -3$;
 - um dos seus zeros é -2 ;
 - o contradomínio da função é $]-\infty, 2]$.

- 38.2.**
- o seu mínimo absoluto é -3 ;
 - os seus zeros são 2 e 5 .

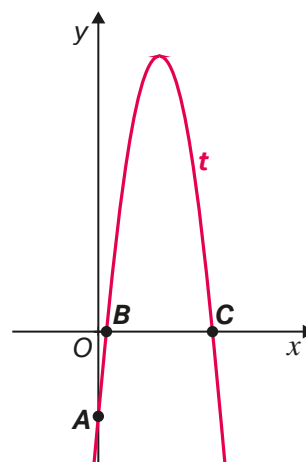
39 No referencial da figura encontra-se representada a função t , definida por $t(x) = -3(x - 2)^2 + 9$. O ponto A é o ponto de interseção do gráfico de t com o eixo das ordenadas, e os pontos B e C são os pontos de interseção com o eixo das abcissas.

39.1. Determina as coordenadas dos pontos A , B e C .

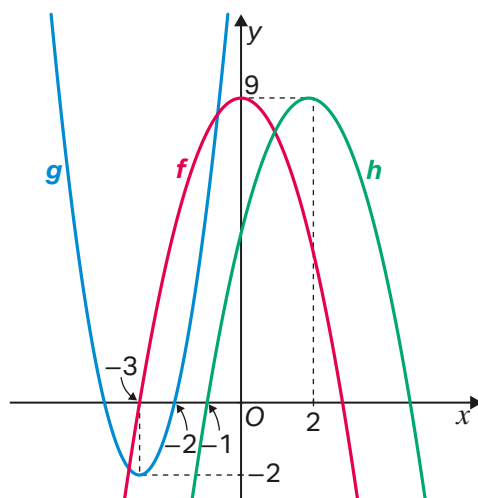
39.2. Faz o estudo do sinal da função t .

39.3. Indica as coordenadas do vértice da parábola que representa a função t .

39.4. Constrói o quadro de variação da função t .



40 Na figura estão representadas graficamente as funções f , g e h .



40.1. Indica o contradomínio e o extremo absoluto de cada uma das funções.

40.2. Constrói o quadro de variação da função g .

40.3. Constrói o quadro de sinal da função h .

40.4. Determina a expressão algébrica das funções que têm como gráfico as parábolas representadas.

Funções quadráticas definidas por $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Quando uma função quadrática se encontra definida por uma expressão algébrica do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, a determinação do **vértice da parábola** que a representa **é fundamental** para o seu estudo.

Desta forma, vamos analisar diferentes formas de o fazer.

Exemplos

Consideremos a função definida por $f(x) = -x^2 - 2x + 15$.

1. Para determinar as coordenadas do vértice da parábola da função f , podemos começar por determinar os seus zeros.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 15 = 0$$

Como o binómio discriminante é positivo,
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64$, sabemos que a função tem dois zeros distintos.

Usando a fórmula resolvente das equações do 2.º grau:

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 15 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 15}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm 8}{-2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Os zeros da função são -5 e 3 .

Como a parábola é simétrica em relação à reta de equação $x = x_v$, sendo x_v a abcissa do vértice, vem:

$$x_v = \frac{-5 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Desta forma, a ordenada do vértice será

$$f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 15 = 16.$$

Assim, o vértice da parábola é o ponto $V(-1, 16)$.

Recorda

Numa função definida por uma expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, para determinar os zeros basta igualar a expressão a zero, obtendo uma equação de 2.º grau.

O número de zeros de uma equação do 2.º grau na forma reduzida depende do sinal do binómio discriminante,
 $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$.

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções reais distintas. Logo, a função tem dois zeros distintos.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem uma solução real. Logo, a função tem um zero.
- Se $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais. Logo, a função não tem zeros.

2. Caso a função **não tenha zeros**, é preciso usar outros processos.

Com o mesmo exemplo, vamos usar o método do **completamento do quadrado** para determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa a função f , escrevendo a expressão algébrica de f na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.



Vídeo
Zeros de uma
função
quadrática



$$f(x) = -x^2 - 2x + 15 = -(x^2 + 2x - 15) = -(x^2 + 2x + 1 - 1 - 15) =$$

$$= -((x+1)^2 - 16) = -(x+1)^2 + 16$$

Logo, concluímos que o vértice da parábola que representa f é o ponto $V(-1, 16)$.

Vértice da parábola – Fórmula

Vamos escrever uma expressão algébrica do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + a\left(-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Então, o **vértice da parábola** é o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exercícios

41 Considera as funções definidas por:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5; \quad g(x) = -2x^2 + 6x; \quad j(x) = -x^2 - x + 6; \quad m(x) = -3x^2 - 3x + 6$$

Responde às seguintes questões, para cada uma das funções.

41.1. Escreve a expressão algébrica da função na forma $y = a(x-h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

41.2. Indica as coordenadas do vértice do gráfico da função e a respetiva equação do eixo de simetria.

41.3. Indica o contradomínio.

41.4. Qual é o extremo da função?

41.5. Constrói o quadro de variação da função.

42 Relativamente a cada uma das funções quadráticas a seguir definidas, determina as coordenadas do vértice da parábola que a representa graficamente, a equação do seu eixo de simetria e o seu contradomínio.

42.1. $f(x) = 2x^2 - 10$

42.2. $g(x) = -x^2 + 10x$

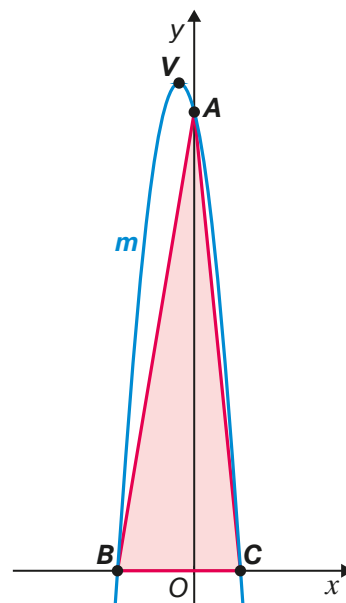
42.3. $h(x) = -x^2 + 2x + 3$

42.4. $i(x) = 2x^2 - 10$

42.5. $j(x) = 2x^2 - 9x - 5$

42.6. $k(x) = -9x^2 + 27x + 10$

- 43** No referencial da figura está representada a função quadrática, m , definida por $m(x) = -2x^2 - 4x + 30$, e o triângulo $[ABC]$, sendo A o ponto de interseção do gráfico de m com o eixo das ordenadas e B e C os pontos de interseção com o eixo das abscissas. O ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função m .



- 43.1.** Determina as coordenadas do ponto V .
- 43.2.** Indica:
- a)** o domínio e o contradomínio da função m ;
 - b)** a equação do eixo de simetria da parábola.
- 43.3.** Determina as coordenadas dos pontos A , B e C .
- 43.4.** Determina a medida da área do triângulo $[ABC]$.

Inequações do 2.º grau

Uma inequação do 2.º grau, na variável x , pode ser representada na forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver este tipo de inequações, começamos por determinar os zeros da função quadrática envolvida e conhecer o sentido da concavidade do gráfico dessa função.

Desta forma, não podemos esquecer que:

- o sentido da concavidade da parábola depende do sinal do coeficiente de x^2 , a (se $a > 0$, a concavidade está voltada para cima, se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo);
- o número de zeros da função quadrática depende do sinal do binómio discriminante (se $\Delta > 0$, a função tem dois zeros; se $\Delta < 0$, a função não tem zeros; se $\Delta = 0$, a função tem um único zero).

Exemplos

- 1.** Consideremos a função h , definida por $h(x) = -x^2 + 4x + 5$.

Como $a < 0$, a função é representada por uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 36 > 0$$

Logo, h tem dois zeros.

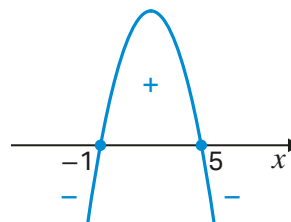
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times 5}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

Os zeros da função h são -1 e 5 .

Assim, $h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 5[$ e

$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$.



2. Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

$$\bullet x^2 + 2x > 50 - 3x$$

$$x^2 + 2x > 50 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 > 0$$

Cálculos auxiliares:

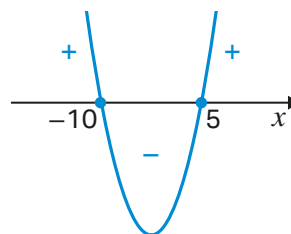
$$x^2 + 5x - 50 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -10 \vee x = 5$$

Logo, -10 e 5 são os zeros de $f(x) = x^2 + 5x - 50$.

Como $a = 1 > 0$, a concavidade está voltada para cima.

Logo, $x^2 + 5x - 50 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -10[\cup]5, +\infty[$.



$$\bullet x(x+1) < -1$$

$$x(x+1) < -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 0$$

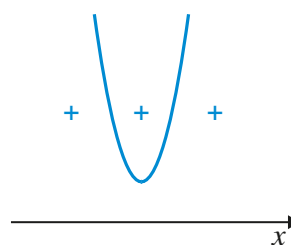
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

Logo, a função definida por $g(x) = x^2 + x + 1$ não tem zeros.

Como $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Desta forma, a função será sempre positiva.

$$x^2 + x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$



Exercícios

44. Para cada uma das funções definidas pelas expressões algébricas apresentadas a seguir, faz o estudo do sinal, indicando os intervalos em que a função é positiva e em que é negativa.

44.1. $f(x) = -2x^2 + \frac{9}{8}$

44.2. $g(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$

44.3. $h(x) = -x^2 - 5x + 150$

44.4. $i(x) = x^2 + 12x + 20$

44.5. $j(x) = x^2 + \frac{3}{10}x - \frac{1}{10}$

44.6. $k(x) = -2x^2 - 13x - 15$



45 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das inequações seguintes:

45.1. $x(2x - 1) < 0$

45.2. $3x(2 - x) < x^2$

45.3. $4(x + 2) \geq x^2$

45.4. $\frac{(x - 3)(x + 3)}{2} + 5 \leq 0$

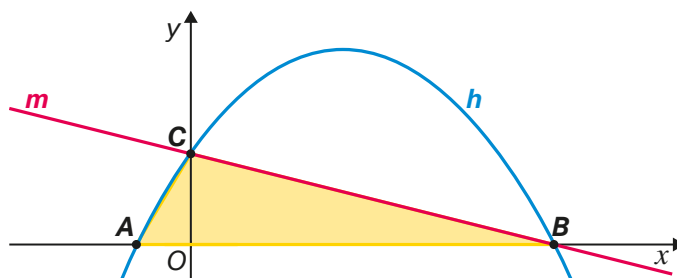
45.5. $\frac{(x - 5)^2}{3} > 2 - x$

45.6. $x(x + 8) - 7 < \frac{7 - 4x}{2}$

46 Na figura estão representados a função quadrática h , a função afim m e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- a função m é definida pela expressão $m(x) = -\frac{1}{4}x + 5$;
- o ponto A tem coordenadas $(-3, 0)$;
- As abscissas dos pontos A e B são zeros da função h ;
- C e B são os pontos de interseção do gráfico da função m com o eixo das ordenadas e o eixo das abscissas, respectivamente.



46.1. Determina as coordenadas dos pontos B e C representados na figura.

46.2. Determina uma expressão algébrica que defina a função quadrática h .

46.3. Qual é a medida da área do triângulo $[ABC]$?

3.4.2. Funções definidas por ramos

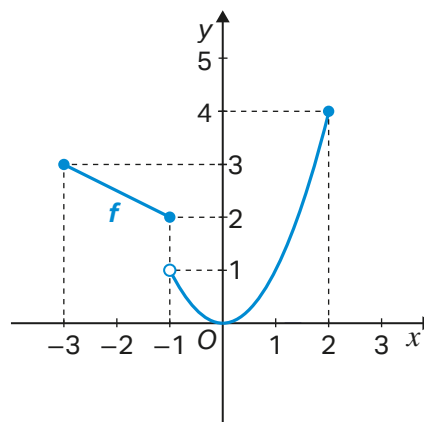
Consideremos a função real de variável real, f , representada na figura.

Por observação da representação gráfica, verificamos que, para definir analiticamente esta função temos de decompor o domínio em duas partes: $[-3, -1]$ e $]-1, 2]$.

- Quando $x \in [-3, -1]$, a função f é definida por uma função afim.

Sejam $A(-3, 3)$ e $B(-1, 2)$ dois pontos do gráfico de f .

$$m = \frac{3 - 2}{-3 - (-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$



$$f(x) = -\frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, quando $x \in [-3, -1]$.

- Quando $x \in]-1, 2]$, a função f é definida por uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}$. O ponto $C(2, 4)$ é um ponto do gráfico de f .

Assim, $4 = a \times 2^2 \Leftrightarrow \frac{4}{4} = a \Leftrightarrow a = 1$. Logo, $f(x) = x^2$, quando $x \in]-1, 2]$.

Assim, a função f pode definir-se pela **expressão por ramos**:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{se } x \in [-3, -1] \\ x^2 & \text{se } x \in]-1, 2] \end{cases}$$

Exemplo

- Consideremos a função real de variável real, p , definida analiticamente por

$$\text{ramos por: } p(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \in [3, 5] \\ 2x - 3 & \text{se } x \in]-\infty, 2] \end{cases}.$$

A função p tem um único zero, $\frac{3}{2}$.

Queremos determinar os valores de x tais que:

- $p(x) = 0$

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 1 = 0 \wedge x \in [3, 5]) \vee (2x - 3 = 0 \wedge x \in]-\infty, 2]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 1 \wedge x \in [3, 5]) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge x \in]-\infty, 2]\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x = -1 \vee x = 1) \wedge x \in [3, 5]) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge x \in]-\infty, 2]\right)$$

Logo, $p(x) = 0$ para $x = \frac{3}{2}$.

- $p(x) = -3$

$$(-x^2 + 1 = -3 \wedge x \in [3, 5]) \vee (2x - 3 = -3 \wedge x \in]-\infty, 2]) \Leftrightarrow$$

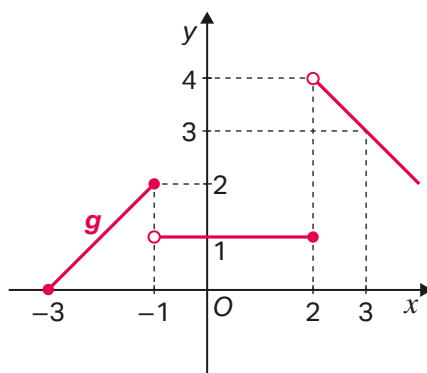
$$\Leftrightarrow (x^2 = 4 \wedge x \in [3, 5]) \vee (x = 0 \wedge x \in]-\infty, 2]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x = -2 \vee x = 2) \wedge x \in [3, 5]) \vee (x = 0 \wedge x \in]-\infty, 2])$$

$p(x) = -3$ tem uma única solução, que é 0.

Exercícios

- 47 Na figura seguinte encontra-se representada uma função g de domínio $[-3, +\infty[$.



47.1. Define a função g por ramos.

47.2. Determina os zeros da função g .

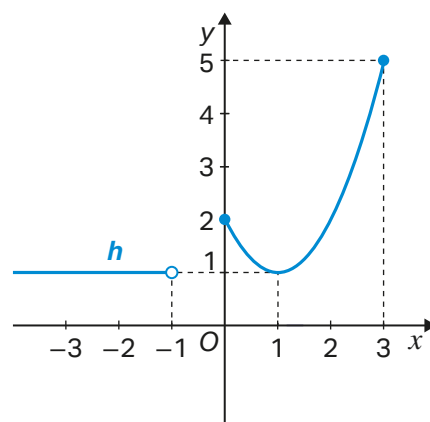
- 48 Considera a função real de variável real, h , definida em $]-\infty, -1[\cup [0, 3]$ e representada na figura ao lado.

48.1. Define a função h por ramos.

48.2. Resolve, analiticamente:

a) $h(x) = 4$

b) $h(x) = 1$



3.4.3. Funções modulares

Em anos anteriores, já trabalhaste com o valor absoluto de um número real.

Como a cada número real corresponde um e um só valor absoluto, podemos definir esta correspondência como uma função, nomeada **função módulo**, definida em $\mathbb{R}$ e representada por $f(x) = |x|$.

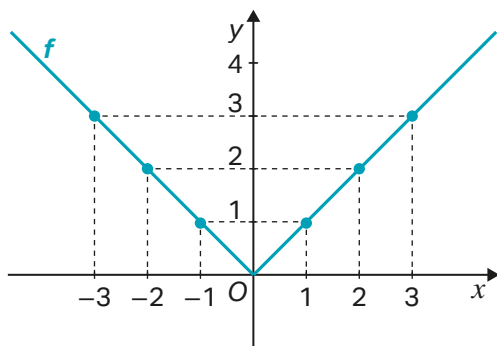
Recorda

O valor absoluto de um número é a distância, na reta numérica, desse número à origem. Por exemplo, $|-3| = 3$ e $|5| = 5$.

A função módulo pode ser definida por ramos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico desta função é constituído por duas semirretas com origem no ponto $O(0, 0)$ e perpendiculares entre si.



Exemplos

1. Consideremos a função g , definida por $g(x) = |3 - x|$.

A função g também pode ser definida por ramos:

$$g(x) = |3 - x| = \begin{cases} 3 - x & \text{se } 3 - x \geq 0 \\ -3 + x & \text{se } 3 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x \leq 3 \\ -3 + x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

2. Consideremos a função h , definida por $h(x) = |x + 2| - 1$.

A função h também pode ser definida por ramos:

$$h(x) = |x + 2| - 1 = \begin{cases} x + 2 - 1 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -x - 2 - 1 & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Exercício

- 49 Define por ramos as funções definidas pelas seguintes expressões algébricas:

49.1. $b(x) = |2x - 1|$

49.2. $f(x) = |5 - x|$

49.3. $g(x) = |x + 3| + 2$

49.4. $h(x) = |x - 1| - 4$

49.5. $j(x) = 2 + |x - 3|$

49.6. $l(x) = -|1 - x| + 3$

Funções do tipo $y = a|x - b| + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Tal como já estudaste anteriormente, é possível obter o gráfico de funções do tipo $y = a|x - b| + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a partir do gráfico de $y = |x|$, aplicando diversas transformações.

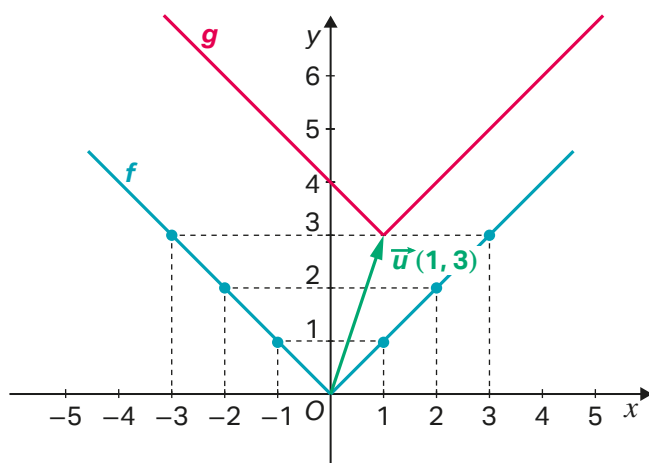
Nota: Podes utilizar o GeoGebra como auxílio a esta exploração, nomeadamente a aplicação associada a esta página.

Exemplos

1. Consideremos a função $g(x) = |x - 1| + 3$.

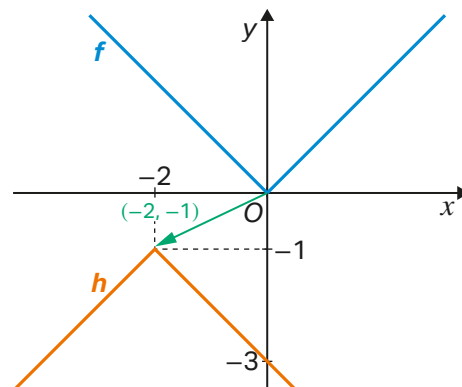
- Vamos analisar a representação gráfica da função g a partir do gráfico de $f(x) = |x|$.

O gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = |x|$, segundo uma translação de vetor $(1, 3)$.



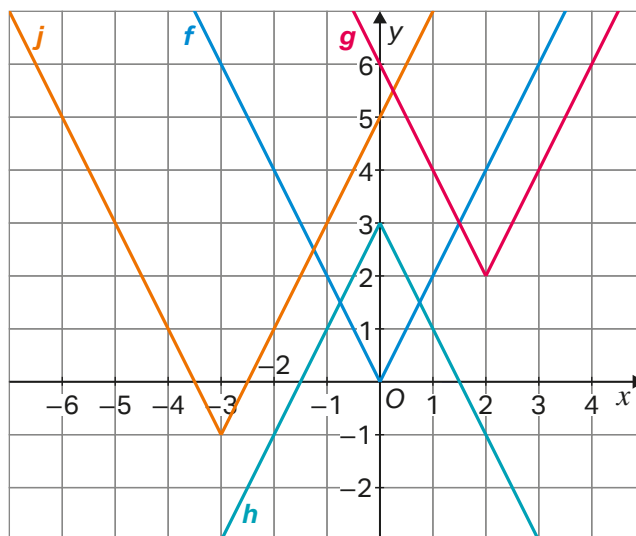
- O contradomínio da função g é definido por $D'_g = [3, +\infty[$.
- O extremo absoluto da função g é o mínimo absoluto 3.
- A equação do eixo de simetria do gráfico de g é representada pela reta de equação $x = 1$.

2. O gráfico da função h , definida por $h(x) = -|x + 2| - 1$, pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x) = |x|$ através de uma reflexão segundo o eixo das abcissas e uma translação de vetor $(-2, -1)$.



Exercícios

- 50** Na figura encontram-se representadas várias funções, incluindo a função $f(x) = |2x|$.



50.1. Indica a expressão analítica de cada uma das outras funções modulares representadas graficamente, sabendo que estas foram obtidas a partir do gráfico de f , através de sucessivas transformações.

50.2. Completa a tabela seguinte:

	f	g	h	j
Contradomínio				
Extremo absoluto				
Equação do eixo de simetria do gráfico				

- 51** Considera a função h , definida por $h(x) = |x + 2| - 3$.

51.1. Faz a representação gráfica da função h .

51.2. Indica:

- a)** o contradomínio da função h ;
- b)** a equação do eixo de simetria do gráfico de h .

51.3. A função j é definida por $j(x) = -h(x)$.

- a)** Representa-a num referencial cartesiano.
- b)** Indica o contradomínio da função j e a equação do eixo de simetria do seu gráfico.

52 Considera a função m , definida por $m(x) = -|x + 1| + 2$.

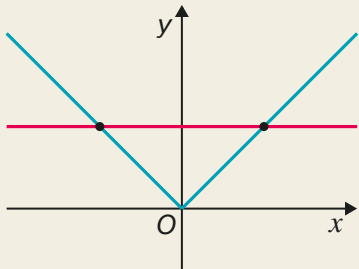
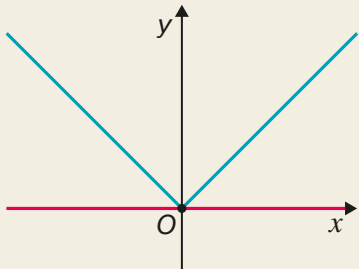
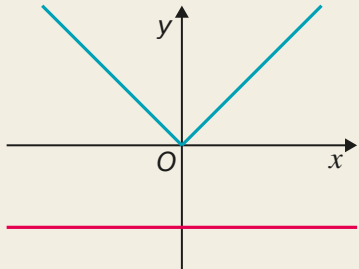
52.1. Representa a função m por uma expressão analítica por ramos.

52.2. Representa graficamente a função m .

52.3. Indica o contradomínio da função m .

52.4. Determina o ponto de interseção do gráfico da função m com o eixo das ordenadas.

Equações e inequações com módulos

Por definição de valor absoluto	Graficamente
$ x = k$, com $k \in \mathbb{R}^+$ $\Leftrightarrow x = -k \vee x = k$ A equação tem duas soluções.	
$ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ A equação tem uma solução.	
$ x = k$, com $k \in \mathbb{R}^-$ A equação é impossível, logo a equação não tem soluções.	

Exemplos

1. Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

$$|2x - 5| = 4 \Leftrightarrow 2x - 5 = -4 \vee 2x - 5 = 4 \Leftrightarrow 2x = 1 \vee 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{9}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right\}$$

$$\bullet |x^2| = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -1}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 1\}$$

2. Vamos considerar a função f , definida por $f(x) = -|3 - x| + 4$.

- Vamos determinar os zeros da função f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -|3 - x| + 4 = 0 \Leftrightarrow |3 - x| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = -4 \vee 3 - x = 4 \Leftrightarrow -x = -7 \vee -x = 1 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 7\}$$

A função tem dois zeros: -1 e 7 .

- Vamos resolver a equação $f(x) = 2$.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -|3 - x| + 4 = 2 \Leftrightarrow |3 - x| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = -2 \vee 3 - x = 2 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{1, 5\}$$

Exercícios

53 Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

53.1. $|x - 2| - 1 = 0$

53.2. $|2x - 3| - 4 = 0$

53.3. $-|x + 3| + 5 = 0$

53.4. $-2|3 - x| + 6 = 0$

53.5. $5 - |x - 2| = -3$

53.6. $3 + |5 - 2x| - 4 = 5$

53.7. $2|5 - x| + 10 = 2$

53.8. $|x^2 - 2x| - 1 = 0$

54 Considera a função g , definida por $g(x) = |x - 3| - 5$.

54.1. Calcula $g(2)$.

54.2. Determina os zeros da função g .

54.3. Considera os pontos P e Q , que pertencem ao gráfico de g e têm ordenada 7 .
Determina as abcissas dos pontos P e Q .

55 Considera a função h , definida por $h(x) = -2|x + 1| + 6$.

55.1. Calcula $h(-3)$.

55.2. Determina os pontos do gráfico de h que têm ordenada 4 .

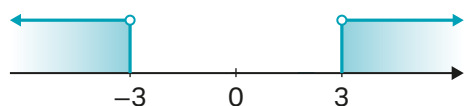
55.3. Determina os pontos de interseção do gráfico de h com os eixos coordenados.

Para resolver **inequações com módulos**, devemos ter em atenção que:

- $|x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k$
- $|x| < k \Leftrightarrow x > -k \wedge x < k$

Por exemplo:

$$|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3$$



$$|x| < 3 \Leftrightarrow x > -3 \wedge x < 3$$



Exemplo

1. Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, as duas inequações seguintes:

- $|x - 3| \geq 2$

$$|x - 3| \geq 2 \Leftrightarrow x - 3 \leq -2 \vee x - 3 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 5$$

$$x \in]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$$

- $|x - 3| - 5 < 3$

$$|x - 3| - 5 < 3 \Leftrightarrow |x - 3| < 8 \Leftrightarrow x - 3 < 8 \wedge x - 3 > -8 \Leftrightarrow x < 11 \wedge x > -5$$

$$x \in]-5, 11[$$

Exercícios

56 Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:

56.1. $|x + 5| < 3$

56.2. $|2 - x| - 5 > 1$

56.3. $|1 - x| + 10 \leq 7$

56.4. $|2 - 5x| - 10 \geq 0$

56.5. $2 + |5 - 2x| \geq 8$

56.6. $-|x - 3| + 5 \geq 2$

56.7. $5 - |x + 1| > 8$

56.8. $-|x - 3| - 7 < -10$

57 Considera a função f , definida por $f(x) = 4 - |2 - x|$.

57.1. Sejam A e B os pontos do gráfico de f que têm ordenada -4 .

Determina a área do triângulo $[OAB]$, sendo $O(0, 0)$.

57.2. Determina as abcissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada superior ou igual a 2 .

Para aplicar

- 1** Considera as funções quadráticas f e g , definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2 + 3x - 10$ e $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

1.1. Representa a função f na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

1.2. Indica as coordenadas do vértice da função f e o seu contradomínio.

1.3. Relativamente à função g :

- a)** determina os seus zeros;
- b)** estuda o sinal;
- c)** indica o seu contradomínio;
- d)** indica a equação do eixo de simetria do seu gráfico.

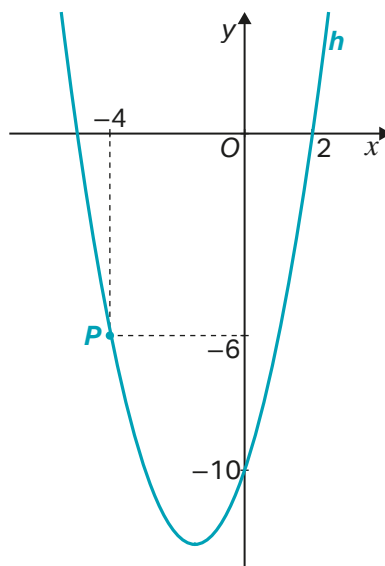
1.4. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:

- a)** $f(x) \geq 0$
- b)** $g(x) < 0$
- c)** $(3 - x)g(x) > 0$

- 2** Na figura ao lado encontra-se representada graficamente a função h .

Sabe-se que:

- a função tem 2 zeros: -5 e 2 ;
- o ponto $P(-4, -6)$ pertence ao gráfico de h .



2.1. Representa a função h na forma $h(x) = a(x - h)^2 + k$ e indica as coordenadas do vértice da função.

2.2. Qual é o contradomínio da função j , definida por $j(x) = -h(2x)$.

2.3. Constrói a tabela de sinal da função m , definida por $m(x) = h(x - 1) + 3$.

- 3** Considera a função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 10$.

3.1. Determina as coordenadas do vértice da função f .

3.2. Determina o domínio da função g , definida por $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$.

3.3. Considera a função h , definida por $h(x) = \sqrt{-f(x) + 2}$.
Determina o seu domínio.

Para aplicar

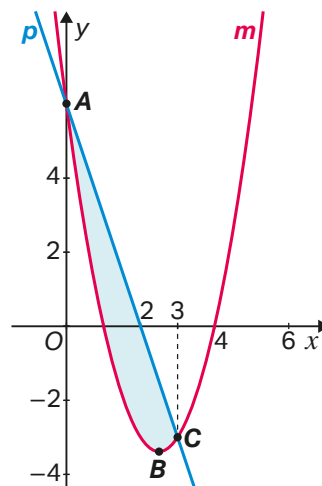
- 4 Na figura ao lado encontram-se representadas graficamente as funções m e p , funções quadrática e afim, respetivamente. Sabe-se que:

- $m(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 5x + 4)$;
- os pontos A e C pertencem aos gráficos das funções m e p ;
- o ponto C tem abcissa 3;
- o ponto B é o vértice da função m ;

4.1. Determina as coordenadas dos pontos A , B e C .

4.2. Define a função p através de uma expressão analítica.

4.3. Define, por uma conjunção de condições, a região sombreada da figura.



- 5 Uma bola de ténis foi lançada do cimo de um prédio, por uma máquina.

A altura da bola, h , em metros, é dada em função do tempo, t , em segundos, por $h(t) = -t^2 + 4t + 21$.

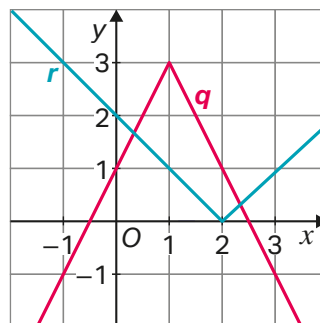
- 5.1. Qual é a altura do prédio?
- 5.2. Passado quanto tempo a bola atingiu o solo?
- 5.3. Qual é a altura máxima atingida pela bola?
- 5.4. Durante quanto tempo a altura da bola foi superior a 9 metros?
- 5.5. Faz a representação gráfica da função h , no contexto do problema.



- 6 Considera a função modular definida por $m(x) = -3|x + 2| - 5$.

- 6.1. Define por ramos a função m e representa-a graficamente num referencial.
- 6.2. Determina os pontos de interseção do gráfico de m com os eixos coordenados.
- 6.3. Determina as coordenadas dos pontos do gráfico de m que têm:
 - a) abcissa -3 ;
 - b) ordenada -8 .
- 6.4. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:
 - a) $m(x) > 0$
 - b) $m(x) < x - 1$

- 7 Na figura encontram-se representadas graficamente as funções modulares q e r , sendo $r(x) = |x - 2|$.



- 7.1. Define a função q na forma $q(x) = a|x - b| + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
- 7.2. Define a função r sem usar o símbolo de módulo.
- 7.3. Resolve, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:
a) $r(x) \leq 1$ **b)** $q(x) \geq 2$
- 7.4. Determina os pontos de interseção do gráfico de $q(x)$ com o eixo das abcissas.

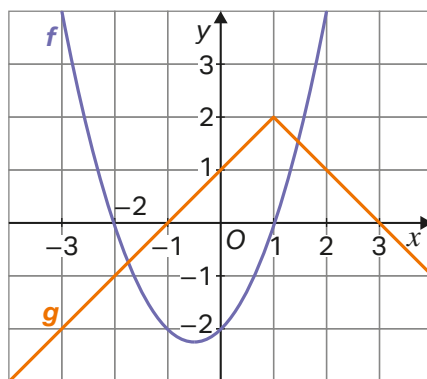
- 8 Considera a função definida por ramos:

$$h(x) = \begin{cases} -3x + 1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- 8.1. Calcula:
a) $h(-2)$ **b)** $h(3)$ **c)** $h(1)$
- 8.2. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:
a) $h(x) > 0$ **b)** $h(x) < 1$
- 8.3. Determina os pontos de interseção do gráfico de h com os eixos coordenados.

- 9 Na figura encontram-se representadas duas funções, f e g , quadrática e modular, respetivamente.

Tendo em consideração os dados apresentados na figura, responde às questões seguintes:



- 9.1. Define a função f na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
- 9.2. Define a função g por uma expressão analítica por ramos.
- 9.3. Determina os pontos de interseção dos gráficos das duas funções.

Teste

- 1 Considera a função quadrática definida por $f(x) = a(x - h)^2 + k$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Relativamente à função f , sabe-se que:

- o ponto $P(-1, 3)$ pertence ao seu gráfico;
- $x = 2$ é a equação do eixo de simetria do seu gráfico;
- o contradomínio é $[-2, +\infty[$.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A) A função f tem dois zeros.
 (B) O ponto $P(5, 3)$ pertence ao gráfico f ;
 (C) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima;
 (D) O vértice do gráfico de f tem coordenadas $(-2, 2)$.

- 2 Seja g uma função real de variável real de contradomínio $[-2, +\infty[$.

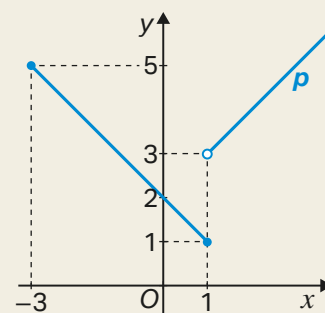
Considera a função f , definida por $f(x) = -g(x - 1) + 2$.

O contradomínio da função f é:

- (A) $[2, +\infty[$ (B) $[4, +\infty[$ (C) $]-\infty, 2]$ (D) $]-\infty, 4]$

- 3 Considera as funções, reais de variável real, h e p tais que:

- h é definida por $h(x) = 3x - 1$;
- p encontra-se representada graficamente na figura ao lado.



- 3.1. Qual das expressões seguintes define h^{-1} , função inversa da função h ?

- (A) $h^{-1}(x) = 3x - 1$ (B) $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$
 (C) $h^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 1$ (D) $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

- 3.2. O valor de $(h \circ p)(1)$ é:

- (A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 8

- 3.3. O valor de $h^{-1}(5)$ é:

- (A) -3 (B) 0 (C) 1 (D) 2

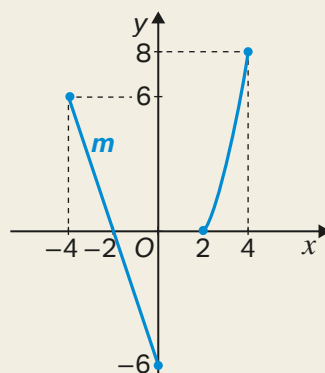
- 4 Considera a função m definida por $m(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.
 Quantos zeros tem a função?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

- 5 Na figura ao lado encontra-se representada graficamente a função m .

5.1. Indica:

- a) o domínio e o contradomínio da função;
- b) os zeros da função;
- c) um intervalo onde a função é positiva e decrescente;
- d) os extremos absolutos da função.



5.2. Mostra que a função m não é par nem é ímpar.

- 6 Considera as funções f e g definidas por $f(x) = 2|x - 1| + 3$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$.

6.1. Determina o domínio da função g .

6.2. Define a função f como uma função por ramos.

6.3. Resolve:

- a) $g(x) = 0$ b) $f(x) \geq 3$ c) $f(x) - 5 \leq g(-7)$

6.4. Determina os pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados.

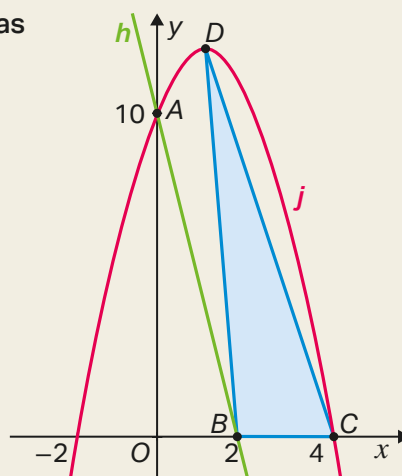
- 7 Na figura ao lado encontram-se representadas graficamente a função afim h e a função quadrática j . Sabe-se que:

- a função j é definida por $j(x) = -x^2 + 3x + 10$;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 10)$ e o ponto B tem coordenadas $(2, 0)$;
- a abscissa do ponto C é zero da função j ;
- o ponto D é o vértice do gráfico da função j .

7.1. Determina a expressão analítica que define a função h .

7.2. Indica as coordenadas do vértice do gráfico da função j .

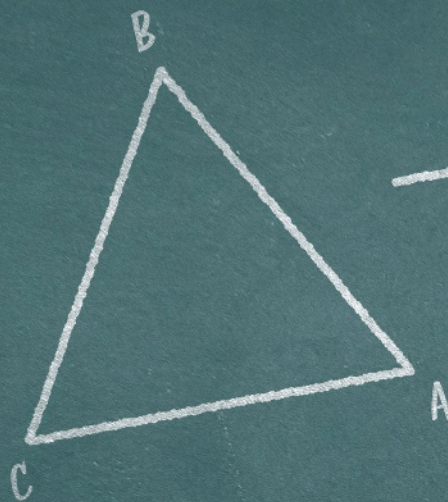
7.3. Determina a área do triângulo $[BCD]$. Apresenta o resultado em numeral decimal.



- 8 Determina o conjunto solução da inequação $x^2 + 2x - 1 \leq 3 - x$. Apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais.

$$*: A \times A \rightarrow A$$
$$(a, b) \mapsto a * b$$

4



$$\forall a, b \in A, f(a * b) = f(a)$$



Álgebra (estruturas algébricas)

4.1. Introdução à Teoria de Grupos. Isomorfismo de grupos

$$a * x = b \Leftrightarrow x = a^{-1} * b$$

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

Antes de começar

- 1 Completa com $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence), de forma a obteres afirmações verdadeiras.

1.1. $\frac{10}{2} \dots \mathbb{N}$

1.2. $-\frac{20}{4} \dots \mathbb{N}$

1.3. $-\frac{10}{2} \dots \mathbb{Z}^-$

1.4. $0 \dots \mathbb{Q}^-$

1.5. $0 \dots \mathbb{Z}_0^+$

1.6. $\frac{3}{2} \dots \mathbb{Q}^+$

1.7. $-\frac{20}{5} \dots \mathbb{R}_0^-$

1.8. $\frac{4}{2} \dots \mathbb{R}^+$

1.9. $\frac{2}{3} \dots \mathbb{Z}$

1.10. $0 \dots \mathbb{R}^+$

- 2 Identifica a propriedade da adição ou da multiplicação de números reais apresentada em cada uma das igualdades.

2.1. $2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1$

2.2. $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$

2.3. $-5 \times \left(4 \times \frac{2}{3}\right) = (-5 \times 4) \times \frac{2}{3}$

2.4. $\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{20}$

2.5. $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1$

2.6. $-5 + 4 = 4 - 5$

2.7. $-\frac{7}{3} \times 1 = 1 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{7}{3}$

2.8. $0 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \times 0 = 0$

2.9. $0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$

Recorda

Conjuntos numéricos:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

Alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^-$: números inteiros negativos

$\mathbb{Z}_0^-$: números inteiros não positivos

$\mathbb{Z}^+$: números inteiros positivos

$\mathbb{Z}_0^+$: números inteiros não negativos

Alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{Q}^-$; $\mathbb{Q}_0^-$; $\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}_0^+$ (analogamente)

Alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}^-$; $\mathbb{R}_0^-$; $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}_0^+$ (analogamente)

Recorda

Propriedades da adição e da multiplicação de números reais ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

- **Propriedade comutativa**

$$a + b = b + a; a \times b = b \times a$$

- **Propriedade associativa**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

- **Existência de elemento neutro**

$$a + 0 = 0 + a = a$$

0 é o elemento neutro da adição.

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

1 é o elemento neutro da multiplicação.

- **Existência de simétrico (adição)**

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

- **Existência de inverso (multiplicação)**

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1, a \neq 0$$

- **Existência de elemento absorvente da multiplicação**

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

- **Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição**

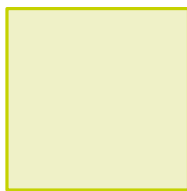
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

3 Copia os seguintes polígonos e traça os seus eixos de simetria.

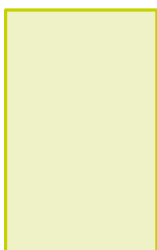
3.1. Triângulo equilátero



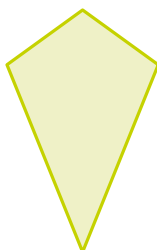
3.2. Quadrado



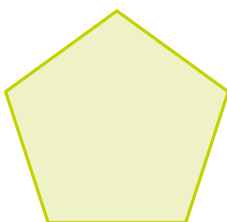
3.3. Retângulo



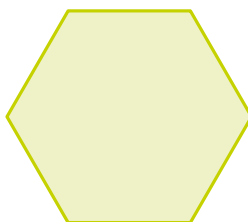
3.4. Papagaio



3.5. Pentágono regular

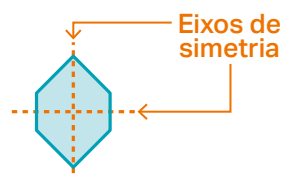


3.6. Hexágono regular



Recorda

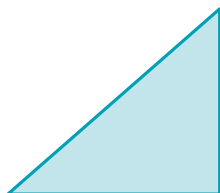
Dizemos que uma reta r é um eixo de simetria de uma figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo r formam a mesma figura.



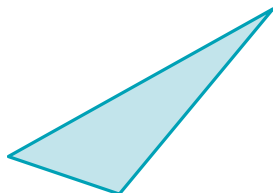
O eixo de simetria divide a figura em duas partes geometricamente iguais.

4 Em cada caso, copia o triângulo, traça as suas três medianas e indica o baricentro.

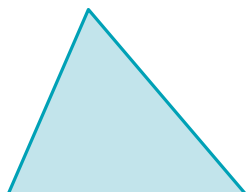
4.1.



4.2.



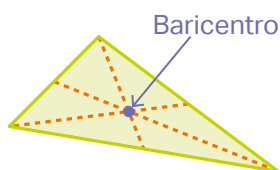
4.3.



Recorda

A **mediana** de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

As três medianas de um triângulo interseitam-se num ponto a que se dá o nome de **baricentro**.



4 Álgebra (estruturas algébricas)

4.1. Introdução à Teoria de Grupos. Isomorfismo de grupos

4.1.1. Introdução à Teoria de Grupos

Designamos por **operação binária**, $*$, a regra que a cada par de elementos de um conjunto A , não vazio, faz corresponder um elemento desse mesmo conjunto.

$$*: A \times A \rightarrow A$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

Assim, a cada par ordenado (a, b) de $A \times A$ corresponde, pela operação $*$, um único elemento de A que se designa por $a * b$.

Um **grupo** é um conjunto não vazio, A , munido de uma operação binária, $*$, que satisfaz as condições:

- A operação binária $*$ definida em A é associativa:

$$\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$$

- Existe um elemento neutro em A :

$$\exists e \in A, \forall a \in A: a * e = e * a = a$$

- Todo o elemento de A tem um elemento inverso:

$$\forall a \in A, \exists b \in A: a * b = b * a = e$$

$(A, *)$ é um grupo.

Sabias que...

Évariste Galois
(1811-1832)

Foi um matemático francês que criou um domínio inteiramente novo da álgebra abstrata: a teoria dos grupos.



Um grupo $(A, *)$, $A \neq \emptyset$, diz-se **abeliano** se $*$ é comutativa.

Exemplos

1. Vamos mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}$ munido da adição usual, $(\mathbb{Z}, +)$, é um grupo.

- $+$ é associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$
- Existência de elemento neutro: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z}: a + 0 = 0 + a = a$
- Existência de elemento simétrico: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}: a + (-a) = (-a) + a = 0$

Note-se que, na adição usual em $\mathbb{Z}$, o inverso de um elemento de $\mathbb{Z}$ corresponde ao seu simétrico no mesmo conjunto. Logo, $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo.

2. Seja $\oplus$ a operação definida por: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \oplus b = a \times b + 1$

Vamos mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}$ munido da operação $\oplus$ não é um grupo.

Vamos verificar se $\oplus$ é associativa:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$(a \oplus b) \oplus c = (a \times b + 1) \oplus c = (a \times b + 1) \times c + 1 = abc + c + 1$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b \times c + 1) = a \times (b \times c + 1) + 1 = abc + a + 1 \neq abc + c + 1$$

Logo, $(\mathbb{Z}, \oplus)$ não é um grupo.

3. Vamos mostrar que $(\mathbb{Z}_0^-, +)$ não é um grupo.

Como sabemos, $\mathbb{Z}_0^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

Para $(\mathbb{Z}_0^-, +)$ ser grupo, todo o elemento de $\mathbb{Z}_0^-$ tem de ter um elemento simétrico em $\mathbb{Z}_0^-$.

Mas, como -2 é elemento de $\mathbb{Z}_0^-$ e o seu simétrico é $2 \notin \mathbb{Z}_0^-$, então $(\mathbb{Z}_0^-, +)$ não é um grupo.

Exercícios

- 1 Mostra que é um grupo:

1.1. $(A, +)$, sendo $A = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\}$ e $+$ a adição usual;

1.2. $(\mathbb{Z}, \otimes)$, $a \otimes b = \frac{ab}{2}$.

- 2 Considera, em $\mathbb{R}$, a operação $\otimes$ definida por $x \otimes y = xy + x + 1$.

Prova que $(\mathbb{R}, \otimes)$ não é um grupo.

Propriedades dos grupos

Sejam $(A, *)$ um grupo e $a, b, c \in A$.

Propriedade 1: O elemento neutro é único.

Demonstração:

Consideremos e e e' dois elementos neutros do conjunto A .

Então, $\forall a \in A, a * e = a * e' = a$. Em particular, $e * e' = e$ e $e' * e = e'$. Assim, $e = e'$.

Logo o elemento neutro é único.

Propriedade 2: O elemento inverso é único.

Demonstração:

Seja e o elemento neutro de A . Vamos supor que a' e a'' são inversos de um elemento de A , a .

Então, $a * a' = a' * a = e$ e $a * a'' = a'' * a = e$.

Assim, $a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$.

Logo, o elemento inverso é único.

Propriedade 3: A equação $a * x = b$ admite uma única solução em A . A solução é $x = a^{-1} * b$.

Demonstração:

$$a * x = b \implies a^{-1} * a * x = a^{-1} * b. \text{ Logo, } x = a^{-1} * b.$$

Propriedade 4: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Demonstração:

Como $(a * b)^{-1}$ é o inverso de $a * b$, basta mostrar que $b^{-1} * a^{-1}$ também é seu inverso.

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

$$\text{Da mesma forma, } (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e.$$

Assim, como o elemento inverso é único, concluímos que $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

Propriedade 5: Se $a * b = a * c$, então $b = c$. Ou, se $b * a = c * a$, então $b = c$.

Demonstração:

$$a * b = a * c \implies a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$

Então, $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \implies e * b = e * c \implies b = c$, como queríamos demonstrar.

Grupos de vetores

Um grupo de vetores é um conjunto de vetores munido de uma operação.

Exemplo

1. Vamos mostrar que o espaço vetorial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munido da operação $\oplus$, adição de vetores, definida por $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, é um grupo.

- Como a adição de dois vetores de um conjunto é um vetor desse conjunto, $\oplus$ é uma operação binária.

$$\bullet \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$(a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)] = (a, b) \oplus (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$$

$$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$[(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) = (a + c, b + d) \oplus (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$$

Logo, $\oplus$ é associativa.

$$\bullet \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \exists (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) \oplus (0, 0) = (0, 0) \oplus (a, b) = (a, b)$$

O vetor nulo é o elemento neutro da operação $\oplus$.

$$\bullet \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \exists (-a, -b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$$

Qualquer vetor (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tem um vetor inverso que é $(-a, -b)$.

Logo, o espaço vetorial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munido da operação de vetores, $\oplus$, é um grupo.

Grupos de funções

Um grupo de funções bijetivas é um conjunto de funções das quais podemos determinar a composta e que satisfaz as condições para ser um grupo.

- Se duas funções pertencem a um conjunto, a composta das duas funções também tem de pertencer.
- A composição de funções é associativa.
- A função identidade é o elemento neutro da composição de funções.
- Toda a função bijetiva admite função inversa.

4.1.2. Isomorfismo de grupos

Consideremos dois conjuntos, A e B , não vazios, a operação binária $*$ definida em A e a operação binária $\oplus$ definida em B .

Sejam $(A, *)$ e $(B, \oplus)$ dois grupos:

Dizemos que f é um **homomorfismo** de $(A, *)$ em $(B, \oplus)$ se e só se:

$$\forall a, b \in A, f(a * b) = f(a) \oplus f(b)$$

Se a aplicação f definida anteriormente for bijetiva, dizemos que f é um **isomorfismo** de A em B .

Exemplos

1. Vamos mostrar que não é um homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(\mathbb{Z}, +)$ a aplicação:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto 3x + 1$$

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$f(a + b) = 3(a + b) + 1 = 3a + 3b + 1$$

$$f(a) + f(b) = 3a + 1 + 3b + 1 = 3a + 3b + 2$$

Como $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$, f não é um homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(\mathbb{Z}, +)$.

Nota

Para que exista um isomorfismo de A em B , A e B têm de ter o mesmo número de elementos.

2. Vamos considerar os grupos $(\mathbb{R}, \delta)$ e $(\mathbb{R}, \theta)$ com

$$x \delta y = x + y - 3$$

$$x \theta y = x + y - 9$$

Vamos verificar que a aplicação

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + 3$$

é um isomorfismo de $(\mathbb{R}, \delta)$ em $(\mathbb{R}, \theta)$.

- f é um homomorfismo de $(\mathbb{R}, \delta)$ em $(\mathbb{R}, \theta)$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, f(a \delta b) = f(a) \theta f(b)$$

$$f(a \delta b) = 2(a + b - 3) + 3 = 2a + 2b - 6 + 3 = 2a + 3 + 2b + 3 - 9 = f(a) \theta f(b)$$

- f é bijetiva se f é injetiva e sobrejetiva.

$$f \text{ é injetiva se e só se: } \forall a, b \in \mathbb{R}, f(a) = f(b) \implies a = b$$

$$f(a) = f(b) \iff 2a + 3 = 2b + 3 \iff a = b$$

Então, f é injetiva.

$$f \text{ é sobrejetiva se e só se: } \forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}: b = f(a)$$

$$b = f(a) \iff b = 2a + 3 \iff a = \frac{b - 3}{2}$$

Assim, a é único para cada $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Logo, f é sobrejetiva.

Assim, como f é um homomorfismo bijetivo, f é um isomorfismo.

3. Considerando o conjunto A definido por $A = \{a: a = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, vamos mostrar que a aplicação f é um isomorfismo do grupo $(\mathbb{Z}, +)$ em $(A, +)$, sendo:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow A \\ n \mapsto 2n$$

- f é um homomorfismo, porque:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, f(m + n) = 2(m + n) = 2m + 2n = f(m) + f(n)$$

- f é injetiva, pois: $\forall m, n \in \mathbb{Z}, f(m) = f(n) \iff 2m = 2n \iff m = n$

- $\forall m \in A, \exists n \in \mathbb{Z}: m = f(n)$

$$m = 2n \iff n = \frac{m}{2}$$

Como m é um elemento de A , então m é par. Assim, m é divisível por 2.

Desta forma, n é um número inteiro.

$$f(n) = f\left(\frac{m}{2}\right) = 2 \times \frac{m}{2} = m$$

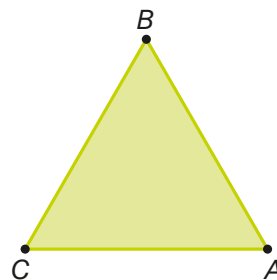
Logo, f é sobrejetiva.

Podemos, então, concluir que f é um isomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(A, +)$.

Grupos de simetrias

O grupo de simetria de um objeto geométrico é o grupo de todas as transformações sob as quais o objeto é invariante, tendo como operação do grupo a composição.

Vamos considerar o triângulo equilátero $[ABC]$ representado na figura.



Quantas transformações podemos fazer, de forma que o triângulo fique invariante quanto à forma e quanto à dimensão?

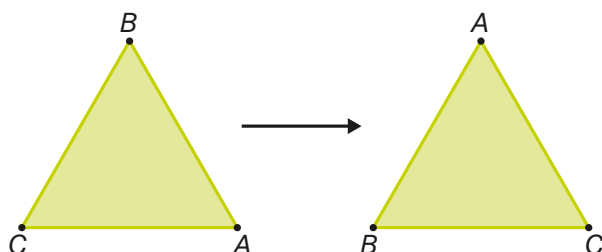
Um desses movimentos é a rotação de amplitude 120° em torno do baricentro do triângulo.

Nota

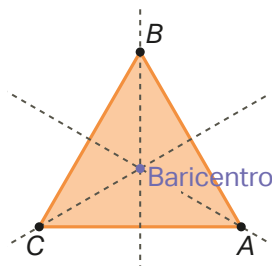
Sempre que nos referirmos a uma rotação, ela será feita no sentido anti-horário e com centro no baricentro do triângulo.

Recorda

O **baricentro** de um triângulo é o ponto de interseção das três medianas desse triângulo.



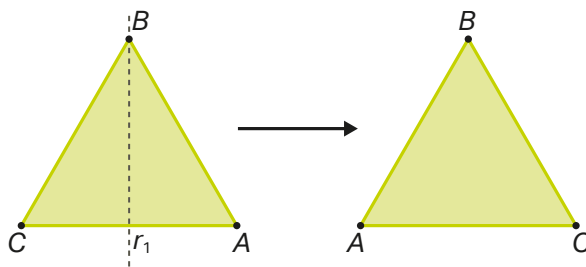
Rotação de centro no baricentro e amplitude 120°



Outras duas rotações permitem que o triângulo se sobreponha: rotações de centro no baricentro e amplitudes 240° e 360° .

Repara que a rotação de amplitude 360° não altera a posição dos vértices do triângulo. Assim, denotamos essa rotação por e .

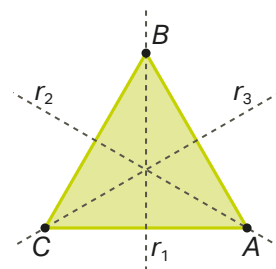
Outra isometria que nos permite obter o mesmo triângulo é a sua reflexão de eixo r_1 .



Reflexão de eixo r_1

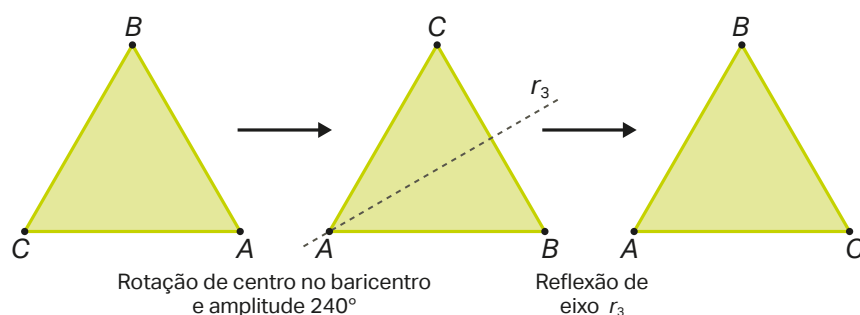
Existem ainda mais dois eixos em torno dos quais podemos refletir o triângulo de modo que ele se sobreponha: reflexão de eixo r_2 , R_{r_2} , e reflexão de eixo r_3 , R_{r_3} .

Podemos, então, concluir que existem seis simetrias do triângulo equilátero $[ABC]$. É fácil verificar que, ao compormos duas simetrias, vamos obter uma simetria já elencada.

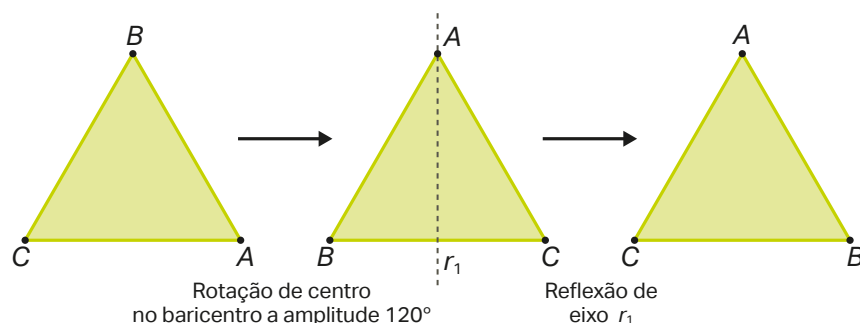


Por exemplo:

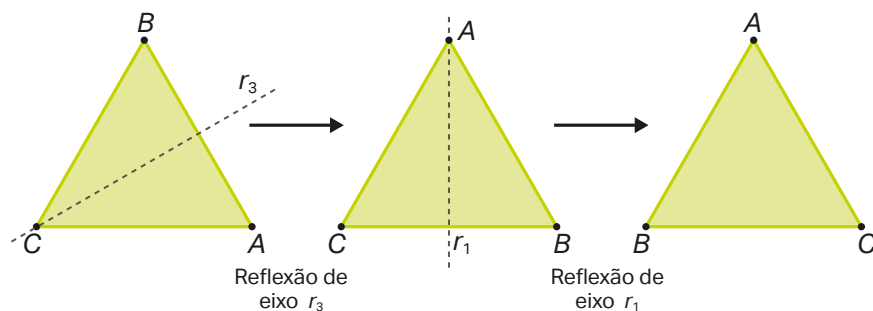
Uma rotação de centro no baricentro e amplitude 240° , R_{240° , seguida de uma reflexão de eixo r_3 , R_{r_3} , equivale a uma reflexão de eixo r_1 , R_{r_1} .



Uma rotação de centro no baricentro e amplitude 120° , R_{120° , seguida de uma reflexão de eixo r_1 , R_{r_1} , equivale a uma reflexão de eixo r_3 , R_{r_3} .



Uma reflexão de eixo r_3 , R_{r_3} , seguida de uma reflexão de eixo r_1 , R_{r_1} , equivale a uma rotação de centro no baricentro e amplitude 120° , R_{120° .



Na tabela seguinte encontram-se as composições de simetrias possíveis.

$\circ$	R_{120°	R_{240°	$R_{360^\circ} = e$	R_{r_1}	R_{r_2}	R_{r_3}
R_{120°	R_{240°	e	R_{120°	R_{r_2}	R_{r_3}	R_{r_1}
R_{240°	e	R_{120°	R_{240°	R_{r_3}	R_{r_1}	R_{r_2}
$R_{360^\circ} = e$	R_{120°	R_{240°	e	R_{r_1}	R_{r_2}	R_{r_3}
R_{r_1}	R_{r_3}	R_{r_2}	R_{r_1}	e	R_{240°	R_{120°
R_{r_2}	R_{r_1}	R_{r_3}	R_{r_2}	R_{120°	e	R_{240°
R_{r_3}	R_{r_2}	R_{r_1}	R_{r_3}	R_{240°	R_{120°	e

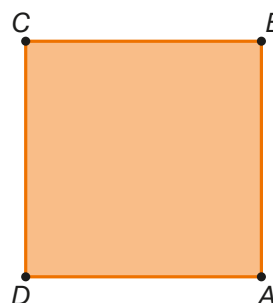
Desta forma, podemos concluir que o conjunto das simetrias de um triângulo equilátero, $S_\Delta = \{e, R_{120^\circ}, R_{240^\circ}, R_{r_1}, R_{r_2}, R_{r_3}\}$, munida da operação composição de funções é um grupo.

A composição de funções é uma operação binária associativa, tem elemento neutro (rotação de 360°) e cada elemento do conjunto tem um inverso no conjunto ($R_{r_1} \circ R_{r_1} = e$; $R_{r_2} \circ R_{r_2} = e$; $R_{r_3} \circ R_{r_3} = e$; $e \circ e = e$; $R_{120^\circ} \circ R_{240^\circ} = e$; $R_{240^\circ} \circ R_{120^\circ} = e$).

Exercícios

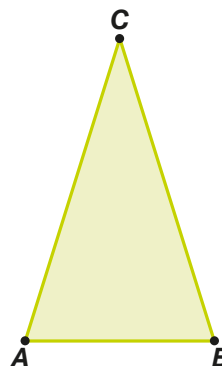
3 Considera o quadrado $[ABCD]$, representado ao lado.

- 3.1.** Determina o conjunto de simetrias do quadrado.
- 3.2.** Constrói uma tabela da composição de simetrias do quadrado.
- 3.3.** Mostra que o grupo das simetrias do quadrado com a operação composição de simetrias não é abeliano.



4 Considera o triângulo isósceles $[ABC]$.

- 4.1.** Determina o conjunto de simetrias do triângulo.
- 4.2.** Constrói uma tabela da composição de simetrias do triângulo isósceles.
- 4.3.** O conjunto de simetrias de um triângulo isósceles com a operação composição de simetrias é um grupo? Justifica.



Para aplicar

1 Verifica se, em $\mathbb{R}$, as operações seguintes são comutativas.

1.1. $x \triangle y = 2x + 2y - 1$

1.2. $x \oplus y = 2x - y$

1.3. $x \square y = 2x + 3y$

1.4. $x * y = \frac{x}{2} + y$

1.5. $x \bullet y = \frac{x+y-3}{2}$

1.6. $x \otimes y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

2 Considera a operação $\oplus$ definida em $\mathbb{R}$ por:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \oplus b = a + 2a + b$$

Verifica se a operação $\oplus$ é:

2.1. comutativa;

2.2. associativa.

3 Mostra que os conjuntos seguintes com a operação indicada não são grupos.

3.1. $(\mathbb{Z}^-, +)$, sendo $+$ a adição usual em $\mathbb{R}$.

3.2. $(\mathbb{Z}^+, \times)$, sendo $\times$ a multiplicação usual em $\mathbb{R}$.

3.3. $(A, \times)$, sendo $\times$ a multiplicação usual em $\mathbb{R}$ e $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é ímpar}\}$.

3.4. $(B, +)$, sendo $+$ a adição usual em $\mathbb{R}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

4 Considera a operação $\otimes$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ por:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} : (a, b) \otimes (c, d) = (ac, b + d)$$

Verifica se:

4.1. $\otimes$ é comutativa;

4.2. $\otimes$ é associativa;

4.3. existe elemento neutro de $\otimes$;

4.4. existe elemento simétrico de cada elemento.

5 Em cada uma das situações seguintes, verifica se é um grupo:

5.1. $(\mathbb{Z}, *)$, sendo $*$ definida por $a * b = a - b$;

5.2. $(\mathbb{Z}, *)$, sendo $*$ definida por $(a * b)^2 = a^2 - b$;

5.3. $(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, *)$, sendo $*$ definida por $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$;

5.4. $(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, *)$, sendo $*$ definida por $(a, b) * (c, d) = (ac, ab + d)$;

5.5. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$, sendo $*$ definida por $(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$.

6 Mostra que $(\mathbb{R}, \otimes)$, com $\otimes$ definida por $x \otimes y = x + y - 3$, é um grupo abeliano.

7 Mostra que f não é um homomorfismo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, sendo:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto |x|$$

8 Verifica se são isomorfismos:

8.1. $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, dada por $f(x) = 2x + 1$

8.2. $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, dada por $f(x) = (x, 0)$

8.3. $f: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, dada por $f(x, y) = x$

9 Considera os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^+, \times)$ e a função:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto 2^x$$

9.1. Mostra que f é um homomorfismo.

9.2. f é um isomorfismo? Justifica.

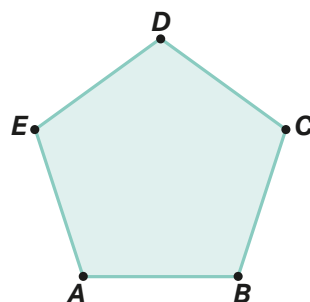
10 Na figura encontra-se representado o pentágono regular $[ABCDE]$.

10.1. Determina o conjunto de simetrias do pentágono regular.

10.2. Constrói uma tabela de simetrias do pentágono regular.

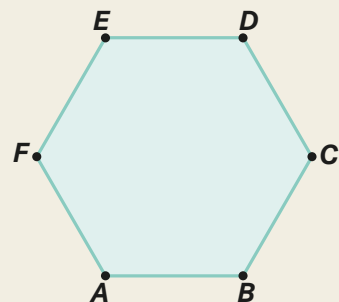
10.3. Mostra que o grupo de simetrias do pentágono regular com a operação composição de simetrias é um grupo.

10.4. O grupo referido na alínea anterior é abeliano? Justifica.



Teste

- 1 Qual das operações $*$ apresentadas é uma operação binária em $A = \{-1, 0, 1\}$?
- (A) $x * y = x + y$, para quaisquer $x, y \in A$
 (B) $x * y = x \times y + 1$, para quaisquer $x, y \in A$
 (C) $x * y = x - y$, para quaisquer $x, y \in A$
 (D) $x * y = x \times y$, para quaisquer $x, y \in A$
- 2 Considera a operação $\otimes$, em $\mathbb{R}_0^+$, definida por $x \otimes y = |x - y|$. Qual das afirmações seguintes é falsa?
- (A) A operação $\otimes$ é comutativa.
 (B) A operação $\otimes$ é associativa.
 (C) A operação $\otimes$ é binária.
 (D) Existe elemento neutro da operação $\otimes$.
- 3 Em qual das situações seguintes estamos perante um grupo?
- (A) $(A, +)$, sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $+$ a adição usual de números inteiros.
 (B) $(A, *)$, sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $a * b = a - b$.
 (C) $(\mathbb{R}^+, \times)$, com a multiplicação usual.
 (D) $(\mathbb{R}^-, *)$, com $a * b = a \times b$.
- 4 Qual das funções seguintes pode definir um isomorfismo do grupo $(\mathbb{R}, +)$ em $(\mathbb{R}^+, \times)$?
- (A) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto 5x$
 (B) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto 5^x$
 (C) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto 5 - x$
 (D) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto 5 + x$
- 5 Considera um hexágono regular, $[ABCDEF]$. Quantos elementos tem o conjunto de simetrias do polígono?
- (A) 3
 (B) 6
 (C) 11
 (D) 12



6 Considera o conjunto $\mathbb{R}$ com a operação $\otimes$ tal que $x \otimes y = y + x - 1$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostra que $\otimes$ é uma operação binária em $\mathbb{R}$.

7 Considera o conjunto $\mathbb{R}^2$ e a operação binária definida, em $\mathbb{R}^2$, por:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ad, bc)$$

Determina, se existir, o elemento neutro de $(\mathbb{R}^2, \otimes)$.

8 Considera o conjunto $\mathbb{R}_0^+$ e $*$ a operação, em $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

8.1. Verifica se $*$ é associativa.

8.2. Verifica se $(\mathbb{R}_0^+, *)$ é um grupo.

9 Seja $(\mathbb{R}, \Delta)$ um grupo tal que $x \Delta y = x^2 \times y^2$. Mostra que $(\mathbb{R}, \Delta)$ é um grupo abeliano.

10 Considera, em $\mathbb{R}$, a operação $*$ definida por $x * y = xy + x + y$.

10.1. Mostra que $(\mathbb{R}, *)$ não é um grupo;

10.2. Verifica se $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ é um grupo.

11 Considera o grupo $A = \left\{ \begin{matrix} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \end{matrix} \right\}$ e a operação composição de funções.

11.1. Mostra que $(A, \circ)$ é um grupo.

11.2. $(A, \circ)$ é um grupo abeliano? Justifica.

12 Considera os grupos $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Z}, \times)$ e a aplicação $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que: $f(x) = 3x + 4$.

Mostra que f não é um isomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(\mathbb{Z}, \times)$.

Página 8

1.1. 2^{-7} 1.2. 2^6 1.3. $\left(\frac{5}{3}\right)^6$
 1.4. 2^3 1.5. 7^{15}

2. 7 cm

3. $\frac{121}{4} \text{ cm}^2$

4.1. 10 4.2. 1 4.3. $\frac{1}{10}$

4.4. 12 4.5. 6 4.6. 8

5.1. $\sqrt{50}$ 5.2. $\sqrt{45}$ 5.3. $\sqrt{40}$

5.4. $\sqrt{63}$ 5.5. $\sqrt{600}$ 5.6. $\sqrt{\frac{135}{4}}$

Página 9

6.1. $2\sqrt{30}$ 6.2. $15\sqrt{6}$

6.3. $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ 6.4. $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$

8. 5 cm

9. $3\sqrt[3]{5} \text{ cm}$

10.1. $3\sqrt[3]{5}$ 10.2. $2\sqrt[3]{25}$

10.3. $-3\sqrt[3]{2}$ 10.4. $-5\sqrt[3]{6}$

11.1. 6 cm 11.2. $3\sqrt{5} \text{ cm}$

Página 10

12.1. $3x^2y$, $4xy$, 12, $-4yx$, -5 , $5xy$.

12.2. $3x^2y$

12.3. $4xy$ e $5xy$.

12.4. $4xy$ e $-4yx$.

13.

Coeficiente	Parte literal	Grau
-3	x^2yz^3	6
$\frac{3}{2}$	x	1
$\frac{1}{3}$	xz^3	4
-5	Não tem	0
5	y^2z	3
0	Não tem	0

14.1. $6x^3y^4$, grau 7.

14.2. $-\frac{1}{3}x^4y^3$, grau 7.

14.3. $\frac{9}{25}x^2y^6$, grau 8.

15.1. 0,02, $-0,8$ e $0,1$.

15.2. $-\frac{1}{6}$, $\frac{4}{27}$ e $\frac{1}{18}$.

Página 11

16.1. 3 16.2. 4 16.3. 1

16.4. 3 16.5. 4

17.1. $-\frac{8}{5}x + \frac{11}{6}y$, grau 1.

17.2. $9xy + 2x$, grau 2.

17.3. $9x^2y$, grau 3.

17.4. $8xy^2 - 13xy$, grau 3.

17.5. $-2x^2 - 2$, grau 2.

17.6. $\frac{x^2}{4} + y^2$, grau 2.

17.7. $19x^2 - 11xy + y^2$, grau 2.

18.1. $8x^2 + 10xy + 3y^2$, grau 2.

18.2. $2x^2 + 5xy + y^2 + 8x + 2y$, grau 2.

18.3. $2\pi x^2 + (2\pi + 8)xy + \left(\frac{\pi}{2} + 4\right)y^2$, grau 2.

Página 15

1.1. $\sqrt[5]{21}$ 1.2. $\sqrt[3]{40}$

1.3. $\sqrt[3]{-1}$ 1.4. $\sqrt[5]{-\frac{3}{5}}$

2.1. $\sqrt[8]{3^4}$ 2.2. $\sqrt[8]{3^3}$ 2.3. $\sqrt[8]{5^{16}}$

3.1. $\sqrt[6]{200}$ 3.2. $\sqrt[15]{1944}$ 3.3. $\sqrt[15]{a^8 \times b^3}$

4. $\sqrt[6]{500}$

Página 16

5.1. $\sqrt[3]{-200}$

5.2. $\sqrt[5]{7\,891\,499}$ ou $\sqrt[5]{11^5 \times 49}$

5.3. $\sqrt[6]{6\,947\,055\,801}$ ou $\sqrt[6]{7^6 \times 3^{10}}$

6.1. $25\sqrt[3]{4} \text{ cm}^2$

6.2. $27\sqrt[5]{8} \text{ cm}^3$

6.3. $21\sqrt[3]{3} \text{ cm}$

Página 17

8.1. $\sqrt[5]{3}$ 8.2. 2

8.3. $\sqrt[3]{4}$ 8.4. $2\sqrt[4]{40}$

9.1. $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ 9.2. $\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$ 9.3. $\sqrt[5]{8}$

9.4. $\sqrt[3]{\frac{49}{2}}$ 9.5. $\sqrt[3]{\frac{1}{100}}$ 9.6. $\sqrt[3]{32}$

Página 18

11.1. $\sqrt[3]{625}$

11.2. $\sqrt[3]{40}$

11.3. $\sqrt{\frac{2}{9}}$

12.1. $\sqrt[8]{7}$

12.2. $\sqrt[10]{9}$

12.3. $\sqrt[15]{-2}$

12.4. $\sqrt[6]{20}$

12.5. $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

12.6. $\sqrt[6]{1792}$

13. $\sqrt[8]{80} \text{ cm}$

14.1. $\sqrt[6]{4608}$

14.2. $(4\sqrt[3]{9}\pi - \sqrt[3]{2\,123\,664}) \text{ u.a.}$

15. $\sqrt[6]{200}$

Página 19

16.1. 1

16.2. $\frac{\sqrt{14}}{7}$

16.3. $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}{3}$

16.4. $\frac{4}{3}$

16.5. $\frac{7}{5}\sqrt[3]{25}$

16.6. $\frac{\sqrt[3]{64}}{6}$

16.7. $\frac{-\sqrt[7]{27}}{5}$

16.8. $\frac{\sqrt[4]{50}}{5}$

16.9. $\frac{\sqrt[5]{81}}{9}$

Página 20

17.1. $\frac{\sqrt{3} + 5}{-22}$

17.2. $-10 + 5\sqrt{3}$

17.3. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

17.4. $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{3}}{5}$

17.5. $\frac{15\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{67}$

17.6. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 3}{6}$

17.7. $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}}{-2}$

17.8. $\frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{35} + \sqrt{6} - \sqrt{14}}{18}$

18. $(2\sqrt{5} - \sqrt{10}) \text{ cm}$

Página 21

19.1. $\sqrt[5]{7}$

19.2. $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

19.3. $\sqrt{\frac{3}{5}}$

20.1. 3

20.2. 5

20.3. 0,6

20.4. 0,2

Página 22

21.1. $2^{\frac{5}{3}}$

21.2. $5^{\frac{1}{4}}$

21.3. $5^{-\frac{1}{2}}$

21.4. $7^{\frac{1}{15}}$

21.5. $24^{\frac{1}{12}}$

21.6. $63^{\frac{3}{10}}$

Página 23

22.1. $\sqrt[3]{25}$

22.2. $\sqrt{\frac{8}{125}}$

22.3. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

22.4. $\sqrt[5]{0,09}$

22.5. $\sqrt{\frac{64}{3375}}$

22.6. $\sqrt[3]{10}$

23.1. $5^{\frac{5}{6}}$

23.2. $2^{\frac{19}{15}}$

23.3. $15^{\frac{1}{2}}$

23.4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$

24.1. $3^{\frac{17}{4}}$

24.2. $6^{\frac{1}{10}}$

Página 24

1.1. $8\sqrt{5}$

1.2. $-\frac{97}{4}\sqrt{2}$

1.3. $21\sqrt{3}$

1.4. $-13\sqrt{5}$

2. $54\sqrt{5}$

3.1. $\sqrt[3]{486}$

3.2. $\sqrt[6]{90}$

3.3. $\sqrt[4]{\frac{25}{4}}$

3.4. $\sqrt[3]{75}$

3.5. $\sqrt[3]{4}$

3.6. $\sqrt[5]{16}$

4.1. $3 - 2\sqrt{3}$

4.2. $-12\sqrt{8} - 23$

4.3. $\frac{7}{2} - 2\sqrt{3}$

4.4. $\frac{2\sqrt[4]{3^5} - 10\sqrt[4]{27}}{3}$

5.2. $14 + 6\sqrt{3}$

Página 25

6.1. $-2 - \sqrt{7}$

6.2. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

6.3. $2\sqrt{5} - \sqrt{15}$

6.4. $\frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{13}$

6.5. -1

6.6. $\frac{3\sqrt{10} - 3\sqrt{5}}{5}$

- 7.1. $10 + 10\sqrt{6}$
 7.2. $\sqrt{64 + 4\sqrt{6}}$
 7.3. $14 + 4\sqrt{6}$
 8.1. Não
 8.2. Não
 8.3. Não
 9.2. $\frac{-\sqrt{10} + 3\sqrt{5}}{7}$
 10.2. $4 + \sqrt{2}$

Página 26

- 25.1. $5y^3 + y^2 - 5y + 1$
 25.2. $6y^3 - 4y + 1$
 25.3. $-y^5 + 3y^4 + 2y^3 - 6y^2$
 25.4. $-6y^3 + y^2 + y - 1$
 25.5. $y^6 - 3y^4 - 6y^3 + 13y^2$
 25.6. $4y^4 - y^6 + y^3 - 8y^2 + 3y$
 26.1. (B)
 26.2. (C)

Página 29

27. $10x^3 + 3x^2 - x - 1$
 28. $4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$
 29.1. Quociente: $x - 2$
 Resto: -3
 29.2. Quociente: $x - \frac{1}{2}$
 Resto: $-\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$
 29.3. Quociente: $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$
 Resto: $\frac{11}{4}$
 29.4. Quociente: $x^2 + 2x + 3$
 Resto: $6x + 1$
 29.5. Quociente: $x^2 - x$
 Resto: 0
 29.6. Quociente: $x^2 - x + 3$
 Resto: $-x + 8$
 30.1. Sim
 30.2. Não
 31. $P(x) = x^3 - x - 2$
 32.1. Quociente: $x + 1$
 Resto: $-x + 1$
 32.2. $k = 0$

Página 31

- 33.1. Quociente: $2x^2 + x + 3$
 Resto: 5
 33.2. Quociente: $x^3 + 2x + 1$
 Resto: 4
 33.3. Quociente: $-x^2 - x + 1$
 Resto: 1
 33.4. Quociente: $-2x^3 + 5x^2 - 10x + 20$
 Resto: -37
 33.5. Quociente: $x^2 - 3x + 9$
 Resto: -28
 33.6. Quociente: $-x^3 - 5x^2 - 23x - 115$
 Resto: -579

Página 32

- 34.1. 13 34.2. 1 34.3. -10
 36.1. Quociente: $-\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{19}{8}x + \frac{19}{16}$
 Resto: $\frac{35}{16}$
 36.2. Quociente: $x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{56}{9}$
 Resto: $-\frac{7}{9}$
 36.3. Quociente: $x^2 - 2$
 Resto: 15
 36.4. Quociente: $\frac{x^5}{2} + x^4 - \frac{x}{2} - 1$
 Resto: -3

Página 34

- 37.1. 5 37.2. 4 37.3. 1
 37.4. -37 37.5. -28 37.6. -579
 38.1. $k = -2$ 38.2. $\frac{35}{4}$
 39. $3x^2 - x + 1$
 40.1. $\frac{3}{16}$ 40.2. $-\frac{8}{9}$
 40.3. 15 40.4. -3

Página 36

- 41.1. 3 41.2. 1 41.3. 1 41.4. $2; 1$.
 42.1. 2 tem multiplicidade 2 ; -1 tem multiplicidade 1 .
 Então, $A(x) = (x - 2)^2(x + 1)$
 42.2. -1 tem multiplicidade 3 ; 1 é raiz simples.
 Então, $B(x) = (x + 1)^3(x - 1)$
 42.3. 5 , -2 e -3 são raízes simples.
 Então, $C(x) = (x - 5)(x + 2)(x + 3)$

Página 37

- 43.1. $(x-1)(x+1)$
 43.2. $-(x-5)(x+2)$
 43.3. $2(x-3)(x-1)$
 43.4. $\frac{1}{2}(x-2)^2$
 43.5. $-4\left(x-\frac{3}{4}\right)(x+1)$
 43.6. Não é possível fatorizar.
 44.1. $(x+5)(x-1)^2$
 44.2. $\frac{1}{18}(x-2)(x-3)(x+2)^2$

Página 39

- 45.1. $(x-1)(x-2)(x+2)$
 45.2. $(x+1)(x-4)(x+3)$
 45.3. $-(x-2)^2(x-3)(x+1)$
 46.1. $(x-2)(x+3)(x-5)$
 46.2. $(x-3)(x+3)(x-1)$
 46.3. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$
 46.4. $-(x-1)(x+2)(x+5)$
 46.5. $2(x-3)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Página 42

- 47.1. $]-\infty, -1[\cup]1, 3[$
 47.2. $]-\infty, -4] \cup [2, 4[$
 47.3. $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
 47.4. $]1, +\infty[$
 47.5. $]-\infty, -3] \cup [-1, 2] \cup [4, +\infty[$
 47.6. $] -2, 1] \cup \{3\}$
 48.1. $]-\infty, -2] \cup [-1, 3]$
 48.2. $] -3, -2[$
 48.3. $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$
 48.4. $\{-2\} \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty[$
 49.2. $[-1, 5]$
 49.3. $] -1, 2[\cup]2, 5[$

Página 43

- 1.1. a) $4x^2 - 3x + 4$, grau 2.
 b) $-2x^3 + x^2 + 1$, grau 3.
 c) $4 - 4x^2 + 4x^4$, grau 4.
 d) $-5x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 6x + 4$, grau 4.
 1.2. Resto: $4x - 5$
 Quociente: $-2x + 3$
 1.3. $T(x) = 2x^2 - x - 1$
 2.1. $2x^5 - 6x^4 + x^3 + 3x^2 - x$
 2.2. $x^2 - 6x + 1$

- 2.3. $x^3 + 4x^2 - 6x$
 2.4. $7x^2 - 13x - 5$
 2.5. $x^4 - x^3 - 4x^2 + 6x$

- 3.1. 5 3.2. 2 3.3. 3
 3.4. 2 3.5. 4

- 4.1. Resto: $-6x - 9$
 Quociente: $5x + 3$
 4.2. Resto: -8
 Quociente: $-3x - 3$
 4.3. Resto: $-9x + 14$
 Quociente: $2x^2 - 2x + 5$
 4.4. Resto: $4x + 2$
 Quociente: $x^3 + 3x$
 4.5. Resto: $-2x - 4$
 Quociente: $2x - 1$
 5. $A(x) = 3x^3 - 2x$
 6.1. Resto: 2
 Quociente: $3x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
 6.2. Resto: 5
 Quociente: $-x^2 + x + 2$
 6.3. Resto: -4
 Quociente: $-x^3 + 2x^2 - 2x + 3$
 6.4. Resto: 103
 Quociente: $x^3 + 4x^2 + 12x + 34$
 6.5. Resto: 13
 Quociente: $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$
 6.6. Resto: 0
 Quociente: $-\frac{x^2}{3} + x - 1$
 6.7. Resto: 1
 Quociente: $-8x - 4$
 6.8. Resto: $-\frac{63}{4}$
 Quociente: $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

Página 44

- 7.1. Resto: -17
 Quociente: $-3x^2 - 4x - 9$
 7.2. Resto: 7
 Quociente: $-3x^2 + 5x - 6$
 7.3. Resto: 35
 Quociente: $-\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{17}{2}$
 7.4. Resto: $\frac{5}{8}$
 Quociente: $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$
 8.1. 39 8.2. 8
 8.3. $-\frac{3}{4}$ 8.4. 0
 8.5. 13

9.1. 8 9.2. 3 9.3. 2

10.1. Simples

10.2. Simples

10.3. Simples

11.2. $(x+2)(x^2-9)$

11.3. $(x+2)(x+3)(x-3)$

12.1. -3 e 3.

12.2. $(x+1)(x+3)(x-3)$

Página 45

13.1. $-2(x-2)(x+2)$

13.2. $x(x-1)(x+1)$

13.3. $-(x+2)(x-3)$

13.4. $-2(x+3)(x+2)$

13.5. $6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

13.6. $(x-1)(x-3)(x+2)$

13.7. $-(x-1)(x+1)(x-3)$

13.8. $-4(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

14.1. $\frac{1}{2}(x-2)(x+1)^2$

14.2. $-(x-1)^2(x+1)^2$

15.1. a) -18

b) -5

15.2. $(x-1)(2x^2+2x+3)$

16.3. $A(x) = (x-2)(x+3)(x-3)$

$B(x) = (x-2)^2$

16.4. 3

16.5. a) $[-3, 2] \cup [3, +\infty[$

b) $\{ \}$

c) $]-3, 2[\cup]3, +\infty[$

d) $]-\infty, -3] \cup \{2\} \cup [3, +\infty[$

e) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

Página 46

1.1. $\sqrt[6]{5}$

1.2. $\sqrt[20]{\frac{3^9}{8}}$

1.3. $\sqrt[15]{\frac{256}{25}}$

3. $2\sqrt{6}$

4. $210\sqrt{5}$

5. (B)

6. $T(x) = x^2 + x - 2$

7. (D)

Página 47

8.1. $Q(x) = -x+1$ e $R(x) = 2x-2$

8.2. $-(x-1)(x-2)(x+2)$

8.3. a) $]-2, 1[\cup]2, +\infty[$

b) $]-\infty, -2] \cup [1, 2] \cup [3, +\infty[$

c) $]-\infty, -2] \cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$

9.1. a) $[-3, 1] \cup [2, +\infty[$

b) $]-\infty, -3[\cup]1, 2[$

9.2. $]-\infty, -3] \cup [0, 1] \cup [2, 3]$

10. $P(x) = -\frac{1}{6}(x-3)(x-1)(x+2)^2$

11. $3x-5$

Página 50

1.1. $A(3, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-1, 3)$, $E(-3, 0)$, $F(-2, -1)$, $G(0, -4)$ e $H(2, -2)$.

1.2. a) Por exemplo, D .

b) A

c) F

d) H

e) C e G .

1.3. $E(3, 0)$

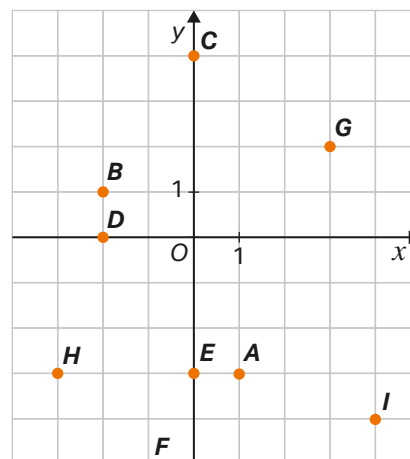
1.4. $H'(2, 2)$

1.5. a) Isósceles e acutângulo, respectivamente.

b) 16 u.m.

Página 51

2.



3.1. -4 3.2. 0 3.3. $-\frac{7}{4}$

4.1. $x = -2$ 4.2. $y = -4$ 4.3. $y = -1$

5.1. $y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ 5.2. $y = -\frac{7}{6}x + \frac{1}{3}$

Página 52

6.1. $\vec{w}$ e $\vec{s}$.

6.2. $\vec{t}$ e $\vec{w}$.

6.3. $\vec{u}$ e $\vec{v}$

7.1. a) $\vec{AG}$

c) $\vec{IG}$

b) $\vec{ED}$

d) $\vec{CF}$

Página 53

7.2. a) B

b) E

c) [BEFC]

d) [BHF]

7.3. a) F

b) E

c) C

d) I

8.1. $\vec{DA}$

8.2. $\vec{AG}$

8.3. $\vec{EG}$

8.4. C

8.5. C

8.6. J

8.7. H

8.8. I

9.1. $\vec{E}$

9.2. $\vec{H}$

9.3. $\vec{E}$

9.4. $\vec{C}$

9.5. $\vec{AH}$

9.6. $\vec{AE}$

9.7. $\vec{BI}$

9.8. $\vec{AF}$

Página 54

10.1. a) Estritamente paralelos

b) Perpendiculares

c) Oblíquos

10.2. 180 cm^3

10.3. a) Por exemplo, $\vec{ED}$.

b) Por exemplo, $\vec{EF}$.

10.4. a) Contida

b) Paralela

10.5. 45 cm^3 ; 135 cm^3 .

Página 55

11.1. a) $\vec{DC}$

b) $\vec{DF}$

c) $\vec{HG}$

11.2. a) Perpendiculares

b) Oblíquos

c) Estritamente paralelos

11.3. a) Secante

b) Secante

c) Paralela

11.4. a) $2\sqrt{13} \text{ cm}$

b) 208 cm^3

c) 256 cm^3

Página 58

1.1. $A(6, 0)$, $B(2, 1)$, $C(0, 5)$, $D(-3, 4)$, $E(-5, 1)$, $F(-1, 0)$, $G(-2, -2)$, $H(0, -4)$, $I(2, -4)$ e $J(5, -2)$.

1.2. a) G

b) D e E.

c) C, D, E e F.

d) F e A.

e) H

Página 59

2.1. $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 4)$ e $D(-2, 4)$.

2.2. $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ e $C(0, 2\sqrt{3})$.

2.3. $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ e $B(2, 2\sqrt{3})$.

2.4. $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{7})$, $B(3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7})$ e $C(-\sqrt{7}, 3)$.

3.1. $\frac{1}{2}$

3.2. -3 ou 3 .

3.3. $]-\infty, 0[$

3.4. 3

4.1. 5 u.m.

4.2. 25 u.a.

4.3. a) $F(0, 8)$

b) $E(5, 8)$

c) $A(5, 0)$

d) $D(8, 4)$

Página 60

5.1. $\sqrt{65}$

5.2. $2\sqrt{17}$

5.3. $\frac{\sqrt{73}}{6}$

5.4. $\frac{\sqrt{130}}{6}$

Página 61

6. 16 u.m.

7.1. $(5 + \sqrt{17} + \sqrt{10}) \text{ u.m.}$

7.2. $(6\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{13}) \text{ u.m.}$

8. 19 u.a.

Página 63

9.1. $(-\frac{1}{2}, 0)$

9.2. $(-\frac{7}{2}, 1)$

9.3. $(1, 5)$

9.4. $(1, -\frac{1}{4})$

10.1. $(-4, 13)$

10.2. $(-\frac{5}{2}, 11)$

10.3. $(-2, \frac{31}{3})$

11.1. $\left(\frac{\sqrt{26}}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{34}}{2}\right)$ u.m.

11.2. $\left(\frac{\sqrt{65}}{2} + 2\sqrt{10} + \frac{\sqrt{73}}{2}\right)$ u.m.

Página 65

12.1. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

12.2. $y = -\frac{5}{6}x - \frac{23}{12}$

12.3. $y = \frac{11}{2}x - \frac{1}{2}$

12.4. $y = \frac{4}{9}x + \frac{7}{36}$

13.1. $\left(0, -\frac{13}{16}\right)$

13.2. $\left(-\frac{35}{6}, -3\right)$

14.1. $-\frac{8}{5}$

14.2. 53

Página 66

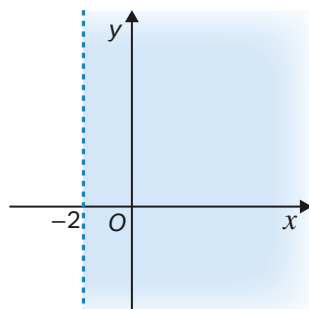
15. $r: x = -2, s: x = 3, t: y = 3, u: y = -2,$
 $v: x = 0, p: y = 0.$

16.1. $x = 1$

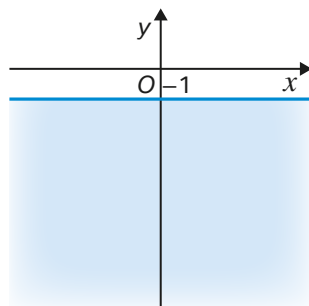
16.2. $y = 5$

Página 69

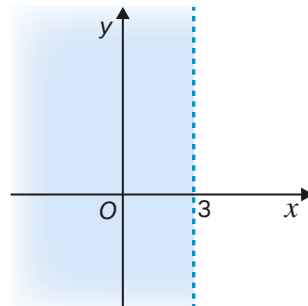
17.1.



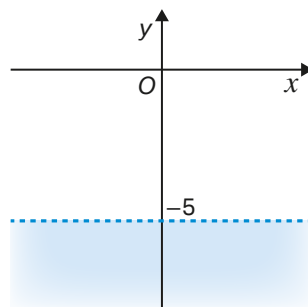
17.2.



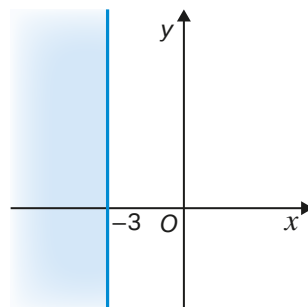
17.3.



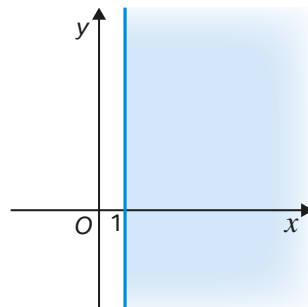
17.4.



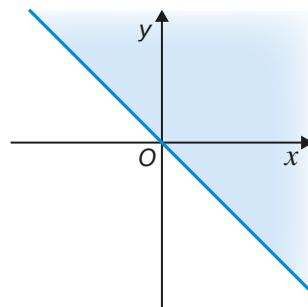
17.5.



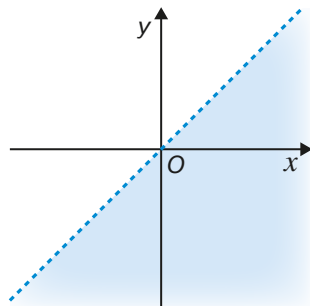
17.6.



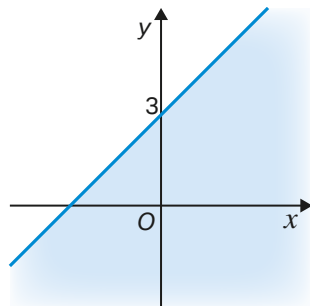
17.7.



17.8.



17.9.



18.1. $x < 2$

18.2. $y \leq 4$

18.3. $y > 0$

18.4. $x \leq 0$

18.5. $y \geq -\frac{3}{2}x + 4$

18.6. $y \geq x + 3$

19.1. $[2, +\infty[$

19.2. $]7, +\infty[$

19.3. $] -\infty, \frac{3}{2}]$

Página 70

20.1. $y \leq 4 \wedge y > -2$

20.2. $x > -2 \wedge x \leq 5$

20.3. $y \leq 4 \vee x \geq 2$

20.4. $x > 0 \wedge y > 0 \wedge x \leq 3 \wedge y \leq 3$

Página 71

21.1. $k \in]-\infty, \frac{1}{3}[$ e $m \in]-\infty, 2[$.

21.2. $k = 1$ e $m \in]-\infty, 0[$.

21.3. $k \in]-\infty, 0[$ e $m \in]-\infty, 0[$.

22.1. $x \geq -2 \wedge y \geq -9 \wedge x < 4 \wedge y < 6$

22.2. a) Por exemplo, $(-1, 3)$.

b) Por exemplo, $(-3, -1)$.

22.3. $k \in]-3, 2[$

Página 72

23.1. $(3, 1), 2$

23.2. $(0, 0), 10$

23.3. $(-1, -2), 5$

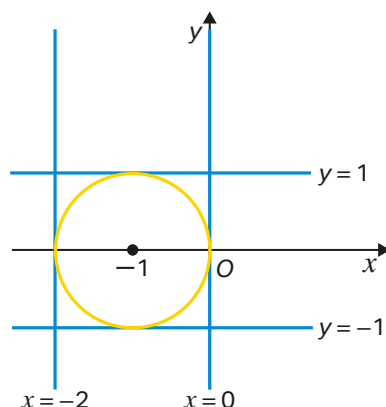
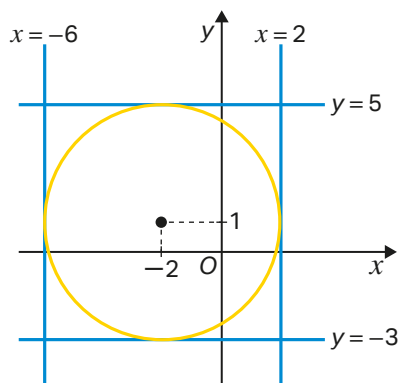
23.4. $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), \frac{1}{2}$

24.1. $C_1(-2, 1), 4$

$C_2(-1, 0), 1$

24.2. $(x+1)^2 + y^2 = 16$

24.3.



24.4. $C_1: x = -6, x = 2, y = -3, y = 5.$

$C_2: x = 0, x = -2, y = -1, y = 1.$

Página 73

25.1. Pertence

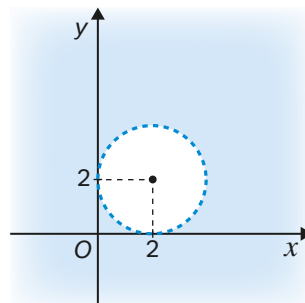
25.2. Interior

25.3. Interior

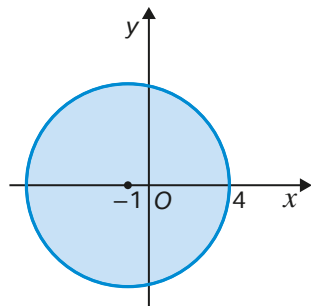
25.4. Exterior

Página 75

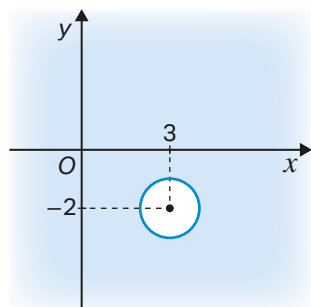
26.1.



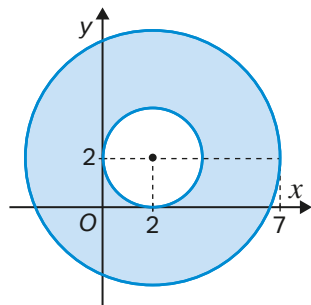
26.2.



26.3.



26.4.



- 27.1. $(x+4)^2 + y^2 \leq 25 \wedge x \geq 0$
 27.2. $x^2 + y^2 < 18 \wedge x \leq 3 \wedge y \leq 3$
 27.3. $x^2 + (y-2)^2 \leq 16 \wedge y \geq 2$
 27.4. $x^2 + (y-2)^2 < 4 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 < 4$
 27.5. $8 \leq (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 13$
 27.6. $(x^2 + y^2 < 25 \wedge x < 0 \wedge y > 0) \vee$
 $\vee (x^2 + y^2 < 25 \wedge y < 0 \wedge x \geq 3)$

Página 76

- 28.1. $c_1: (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$
 $c_2: x^2 + y^2 = 32$
 28.2. $A(-4\sqrt{2}, 0), B(0, -4\sqrt{2})$
 28.3. $x^2 + y^2 > 32 \wedge (x-4)^2 + (y+4)^2 \leq 16$

Página 77

- 29.1. $(-6, 2), \sqrt{50}$
 29.2. $(0, 8), \sqrt{74}$

- 29.3. $(2, -\frac{5}{2}), \frac{7}{2}$
 29.4. $(\frac{3}{2}, 0), \frac{\sqrt{10}}{2}$
 29.5. $(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}), \sqrt{\frac{45}{2}}$
 29.6. $(0, \frac{1}{2}), \frac{1}{2}$
 31. $(2, -\frac{1}{4}), \frac{\sqrt{97}}{4}$

Página 78

- 1.1. $A(5, 0), B(3, 1), C(1, 3), D(0, 2), E(-2, 2),$
 $F(-4, 0), G(-4, -2), H(-2, -1), I(0, -2)$
 e $J(3, -1)$.
 1.2. a) $\sqrt{29}$
 b) $2\sqrt{2}$
 c) $2\sqrt{5}$
 d) $\sqrt{10}$
 1.3. a) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$
 b) $(-1, \frac{1}{2})$
 c) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
 d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 1.4. $(2 + \sqrt{26} + \sqrt{34})$ u.m
 1.5. a) Não
 b) Isósceles
 1.6. a) $x = -4$
 b) $x = 3$
 c) $y = -2$
 d) $y = 2$
 e) $y = -1$
 f) $x = 0$
 g) $y = 0$
 h) $x = -2$
 1.7. a) $y = 3$
 b) $x = 1$
 1.8. a) $(x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leq 13$
 b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$

Página 79

- 2.1. $A(2, 0); B(3, 3); C(0, 6); D(-3, 4);$
 $E(-4, 0); F(0, -2)$.
 2.2. a) $y = \frac{5}{4}x + \frac{21}{8}$
 b) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$
 c) $y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{8}$
 d) $y = 2x + 3$

2.3. $6 + \sqrt{10} + \sqrt{13} + 3\sqrt{2} + \sqrt{17}$

2.4. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 \leq 45$

3.1. a) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 3$

b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

c) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

d) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$

3.2. a) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 50$

b) Interior

4.1. $A(2, -1); B(4, 0); C(3, 2); D(-1, 3); E(1, 1).$

4.2. $(\sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2})$ u.m.

4.3. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

Página 80

5.1. $C_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

$C_3: x^2 + (y - 4)^2 = 4$

$C_4: \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{25}$

5.2. $(-2, 0), r = 6; (-1, 3), r = 5;$

$(0, 4), r = 2; \left(-\frac{2}{5}, 0\right), r = \frac{2}{5}.$

6.1. $(1, -3), r = 2$

6.2. $x = 3; x = -1; y = -5; y = -1.$

6.3. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$

6.4. $4 \leq (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 10$

7.1. $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge y > 3 \wedge x > -1$

7.2. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 13 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$

7.3. $x^2 + (y - 1)^2 \geq 4 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 3 \wedge x \geq -2 \wedge x \leq 2$

7.4. $4 < x^2 + (y - 2)^2 < 16 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 0$

Página 81

8.1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

8.2. 4

8.3. $\left((x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 8 \wedge y > 4\right) \vee$
 $\vee \left((x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 8 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0\right)$

9.1. $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 78$

9.2. $x = 3 + \sqrt{78}; x = 3 - \sqrt{78}; y = -8 + \sqrt{78};$
 $y = -8 - \sqrt{78}.$

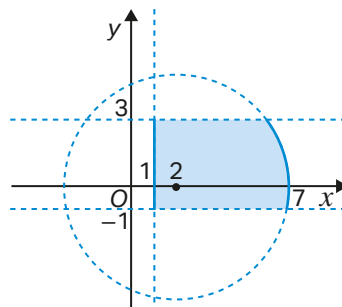
9.3. $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 > 78 \wedge x < 3 + \sqrt{78} \wedge$
 $\wedge x > 3 - \sqrt{78} \wedge y < -8 + \sqrt{78} \wedge$
 $\wedge y > -8 - \sqrt{78}$

10.1. $O(0, 0); A(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}); B(0, 4\sqrt{2});$
 $C(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$

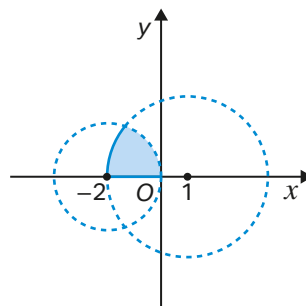
10.2. $x^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 8$

10.3. Interior

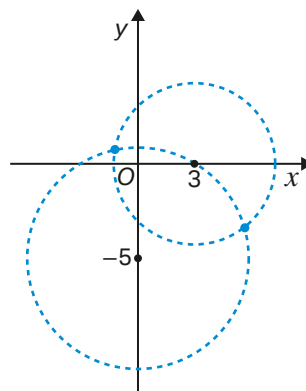
11.1.



11.2.



11.3.



Página 84

32.1. $\vec{u}, \vec{s}$

32.2. $\vec{v}$

32.3. $\vec{t}$

33.1. $\sqrt{5}$

33.2. $\sqrt{13}$

Página 85

35.1. a) 4 u.m.

b) 2 u.m.

35.2. a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) -2 d) $\frac{3}{2}$

35.3. Por exemplo, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{CD}$.

35.4. Por exemplo, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{DB}$.

35.5. Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{HI}$.

Página 86

36.1. B 36.2. F 36.3. D 36.4. H

36.5. F 36.6. H 36.7. G 36.8. D

36.9. F 36.10. D

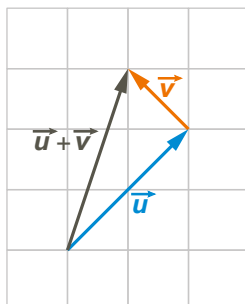
37.1. $\overrightarrow{GE}$ 37.2. $\overrightarrow{BG}$ 37.3. $\overrightarrow{JC}$

37.4. $\overrightarrow{GA}$ 37.5. F 37.6. H

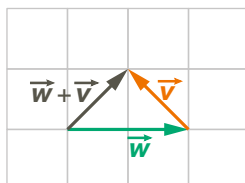
37.7. E

Página 88

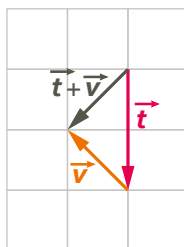
38.1.



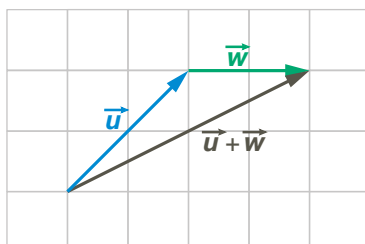
38.2.



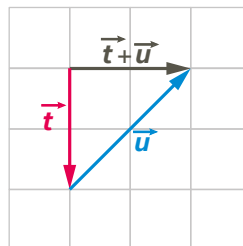
38.3.



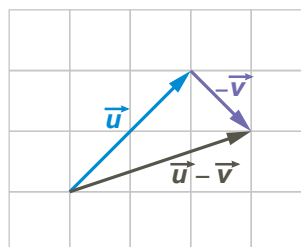
38.4.



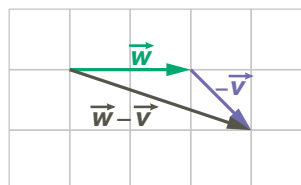
38.5.



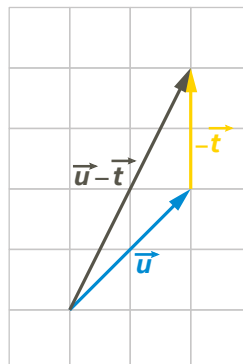
38.6.



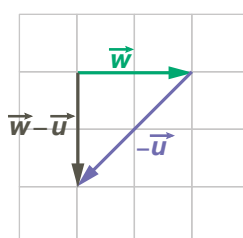
38.7.



38.8.



38.9.



39.1. a) $\overrightarrow{AG}$ b) $\overrightarrow{EH}$

d) $\overrightarrow{BG}$ e) $\vec{0}$

g) $\overrightarrow{AL}$ h) $\overrightarrow{EJ}$

c) $\overrightarrow{BH}$

f) $\overrightarrow{EA}$

i) $\overrightarrow{AD}$

39.2. a) $2\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{2}$

Página 89

40.1. $\overrightarrow{OR}$ 40.2. $\overrightarrow{OU}$ 40.3. $\overrightarrow{LR}$
 40.4. $2\sqrt{2}$ 40.5. $\sqrt{17}$

Página 90

41.1. $\sqrt{10}$ 41.2. $\frac{\sqrt{145}}{4}$ 41.3. $\sqrt{13}$
 41.4. $\sqrt{5}$ 41.5. $\frac{\sqrt{26}}{3}$ 41.6. $\sqrt{3}$
 41.7. $\sqrt{11}$ 41.8. $\sqrt{7}$ 41.9. $\sqrt{7}$

Página 92

42.1. $(3, -8)$
 42.2. $(7, 1)$
 42.3. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
 42.4. $(2, \frac{8}{15})$
 43.1. $(-8, 6)$
 43.2. $(4, -7)$
 44.1. 1 44.2. $\frac{4}{3}$ 44.3. 0 44.4. 3
 45.1. $(-\frac{3}{2}, 3)$ 45.2. $(\frac{5}{2}, -1)$
 45.3. $(-7, \frac{25}{4})$ 45.4. $(\frac{9}{4}, -3)$
 45.5. $(11, -\frac{9}{2})$ 45.6. $(-5, 0)$

Página 93

46.1. Sim 46.2. Sim 46.3. Não
 46.4. Sim 46.5. Sim
 47.1. $(1, -3)$
 47.2. a) $(-8, 6)$ b) $(4, 4)$
 c) $(8, -6)$ d) $(-4, -4)$
 47.3. Sim

Página 95

48.1. $-\frac{2}{3}$ 48.2. $-\frac{3}{2}$ 48.3. $-\frac{3}{2}$
 48.4. -12 48.5. -12 48.6. $\frac{6}{5}$
 49.1. $A(5, 3); B(0, 6); C(-6, 2); D(-4, -1);$
 $E(3, -1); F(6, 0).$
 49.2. a) $(-5, 3)$ b) $(-11, -1)$
 c) $(-9, -4)$
 49.3. $\frac{1}{11}$ 49.4. $\frac{7}{4}$
 49.5. D e E.

Página 96

50.1. 2
 50.2. 1
 50.3. -1
 50.4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 50.5. $\frac{1}{2}$
 50.6. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
 51.1. $y = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$
 51.2. $y = 3x - 9$

Página 97

52.1. $y = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$
 52.2. $y = \frac{1}{7}x - \frac{9}{7}$
 52.3. $y = \frac{1}{2}x + 1$
 52.4. $y = \frac{4}{15}x - \frac{1}{5}$
 53.1. a) $(-12, 8)$
 b) $(3, -11)$
 c) $(9, 3)$
 53.2. a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$
 b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
 c) $y = -\frac{11}{3}x + \frac{68}{3}$

Página 98

54.1. a) Concorrentes oblíquas.
 b) Estritamente paralelas.
 c) Coincidentes.
 d) Concorrentes oblíquas.
 e) Estritamente paralelas.
 f) Concorrentes oblíquas.
 54.2. -2
 55.1. Ambas têm declive 2.
 55.2. Estritamente paralelas (têm o mesmo declive e ordenadas na origem diferentes).

56. $y = x + \frac{5}{3}$

Página 99

57.1. $y = -2x + 6$
 57.2. $y = -2x - 4$
 57.3. $y = \frac{3}{2}x + 6$

Página 100

58.1. $(x, y) = (-1, -3) + k(-3, 2), k \in \mathbb{R}$

58.2. $(x, y) = (7, -3) + k(-6, 1), k \in \mathbb{R}$

58.3. $(x, y) = (-1, 5) + k(3, -2), k \in \mathbb{R}$

59.1. $(x, y) = (0, -1) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}$

59.2. $(x, y) = (0, 2) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

59.3. $(x, y) = (0, -2) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$

60. $(x, y) = (0, -2) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}$

Página 101

61. $t: (x, y) = (0, 5) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

$v: (x, y) = (0, -3) + k(5, 3), k \in \mathbb{R}$

$r: (x, y) = (0, 7) + k(5, 2), k \in \mathbb{R}$

$s: (x, y) = (0, -3) + k(5, -8), k \in \mathbb{R}$

Página 103

62.1. $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 1 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

62.2. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

62.3. $\begin{cases} x = -k \\ y = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

62.4. $\begin{cases} x = -3 - \frac{2}{5}k \\ y = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

63.1. $(-2, 7)$

63.2. Por exemplo, $(-2, 4), (-4, 8)$.

63.3. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

64.1. $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 3 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

64.2. 2

64.3. $\left(\frac{1}{2}, 0\right); (0, 1)$.

65.1. $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

65.2. $(2, 0)$

65.3. $\begin{cases} x = -3 - 3k \\ y = -4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Página 104

1.1. $\sqrt{10}$

1.2. a) $(2, -6)$

b) $(5, -7)$

c) $(5, 1)$

d) $(-6, 10)$

e) $\left(-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$

f) $(1, -7)$

1.3. Não

1.4. a) -3

b) -3

2.1. a) $(15, -18)$

b) $(-9, 9)$

c) $(-9, 9)$

3.1. a) $\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AE}$

Página 105

4.1. $\left(-\frac{13}{3}, 0\right); \left(0, \frac{13}{2}\right)$.

4.2. $\begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

4.3. Por exemplo, $(1, 2)$ e $(0, 5)$.

4.4. $\vec{r} = (-2, -3); \vec{s} = (1, 2); \vec{t} = (-1, 3)$.

4.5. $\begin{cases} x = k \\ y = -5 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

4.6. Concorrentes oblíquas.

5.1. $(x, y) = (-2, 0) + k(1, -5), k \in \mathbb{R}$

5.2. $y = -\frac{3}{2}x - 3$

5.3. $\begin{cases} x = k \\ y = -5 - 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

5.4. $\left(-\frac{31}{16}, -\frac{5}{16}\right)$

6.1. $y = -2x + 10$

6.2. $(x, y) = (0, 4) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$

6.3. $\left(\frac{12}{5}, \frac{26}{5}\right)$

6.4. 33,8 u.a.

Página 106

7.1. $(-8, 0)$

7.2. $(2, 4)$

7.3. 24 u.a.

7.4. $y = \frac{x}{2} + 4$

7.5. $y \leq \frac{x}{2} + 4 \wedge y \leq 4 \wedge x \leq 2 \wedge y \geq 0$

8.1. Estritamente paralelas.

8.2. Não pertence.

8.3. $y = -x - 1$

8.4. $(x, y) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right) + k(3, -3), k \in \mathbb{R}$

9.1. a) $y = 2x + 6$

b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

c) $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

d) $y = 2x - 4$

- 9.2. $y \leq 2x + 6 \wedge y \leq -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} \wedge y \geq -\frac{x}{2} - \frac{3}{2} \wedge y \geq 2x - 4$
 9.4. $(0, 1)$
 9.5. $x^2 + (y - 1)^2 = 10$

Página 107

- 10.1. $A\left(-\frac{3}{2}, 0\right); B\left(\frac{3}{2}, 0\right); C(3, 4); D(0, 4)$.
 10.2. a) $y = \frac{8}{3}x + 4$
 b) $y = \frac{8}{3}x - 4$
 10.3. $y \leq \frac{8}{3}x + 4 \wedge y \geq \frac{8}{3}x - 4 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 4$
 11.1. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$
 11.2. $(-3, 3)$
 11.3. $y = \frac{2}{3}x + 5$
 11.4. $\left(-\frac{15}{2}, 0\right)$
 11.5. $\left((x+3)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \wedge x \geq -3 \wedge y \geq \frac{2}{3}x + 5\right) \vee \left((x+3)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \wedge x \leq -3 \wedge y \leq \frac{2}{3}x + 5\right)$

Página 109

- 66.1. $A(3, 0, 0); B(3, 3, 0); C(0, 3, 0); O(0, 0, 0); F(3, 0, 3); G(3, 3, 3); D(0, 3, 3); E(0, 0, 3)$.
 66.2. $A(0, -2, 0); B(2, -2, 0); C(2, 0, 0); O(0, 0, 0); F(0, -2, 2); G(2, -2, 2); D(2, 0, 2); E(0, 0, 2)$.
 66.3. $A(0, 4, 0); B(-4, 4, 0); C(-4, 0, 0); O(0, 0, 0); F(0, 4, 4); G(-4, 4, 4); D(-4, 0, 4); E(0, 0, 4)$.
 66.4. $A(-2, 0, 0); B(-2, -2, 0); C(0, -2, 0); O(0, 0, 0); F(-2, 0, -2); G(-2, -2, -2); D(0, -2, -2); E(0, 0, -2)$.

Página 110

67. $A(4, -4, 0); B(4, 4, 0); C(-4, 4, 0); F(4, 4, 2); G(-4, 4, 2); D(-4, -4, 0); E(4, -4, 2); H(-4, -4, 2)$.
 68. $A(\sqrt{2}, 0, 0); B(0, \sqrt{2}, 0); C(-\sqrt{2}, 0, 0); H(-\sqrt{2}, 0, 2); F(\sqrt{2}, 0, 2); G(0, \sqrt{2}, 2); D(0, -\sqrt{2}, 0); E(0, -\sqrt{2}, 2)$.

Página 112

- 69.1. $x=2; x=-2; y=2; y=-2; z=0; z=4$.

- 69.2. $x=0; x=4; y=0; y=-2; z=0; z=1$.
 69.3. $x=0; x=1; y=0; y=4; z=0; z=3$.
 69.4. $x=0; x=4; y=0; y=4; z=0; z=10$.

Página 113

- 70.1. $A(2, -2, 0); B(2, 2, 0); C(-2, 2, 0); D(-2, -2, 0); E(0, 0, 3)$.
 70.2. a) $z=0$
 b) $z=3$
 c) $x=-2$
 d) $y=2$

Página 116

- 71.1. $A(4, 2, 0); B(4, 0, -2); C(0, 0, -2); D(0, 0, 2); V(2, 4, 0)$.
 71.2. a) $x=4 \wedge y=0$
 b) $y=0 \wedge z=-2$
 c) $x=0 \wedge y=0$
 d) $y=0 \wedge z=2$
 71.3. a) $x=2 \wedge y=4$
 b) $y=4 \wedge z=0$
 c) $x=2 \wedge z=0$
 72.1. $A(4, 0, 0); B(4, 4, 0); C(0, 4, 0); O(0, 0, 0); F(4, 0, -4); G(4, 4, -4); D(0, 4, -4); E(0, 0, -4); J(4, 0, 4); H(0, 4, 4); I(0, 0, 4)$.
 72.2. a) $z=-4$
 b) $y=4$
 c) $y=4$
 72.3. a) $x=4 \wedge z=0$
 b) $y=4 \wedge z=4$
 c) $x=0 \wedge y=4$
 72.4. a) $x=4 \wedge y=4 \wedge -4 \leq z \leq 0$
 b) $z=4 \wedge y=0 \wedge 0 \leq x \leq 4$
 c) $x=4 \wedge y=0 \wedge 0 \leq z \leq 4$
 72.5. a) $0 \leq x \leq 4 \wedge y=0 \wedge 0 \leq z \leq 4$
 b) $0 \leq y \leq 4 \wedge x=0 \wedge -4 \leq z \leq 4$
 c) $0 \leq x \leq 4 \wedge z=-4 \wedge 0 \leq y \leq 4$

Página 118

- 73.1. $\sqrt{74}$
 73.2. $\sqrt{5}$
 73.3. $\sqrt{29}$
 73.4. $\sqrt{43}$
 73.5. $\sqrt{6}$
 73.6. $3\sqrt{6}$

- 74.1. $A(4, 0, 0); B(4, 2, 0); C(0, 2, 0); O(0, 0, 0); F(4, 0, 1); G(4, 2, 1); D(0, 2, 1); E(0, 0, 1)$.

74.2. $6 + 2\sqrt{5}$

74.3. $\sqrt{21}$

Página 119

75.1. $3x + y - 2z = 0$

75.2. $x + 3y - 2z = 2$

75.3. $4x + 2y - 8z = 1$

75.4. $x - 2y - 2z = -\frac{3}{2}$

75.5. $x - y = -1$

75.6. $x + 2z = -\frac{1}{2}$

76.1. $A(0, -6, 0); B(-6, -6, 0); C(-6, 0, 0);$
 $O(0, 0, 0); F(-6, 0, 6); G(0, 0, 6);$
 $D(0, -6, 6); E(-6, -6, 6).$

76.2. $x - z = -6$

76.3. $x + y - z = 9$; por exemplo, $P(0, 15, 6).$

Página 120

77.2. $V(0, 0, 6)$

77.3. $x - y - 3z = -7$, $P\left(0, 0, \frac{7}{3}\right)$

Página 121

78.1. $x^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 2$

78.2. $(x - \sqrt{3})^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{4}{9}$

78.3. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{5}\right)^2 = 20$

79.1. $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, 0\right); \sqrt{7}.$

79.2. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, 0\right); \sqrt[4]{3}.$

79.3. $\left(-\frac{1}{2}, 0, 3\sqrt{2}\right); \sqrt{\frac{55}{2}}.$

79.4. $(2, -5, 0); \sqrt{59}.$

79.5. $(-1, 3, 0); \sqrt{13}.$

79.6. $\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right); \frac{\sqrt{21}}{2}.$

Página 122

80.1. $(-1, 3, 0); (3, 0, 4); 5.$

80.2. interior a c_1 ; exterior a c_2 .

81.1. $(2, 0, -1); 2.$

81.2. a) $y = 2; y = -2.$

b) $x = 0; x = 4.$

c) $z = 1; z = -3.$

Página 123

82.1. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 4$

82.2. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{2})^2 \leq 3$

82.3. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$

83. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{45}{4}$

84.1. $(3, -1, 0); 4$ e $(0, -2, 1); 3.$

84.2. $e_1: y = -5; y = 3.$

$e_2: y = 1; y = -5.$

84.3. a) $(y+1)^2 + z^2 \leq 15$

Círculo contido no plano $x = 2$ de centro $(2, -1, 0)$ e raio $\sqrt{15}.$

b) Vazio

c) Ponto de coordenadas $(3, -1, 4).$

Página 124

1.1. $A(0, 0, -3); B(0, 6, -3); C(-6, 6, -3);$
 $D(-6, 0, -3); E(-6, 0, 3); F(0, 0, 3);$
 $G(0, 6, 3); H(-6, 6, 3).$

1.2. $A(3, -3, 0); B(3, 3, 0); C(-3, 3, 0);$
 $D(-3, -3, 0); E(-3, -3, 6); F(3, -3, 6);$
 $G(3, 3, 6); H(-3, 3, 6).$

1.3. $A(3, -3, -3); B(3, 3, -3); C(-3, 3, -3);$
 $D(-3, -3, -3); E(-3, -3, 3); F(3, -3, 3);$
 $G(3, 3, 3); H(-3, 3, 3).$

1.4. $A(3\sqrt{2}, 0, 0); B(0, 3\sqrt{2}, 0);$
 $C(-3\sqrt{2}, 0, 0); D(0, -3\sqrt{2}, 0);$
 $E(0, -3\sqrt{2}, 6); F(3\sqrt{2}, 0, 6);$
 $G(0, 3\sqrt{2}, 6); H(-3\sqrt{2}, 0, 6).$

2.1. a) $(-1, 0, 3)$

b) $(-6, 3, 0)$

c) $(-6, 6, 0)$

d) $(-3, 3, -3)$

2.2. a) $x = -6$

b) $z = -3$

c) $y = 6$

d) $x = -6$

Página 125

3.1. $\sqrt{77}$

3.2. a) $x - 4y + 3z = -6$

b) $-8x + 4y + 10z = -5$

c) $6x + 4y - 16z = 17$

3.3. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{109}{2}$

- 3.4. a) $z = -5$
b) $x = 1$
- 3.5. a) $x = -3 \wedge z = 0$
b) $x = -3 \wedge y = 4$
- 4.1. $O(0, 0, 0)$; $A(4, 4, 0)$; $B(0, 4, 0)$;
 $C(-4, 0, 0)$; $V(0, 2, 8)$.
- 4.2. 128 u.a.
- 4.3. $z = 8$
- 5.1. $O(0, 0, 0)$; $A(0, -4, 0)$; $C(4, 0, 0)$;
 $B(4, -4, 0)$; $E(0, 0, -6)$; $F(0, -4, -6)$;
 $G(4, -4, -6)$.
- 5.2. a) $y = -4$
b) $x = 4$
c) $z = -6$
- 5.3. a) $y = -4 \wedge z = 0$
b) $x = 4 \wedge y = 0$
c) $x = 4 \wedge z = -6$
- 5.4. a) $0 \leq x \leq 4 \wedge y = -4 \wedge z = 0$
b) $x = 4 \wedge y = -4 \wedge -6 \leq z \leq 0$
c) $x = 4 \wedge -4 \leq y \leq 0 \wedge -6 \leq z \leq 0$
d) $0 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 0 \wedge z = -6$

Página 126

- 6.1. a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = \frac{1}{4}$
b) $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2$
- 6.2. a) $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 \leq 20$
b) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{19}{2}$
- 7.1. $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$; $\sqrt{5}$.
- 7.2. $\left(0, \sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$; 3.
- 7.3. $(1, -2, 0)$; 4.
- 7.4. $\frac{\sqrt{118}}{15}$
- 7.5. $(1, 5, 0)$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 7.6. $(-2, 0, 3)$; $\frac{\sqrt{113}}{2}$.
- 8.1. $(2, -3, 1)$; $\sqrt{11}$ e $(0, 0, 3)$; $3\sqrt{2}$.
- 8.2. Interior
- 8.3. $x = 3\sqrt{2}$; $x = -3\sqrt{2}$; $y = 3\sqrt{2}$; $y = -3\sqrt{2}$;
 $z = 3 + 3\sqrt{2}$; $z = 3 - 3\sqrt{2}$.
- 8.4. a) $(3, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$.
b) $(0, \sqrt{6} - 3, 0)$; $(0, -\sqrt{6} - 3, 0)$.
c) Impossível
- 8.5. $(x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 \leq \frac{17}{4}$

Página 127

- 9.1. $O(0, 0, 0)$; $A(4, 0, 0)$; $B(4, 4, 0)$;
 $C(0, 4, 0)$; $D(0, 4, -4)$; $E(0, 0, -4)$;
 $F(4, 0, -4)$; $G(4, 4, -4)$.
- 9.2. $(2, 2, -2)$; 2.
- 9.3. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \leq 4$
- 9.4. $(2, 0, -2)$; $(2, 2, 0)$; $(0, 2, -2)$; $(2, 4, -2)$;
 $(2, 2, -4)$; $(4, 2, -2)$.
- 9.5. a) $(x-2)^2 + (z+2)^2 \leq 4$
b) $(y-2)^2 + (z+2)^2 \leq 3$
c) $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 3$
- 10.1. $O(0, 0, 0)$; $A(0, -2, 0)$; $B(2, -2, 0)$;
 $C(2, 0, 0)$; $D(2, 0, 2)$; $E(0, 0, 2)$;
 $F(0, -2, 2)$; $G(2, -2, 2)$.
- 10.2. $(1, -1, 8)$
- 10.3. a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $\sqrt{38}$
d) $\sqrt{38}$
- 10.4. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 16$
- 10.5. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + (z-4)^2 = \frac{9}{2}$
- 10.6. $-x+y+4z=13$; $P(-13, 0, 0)$.

Página 130

- 85.1. a) $(3, -1, -6)$
b) $(5, 2, 4)$
c) $(-5, -8, 3)$
d) $(8, 1, -2)$
e) $(0, -6, 7)$
- 85.2. a) $\sqrt{46}$
b) $3\sqrt{5}$
c) $\sqrt{69}$
- 85.3. a) $(-2, -9, -3)$
b) $(8, 13, -16)$

Página 131

- 86.1. a) $(4, 3, 1)$
b) $(4, -3, 0)$
c) $(4, 6, 0)$
d) $(-4, 6, 1)$
e) $(4, 6, -1)$
f) $(-4, 0, 0)$
g) $(0, 0, 1)$
h) $(0, 6, 0)$
i) $(-4, 6, 0)$
- 86.2. a) Sim
b) Sim
c) Não
d) Sim

- 86.3. a) $(8, -6, 1)$
 b) $(4, 9, 0)$
 c) $(4, -6, 1)$

87.1. $(3, -1, 1)$

- 87.2. a) $(6, -1, -8)$
 b) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
 c) $3\sqrt{6}$

87.3. Não

Página 134

88.1. $(x, y, z) = (0, -3, 1) + k(-3, 2, 0), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -3k \\ y = -3 + 2k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

88.2. $(x, y, z) = (2, -1, 0) + k(0, -2, 5), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 - 2k, k \in \mathbb{R} \\ z = 5k \end{cases}$$

88.3. $(x, y, z) = (0, 5, 0) + k(-1, 1, 3), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -k \\ y = 5 + k, k \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}$$

88.4. $(x, y, z) = k(5, 0, 2), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 0, k \in \mathbb{R} \\ z = 2k \end{cases}$$

89.1. $(x, y, z) = (0, 3, 1) + k(-1, 0, -2), k \in \mathbb{R}$

89.2. $(x, y, z) = (0, -1, -5) + k(3, -3, -6), k \in \mathbb{R}$

89.3. $P\left(0, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

89.4. Verdadeira

90.1. $O(0, 0, 0)$; $A(0, -3, 0)$; $B(-3, 0, 0)$;
 $C(0, -3, 5)$; $D(0, 0, 5)$; $E(-3, 0, 5)$.

90.2. $(x, y, z) = (0, -3, 5) + k(-3, 3, 0), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}k \\ y = -3 + \frac{3}{2}k, k \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 5k \end{cases}$$

90.4. $(0, -3, 5)$

Página 135

- 1.1. a) B
 b) D
 c) $\overrightarrow{BD}$
 d) $\overrightarrow{AE}$
 e) $\overrightarrow{CG}$
 f) E

1.2. a) $(0, 2, -5)$

- b) $(2, 2, 0)$
 c) $(2, 2, -5)$
 d) $(-1, -1, 0)$
 e) $(-4, 2, -5)$
 f) $\left(3, 1, -\frac{5}{2}\right)$

2.1. $(-5, 0, -1)$

2.2. $(7, 0, -1)$

2.3. $(-2, -1, 0)$

2.4. $(18, 0, 1)$

2.5. $(-8, 1, -2)$

2.6. $\left(-\frac{7}{2}, 2, \frac{9}{2}\right)$

3.1. a) $(-3, 1, -2)$

b) $(-4, 4, -4)$

c) $\left(\frac{5}{2}, -6, 4\right)$

d) $(-1, 8, -4)$

e) $(-5, -6, 0)$

f) $\left(\frac{15}{2}, -\frac{25}{2}, 9\right)$

3.2. a) $\sqrt{14}$

b) $4\sqrt{3}$

c) 11

d) $\frac{1}{2}$

3.3. a) Não

b) Não

c) Não

3.4. $k = 1$

Página 136

4.1. Sim

4.2. $m = 5$

4.3. $(x, y, z) = (-3, 5, 1) + k(3, -1, -3), k \in \mathbb{R}$

5.1. $A(0, 0, -1)$; $D(5, 0, -1)$; $B(0, -5, -1)$;
 $C(5, -5, -1)$; $F(0, 0, -6)$; $E(5, 0, -6)$;
 $G(0, -5, -6)$; $H(5, -5, -6)$.

5.2. $(x, y, z) = (0, 0, -6) + k(-5, 5, -5), k \in \mathbb{R}$

5.3. $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

5.4. $(x, y, z) = (5, -5, -1) + k(0, 5, 5), k \in \mathbb{R}$

5.5. a) $\left(\frac{5}{2}, -5, -1\right)$

b) $(x, y, z) = (5, 0, -1) + k\left(-\frac{5}{2}, 5, -5\right), k \in \mathbb{R}$

c) Não existe.

Página 137

6.1. $O(0, 0, 0)$; $A(0, -6, 0)$; $B(6, -6, 0)$;
 $C(6, 0, 0)$.

- 6.2. a) $(-3, 3, 8)$
 b) $(6, 0, 0)$
 c) $(-3, -3, 8)$
 d) $(3, 3, 8)$
- 6.3. a) $(x, y, z) = (3, -3, 8) + k(-3, 3, 8), k \in \mathbb{R}$
 b) $(x, y, z) = k(3, -3, 8), k \in \mathbb{R}$
 c) $(x, y, z) = (0, -6, 0) + k(6, 6, 0), k \in \mathbb{R}$
 d) $(x, y, z) = (3, -3, 8) + k(-3, -3, 8), k \in \mathbb{R}$
- 6.4. $(0, 0, 8)$
- 6.5. $P(12, 6, 0)$
- 6.6. a) $(x, y, z) = (3, -3, 8) + k(0, 6, 0), k \in \mathbb{R}$
 b) $(x, y, z) = (6, -6, 0) + k(-3, -3, 8), k \in \mathbb{R}$
- 6.7. a) $(x, y, z) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, 4\right) + k(3, -3, -8), k \in \mathbb{R}$
 b) A reta não intersesta nenhum dos eixos.

Página 138

1. (A)
2. (B)
3. (C)
- 4.1. (B) 4.2. (C)

Página 139

- 5.1. $y = -\frac{2}{3}x + 4$
- 5.2. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
- 5.3. $\begin{cases} x = -4 + 8k \\ y = 2 - 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$
- 5.4. $y = \frac{4}{3}x - 1$
- 5.5. $x^2 + (y+1)^2 = 25$
- 6.1. $D(-10, -6, -2)$ e $G(-10, 0, 0)$
- 6.2. $(x+5)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 \leq 35$
- 6.3. $\left(-\frac{16}{5}, 0, 0\right)$
- 7.1. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$
- 7.2. $x = 4; x = -2.$
 $y = 3; y = -3.$
 $z = 1; z = -5.$
- 7.3. $(x-1)^2 + y^2 = 5, 2\sqrt{5}\pi \text{ u.m.}$

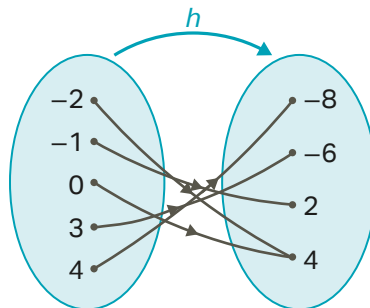
Página 142

- 1.1. Não, pois 3 não tem imagem.
- 1.2. Sim, pois cada elemento de A tem uma e uma só imagem.
- 1.3. Não, pois -1 tem duas imagens diferentes.

- 2.1. $\{-2, 0, 3, 5\}$
- 2.2. $\{-5, -2, 1\}$
- 2.3. 1
- 2.4. 5
- 2.5. 0 e 3.

Página 143

3.1.



- 3.2. a) $\{-2, -1, 0, 3, 4\}$
 b) $\{-8, -6, 2, 4\}$
 c) -8
 d) -1

4.1.

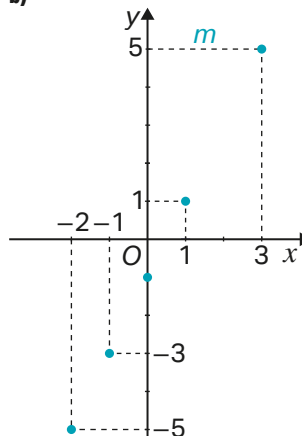
x	-1	0	2	4
$p(x)$	3	5	-3	-1

- 4.2. a) $\{-1, 0, 2, 4\}$
 b) $\{-3, -1, 3, 5\}$
 c) 3
 d) 0

- 5.1. -3
- 5.2. $\{-5, -3, -1, 1, 5\}$
- 5.3. a)

x	-2	-1	0	1	3
$m(x)$	-5	-3	-1	1	5

b)



Página 144

- 6.1.** a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
c) 2
d) -1

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

- ### 6.3. (B)

7.1.

x	-2	-1	0	2	4
$g(x)$	2	1	-2	-1	2

- 7.2. a) 1
b) $\{-2, -1, 0, 2, 4\}$
c) $-2 \in 4$.
- 7.3. $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$
- 7.4. a) 5
b) $-\frac{12}{5}$

Página 145

- 8.1. $\{-3, 2\}$
- 8.2. $\{-2, -1\}$
- 8.3. $\{-2, 5\}$
- 8.4. $\{-3, 1\}$
- 8.5. $\{-2, 3\}$
- 8.6. $\{-2, -1\}$
- 9.1. $(x+1)^2 + 2$
- 9.2. $-(x-1)^2 - 3$
- 9.3. $2(x-1)^2 + 3$
- 9.4. $-2(x-3)^2 + 10$
- 9.5. $3(x-1)^2 + 6$
- 9.6. $-3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$
10. $I \rightarrow j$
 $II \rightarrow f$
 $III \rightarrow g$
 $IV \rightarrow h$

Página 146

- $$\begin{array}{ll} \mathbf{1.1.} & \left\{ (0, 1), (0, 3), (0, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5) \right\} \\ & \left\{ (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5) \right\} \\ \mathbf{1.2.} & \left\{ (1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 0), (3, 2) \right\} \\ & \left\{ (3, 3), (3, 5), (5, 0), (5, 2), (5, 3), (5, 5) \right\} \\ \mathbf{1.3.} & \left\{ (0, 0), (0, 2), (0, 3), (0, 5), (2, 0), (2, 2) \right\} \\ & \left\{ (2, 3), (2, 5), (3, 0), (3, 2), (3, 3), (3, 5) \right\} \\ & \left\{ (5, 0), (5, 2), (5, 3), (5, 5) \right\} \end{array}$$

- 1.4.** $\left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3) \\ (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5) \end{array} \right\}$

Página 147

2. (A) não é, pois -2 não está associado a nenhum elemento de H ; (B) é; (C) não é, pois o elemento -2 de J está associado a dois elementos de H , -1 e 1 , e o elemento 0 de J não está associado a nenhum elemento de H .

Página 148

- 3.1.** Por exemplo, $G = \{(-1, 2), (1, 4), (3, 4), (5, 6)\}$
- 3.2.** Porque 1 não é elemento de F .
- 3.3.** Não, pois 3 não é elemento de F e 2 não é elemento de E .

Página 149

- 4.1.** $\left\{1, \frac{5}{2}, 5, \frac{17}{2}, 13, \frac{37}{2}, 25, \frac{101}{2}\right\}$
- 4.2.** $G_{H_A} = \left\{\left(2, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{17}{2}\right), \left(6, \frac{37}{2}\right)\right\}$
- 4.3.** $\left\{1, 5, 13, 25, \frac{101}{2}\right\}$
- 5.1.** $D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}; D' = \{-3, -2,$
- 5.2.** $\{(-1, 1), (0, 1), (1, -1)\}$
- 5.3.** $\{-3, -2, -1\}$

Página 153

6. A função não é injetiva, pois tem dois objetos diferentes com a mesma imagem ($0 \neq 6$ e $f(0) = f(6)$); a função não é sobrejetiva ($4 \in B$ e $4 \notin D'$). Por isso, f não é bijetiva.

- 7.1. g
7.2. h
7.3. i

- 8.1. Bijetiva.
- 8.2. Bijetiva.
- 8.3. Não é bijetiva.
- 8.4. Não é bijetiva.

Página 155

- 9.1. 5
9.2. -5
9.3. -1

9.4. -2

9.5. 1

9.6. 2

10.1. a) $r \circ s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 4x + 4$

b) $s \circ r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 2$

10.2. a) 9

b) -1

c) -2

d) 0

e) 7

f) 4

Página 157

11.1. A função j é injetiva porque todos os elementos do domínio têm imagens diferentes e é sobrejetiva porque o contradomínio é igual ao conjunto de chegada. Por isso, j é bijetiva.

11.2. a) 1

b) 0

c) 3

d) 1

11.3. $j^{-1}: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{-2, 1, 2, 3\}$

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow -2$

$2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 2$

12.2. $G = \{(-1, 2), (0, 0), (2, -1), (3, 1)\}$

12.3. $h^{-1}: \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2\}$

$-1 \rightarrow 2$

$0 \rightarrow 0$

$2 \rightarrow -1$

$3 \rightarrow 1$

13.2. 1

13.3. $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x+5}{2}$

14. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x - 10$

$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1-x}{2}$

$h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2 - 3x$

Página 158

1.1. $\{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

1.2. $\{(0, -1), (0, 2), (0, 3), (1, -1), (1, 2), (1, 3), (2, -1), (2, 2), (2, 3)\}$

1.3. $\{(-1, -1), (2, -1), (3, -1), (-1, 2), (2, 2), (3, 2), (-1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

1.4. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$

2.1. f e i , pois objetos diferentes têm imagens diferentes.

2.2. g , h e i , pois todos os elementos do conjunto de chegada são imagens de um elemento do domínio.

2.3. i , pois é injetiva e sobrejetiva.

3.1. a) $\{1, 2, 3\}$

b) $\{1, 2, 3\}$

3.2. Não é injetiva, pois existem objetos diferentes com a mesma imagem, por exemplo $f(-1) = f(2)$; é sobrejetiva pois todos os elementos de B são imagem de pelo menos um elemento de A .

4.1. 2

Página 159

5.1. $[-3, 3]; [-2, 4]$

5.2. a) -3

b) -1

c) 2

d) 3

6.2. Por exemplo, $[0, +\infty[$.

6.3. $p^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 5x + 2$

7.1. $[-2, 3]$

7.2. a) 4

b) 2

c) 4

d) -3

e) 0

f) -1

8.1. a) $\sqrt{6}$

b) não existe

c) 0

d) $\frac{1}{5}$

8.2. a) $(j \circ h)(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+1}}$

b) $(h \circ j)(x) = \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x+1}+1}$

Página 161

15.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2}{3}$$

15.2. $g: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{x-3}$$

15.3. $h: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{-x+3}$$

15.4. $j:]-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{-x+3}$$

15.5. $k: [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2x-6}$$

15.6. $l:]-5, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{-2}{\sqrt{x+5}}$$

Página 162

16.1. Sim

16.2. Não

16.3. Não

16.4. Sim

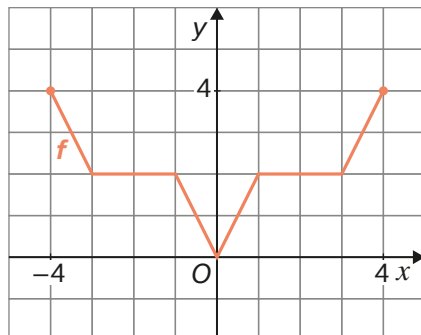
17.1. Ímpar

17.2. Par

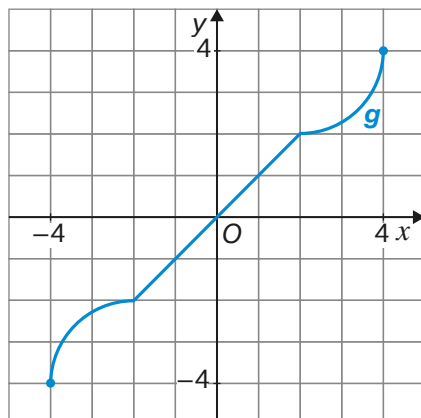
17.3. Par

17.4. Par

18.1.

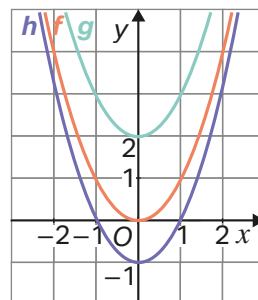


18.2.



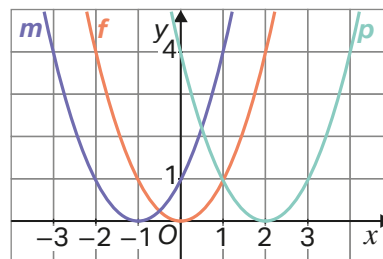
Página 163

1.1.



1.2. $(0, 2); (0, -1)$

2.1.



2.2. $(2, 0); (-1, 0)$

Página 164

19.1. a) $[-2, 4]$

b) $[-10, -4]$

c) $[-2, 4]$

d) $[-6, 0]$

19.2. a) $]-6, -1[$

b) $]2, 7[$

c) $]-4, 1[$

d) $]-1, 4[$

Página 165

20.1. $[-3, 0]; [-2, 2]$

20.2. a) $[-2, 1]$

b) $[-5, -2]$

c) $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

20.3. a) $[-1, 3]$

b) $[-4, 0]$

c) $\left[-\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right]$

20.4. a) $[-6, -3]; [-4, 0]$

b) $[-1, 2]; [-1, 3]$

21.1. $[-6, -1[$

21.2. 2

21.3. 5

22. -4

Página 168

23.1. $[-2, 2]; [-\frac{1}{4}, 2]$

23.2. $[-2, 2]; [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]; [-6, 6]; [-2, 2]$

23.3. $[-\frac{3}{4}, 6]; [-\frac{1}{4}, 2]; [-\frac{1}{4}, 2]; [-\frac{1}{12}, \frac{2}{3}]$

23.4. a) 8

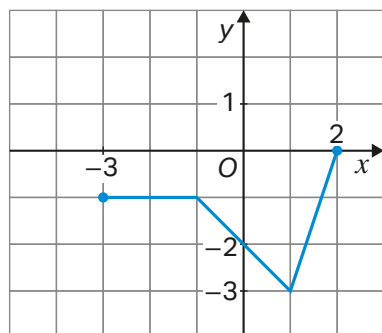
b) 1

24.1. $\{-16, -8, 0, 4\}; \{-1, \frac{1}{2}, 2, 4\}$

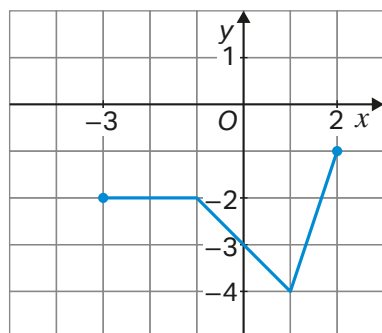
24.2. $\{(-2, 2), (-1, \frac{1}{2}); (0, -1), (\frac{1}{2}, 4)\}$

Página 170

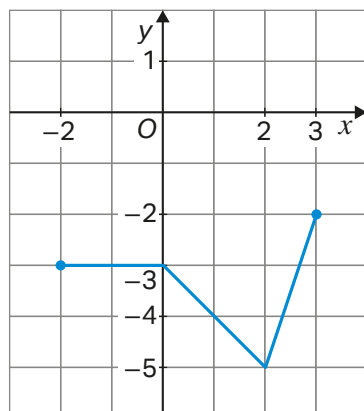
25.1.



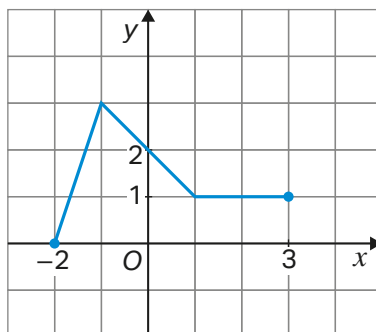
25.2.



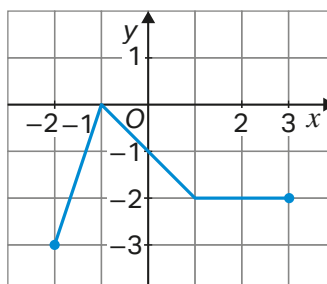
25.3.



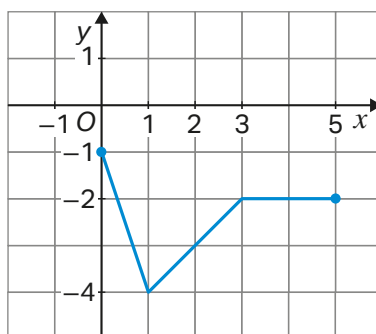
25.4.



25.5.



25.6.



26.1. $[-1, 5]; [-3, 2]$

26.2. $[-5, 1]; [-2, 3]$

26.3. $[-1, 5]; [-6, 4]$

26.4. $[-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}]; [-2, 3]$

26.5. $[-5, 1]; [-\frac{3}{2}, 1]$

26.6. $[-10, 2]; [-9, 6]$

27.1. $] -2, 8]$

27.2. $-1, 2, 4$

Página 171

1.1. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

1.2. $[3, +\infty[$

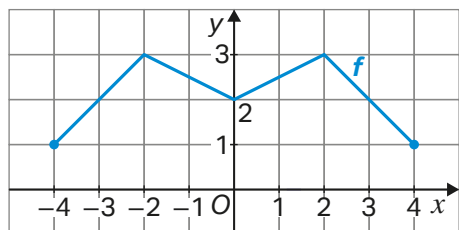
1.3. $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$

1.4. $[\frac{1}{2}, +\infty[$

1.5. $] -\infty, 1[$

1.6. $] -\infty, 3[$

2.1.



- 2.2. a) 2
b) 3
c) 2

3. 6 u.a.

- 4.1. a) $[2, 6]$
b) $[-1, 2]$
c) $[-2, 6]$

4.2. $(1, \frac{1}{2})$

4.3. $a = -2$ e $b = -5$.

Página 173

28.1. 0,3 e 5; $-1,0$ e 5.

- 28.2. a) Por exemplo, $]3, 5[$.
b) Por exemplo, $] - 2, - 1[$.

28.3.

x	-2		-1		0		5
$g(x)$	-2	-	0	+	0	-	5

- 29.1. a) Negativo
b) Negativo
c) Positivo
d) Positivo
e) Positivo
f) Positivo

29.2.

x	-4		-2		4		5
$h(x)$	-2	-	0	-	0	+	2

29.3. $]4, 5]$

Página 174

30.1.

x	-4		-2		2		5
$h(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2

30.2. Estritamente crescente: $[-4, -2]$ e $[2, 5]$;
estritamente decrescente $[-2, 2]$.

30.3.

x	-4		-2		2		5
$-h(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

Página 175

31.1. Estritamente decrescente.

31.2. Estritamente crescente.

31.3. Estritamente crescente.

32.1. $]0, +\infty[$

32.2. $]2, +\infty[$

Página 177

33.1. $[-4, 2]$

- 33.2. a) 2
b) -4

Página 178

34.1.

x	-2		-1		4
$f(x)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

Estritamente decrescente $[-2, -1]$;
estritamente crescente $[-1, 4]$.

x	-4		-3		-1		2		3
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\rightarrow$	4	$\searrow$	2

Estritamente decrescente $[-4, -3]$ e $[2, 3]$;
estritamente crescente $[-3, -1]$; constante $[-1, 2]$.

34.2. Função f : máximo absoluto é 5; mínimo absoluto é -1;

Função g : máximo absoluto é 4; mínimo absoluto é 0.

34.3. Função f : máximos relativos são 5 e 4 com maximizantes -2 e 4, respetivamente; mínimo relativo é -1 com minimizante -1;
Função g : máximos relativos são 1 e 4 com maximizantes -4 e $[-1, 2]$, respetivamente; mínimos relativos são 0, 2 e 4 com minimizantes -3, 3 e $]-1, 2[$, respetivamente.

Página 180

1.1. -4, -2

1.2.

x	-4		-2		3
$f(x)$	0	-	0	+	2

- 1.3. a) $[-1, 3]$
 b) $[2, 4]$
 c) $] -4, -2[$
 d) $] -2, 3]$

- 2.1. a) Mínimo absoluto: 0;
 máximo absoluto: não tem.
 b)

x	-1		0		1		2
$m(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	n.d.

- 2.2. a) 0
 b)

x	-1		0		1		2
$p(x)$	1	+	0	-	n.d.	+	3

- 3.1. As funções nem são pares nem ímpares.

3.2.

x		$\frac{1}{2}$	
$r(x)$	-	0	+

- 3.3. r é estritamente crescente; s é estritamente decrescente.

Página 181

- 4.1. $D_f = [-4, 4[$; $D'_f =] -2, 2]$
 $D_g = [-4, 3[$; $D'_g = [-1, 3]$
 $D_h = [-4, 4]$; $D'_h =] -\frac{5}{2}, 3]$

- 4.2. Zeros: $-2, 0$ e 3 .

x	-4		-2		0		3		4
$f(x)$	2	+	0	-	0	+	0	-	n.d.

- 4.4. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: -1 .

4.5.

x	-4		-3		-1		3
$g(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	n.d.

Estritamente crescentes: $[-4, -3]$ e $[-1, 3[$;
 estritamente decrescente: $[-3, -1]$.

- 4.6. a) Por exemplo, $[1, 4]$.
 b) Por exemplo, $[-4, 0]$.

- 5.2. Tratando-se de uma função do tipo $y = ax^2$ com $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Página 182

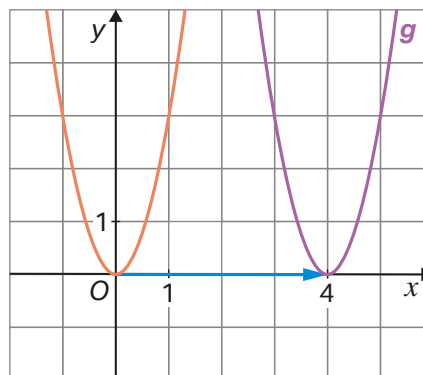
	$y = x^2$	$y = -x^2$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$] -\infty, 0]$
Zeros	0	0
Sentido da concavidade da parábola	Concavidade voltada para cima	Concavidade voltada para baixo
Coordenadas do vértice da parábola	(0, 0)	(0, 0)
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Monotonia	Estritamente crescente $[0, +\infty[$ Estritamente decrescente $] -\infty, 0]$	Estritamente crescente $] -\infty, 0]$ Estritamente decrescente $[0, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto: 0	Máximo absoluto: 0
Equação do eixo de simetria da parábola	$x = 0$	$x = 0$

Página 184

35. A – III; B – IV; C – II; D – I

Página 185

1.1.



1.2.

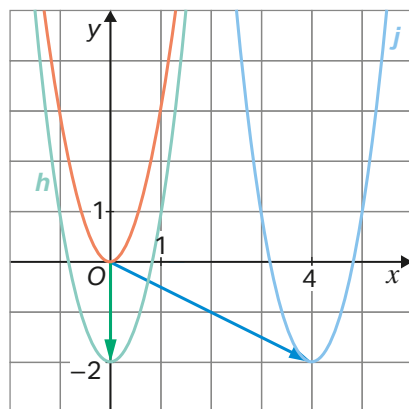
$\mathbb{R}$
$[0, +\infty[$
4
Concavidade voltada para cima
Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
Estritamente crescente $[4, +\infty[$ Estritamente decrescente $] -\infty, 4]$
Mínimo absoluto: 0

1.3. $V(4, 0)$; $x = 4$

1.4. $g(x) = 3(x - 4)^2$

Página 186

2.1.



2.2. a) $V_j(4, -2)$; $V_h(0, -2)$

b) $x = 0$; $x = 4$

2.3. $h(x) = 3x^2 - 2$; $j(x) = 3(x - 4)^2 - 2$

Página 190

36.1. $f(x) = 2(x - 1)^2$

36.2. $g(x) = x^2 + 2$

36.3. $h(x) = 2(x - 3)^2 - 2$

36.4. $h(x) = -(x - 1)^2 + 6$

36.5. $p(x) = (x - 1)^2 + 2$

36.6. $q(x) = -(x + 1)^2 + 4$

37.1. Zero: 1

Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

37.2. Zeros: $\{-2, 2\}$

Negativa: $] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty[$

Positiva: $] -2, 2[$

37.3. Zeros: $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

Positiva: $] -\infty, -\sqrt{5}[\cup] \sqrt{5}, +\infty[$

Negativa: $] -\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

37.4. Zeros: 1 e 5

Positiva: $] -\infty, 1[\cup] 5, +\infty[$

Negativa: $] 1, 5[$

37.5. Zeros: 1 e $-\frac{1}{3}$

Positiva: $] -\infty, -\frac{1}{3}[\cup] 1, +\infty[$

Negativa: $] -\frac{1}{3}, 1[$

37.6. Zeros: $-\sqrt[4]{2} + 1$ e $\sqrt[4]{2} + 1$

Negativa: $] -\infty, -\sqrt[4]{2} + 1[\cup] \sqrt[4]{2} + 1, +\infty[$

Positiva: $] -\sqrt[4]{2} + 1, \sqrt[4]{2} + 1[$

Página 191

38.1. $j(x) = -2(x + 3)^2 + 2$

38.2. $j(x) = \frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 3$

39.1. $A(0, -3)$; $B(-\sqrt{3} + 2; 0)$; $C(\sqrt{3} + 2; 0)$

39.2. Positiva: $] -\sqrt{3} + 2; \sqrt{3} + 2[$

Negativa: $] -\infty; -\sqrt{3} + 2[\cup] \sqrt{3} + 2; +\infty[$

39.3. $V(2, 9)$

39.4.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$

40.1.

	g	f	h
Contradomínio	$[-2, +\infty[$	$] -\infty, 9]$	$] -\infty, 9]$
Extremo absoluto	Mínimo absoluto: -2	Máximo absoluto: 9	Máximo absoluto: 9

40.2.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

40.3.

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+	0	-

40.4. $g(x) = 2(x + 3)^2 - 2$; $f(x) = -x^2 + 9$;

$h(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

Página 193

41.1. $f(x) = (x + 2)^2 - 9$; $g(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$;

$j(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$;

$m(x) = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$.

41.2.

	f	g	j	m
Vértice	$(-2, -9)$	$(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{27}{4})$
Eixo de simetria	$x = -2$	$x = \frac{3}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$

$$41.3. [-9, +\infty[;]-\infty, \frac{9}{2}];$$

$$[-\infty, \frac{25}{4}];]-\infty, \frac{27}{4}].$$

$$41.4. \text{Mínimo absoluto: } -9; \text{máximo absoluto: } \frac{9}{2};$$

$$\text{máximo absoluto: } \frac{25}{4}; \text{máximo absoluto: } \frac{27}{4}.$$

41.5.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$j(x)$	$\nearrow$	$\frac{25}{4}$	$\searrow$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m(x)$	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$

$$42.1. V(0, -10); x=0; [-10, +\infty[.$$

$$42.2. V(5, 25); x=5;]-\infty, 25].$$

$$42.3. V(1, 4); x=1;]-\infty, 4].$$

$$42.4. V(0, -10); x=0; [-10, +\infty[.$$

$$42.5. V(\frac{9}{4}, -\frac{121}{8}); x=\frac{9}{4}; [-\frac{121}{8}, +\infty[.$$

$$42.6. V(\frac{3}{2}, \frac{121}{4}); x=\frac{3}{2};]-\infty, \frac{121}{4}].$$

Página 194

$$43.1. V(-1, 32)$$

$$43.2. \text{a) } \mathbb{R};]-\infty, 32]$$

$$\text{b) } x = -1$$

$$43.3. A(0, 30); B(-5, 0); C(3, 0).$$

$$43.4. 120 \text{ u.a.}$$

Página 195

$$44.1. \text{Negativa: }]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]\frac{3}{4}, +\infty[$$

$$\text{Positiva: }]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$$

$$44.2. \text{Positiva: }]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]0, +\infty[$$

$$\text{Negativa: }]-\frac{3}{2}, 0[$$

$$44.3. \text{Positiva: }]-15, 10[$$

$$\text{Negativa: }]-\infty, -15[\cup]10, +\infty[$$

$$44.4. \text{Positiva: }]-\infty, -10[\cup]-2, +\infty[$$

$$\text{Negativa: }]-10, -2[$$

$$44.5. \text{Positiva: }]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{5}, +\infty[$$

$$\text{Negativa: }]-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}[$$

$$44.6. \text{Positiva: }]-5, -\frac{3}{2}[$$

$$\text{Negativa: }]-\infty, -5[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[$$

Página 196

$$45.1.]0, \frac{1}{2}[$$

$$45.2.]-\infty, 0[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$45.3. [2 - 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3}]$$

$$45.4. \emptyset$$

$$45.5. \mathbb{R}$$

$$45.6.]\frac{-10 - \sqrt{142}}{2}, \frac{-10 + \sqrt{142}}{2}[$$

$$46.1. B(20, 0); C(0, 5).$$

$$46.2. h(x) = -\frac{1}{12}\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + \frac{529}{48}$$

$$46.3. 57,5 \text{ u.a.}$$

Página 198

$$47.1. \begin{cases} x+3 & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ -x+6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$47.2. -3 \text{ e } 6.$$

$$48.1. \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ (x-1)^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$48.2. \text{a) } \sqrt{3} + 1$$

$$\text{b) }]-\infty, -1[\cup \{1\}$$

Página 199

$$49.1. \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$49.2. \begin{cases} 5-x & \text{se } x \leq 5 \\ -5+x & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$49.3. \begin{cases} x+5 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-1 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

$$49.4. \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 1 \\ -x-3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

49.5. $\begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+5 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

49.6. $\begin{cases} 2+x & \text{se } x \leq 1 \\ 4-x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

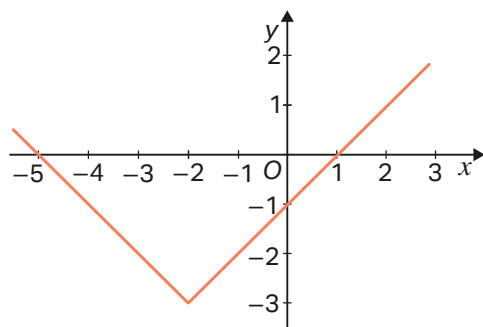
Página 201

50.1. $g(x) = |2x-4|+2$; $j(x) = |2x+6|-1$;
 $h(x) = -|2x|+3$

50.2.

f	g	h	j
$[0, +\infty[$	$[2, +\infty[$	$]-\infty, 3]$	$[-1, +\infty[$
Mínimo absoluto: 0	Mínimo absoluto: 2	Máximo absoluto: 3	Mínimo absoluto: -1
$x=0$	$x=2$	$x=0$	$x=-3$

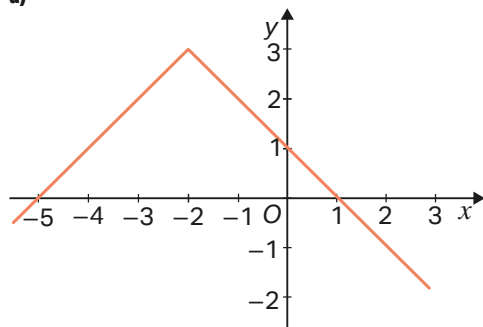
51.1.



51.2. a) $[-3, +\infty[$

b) $x = -2$

51.3. a)

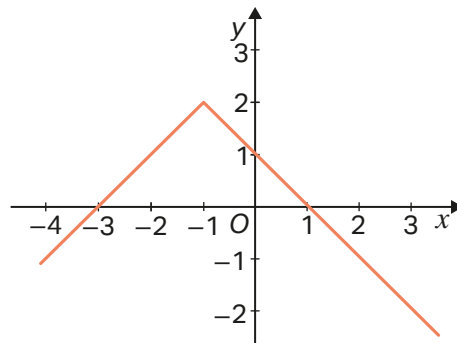


b) $]-\infty, 3]$; $x = -2$

Página 202

52.1. $\begin{cases} -x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ x+3 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

52.2.



52.3. $]-\infty, 2]$

52.4. $(0, 1)$

Página 203

53.1. $\{1, 3\}$

53.2. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

53.3. $\{-8, 2\}$

53.4. $\{0, 6\}$

53.5. $\{-6, 10\}$

53.6. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right\}$

53.7. $\emptyset$

53.8. $\{1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}; 1\}$

54.1. -4

54.2. $\{8, -2\}$

54.3. $(15, 7)$ e $(-9, 7)$.

55.1. 2

55.2. $(0, 4)$ e $(-2, 4)$.

55.3. Eixo das abscissas: $(-4, 0)$ e $(2, 0)$. Eixo das ordenadas: $(0, 4)$.

Página 204

56.1. $]-8, -2[$

56.2. $]-\infty, -4[\cup]8, +\infty[$

56.3. $\emptyset$

56.4. $]-\infty, -\frac{8}{5}] \cup \left[\frac{12}{5}, +\infty\right[$

56.5. $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right[$

56.6. $[0, 6]$

56.7. $\emptyset$

56.8. $]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$

57.1. 32 u.a.

57.2. $[0, 4]$

Página 205

- 1.1. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$
 1.2. $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right); D' = \left[-\frac{49}{4}, +\infty\right[$.
 1.3. a) -1 e 3 .
 b) Positiva: $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
 Negativa: $] -1, 3[$
 c) $[-4, +\infty[$
 d) $x = 1$
 1.4. a) $]-\infty, -5] \cup [2, +\infty[$
 b) $] -1, 3[$
 c) $]-\infty, -1[$

2.1. $h(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$

2.2. $] -\infty, \frac{49}{4}]$

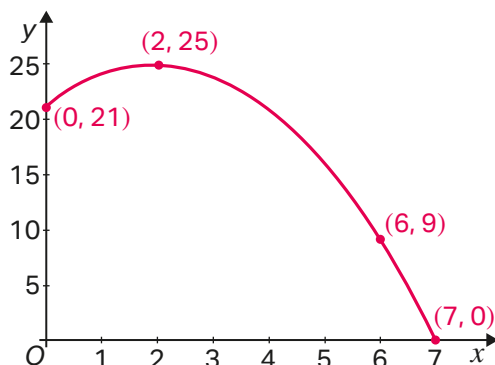
2.3.

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$	$+\infty$
$m(x)$	+	0	-	0	+

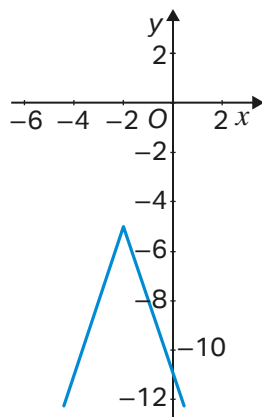
- 3.1. $V(1, 11)$
 3.2. $\mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt{11}; 1 + \sqrt{11}\}$
 3.3. $]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$

Página 206

- 4.1. $A(0, 6); B\left(\frac{5}{2}, -\frac{27}{8}\right); C(3, -3)$
 4.2. $p(x) = -3x + 6$
 4.3. $\frac{3}{2}(x^2 - 5x + 4) \geq 0 \wedge -3x + 6 \leq 0$
 5.1. 21 metros
 5.2. 7 segundos
 5.3. 25 metros
 5.4. 6 segundos
 5.5.



6.1. $m(x) = \begin{cases} -3x - 11 & \text{se } x \geq -2 \\ 3x + 1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$



- 6.2. Interseção com o eixo das ordenadas $(0, -11)$. Não interseção com o eixo das abscissas.
 6.3. a) $(-3, -8)$
 b) $(-3, -8)$ e $(-1, -8)$.
 6.4. a) $\emptyset$
 b) $\mathbb{R}$

Página 207

- 7.1. $q(x) = -2|x - 1| + 3$
 7.2. $\begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$
 7.3. a) $[1, 3]$
 b) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
 7.4. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ e $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
 8.1. a) 7
 b) 15
 c) 3
 8.2. a) $]-\infty, \frac{1}{3}[\cup [1, +\infty[$
 b) $]0, 1[$
 8.3. $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$
 9.1. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$
 9.2. $\begin{cases} -x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$
 9.3. $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3} + 1); (\sqrt{6} - 1; 4 - \sqrt{6})$

Página 208

1. (D)
 2. (D)
 3.1. (D) 3.2. (A) 3.3. (D)

4. (C)

Página 209

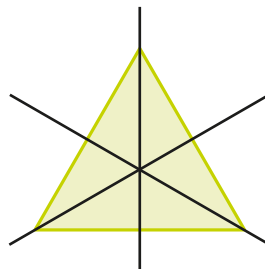
- 5.1. a) $D = [-4, 0] \cup [2, 4]$; $D' = [-6, 8]$
 b) -2 e 2 .
 c) Por exemplo, $]-4, -2[$.
 d) Máximo absoluto: 8 ; mínimo absoluto: -6 .
- 6.1. $]-\infty, 2]$
- 6.2. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x+5 & \text{se } x < 1 \end{cases}$
- 6.3. a) $\{2\}$
 b) $\mathbb{R}$
 c) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$
- 6.4. Eixo Oy : $(0, 5)$; não intersesta o eixo Ox .
- 7.1. $h(x) = -5x + 10$
- 7.2. $\left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$
- 7.3. $12, 25$ u.a.
8. $[-4, 1]$

Página 212

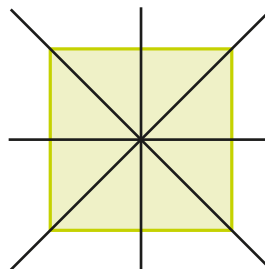
- 1.1. $\in$
 1.2. $\notin$
 1.3. $\in$
 1.4. $\notin$
 1.5. $\in$
 1.6. $\in$
 1.7. $\in$
 1.8. $\in$
 1.9. $\notin$
 1.10. $\notin$
- 2.1. Propriedade associativa da adição.
 2.2. Propriedade da existência de elemento simétrico.
 2.3. Propriedade associativa da multiplicação.
 2.4. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
 2.5. Propriedade da existência de elemento inverso.
 2.6. Propriedade comutativa da adição.
 2.7. Propriedade da existência de elemento neutro da multiplicação.
 2.8. Propriedade da existência de elemento absorvente da multiplicação.
 2.9. Propriedade da existência de elemento neutro da adição.

Página 213

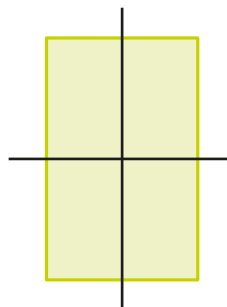
3.1.



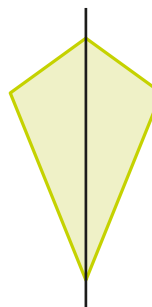
3.2.



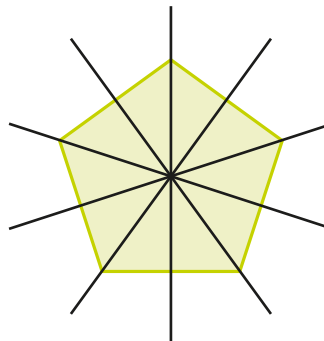
3.3.



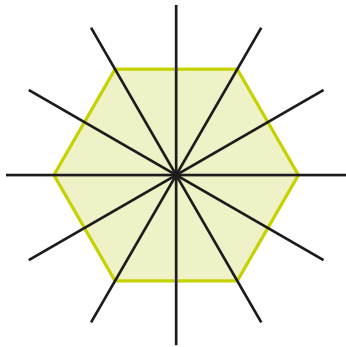
3.4.



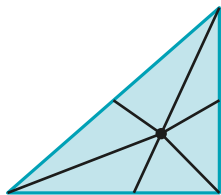
3.5.



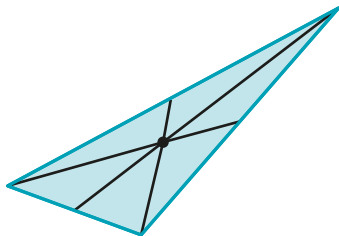
3.6.



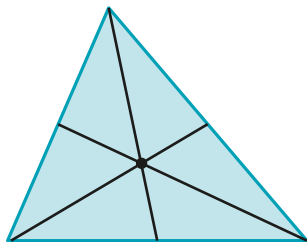
4.1.



4.2.

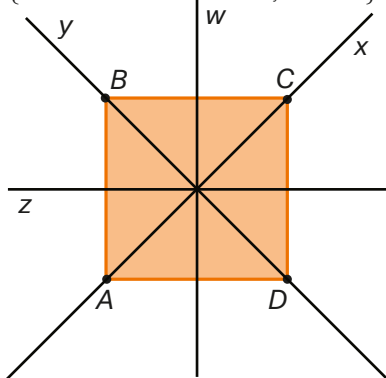


4.3.



Página 221

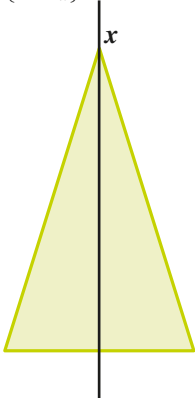
3.1. $\{e, R_{90^\circ}, R_{180^\circ}, R_{270^\circ}, R_x, R_y, R_w, R_z\}$



3.2.

$\circ$	e	R_{90°	R_{180°	R_{270°	R_z	R_w	R_y	R_x
e	e	R_{90°	R_{180°	R_{270°	R_z	R_w	R_y	R_x
R_{90°	R_{90°	R_{180°	R_{270°	e	R_x	R_y	R_z	R_w
R_{180°	R_{180°	R_{270°	e	R_{90°	R_w	R_z	R_x	R_y
R_{270°	R_{270°	e	R_{90°	R_{180°	R_y	R_x	R_w	R_z
R_z	R_z	R_y	R_w	R_x	e	R_{180°	R_{90°	e
R_w	R_w	R_x	R_z	R_y	R_{180°	e	R_{270°	R_{90°
R_y	R_y	R_w	R_x	R_z	R_{270°	R_{90°	e	R_{180°
R_x	R_x	R_z	R_y	R_w	R_{90°	R_{270°	R_{180°	R_{90°

4.1. $\{e, R_x\}$



4.2.

$\circ$	e	R_x
e	e	R_x
R_x	R_x	e

4.3. Sim

Página 222

1.1. Sim

1.2. Não

1.3. Não

1.4. Não

1.5. Sim

1.6. Sim

2.1. Não

2.2. Não

4.1. É comutativa.

4.2. É associativa.

4.3. O elemento neutro é $(1, 0)$.

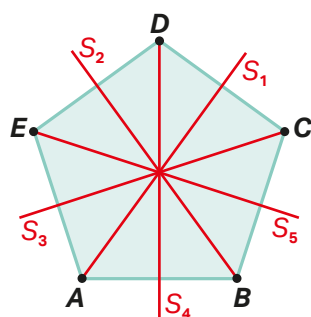
4.4. O elemento simétrico de (a, b) é $(\frac{1}{a}, -b)$.

5.1. Não, pois a operação não é associativa.

- 5.2. Não, pois a operação não é fechada.
 5.3. Não, porque * não admite elemento neutro.
 5.4. Não, porque * não admite elemento neutro.
 5.5. Sim

Página 223

- 8.1. Não, pois não é homomorfismo.
 8.2. Não, pois não é sobrejetiva.
 8.3. Não, pois não é injetiva.
 9.2. Sim
 10.1. $\{e, R_{72^\circ}, R_{144^\circ}, R_{216^\circ}, R_{288^\circ}, R_{S_1}, R_{S_2}, R_{S_3}, R_{S_4}, R_{S_5}\}$,
 com e identidade e S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 eixos de
 simetria do pentágono regular.



10.2.

$\circ$	e	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	R_{S_1}	R_{S_2}	R_{S_3}	R_{S_4}	R_{S_5}
e	e	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	R_{S_1}	R_{S_2}	R_{S_3}	R_{S_4}	R_{S_5}
R_{72°	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	e	R_{S_4}	R_{S_5}	R_{S_1}	R_{S_2}	R_{S_3}
R_{144°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	e	R_{72°	R_{S_2}	R_{S_3}	R_{S_4}	R_{S_5}	R_{S_1}
R_{216°	R_{216°	R_{288°	e	R_{72°	R_{144°	R_{S_5}	R_{S_1}	R_{S_2}	R_{S_3}	R_{S_4}
R_{288°	R_{288°	e	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{S_3}	R_{S_4}	R_{S_5}	R_{S_1}	R_{S_2}
R_{S_1}	R_{S_1}	R_{S_3}	R_{S_5}	R_{S_2}	R_{S_4}	e	R_{216°	R_{72°	R_{288°	R_{144°
R_{S_2}	R_{S_2}	R_{S_4}	R_{S_1}	R_{S_3}	R_{S_5}	R_{144°	e	R_{216°	R_{72°	R_{288°
R_{S_3}	R_{S_3}	R_{S_5}	R_{S_2}	R_{S_4}	R_{S_1}	R_{288°	R_{144°	e	R_{216°	R_{72°
R_{S_4}	R_{S_4}	R_{S_1}	R_{S_3}	R_{S_5}	R_{S_2}	R_{72°	R_{288°	R_{144°	e	R_{216°
R_{S_5}	R_{S_5}	R_{S_2}	R_{S_4}	R_{S_1}	R_{S_3}	R_{216°	R_{72°	R_{288°	R_{144°	e

- 10.4. Não. Nota que as reflexões e as rotações não comutam entre si.

Página 224

1. (D)
 2. (B)
 3. (C)
 4. (B)
 5. (D)

Página 225

7. (1, 1)
 8.1. Não é associativa.
 8.2. Não
 10.2. Não, não há elemento neutro.
 10.4. Não

Matemática 10.º ano

Criação intelectual
Elisabete Figueiredo

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
© Pedro Moita
© Stock.Adobe.com
Porto Editora

Edição
2025

Este manual segue
o programa experimental
da disciplina, publicado pelo
Ministério da Educação.

Cabo Verde



Brasão



Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!