Matemática

Aplicada às Ciências Sociais e Humanas

10.º ano

10

Ministério da Educação

Matemática

Aplicada às Ciências Sociais e Humanas

10.º ano

10

Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado pela Universidade de Cabo Verde.

Ministério da Educação

Explora o teu manual digital

https://escolavirtual.cv

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

DISPONÍVEL NO Google Play

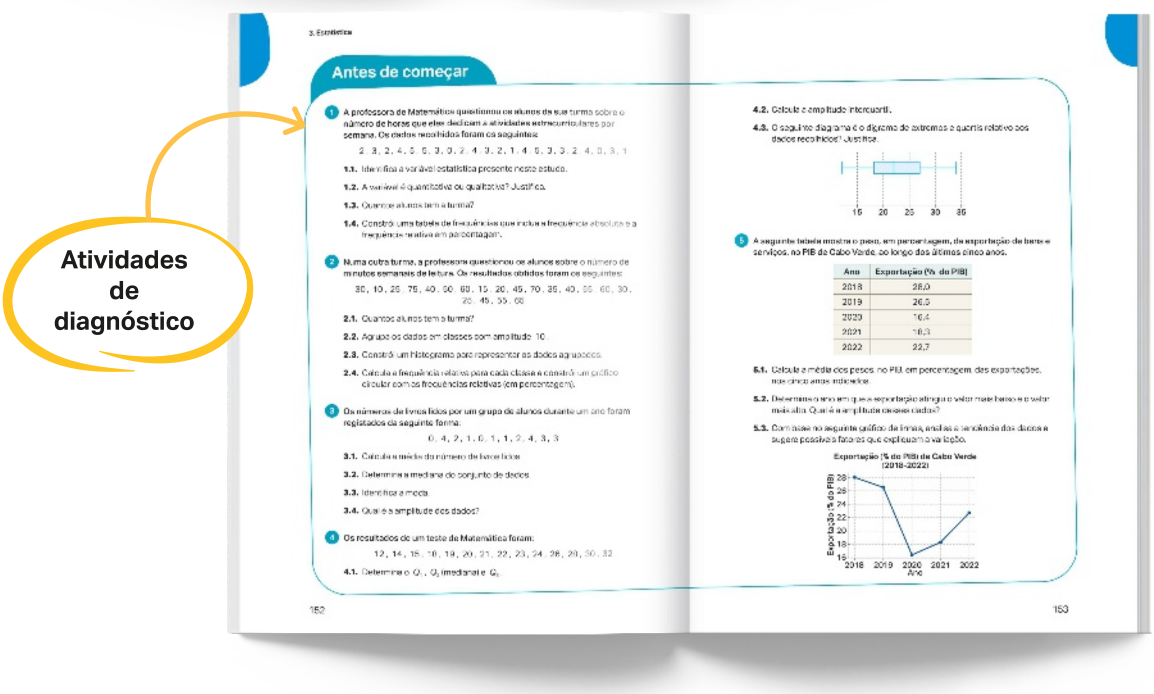
Descarregar na App Store

Conhece o teu manual

Este manual ajuda-te neste percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em quatro temas, de acordo com o plano curricular do ensino secundário. Os temas (Lógica e Teoria de Conjuntos, Métodos de Apoio à Decisão, Modulação Matemática e Estatística) dividem-se, por sua vez, em subtemas.

Cada tema e subtema é composto por…

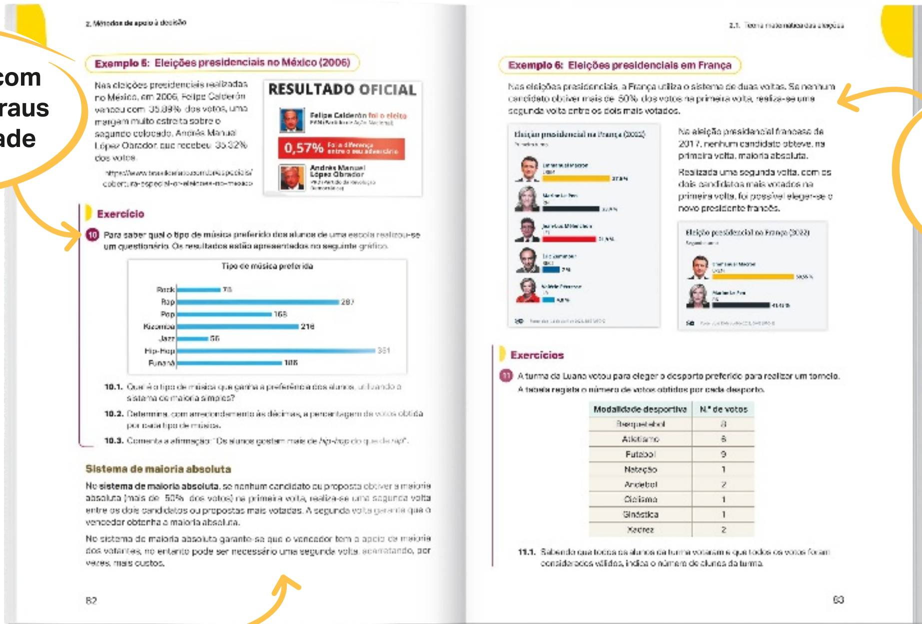
Separador



Desenvolvimento de conteúdos

Exercícios com diferentes graus de dificuldade

Exemplos de exercícios resolvidos



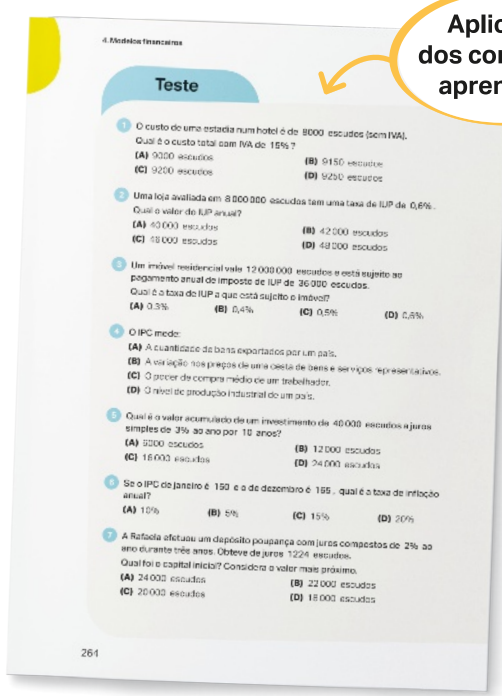
Explicação dos conteúdos

Ao longo do teu manual…

Avaliações

Imagens ilustrativas

Aplicação dos conteúdos aprendidos



Índice


1

Lógica e teoria de conjuntos

O que vou aprender neste tema

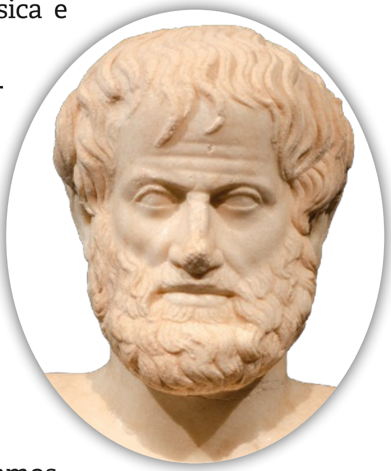
A lógica bivalente, ou lógica clássica, é fundamental para a compreensão e a clarificação de conceitos matemáticos. Como poderás verificar neste capítulo, a lógica matemática assenta no princípio de que qualquer proposição é verdadeira ou é falsa, o que simplifica a análise de proposições e argumentos. Esta dicotomia clara é essencial para a construção de raciocínios precisos e coerentes.

Vais verificar que na, lógica bivalente, utilizamos operadores como E, OU, NÃO e IMPLICA para formar afirmações mais complexas a partir de outras simples. Esses operadores ajudam a estabelecer relações lógicas rigorosas entre diferentes proposições, permitindo construir e verificar argumentos com clareza e precisão.

Também a construção e a análise de tabelas de verdade são ferramentas essenciais na lógica matemática. As tabelas de verdade permitem-nos determinar, de maneira sistemática, os valores de verdade das proposições compostas, facilitando a visualização das interações entre diferentes operadores lógicos. Esse exercício é vital, não apenas para a matemática, mas também para desenvolver habilidades de raciocínio lógico aplicáveis em diversas áreas do conhecimento, como ciência da computação, filosofia, engenharia, física e ciências sociais.

A história da lógica matemática é uma narrativa valiosa que remonta à Antiguidade e que se desenvolve até aos tempos atuais.

A lógica, como disciplina, teve as suas primeiras bases estabelecidas na Grécia Antiga, com Aristóteles (384-322 a. C.). Aristóteles é frequentemente considerado o "pai da lógica" devido à forma como sistematizou o raciocínio dedutivo, particularmente através do silogismo, uma forma de argumento que estabelece conclusões a partir de duas premissas.

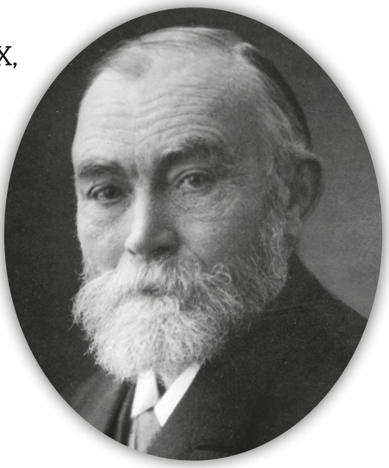


Aristóteles

August De Morgan

Avançando para o século XIX, encontramos August De Morgan (1806-1871), um matemático e lógico britânico, que foi fundamental para a formalização da lógica. De Morgan introduziu leis que, atualmente, são conhecidas pelo seu nome, as Leis de De Morgan, e que descrevem a interação entre os operadores lógicos "e" e "ou". O seu trabalho foi crucial para a evolução da lógica formal e teve um impacto duradouro no desenvolvimento da álgebra booleana.

No final do século XIX e início do século XX, Gottlob Frege (1848-1925), um filósofo e lógico alemão, revolucionou a lógica ao introduzir a lógica de predicados, que ampliou significativamente o alcance da lógica formal. Frege desenvolveu um sistema de representação simbólica rigoroso para representar proposições e as suas relações, o que permitiu uma análise mais profunda e precisa dos argumentos lógicos. O seu trabalho estabeleceu as bases para a lógica moderna e influenciou profundamente figuras como Bertrand Russell e Ludwig Wittgenstein.



Gottlob Frege

O que vou aprender neste tema

1.1. Proposições

- Designar por "proposição" toda a expressão p suscetível de ser "verdadeira" ou "falsa" e designar estes atributos por "valores lógicos".
- Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por "princípio da não contradição".
- Definir as operações lógicas: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência.
- Operar com proposições lógicas.
- Provar propriedades das operações com proposições.
- Simplificar expressões que compreendem operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.
- Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.

1.2. Condições e conjuntos

- Designar por "expressão proposicional" ou por "condição" uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a, se obtém uma proposição $p(a)$.
- Identificar expressões proposicionais ou condições.
- Conhecer e aplicar o quantificador universal ($\forall$).
- Conhecer e aplicar o quantificador existencial ($\exists$).
- Classificar condições num dado universo como: universal, possível ou impossível.
- Conhecer e aplicar as segundas leis de De Morgan.
- Definir conjuntos em extensão e compreensão.
- Definir e identificar conjuntos iguais.
- Definir reunião e interseção de conjuntos, inclusão de conjuntos, diferença de conjuntos e conjunto complementar.
- Resolver problemas que envolvem operações sobre condições e sobre conjuntos.

1 Lógica e teoria de conjuntos

1.1. Proposições

Designações e proposições

Na matemática, a linguagem utilizada compreende designações e proposições. As designações, ou termos, servem para indicar determinados objetos matemáticos e não matemáticos. Por exemplo, figuras geométricas, pontos, números, funções ou países e cidades.

Já as proposições consistem em afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas.

Designação (ou termo)

Uma designação é uma expressão com a função de nomear ou designar alguma coisa.

Exemplo 1

Expressões utilizadas no contexto da matemática que são designações:

a) triângulo **b)** contradomínio **c)** 4

d) O número real positivo cuja metade é 2.

e) O número real positivo cujo quadrado é 100.

Considerando as expressões apresentadas no exemplo 1, os termos **c)** e **d)** designam o mesmo objeto matemático.

Quando duas expressões a e b designam o mesmo objeto dizem-se **sinónimas** e escrevemos $\boldsymbol{a = b}$.

Caso as duas expressões não designem o mesmo objeto, escrevemos $\boldsymbol{a \neq b}$.

Exercício

1 Das seguintes expressões, associa as que correspondem a designações sinónimas.

(A) $(-3)^2$

(B) Número real positivo cujo quadrado é 81.

(C) Capital de Espanha.

(D) $\sqrt{81}$

(E) Madrid

(F) 3^2

Manual Interativo

Exercício
Identificar proposições

Exemplo 2

Também podemos considerar expressões sinónimas que não sejam matemáticas:

Lua = Satélite natural do planeta Terra

Proposição
Uma proposição é uma expressão que traduz uma afirmação e que pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

Na lógica é comum utilizarem-se letras minúsculas para designar proposições.

Exemplo 3

Proposições verdadeiras

$p: \ 2+7=9$

$q: \ \sqrt{\pi}<10$

r: 144 é um quadrado perfeito.

s: Brasília é a capital do Brasil.

Exemplo 4

Proposições falsas

$p: \ 2+6=9$

$q: \ \sqrt{25}>4$

r: O Rio de Janeiro é a capital do Brasil.

Atenção:

No dia a dia, utilizamos afirmações que, por ambiguidade, indefinição de termos ou por estarem incompletas, podem ser classificadas em verdadeiras e falsas, inconclusivas, parcialmente verdadeiras ou duvidosas. Essas afirmações não são proposições.

Manual Interativo

Vídeo
Valor lógico de uma proposição e princípio de não contradição

Exercício

2 Para cada uma das seguintes afirmações, indica, justificando, se são ou não proposições.

2.1. $7 \neq 9 - 2$

2.2. Todos os alunos do 10.º ano de uma escola nasceram em Cabo Verde.

2.3. $3 \in]0 ;\ 3]$

2.4. Que horas são?

2.5. A capital de Cabo Verde é a cidade da Praia.

2.6. A djagacida é o prato tradicional de Cabo Verde mais conhecido no estrangeiro.

1.1.1. Valor lógico de uma proposição

Valor lógico de uma proposição

Se uma proposição é verdadeira, diz-se que o valor lógico da proposição é **verdade** (V ou 1).
Se uma proposição é falsa, diz-se que o valor lógico da proposição é **falso** ou falsidade (F ou 0).

As proposições do exemplo 3 têm valor lógico V.
As proposições do exemplo 4 têm valor lógico F.

Exercícios

3 Indica o valor lógico das seguintes proposições:

3.1. O número 51 é um número primo.

3.2. 2 é o único número primo par.

3.3. $0{,}33 \neq \frac{1}{3}$

3.4. $0{,}1 > \frac{1}{11}$

3.5. $0{,}66 = \frac{2}{3}$

4 Apresenta quatro exemplos de proposições com valor lógico verdadeiro e quatro exemplos de proposições com valor lógico falso.

1.1.2. Princípio da não contradição e do terceiro excluído

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do terceiro excluído

Uma proposição ou tem valor lógico verdade ou tem valor lógico falso, não pode assumir outro valor lógico.

Manual Interativo

Vídeo
Princípio do terceiro excluído

Uma proposição tem um, e um só, dos valores lógicos (verdade ou falsidade).

O universo dos valores lógicos representa-se por L.

Sendo $L = \{V, F\}$ ou $L = \{0, 1\}$.

Uma vez que esta lógica considera apenas dois valores lógicos, designa-se por **lógica bivalente**.

1.1.3. Operações sobre proposições e suas propriedades

Quando as proposições não podem ser decompostas em proposições mais simples, designam-se por **proposições elementares.**

As proposições "2 é um número par", "Cabo Verde é um país membro da CPLP" ou "O carro é branco" são proposições elementares, que assumem um valor lógico.

Quando é possível estabelecer-se elementos de ligação entre proposições podemos obter **proposições compostas.**

As proposições "2 é um número par" e "2 é um número primo" podem constituir-se numa nova proposição: "2 é um número par e 2 é um número primo".

O valor lógico da nova proposição composta é determinado pelos valores lógicos das proposições elementares que a constituem, de acordo com as operações sobre proposições.

Equivalência de preposições

Dadas duas proposições p e q, a proposição $p \Leftrightarrow q$ é designada por equivalência entre p e q, sendo verdadeira somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico.

Manual Interativo

Atividade
Operações sobre proposições: equivalência

O valor lógico da nova proposição composta será determinado de acordo com os valores lógicos das proposições elementares que a originaram, conforme a tabela de verdade.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dadas duas proposições p e q, a proposição "p *é equivalente a* q" é verdadeira se e só se p e q *tiverem o mesmo valor lógico.*

"p *é equivalente a* q" pode representar-se por $p \Leftrightarrow q$.

Exemplo 5

Considera as seguintes proposições:

p: $2+7=9$

q: $\sqrt{99}>10$

r: $3 \neq \pi$

s: $\sqrt{16+25}=\sqrt{16}+\sqrt{25}$

Proposições	Valor lógico
p	V
q	F
r	V
s	F

Como as proposições p e r têm o mesmo valor lógico (verdade), dizem-se equivalentes: $p \Leftrightarrow r$. Também se diz que $q \Leftrightarrow s$, uma vez que q e s são as duas proposições falsas.

Exemplo 6

Considera as seguintes proposições:

p: $2+7=9$

q: $\sqrt{99}>10$

r: $3 \neq \pi$

s: $\sqrt{16+25}=\sqrt{16}+\sqrt{25}$

Os valores lógicos das proposições $p \Leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow r$, $p \Leftrightarrow s$, $q \Leftrightarrow r$, $q \Leftrightarrow s$ e $r \Leftrightarrow s$ são:

p	q	r	s	$p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow r$	$p \Leftrightarrow s$	$q \Leftrightarrow r$	$q \Leftrightarrow s$	$r \Leftrightarrow s$
V	F	V	F	F	V	F	F	V	F

Exercício

5 Considera as seguintes proposições:

a: $\pi + \pi = 2\pi$

b: $(-3)^3 = 27$

c: $\sqrt{25} = \dfrac{125}{25}$

d: $\sqrt{(2+7)} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$

e: $\sqrt{(2 \times 5)} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$

f: $2{,}4 \times 10^{-3} = 0{,}024$

Indica o valor lógico da proposição.

5.1. $a \Leftrightarrow b$

5.2. $b \Leftrightarrow b$

5.3. $c \Leftrightarrow d$

5.4. $a \Leftrightarrow e$

5.5. $b \Leftrightarrow e$

5.6. $f \Leftrightarrow d$

5.7. $d \Leftrightarrow f$

5.8. $e \Leftrightarrow b$

Manual Interativo

Vídeo
Operações sobre proposições: negação e lei da dupla negação

Negação de proposições

Quando pretendemos negar a veracidade de uma proposição, utilizamos, em linguagem comum, o advérbio "**não**".

Se sabemos que a Luana nasceu na ilha do Sal, podemos dizer: "A Luana não nasceu na ilha do Fogo".

Na lógica matemática também podemos utilizar a negação.

Negação

Dada uma proposição p, a sua negação, ***não*** p, designa-se por ***negação de*** p.
Representamos a ***negação de*** p por $\sim p$.

Se p é verdadeira, então $\sim p$ é falsa.
Se p é falsa, então $\sim p$ é verdadeira.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Exemplo 7

Para negarmos a proposição $4 > 3{,}9$, escrevemos $\sim(4 > 3{,}9)$.

Então, a negação de "4 é maior do que 3,9" é "não é verdade que 4 é maior do que 3,9" ou "4 não é maior do que 3,9".

Exercício

6 Escreve a negação de cada uma das seguintes proposições e indica o valor lógico obtido.

6.1. $3 \in \mathbb{N}$

6.2. Santiago é a maior ilha de Cabo Verde.

6.3. 135 é um quadrado perfeito.

6.4. O avião é o único meio de transporte para visitar outro país.

6.5. $\frac{156}{3}$ é divisível por 3.

6.6. Todos os múltiplos de 5 são ímpares.

Dupla negação

Afirmar que "não é verdade que a Luana não nasceu em Cabo Verde" é equivalente a afirmar "A Luana nasceu em Cabo Verde".

Se considerarmos a proposição $\boldsymbol{p}$: "A Luana nasceu em Cabo Verde", temos:
$\sim(\sim \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$

Dada uma proposição $\boldsymbol{p}$, verifica-se $\sim(\sim \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$.

Se $\boldsymbol{p}$ é verdadeira, então $\sim(\sim \boldsymbol{p})$ também é verdadeira.

Se $\boldsymbol{p}$ é falsa, então $\sim(\sim \boldsymbol{p})$ também é falsa.

$\boldsymbol{p}$	$\sim \boldsymbol{p}$	$\sim(\sim \boldsymbol{p})$
V	F	V
F	V	F

Exercício

7 Considera as seguintes proposições:

r: A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.

s: Timor-Leste fica no continente asiático.

t: $-5 \in [-5\,;\,+\infty[$

Escreve em linguagem corrente e indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

7.1. $\sim r$

7.2. $\sim s$

7.3. $\sim t$

7.4. $\sim(\sim s)$

7.5. $\sim(\sim t)$

7.6. $\sim(\sim(\sim t))$

Conjunção

A **conjunção** é uma operação lógica entre proposições que está associada à palavra "**e**" (conetivo de conjunção), que indica junção das proposições.
Dadas duas proposições p e q, $\boldsymbol{p \wedge q}$ é uma proposição designada por **conjunção** $\boldsymbol{p}$ **e** $\boldsymbol{q}$.

Manual Interativo

Vídeo
Operações sobre proposições: conjunção

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira se, e somente se, p e q forem proposições verdadeiras.

Pelo princípio do terceiro excluído, se p é uma proposição falsa ou q é uma proposição falsa, então $p \wedge q$ é uma proposição falsa.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Exemplo 8

"6 e 10 são números pares" é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção das proposições verdadeiras "6 é um número par" e "10 é um número par".

Exemplo 9

"6 e 11 são números pares" é uma proposição falsa, pois é a conjunção da proposição verdadeira "6 é um número par" e da proposição falsa "11 é um número par".

Exemplo 10

"5 e 11 são números pares" é uma proposição falsa, pois é a conjunção das proposições falsas "5 é um número par" e "11 é um número par".

Exercícios

8 Considera as seguintes proposições:

r: 4 é um divisor de 8.
s: 2 é um divisor de 8.
t: 3 é um divisor de 8.
u: 1 não é um divisor de 8.

Escreve simbolicamente cada uma das seguintes proposições, utilizando as letras r, s, t e u.

8.1. 4 e 2 são divisores de 8.

8.2. 4 é divisor de 8 e 3 não é divisor de 8.

8.3. 1, 2 e 4 são divisores de 8.

9 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V			
F	V			
V	F			
F	F			

Tarefa

1 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
V			
F			

A resolução da tarefa 1 permite-nos concluir que $\sim (p \wedge \sim p)$ é sempre uma proposição verdadeira, independentemente do valor lógico de p.

Esta conclusão justifica o princípio da não contradição.

Pelo princípio da não contradição uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa, então:

$\sim (p \wedge \sim q)$ é uma proposição sempre verdadeira.

Tarefa

2 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V		
F	V		
V	F		
F	F		

A resolução da tarefa 2 permite-nos concluir que $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

Propriedades da conjunção

Comutatividade da conjunção lógica

Sejam p e q duas proposições, então: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Tarefa

3 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

A resolução da tarefa 3 permite-nos concluir que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

Associatividade da conjunção lógica

Sejam p e q e r proposições, então: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Exercícios

10 Seja $a \wedge (b \wedge c)$ uma proposição de valor lógico falso. Sabendo que a e c são proposições verdadeiras, indica o valor lógico da proposição b.

11 Considera as seguintes proposições:

p: todos os números pares são múltiplos de 2.
q: todos os números primos são ímpares.
r: todos os números pares são compostos.
s: 7 é um número primo.

11.1. Indica o valor lógico de cada uma das proposições.

11.2. Escreve em linguagem corrente as proposições:

a) $\sim p$ **b)** $q \wedge s$ **c)** $\sim q \wedge \sim r$

11.3. Indica o valor lógico das seguintes proposições:

a) $p \wedge (q \wedge r)$ **b)** $(p \wedge q) \wedge (r \wedge \sim r)$ **c)** $\sim q \wedge \sim r$

Idempotência na conjunção

Seja p uma proposição, então:

$$p \wedge p \iff p$$

p	p	$p \wedge p$
V	V	V
F	F	F

Elemento neutro da conjunção (V)

Seja p uma proposição e V a representação de uma proposição verdadeira, então temos:

$$p \wedge V \iff V \wedge p \iff p$$

p	V	$p \wedge V$
V	V	V
F	V	F

Elemento absorvente da conjunção (F)

Seja p uma proposição e F a representação de uma proposição falsa, então temos:

$$p \wedge F \iff F \wedge p \iff F$$

p	F	$p \wedge F$
V	F	F
F	F	F

Exercício

12 **Seja p uma proposição de valor lógico falso. Determina o valor lógico da proposição q, sabendo que a proposição $q \wedge (\sim p)$ é falsa.**

Disjunção

A **disjunção** é uma operação lógica entre proposições que está associada à palavra "ou" (conetivo de disjunção), que indica opcional ou alternativa.

Dadas duas proposições p e q, $p \vee q$ é uma proposição designada por disjunção p ou q.
A proposição $p \vee q$ é falsa se, e somente se, as duas proposições p e q forem falsas.

Pelo princípio do terceiro excluído, conclui-se que a disjunção é verdadeira em caso contrário.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Exemplo 11

"6 é um número par ou 10 é um número par" é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção das proposições verdadeiras "6 é um número par" e "10 é um número par".

Exemplo 12

"6 é um número par ou 11 é um número par" é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção da proposição verdadeira "6 é um número par" e da proposição falsa "11 é um número par".

Exemplo 13

"5 é um número par ou 11 é um número par" é uma proposição falsa, pois é a disjunção das proposições falsas "5 é um número par" e "11 é um número par".

Exercício

13 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	q	$p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \vee \sim q$
V	V			
F	V			
V	F			
F	F			

Tarefa

4 Seja p uma proposição, V a representação de uma proposição verdadeira e F a representação de uma proposição falsa. Completa a seguinte tabela e conjetura hipóteses para a existência de idempotência, elemento neutro e elemento absorvente na disjunção.

p	V	F	$p \vee p$	$p \vee F$	$p \vee V$
V	V	F			
F	V	F			

Propriedades da disjunção

Idempotência na disjunção

Seja p uma proposição, então:

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Elemento neutro da disjunção (F)

Seja p uma proposição e F a representação de uma proposição falsa, então, temos:

$$p \vee F \Leftrightarrow F \vee p \Leftrightarrow p$$

Elemento absorvente da disjunção (V)

Seja p uma proposição e V a representação de uma proposição verdadeira, então, temos:

$$p \vee V \Leftrightarrow V \vee p \Leftrightarrow V$$

Exercício

14 Seja a uma proposição verdadeira e b uma proposição falsa, e c uma proposição com qualquer valor lógico. Mostra que $(a \wedge c) \vee b \Leftrightarrow c$.

Tarefa

5 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V		
F		

A resolução da tarefa 5 permite-nos concluir que $p \vee \sim p$ é sempre uma proposição verdadeira, independentemente do valor lógico de p. Ou seja, uma proposição é verdadeira ou a sua negação é verdadeira. Esta conclusão justifica o princípio do terceiro excluído.

Pelo princípio do terceiro excluído, uma proposição ou tem valor lógico verdade ou tem valor lógico falso, não pode assumir outro valor lógico. ($p \vee \sim p$ é sempre uma proposição verdadeira.)

Tarefa

6 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V		
F	V		
V	F		
F	F		

A resolução da tarefa 6 permite-nos concluir que $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.

Comutatividade da disjunção lógica

Sejam p e q duas proposições, então:

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Tarefa

7 Completa a seguinte tabela de verdade.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

A resolução da tarefa 7 permite-nos concluir que $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

Associatividade da conjunção lógica

Sejam p e q e r proposições, então:

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

Exercícios

15 Sabendo que a proposição $\sim p \vee q$ é falsa, indica o valor lógico das seguintes proposições:

15.1. p **15.2.** $p \vee q$ **15.3.** $p \vee \sim q$

16 Considera as seguintes proposições:

p: todos os números maiores do que zero são positivos.

q: $2 \neq 7$

r: $\sqrt{49} = \pm 7$

s: $\sqrt{2} \in]-\infty; 1{,}2]$

Indica o valor lógico das seguintes proposições:

16.1. $p \vee (q \vee r)$ **16.2.** $r \vee s$

16.3. $\sim q \vee p$ **16.4.** $(\sim r \vee \sim s) \wedge p$

17 Indica valores lógicos para as proposições a e b, de modo que se verifique $a \wedge b \Leftrightarrow a \vee b$ com valor lógico verdadeiro.

Tarefa

8 Completa a seguinte tabela e verifica se as proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são equivalentes.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

A realização da tarefa 8 permite-nos concluir que a conjunção é distributiva em relação à disjunção.

Propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção

Sejam p e q e r proposições, então: $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Manual Interativo

Atividade
Propriedades da conjunção e da disjunção

Tarefa

9 Completa a seguinte tabela e verifica se as proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são equivalentes.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

A realização da tarefa 9 permite-nos concluir que a disjunção é distributiva em relação à conjunção.

Propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção

Sejam p e q e r proposições, então: $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Implicação

A **implicação** é uma operação lógica entre proposições que permite obter proposições verdadeiras, mesmo que não exista causalidade entre um antecedente e um consequente.

Dadas duas proposições p e q, $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ é uma proposição designada por **implicação entre $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$**. Lê-se, em linguagem corrente, "se p, então q".
A proposição $p \Longrightarrow q$ é falsa se, e somente se, p for verdadeira e q for falsa.

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Exercícios

18 Sabendo que $a \Longrightarrow b$ é uma proposição falsa, indica o valor lógico das seguintes proposições:

18.1. $a \vee b$

18.2. $a \wedge b$

18.3. $\sim a \vee \sim b$

18.4. $b \Longrightarrow a$

18.5. $\sim a \Longrightarrow \sim b$

19 Considera as proposições:

$p: \sqrt{10} > \pi$

$q: 3^7 < 7^3$

$r: \frac{4}{5} > \frac{3}{2}$

$s: -\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$

Indica o valor lógico das seguintes proposições:

19.1. $p \Longrightarrow q$

19.2. $q \Longrightarrow p$

19.3. $\sim p \Longrightarrow s$

19.4. $(p \vee s) \Longrightarrow r$

19.5. $(r \Longrightarrow p) \Longrightarrow \sim q$

Tarefa

10 Completa a seguinte tabela e averigua se a implicação lógica é comutativa.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$
V	V		
F	V		
V	F		
F	F		

Princípio da dupla implicação

Sejam p e q proposições, então $p \Longleftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira se, e só se, as proposições $p \Longrightarrow q$ e $q \Longrightarrow p$ forem verdadeiras.

Exercício

20 Sabendo que a é uma proposição falsa e que b é uma proposição verdadeira, indica, justificando, o valor lógico de $\sim a \Longleftrightarrow \sim(\sim b)$.

Transitividade da implicação

Sejam p, q e r proposições. Se $p \implies q$ e $q \implies r$, então $p \implies r$.

Manual Interativo

Atividade
Relações lógicas entre operações: implicação e conjunção

Exercícios

21 Mostra que existe transitividade da implicação. Para isso constrói uma tabela de verdade e prova que $[(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)]$ é sempre verdadeira.

22 Considera as seguintes proposições verdadeiras:

r: A Manuela estuda.

s: A Manuela obtém boas classificações.

t: A Manuela consegue entrar num bom curso superior.

Sabe-se que $r \implies s$ e que $s \implies t$.

22.1. Escreve em linguagem corrente $r \implies s$.

22.2. Escreve em linguagem corrente $s \implies t$.

22.3. Escreve em linguagem corrente $(r \implies s) \wedge (s \implies t)$.

22.4. Justifica que $r \implies t$.

Relação da implicação com a negação e a disjunção

Sejam p e q proposições, temos: $(p \implies q) \iff [\sim p \vee q]$

Demonstração:

p	q	$\sim p$	$p \implies q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como as duas últimas colunas da tabela são iguais, para quaisquer p e q temos:

$$(p \implies q) \iff [\sim p \vee q]$$

Negação da implicação

Sejam p e q proposições, temos: $\sim (p \implies q) \iff [p \wedge \sim q]$

Manual Interativo

Vídeo
Implicação contrarrecíproca da implicação

Exercício

23 Demonstra, recorrendo a uma tabela de verdade, que $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

Implicação contrarrecíproca

Sejam p e q proposições, temos: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \sim p \vee q \\
&\Leftrightarrow q \vee \sim p \\
&\Leftrightarrow \sim(\sim q) \vee \sim p \\
&\Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)
\end{aligned}
$$

Exercício

24 Demonstra, recorrendo a uma tabela de verdade, que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

1.1.4. Prioridades das operações lógicas

No processo de operações lógicas convencionou-se uma ordem que deve respeitar as seguintes prioridades, na ausência de parênteses:

Prioridade	Operações lógicas
1.º	Negação
2.º	Conjunção
3.º	Disjunção
4.º	Implicação
5.º	Equivalência

Exercício

25 Sabendo que a e b são proposições falsas e que c é uma proposição verdadeira, indica o valor lógico de:

25.1. $a \wedge c \Leftrightarrow \sim(\sim b \vee c)$

25.2. $a \Rightarrow b \vee b \wedge (\sim c \vee a)$

25.3. $(a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow a) \Rightarrow c$

1.1.5. Leis de De Morgan

Primeiras leis de De Morgan

Sejam p e q proposições, a negação da conjunção das proposições é equivalente à disjunção das suas negações.

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Sejam p e q proposições, a negação da disjunção das proposições é equivalente à conjunção das suas negações.

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Manual Interativo

Vídeos
Leis de De Morgan

Primeiras leis de De Morgan (aplicação)

Exemplo 14

A negação de uma conjunção

Supõe que temos as seguintes proposições:

p : A peça de vestuário é uma camisa.

q : A peça de vestuário é azul.

Então, a proposição $p \wedge q$ representa "A peça de vestuário é uma camisa e é azul".

E a sua negação $\sim(p \wedge q)$ será "Não é verdade que a peça de vestuário é uma camisa e é azul".

Pela primeira lei de De Morgan, isso é equivalente a dizer "A peça de vestuário não é uma camisa ou não é azul". $\sim p \vee \sim q$

Exemplo 15

A negação de uma conjunção

Supõe que temos as seguintes proposições:

p : A peça de vestuário é uma saia.

q : A peça de vestuário é vermelha.

Então, a proposição $p \vee q$ representa "A peça de vestuário é uma saia ou é vermelha".

E a sua negação $\sim(p \vee q)$ será "Não é verdade que a peça de vestuário é uma saia ou é vermelha".

Pela primeira lei de De Morgan, isso é equivalente a dizer "A peça de vestuário não é uma saia e não é vermelha". $\sim p \wedge \sim q$

Exercício

26 Constrói uma tabela de verdade e mostra que: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

Exemplo 16

Usando as propriedades estudadas, podemos simplificar expressões.
Repara nos dois exemplos:

$$\begin{aligned}
&\sim(p \Rightarrow \sim q) \vee \sim q \\
\Leftrightarrow\ &\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim q \\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge q) \vee \sim q \\
\Leftrightarrow\ &(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q) \\
\Leftrightarrow\ &(p \vee \sim q) \wedge V \\
\Leftrightarrow\ &p \vee \sim q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ &[p \wedge (\sim p \vee q)] \Rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ &[(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ &[F \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge q) \Rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ &\sim(p \wedge q) \vee q \\
\Leftrightarrow\ &\sim p \vee \sim q \vee q \\
\Leftrightarrow\ &\sim p \vee V \\
\Leftrightarrow\ &V
\end{aligned}$$

Exercícios

27 Sejam p e q duas proposições.
Simplifica a seguinte proposição, utilizando as propriedades das operações lógicas: $\sim[\sim q \vee (\sim p \wedge q)]$

28 Sejam p e q duas proposições.
Simplifica a negação da seguinte proposição, utilizando as propriedades das operações lógicas: $p \wedge (p \vee \sim q)$

1.1.6. Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições

Quando a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira, o conhecimento do valor lógico de p define o valor lógico de q e vice-versa, ou seja, o conhecimento do valor lógico de q também define o valor lógico de p. Este princípio designa-se por dupla implicação.

Princípio da dupla implicação

Sejam p e q duas proposições, então é sempre verdadeira a proposição:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Demonstração:

p	q	$p \iff q$	$p \implies q$	$q \implies p$	$(p \implies q) \wedge (q \implies p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Como as colunas da tabela referentes a $p \iff q$ e a $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$ são iguais, para quaisquer valores lógicos de p e q temos:

$$(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

Trata-se de uma tautologia.

O princípio da dupla implicação é fundamental na resolução de problemas com raciocínio lógico, pois permite estabelecer a equivalência entre duas proposições, garantindo que ambas sejam verdadeiras ou falsas simultaneamente, facilitando a análise e a inferência correta das condições envolvidas.

Exemplo 17

Princípio da dupla implicação

Problema: Num sistema de segurança, a abertura de uma porta depende da introdução de um código de segurança.

Considerem-se as proposições:

s: O código introduzido é correto.

a: A porta abre-se.

Esta situação traduz uma dupla implicação.

Esta proposição é:

$$s \iff a$$

Utilizando o princípio da dupla implicação, podemos reescrever como conjunção de duas implicações:

$$(s \implies a) \wedge (a \implies s)$$

Isso significa que:

1. Se o código de segurança correto é inserido, então a porta abre-se.
2. Se a porta se abre, então o código de segurança correto é inserido.

Exemplo 18

A negação de uma conjunção

Problema: Numa empresa, devem ser considerados dois critérios para que um funcionário receba uma bonificação, no final do mês:

p: O funcionário deve ter completado um projeto importante.

q: O funcionário deve ter recebido uma avaliação de desempenho positiva.

Sabemos que um funcionário não receberá a bonificação este mês. Podemos expressar essa informação utilizando a seguinte negação de uma conjunção:

$$\sim(p \wedge q)$$

Utilizando as leis de De Morgan, equivale a:

$$\sim p \vee \sim q$$

Portanto, a informação de que o funcionário não receberá o bónus significa que o funcionário não completou o projeto importante ou o funcionário não recebeu uma avaliação de desempenho positiva (ou ambos).

Exercícios

29 Considera duas proposições p e q.
Simplifica as seguintes proposições:

29.1. $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

29.2. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

30 Determina o valor lógico das proposições p, q e r, sabendo que as seguintes proposições são falsas:

30.1. $(p \Longrightarrow q) \vee r$

30.2. $(p \Longrightarrow q \wedge r)$

31 Sendo a e b proposições, simplifica: $(a \vee b) \wedge (a \vee \sim b)$

32 Sendo p e q proposições, simplifica: $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

33 Sendo x e y proposições, simplifica: $(x \vee y) \wedge (\sim x \Longrightarrow y)$

34 Sendo m e n proposições, simplifica: $\sim(m \Longrightarrow n) \vee (m \wedge n)$

35 Sendo p e r proposições, simplifica: $(p \vee \sim r) \wedge (p \vee r) \vee p$

Síntese

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do terceiro excluído

Uma proposição ou tem valor lógico verdade ou tem valor lógico falso, não pode assumir outro valor lógico.

Operações sobre proposições

Equivalência

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*

Dadas duas proposições p e q, podemos formar a proposição composta "***p* é equivalente a *q***", simbolicamente representada por $p \Leftrightarrow q$.

Negação

p	$\sim p$
V	*F*
F	*V*

Dada uma proposição p, a sua negação, ***não p***, designa-se por ***negação de p***. Representamos a ***negação de p*** por $\sim p$.

Dupla negação

Dada uma proposição p, verifica-se $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	*F*	*V*
F	*V*	*F*

Se p é verdadeira, então $\sim(\sim p)$ também é verdadeira.

Se p é falsa, então $\sim(\sim p)$ também é falsa.

Síntese

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Dadas duas proposições p e q, $p \wedge q$ é uma proposição designada por **conjunção p e q**.

Comutatividade da conjunção lógica $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Associatividade da conjunção lógica $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Idempotência na conjunção $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Elemento neutro da conjunção $p \wedge V \Leftrightarrow V \wedge p \Leftrightarrow p$

Elemento absorvente da conjunção $p \wedge F \Leftrightarrow F \wedge p \Leftrightarrow F$

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Dadas duas proposições p e q, $p \vee q$ é uma proposição designada por **disjunção de p ou q**.

Idempotência na disjunção $p \vee p \Leftrightarrow p$

Elemento neutro da disjunção $p \vee F \Leftrightarrow F \vee p \Leftrightarrow p$

Elemento absorvente da disjunção $p \vee V \Leftrightarrow V \vee p \Leftrightarrow V$

Princípio do terceiro excluído $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

Comutatividade da disjunção lógica $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associatividade da disjunção lógica $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Síntese

Implicação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Dadas duas proposições p e q, $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ é uma proposição designada por **implicação entre** $\boldsymbol{p}$ **e** $\boldsymbol{q}$.

Transitividade da implicação

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ Trata-se de uma tautologia.

Relação da implicação com a negação e a disjunção

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Negação da implicação

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Implicação contrarrecíproca

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Prioridades das operações lógicas

Prioridade	Operações lógicas
1.º	Negação
2.º	Conjunção
3.º	Disjunção
4.º	Implicação
5.º	Equivalência

Primeiras leis de De Morgan

$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Para aplicar

Manual Interativo

Exercícios
Indicar o valor lógico de proposições e classificar condições num conjunto

Indicar o valor lógico de proposições em conjuntos

1 Entre as opções seguintes distingue as que são designações e as que são proposições.

(A) Cabo Verde

(B) $2+3=50$

(C) $\sqrt{81}=9$

(D) Cabo Verde situa-se no continente americano.

(E) Um quadrado é um quadrilátero.

(F) Escola

(G) 5×10^{-3}

(H) A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $360°$.

(I) Múltiplo de 7

2 Considera as seguintes proposições:

a: 2 *é solução de* $x+12=14$

b: -3 *é solução de* $x^2=3x$

c: $\pi\in\mathbb{Q}$

d: $-1\in\mathbb{Z}$

2.1. Indica o valor lógico de a, b, c e d.

2.2. Determina o valor lógico de $a\vee b$.

2.3. Determina o valor lógico de $\sim a\wedge c$.

2.4. Determina o valor lógico de $b \implies \sim d$.

2.5. Determina o valor lógico de $(a\wedge b)\vee\sim c$.

3 Considera as proposições:

p: *Está sol.* q: *Está a chover.* r: *Vou passear.* s: *Fico em casa.*

3.1. Escreve em linguagem simbólica:

a) Se está sol, então vou passear.

b) Se está a chover, então fico em casa.

c) Se não está a chover e não está sol, então vou passear.

3.2. Escreve em linguagem corrente:

a) $(q\wedge\sim p) \implies \sim r$

b) $(\sim q\wedge p) \implies \sim p$

4 São dadas três proposições a, b e c.

Constrói uma tabela de verdade e indica os possíveis valores lógicos das proposições a, b e c, de modo que o valor lógico da condição $(a\vee b) \implies \sim c$ seja V.

Manual Interativo

Exercícios
Aplicar as Leis de De Morgan

Simplificar expressões usando as Leis de De Morgan

5 **Sejam p, q e r três proposições.**

5.1. Completa a tabela de verdade.

p	q	r	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \Rightarrow r$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow r)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

5.2. O valor lógico da proposição q influencia o valor lógico de $(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow r)$?
Justifica a tua resposta.

6 **Sabendo que $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow F$, determina o valor lógico de a e b.**

7 **Sejam r e s duas proposições.**

7.1. Constrói a tabela de verdade da proposição $(r \wedge \sim s) \Rightarrow (r \vee s)$.

7.2. Simplifica o mais possível $\sim[\sim r \wedge (r \vee s)]$.

8 **Considera as proposições p e q. Utilizando as propriedades das operações lógicas, simplifica a condição:**

$$(\sim q \wedge p) \vee (p \wedge q)$$

9 **Considera as proposições p e q. Utilizando as propriedades das operações lógicas, prova que a seguinte proposição é verdadeira:**

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

10 **Sem recorrer a tabelas de verdade, discute todas as possibilidades das proposições p, q e r, sabendo que as seguintes proposições são verdadeiras:**

10.1. $(p \Rightarrow q) \vee r$

10.2. $(p \Rightarrow q) \wedge r$

1.2. Condições e conjuntos

1.2.1. Expressão proposicional ou condição

No capítulo anterior verificámos a utilização de designações e proposições na linguagem matemática. Também é comum utilizar expressões com variáveis, geralmente representadas por letras. Quando as variáveis são substituídas por designações, transformam as expressões em proposições verdadeiras ou falsas.

Considera, como exemplo, o conjunto $F=\left\{-\frac{1}{4}; 0;\ 2;\ 3;\ \pi\right\}$ e as seguintes expressões com variáveis:

a) $x \in \mathbb{N}$ **b)** $7+x=10$ **c)** $x \leqslant 0$

Considerando os elementos de F, podemos concluir que 2 e 3 transformam a expressão **a)** numa proposição verdadeira.

Os elementos $-\frac{1}{4}$, 0 e π não transformam a expressão **a)** numa proposição verdadeira.

Apenas o elemento 3 transforma a expressão **b)** numa proposição verdadeira. Os restantes elementos transformam a expressão numa proposição falsa.

Os elementos $-\frac{1}{4}$ e 0 transformam a expressão **c)** numa proposição verdadeira. Os restantes elementos do conjunto F transformam a expressão numa proposição falsa.

Às expressões com variáveis, **a)**, **b)** e **c)**, que podem ser transformadas em proposições (verdadeiras ou falsas), designamos por expressões proposicionais ou condições.

Expressão proposicional ou condição

Uma expressão proposicional (ou condição) é uma expressão com variáveis que se transforma em proposição quando as variáveis são substituídas por designações.

Uma expressão proposicional pode ser representada por $p(x)$, envolvendo uma variável x. A proposição $p(x)$, quando x é substituído por uma designação a, transforma-se na proposição $p(a)$.

Exemplo 19

$p(x):\ x+4=7$ é uma expressão proposicional, porque se substituirmos x por qualquer número obtemos uma proposição, que pode ser verdadeira ou falsa.

Manual Interativo

Exercício
Identificar uma condição

Exemplo 20

$q(x): x+4$ não é uma expressão proposicional, porque se substituirmos x por qualquer número não obtemos uma proposição, mas sim uma expressão designatória.

Exercícios

36 **Identifica quais das seguintes expressões correspondem a condições ou expressões proposicionais.**

(A) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$ **(B)** $\frac{b\times h}{2}$ **(C)** $x^2=4$ **(D)** $x+9>16$

(E) $47<6$ **(F)** $\sqrt{12}\in\mathbb{R}$ **(G)** $x\notin\mathbb{N}$

37 **Indica quais das seguintes condições se transforma(m) numa proposição verdadeira quando se substitui a variável x por 5.**

(A) $\frac{x+4}{3}<\pi$ **(B)** $4x+2=3x+6$

(C) $\sqrt{44+x}>7$ **(D)** $(x+4)^2=25x-44$

Classificação de condições

Condições possíveis

A condição $x+3>5$ é uma **condição possível não universal**, em $\mathbb{R}$, porque, embora seja possível transformar a condição numa proposição verdadeira, isso nem sempre acontece. Neste caso, apenas acontece quando substituímos a variável por números maiores que 2.

Condição possível não universal

Chama-se condição possível não universal quando existem valores do universo U que substituindo a variável, transformam a condição numa proposição verdadeira e numa proposição falsa.

A condição $x+3>x+2$ é uma **condição possível universal**, em $\mathbb{R}$, porque qualquer que seja o valor que substitui a variável transforma a condição numa proposição verdadeira.

Condição universal

Uma condição que se transforma sempre numa proposição verdadeira, qualquer que seja o valor que substitui a variável, designa-se por **condição universal**.

A condição $x^2 = -16$ é **impossível**, em $\mathbb{R}$, porque não existem valores que substituídos na variável transformem a condição numa proposição verdadeira.

Condição impossível

Uma condição que se transforma sempre numa proposição falsa, qualquer que seja o valor que substitui a variável, designa-se por **condição impossível**.

Exercício

38 Classifica, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

38.1. $-x+5 \leqslant 9$ **38.2.** $x+4>-2$ **38.3.** $x^2=25$

38.4. $x^2 \neq 25$ **38.5.** $x^2=-36$ **38.6.** $x^2 \neq 35$

1.2.2. Quantificador universal e quantificador existencial

Quantificador universal

Na expressão proposicional $x^2+1>0$, se substituirmos a variável x por qualquer número real, obtemos sempre uma proposição verdadeira.

Dizemos, por isso, que $x^2+1>0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

Para indicarmos simbolicamente que uma proposição advém de condição universal, utilizamos o símbolo $\forall$.

$\forall$ designa-se por **quantificador universal** e lê-se "para todo" ou "qualquer que seja".

Considerando novamente a condição universal $x^2+1>0$, podemos dizer que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$$

Qualquer que seja o número real x, a soma do quadrado de x com 1 é sempre positiva.

Quantificador universal

Seja $p(x)$ uma condição e U o universo da variável x, a proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é verdadeira se, e só se, $p(x)$ for universal.

Exemplo 21

$x=x$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$, porque $\forall x \in \mathbb{R},\ x=x$

A proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x=x$ é verdadeira.

$x^2+1\neq 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$, porque $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1\neq 0$

A proposição $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1\neq 0$ é verdadeira.

$x-1=0$ não é uma condição universal em $\mathbb{R}$, porque a condição não se transforma numa proposição verdadeira para todos os valores de $\mathbb{R}$.

A proposição $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1=0$ é falsa.

$3+x>0$ não é uma condição universal em $\mathbb{R}$, porque a condição não se transforma numa proposição verdadeira para todos os valores de $\mathbb{R}$.

A proposição $\forall x\in\mathbb{R},\ 3+x>0$ é falsa.

$3+x>0$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$, porque $\forall x\in\mathbb{N},\ 3+x>0$

A proposição $\forall x\in\mathbb{N},\ 3+x>0$ é verdadeira.

Exercícios

39 **Indica o valor lógico das seguintes proposições:**

39.1. $\forall x\in\mathbb{R},\ x-4<x$

39.2. $\forall x\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}$

39.3. $\forall x\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{N}$

39.4. $\forall x\ \mathbb{R},\ x^2\neq -9$

39.5. $\forall x\in\mathbb{R},\ x>0$

39.6. $\forall x\in\mathbb{N},\ x>0$

40 **Escreve as seguintes proposições em linguagem simbólica e indica o seu valor lógico.**

40.1. Qualquer número real tem quadrado maior ou igual a zero.

40.2. Qualquer número real tem cubo maior ou igual a zero.

40.3. Um número inteiro é sempre racional.

40.4. O triplo de um número real é sempre maior que a sua metade.

Quantificador existencial

A condição $x+7=10$ não é uma condição universal.

$\forall x\in\mathbb{R},\ x+7=10$ é uma proposição falsa, em $\mathbb{R}$.

No entanto, a condição $x+7=10$ pode ser transformada numa proposição verdadeira quando substituímos a variável x por 3.

Neste caso, dizemos que a condição é possível, mas não universal.

Para indicarmos simbolicamente que uma proposição advém de uma condição possível, utilizamos o símbolo $\exists$.

$\exists$ designa-se por **quantificador existencial** e lê-se “existem” ou “existe pelo menos um”.

Considerando novamente a condição possível $x+7=10$, podemos dizer que:

$$\exists x \in \mathbb{R}: \ x+7=10$$

Existe pelo menos um número real x cuja soma com 7 é igual a 10.

Como, nesta condição, se obtém uma proposição verdadeira apenas quando substituímos a variável x por um valor (neste caso, 3), podemos dizer que "existe um e um só" valor que transforma a condição numa proposição verdadeira.

$$\exists^1 x \in \mathbb{R}: \ x+7=10$$

Existe um e um só número real x cuja soma com 7 é igual a 10.

Exemplo 22

- $x^2=4$ é uma condição possível em $\mathbb{R}$, porque $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2=4$.
  Repara que $\exists^1 x \in \mathbb{R}: \ x^2=4$ é falsa, porque existem dois números reais cujo quadrado é igual a 4 $(x=2 \vee x=-2)$.
  A proposição $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2=4$ é verdadeira.
- $x^2=0$ é uma condição possível em $\mathbb{R}$, porque $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2=0$.
  A proposição $\exists^1 x \in \mathbb{R}: \ x^2=0$ é verdadeira.
- $x^2=-4$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$, porque $\nexists x \in \mathbb{R}, \ x^2=-4$.
  Nenhum número real ao quadrado é igual ao número -4. Pode-se usar o símbolo $\nexists$ para indicar essa relação de não existência.
  A proposição $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2=-4$ é falsa.
  A proposição $\nexists x \in \mathbb{R}: \ x^2=-4$ é verdadeira.

Exercícios

41 **Indica o valor lógico das seguintes proposições:**

41.1. $\exists x \in \mathbb{R}: \ \frac{x-4}{2}=x$

41.2. $\exists x \in \mathbb{N}: \ 3x>150$

41.3. $\exists^1 x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{x}=1$

41.4. $\exists^1 x \in \mathbb{N}: \ \sqrt{x}=1$

41.5. $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2<0$

41.6. $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2 \leqslant 0$

42 **Escreve as seguintes proposições em linguagem simbólica e indica o seu valor lógico.**

42.1. Existe um e um só número natural cujo quadrado é 16.

42.2. Existe um e um só número real cujo quadrado é 16.

42.3. Não existe um número real cuja raiz quadrada é -2.

42.4. Existem números reais cujo seu triplo é maior que o seu quádruplo.

1.2.3. Propriedades da conjunção e disjunção de condições

Das propriedades sobre valores lógicos de proposições resultam algumas conclusões para as condições.

Consideremos as seguintes condições:

$a(x) \longleftarrow$ condição universal

$b(x) \longleftarrow$ condição possível

$c(x) \longleftarrow$ condição impossível

$d(x) \longleftarrow$ condição qualquer

Temos:

$a(x) \vee d(x)$ é uma condição universal.

$b(x) \vee d(x)$ é uma condição possível (universal ou não universal).

$c(x) \wedge d(x)$ é uma condição impossível.

De modo geral, como **propriedades da conjunção e disjunção de condições**, temos:

- A disjunção de uma condição universal com uma condição qualquer é uma condição universal.
- A disjunção de uma condição possível com uma condição qualquer é uma condição possível.
- A conjunção de uma condição impossível com uma condição qualquer é uma condição impossível.

Exercício

43 Considera as seguintes condições, em $\mathbb{R}$:

$p(x): \sqrt{x} = 5$ $\quad$ $q(x): x^2 < 0$

$r(x): x^2 \geqslant 0$ $\quad$ $s(x): x + 7 = 2x$

43.1. Classifica as condições dadas.

43.2. Classifica a condição $p(x) \vee r(x)$.

43.3. Classifica a condição $p(x) \wedge r(x)$.

43.4. Classifica a condição $q(x) \wedge r(x)$.

43.5. Classifica a condição $q(x) \wedge s(x)$.

43.6. Classifica a condição $p(x) \vee s(x)$.

1.2.4. Segundas leis de De Morgan

Consideremos a proposição p e a sua respetiva negação $\sim p$.

p: Todos os alunos da sala nasceram em Cabo Verde.

$\sim p$: Existe pelo menos um aluno da sala que não nasceu em Cabo Verde.

Neste caso, negar que todos os alunos da sala nasceram em Cabo Verde é afirmar que existe pelo menos um que não nasceu em Cabo Verde.

Consideremos agora a proposição q e a sua respetiva negação $\sim q$.

q: Existe um aluno da sala que é italiano.

$\sim q$: Todos os alunos da sala não são italianos.

Neste caso, negar que existe um aluno da sala que é italiano é afirmar que todos os alunos da sala não são italianos.

Negação do quantificador universal

Negar que todos os elementos, ou valores, de um dado universo verificam uma condição é afirmar que existe pelo menos um elemento, ou valor, do dado universo que não verifica a condição.

Negação do quantificador existencial

Negar que existe pelo menos um elemento, ou valor, de um dado universo que verifica uma condição é afirmar que todos os elementos, ou valores, do dado universo não verificam a condição.

Estas duas propriedades são conhecidas como segundas leis de De Morgan.

Simbolicamente, podem escrever-se do seguinte modo:

Segundas leis de De Morgan

$\sim(\forall x,\ p(x)) \Leftrightarrow \exists x:\ \sim p(x)$

$\sim(\exists x:\ p(x)) \Leftrightarrow \forall x,\ \sim p(x)$

Exercícios

44 Escreve em linguagem corrente a negação das seguintes proposições:

44.1. Todos os estrangeiros gostam de comer ananás da ilha do Sal.

44.2. Todos os desportistas são ricos.

44.3. Pelo menos um professor da escola é jovem.

44.4. Existe pelo menos uma aluna na turma que nasceu nos Estados Unidos da América.

44.5. Nenhum aluno é fraco.

45 **Escreve em linguagem simbólica a negação das seguintes proposições em $\mathbb{R}$:**

45.1. $\forall x,\ x<10$

45.2. $\exists x:\ x+2=x^2$

45.3. $\forall x,\ x^4 \geqslant 0$

45.4. $\exists x:\ \sqrt{x-7}<\frac{1}{7}$

45.5. $\exists x:\ x<-3 \vee x>3$

Contraexemplos

Para podermos justificar que uma proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é falsa, é necessário mostrar que existe um elemento do domínio U que torna a proposição $p(x)$ falsa. O elemento, ou um elemento, do domínio U que torna a proposição $p(x)$ falsa é designado por **contraexemplo** para a proposição $\forall x \in U,\ p(x)$.

Exemplo 23

Considera a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2>0$.

Contraexemplo: 0 porque $0^2=0$.

Então, a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2>0$ é falsa.

Exemplo 24

Considera a proposição $\forall x \in \mathbb{N},\ \frac{x}{3} \in \mathbb{N}$.

Contraexemplo: Por exemplo, 1, porque $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

Então, a proposição $\forall x \in \mathbb{N},\ \frac{x}{3} \in \mathbb{N}$ é falsa.

Exemplo 25

Considera a proposição "O triplo de um número natural é sempre um número ímpar".

Contraexemplo: Por exemplo, 4, porque $3 \times 4 = 12$ e 12 não é um número ímpar.

Então, a proposição "O triplo de um número natural é sempre um número ímpar" é falsa.

Exercício

46 Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições. Para as proposições falsas indica um contraexemplo.

46.1. $\forall x \in \mathbb{R}, \; x+7>6$

46.2. $\forall x \in \mathbb{R}, \; \sqrt[3]{x} \geqslant 0$

46.3. Todos os múltiplos de 4 são múltiplos de 2.

46.4. Todos os números primos são ímpares.

1.2.5. Conjunto definido por uma condição

Igualdade entre conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais se têm os mesmos elementos.

Simbolicamente, representa-se $A=B$.

Dados dois conjuntos A e B, $A=B$ se e só se:

$$\forall x, \; x \in A \iff x \in B$$

Trata-se de uma proposição verdadeira.

Exemplo 26

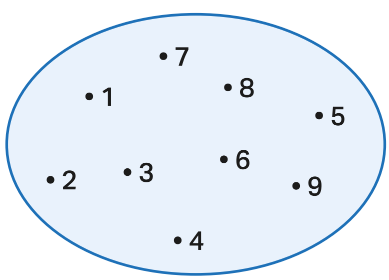
Considera os seguintes conjuntos:

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B=\{x \in \mathbb{N}: \; x<10\}$

$C=\{x \in \mathbb{N}: \; x \leqslant 9\}$

D



Os conjuntos A, B, C e D são constituídos pelos mesmos elementos, logo, são iguais.

Neste exemplo, os conjuntos A, B, C e D são iguais, mas estão representados de diferentes formas.

O conjunto $A=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9\}$ está representado em extensão.

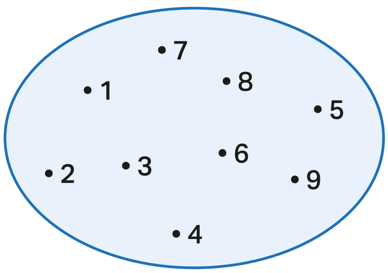
Um **conjunto** está **representado em extensão** quando os seus elementos são apresentados, um a um, entre chavetas e separados por vírgulas.

O conjunto $B=\{x\in\mathbb{N}:\ x<10\}$ e o conjunto $C=\{x\in\mathbb{N}:\ x\leqslant 9\}$ estão representados em compreensão.

Um **conjunto** está **representado em compreensão** quando é apresentada uma propriedade que carateriza os seus, e só os seus, elementos.

Podem ser representados em compreensão conjuntos finitos e infinitos.

O conjunto D está **representado através de um diagrama de Venn**.



Num diagrama de Venn cada elemento é representado por um ponto e todos os pontos estão rodeados por uma linha fechada.

Exercícios

47 Representa em extensão os seguintes conjuntos:

47.1. A : números primos menores que 17

47.2. B : números naturais inferiores a $\sqrt{17}$

47.3. C : números inteiros cujo quadrado é inferior a 17

48 Considera os seguintes conjuntos:

$A=\{1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16\}$

$B=\{x\in\mathbb{N}:\ 3<x<10\}$

$C=\{4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9\}$

$D=\{x\in\mathbb{N}:\ x\geqslant 9\wedge x\leqslant 4\}$

$E=\left\{x\in\mathbb{Z}\ :\ x^2\leqslant 9\right\}$

48.1. Representa em compreensão o conjunto A.

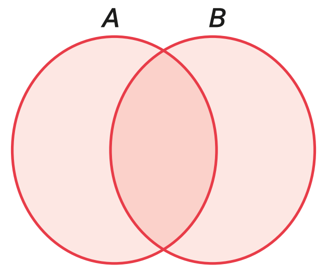
48.2. Existem conjuntos iguais? Quais?

48.3. Mostra que o conjunto B é igual ao conjunto $F=\{x\in\mathbb{N}:\ x>3\wedge x\leqslant 9\}$.

48.4. Representa em extensão o conjunto E .

1.2.6. União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar

União de conjuntos



Sendo A e B dois conjuntos, chama-se **conjunto união** (ou **reunião**) de A e B, e representa-se simbolicamente por $A \cup B$, ao conjunto definido pela condição $x \in A \vee x \in B$.

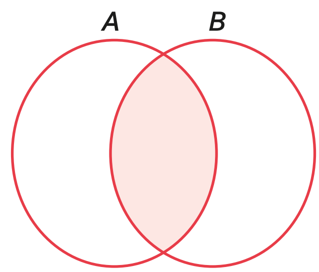
$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

Exemplo 27

Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$$

Interseção de conjuntos



Sendo A e B dois conjuntos, chama-se **conjunto interseção** de A e B, e representa-se simbolicamente por $A \cap B$, ao conjunto definido pela condição:

$$x \in A \wedge x \in B$$

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemplo 28

Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

$$A \cap B = \{3, 6\}$$

Exercício

49 Considera os seguintes conjuntos:

$A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C =]0, 4]$ $D = [3, 7]$

$E = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 10\}$

49.1. Determina $A \cap B$.

49.2. Determina $A \cup B$.

49.3. Determina $A \cap C$.

49.4. Determina $B \cap D$.

49.5. Determina $A \cup E$.

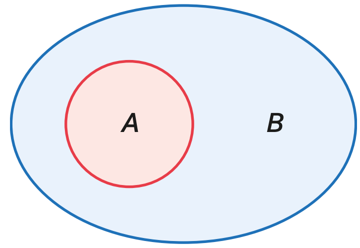
49.6. Determina $D \cap E$.

1.2.7. Inclusão de conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos, dizemos que A **está contido em** B, e representa-se simbolicamente por $A \subset B$, quando:

$$\forall x, \; x \in A \implies x \in B$$

Nesta situação, A **é um subconjunto próprio** (ou parte) **de** B.

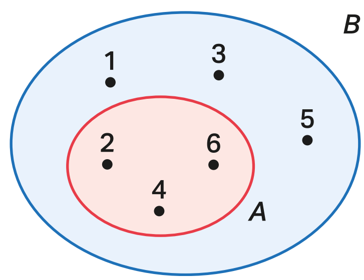


Exemplo 29

Considera os conjuntos

$A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A \subset B$$



Exercício

50 **Sendo B um conjunto, tal que $B =]3, 12[$.**

50.1. Apresenta um possível conjunto A de modo que $A \subset B$.

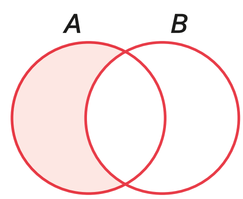
50.2. Apresenta um possível conjunto C de modo que $B \subset C$.

Diferença de conjuntos e conjunto complementar

Diferença de conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos, designamos por **diferença entre A e B**, e representa-se simbolicamente por $A \setminus B$, o conjunto que:

$$\forall x, \; x \in A \wedge x \notin B$$



Exemplo 30

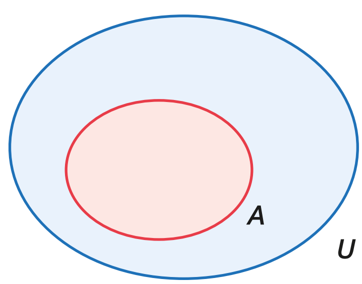
Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

Conjunto complementar

Seja A um conjunto do universo U, designamos por **complementar de A**, e representa-se simbolicamente por $\overline{A}$, o conjunto que:

$$\forall x, \; x \in U \wedge x \notin A$$



Ou seja, o complementar de A é composto por todos os elementos do universo que não pertencem a A.

$$\overline{A} = U \setminus A$$

Exemplo 31

Considera o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ no universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\overline{A} = U \setminus A = \{0, 6, 7, 8, 9\}$$

Exemplo 32

Considera o conjunto $B = [0; +\infty[$ em $\mathbb{R}$.

O complementar de B são todos os restantes elementos de $\mathbb{R}$ que não pertencem a B.

$$\overline{B} = \mathbb{R} \setminus B =]-\infty; 0[$$

Exercícios

51 Considera os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}$:

$A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C =]0, 4]$

$D = [3, 7]$

$E = \{x \in \mathbb{N}: 3 < x < 10\}$

51.1. Determina $A \setminus B$.

51.2. Determina $B \setminus A$.

51.3. Determina $B \setminus C$.

51.4. Determina $C \setminus D$.

51.5. Determina $B \setminus (C \cup E)$.

51.6. Determina $C \setminus \overline{E}$.

51.7. $A \cap B$

51.8. $B \cap E$

51.9. $A \cup B \cup E$

51.10. $A \cap \overline{C}$

52 Sabemos que:

$A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{0, 1, 6, 7\}$ e $A \setminus B = \{8, 9\}$.

52.1. Determina, em extensão, o conjunto A.

52.2. Determina, em extensão, o conjunto B.

52.3. O que podes concluir em relação à afirmação $B \subset A$?

1.2.8. Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem

Considere-se que $a(x)$ define o conjunto A e $b(x)$ define o conjunto B.

A disjunção $a(x) \vee b(x)$ define a reunião $A \cup B$.

A conjunção $a(x) \wedge b(x)$ define a interseção $A \cap B$.

A negação $\sim a(x)$ define o conjunto complementar $\overline{A}$.

Exemplo 33

Considerem-se os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 = 9\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R}:\ (x+3)(x-1) = 0\right\}$.

Repare que $A = \{-3\,,\ 3\}$ e $B = \{-3\,,\ 1\}$.

$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 = 9 \vee (x+3)(x-1) = 0\right\} = \{-3\,,\ 1\,,\ 3\}$

$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 = 9 \wedge (x+3)(x-1) = 0\right\} = \{-3\}$

$\overline{A} = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 \neq 9\right\} = \mathbb{R} \backslash \{-3\,,\ 3\}$

Comutatividade na união de conjuntos

Pela propriedade comutativa da disjunção de proposições:

$$\forall x\,,\ x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow \forall x\,,\ x \in B \vee x \in A$$

Como as condições $x \in A \vee x \in B$ e $x \in B \vee x \in A$ definem o mesmo conjunto, **a união de conjuntos é comutativa**:

$$A \cup B = B \cup A$$

Comutatividade na interseção de conjuntos

Pela propriedade comutativa da conjunção de proposições:

$$\forall x\,,\ x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow \forall x\,,\ x \in B \wedge x \in A$$

Como as condições $x \in A \wedge x \in B$ e $x \in B \wedge x \in A$ definem o mesmo conjunto, **a interseção de conjuntos é comutativa**:

$$A \cap B = B \cap A$$

Complementar da união

A negação da disjunção $\sim (a(x) \vee b(x))$ corresponde à conjunção das negações $\sim a(x) \wedge \sim b(x)$. De modo semelhante, se compreende como determinar o **complementar da união**:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Demonstração:

Como $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$, então:

$$\overline{A \cup B} = \{x \in U : \sim(x \in A \vee x \in B)\} = \{x \in U : \sim(x \in A) \wedge \sim(x \in B)\} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Complementar da interseção

A negação da conjunção $\sim(a(x) \wedge b(x))$ corresponde à disjunção das negações $\sim a(x) \vee \sim b(x)$. De modo semelhante, se compreende como determinar o **complementar da interseção**:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Exercícios

53 Considerando A e B dois conjuntos, demonstra que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

54 Considera os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$.

54.1. Define por uma condição $\bar{A}$.

54.2. Define por uma condição $\bar{A} \cup \bar{B}$.

54.3. Define por uma condição $\overline{A \cup B}$.

54.4. Apresenta em extensão o conjunto de elementos de $\overline{A \cup B}$.

1.2.9. Princípio de dupla inclusão

Duas condições $p(x)$ e $q(x)$ **são equivalentes** se a proposição $\forall x,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$ for verdadeira, isto é, se $\forall x,\ [p(x) \Longrightarrow q(x)] \wedge [q(x) \Longrightarrow p(x)]$ for verdadeira.

Sejam A e B dois conjuntos-solução de duas condições $p(x)$ e $q(x)$ equivalentes, então $A = B$.

Dados dois conjuntos A e B, designa-se por **princípio de dupla inclusão** a propriedade em que $A = B$ se, e somente se:

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

Condições	Conjuntos
$p(x) \Longrightarrow q(x)$	$A \subset B$
$q(x) \Longrightarrow p(x)$	$B \subset A$
$[p(x) \Longrightarrow q(x)] \wedge [q(x) \Longrightarrow p(x)]$	$A \subset B \wedge B \subset A$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$A = B$

Exercício

55 **Considera as seguintes condições:**

$p(x): \ x < 8$ $\qquad$ $q(x): \ 0 \leqslant x < 8$

Verifica se as condições $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes:

55.1. em $\mathbb{N}$;

55.2. em $\mathbb{Z}$;

55.3. em $\mathbb{R}$.

Exemplo 34

Vamos provar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ utilizando o princípio de dupla inclusão.

Para provar que dois conjuntos são iguais, temos de demonstrar que cada conjunto está contido no outro.

Primeira inclusão: $[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.

Seja $x \in A \cap (B \cup C)$, então $x \in A$ e $x \in B \cup C$.

Como $x \in B \cup C$, então $x \in B$ ou $x \in C$.

Se $x \in B$, então $x \in A$ e $x \in B$, logo $x \in A \cap B$.

Se $x \in C$, então $x \in A$ e $x \in C$, logo $x \in A \cap C$.

Portanto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Segunda inclusão: $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subset [A \cap (B \cup C)]$.

Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$.

Se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$.

Se $x \in A \cap C$, então $x \in A$ e $x \in C$.

Em ambos os casos, $x \in A$ e $x \in B \cup C$.

Portanto, $x \in A \cap (B \cup C)$.

Assim, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercício

56 **Prova que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ utilizando o princípio de dupla inclusão.**

Manual Interativo

Exercício
Identificar a negação de uma conjunção e de uma disjunção

1.2.10. Negação de uma implicação universal

Quando estudámos as operações entre proposições, concluímos:

$$\sim (p \implies q) \text{ é equivalente a } (\sim q \implies \sim p)$$

Daqui resulta uma técnica de demonstração: pelo contrarrecíproco.

Quando queremos provar que:

Se P então Q

é o mesmo que provar:

Se $\sim Q$ então $\sim P$

Contrarrecíproco

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições, então:

$$[\forall x,\ p(x) \implies q(x)] \text{ é equivalente a } [\forall x,\ \sim q(x) \implies \sim p(x)]$$

Dizemos que a segunda proposição $(\forall x,\ \sim q(x) \implies \sim p(x))$ é o **contrarrecíproco** da primeira proposição $(\forall x,\ p(x) \implies q(x))$.

Uma demonstração da segunda proposição diz-se demonstração por contrarrecíproco da primeira proposição.

Exemplo 35

Consideremos a proposição "Se o quadrado de número natural n é ímpar, então n é ímpar".

Ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ é ímpar $\implies n$ é ímpar.

Vamos demonstrar que a proposição é verdadeira através do contrarrecíproco.

Contrarrecíproco:

Se n não é ímpar, então o quadrado de n não é ímpar.

O que é o mesmo que:

Se n é par, então o quadrado de n é par.

Demostração por contrarrecíproco:

Se n é par, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$.

Então, $n^2 = (2k)^2 = 2^2 \times k^2 = 2 \times 2 \times k^2$, que é um número par.

Logo, n é par $\implies n^2$ é par.

Portanto, pela demonstração do contrarrecíproco,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \text{ é ímpar} \implies n \text{ é ímpar.}$$

Exemplo 36

Consideremos a proposição: Se um quadrilátero é um quadrado, então ele tem quatro lados iguais.

P: Um quadrilátero é um quadrado.

Q: O quadrilátero tem quatro lados iguais.

$$P \implies Q$$

Vamos demonstrar que a proposição é verdadeira através do contrarrecíproco.

Contrarrecíproco:

$\sim Q$: O quadrilátero não tem quatro lados iguais.

$\sim P$: O quadrilátero não é um quadrado.

$$\sim Q \implies \sim P$$

Proposição contrarrecíproca:

Se um quadrilátero não tem quatro lados iguais, então ele não é um quadrado.

Suponhamos que um quadrilátero não tem quatro lados iguais. Isso significa que pelo menos um dos lados do quadrilátero tem comprimento diferente.

Ora, pela definição de um quadrado, todos os lados devem ser iguais. Se um quadrilátero não satisfaz essa condição, ele não pode ser um quadrado.

Portanto, a proposição "Se um quadrilátero não tem quatro lados iguais, então ele não é um quadrado" é verdadeira.

Como mostrámos que a proposição contrarrecíproca é verdadeira, a proposição original também é verdadeira.

Este é outro exemplo que ilustra como uma demonstração utilizando o contrarrecíproco pode ser feita num contexto geométrico.

Exercícios

57 **Escreve os contrarrecíprocos das seguintes proposições:**

57.1. Se um número é divisível por 6, então é divisível por 3.

57.2. Se um triângulo é equilátero, então a amplitude de cada um dos ângulos internos é $60°$.

57.3. Num plano, se uma reta r é paralela a outras duas retas s e t, então s e t são paralelas entre si.

58 **Demostra por contrarrecíproco que cada uma das seguintes proposições é verdadeira.**

58.1. Se um número é divisível por 6, então é divisível por 3.

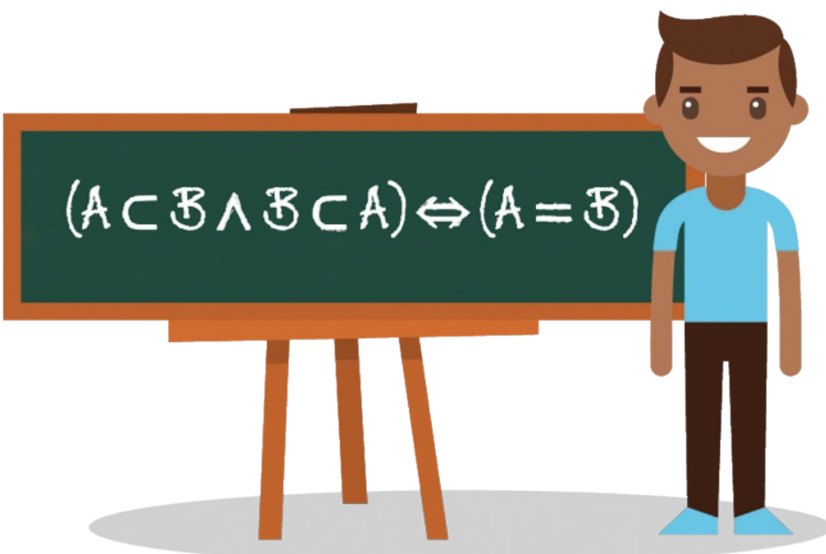
58.2. Se um número inteiro n não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ não é um número inteiro.

58.3. Se um triângulo é retângulo, então a soma dos quadrados dos comprimentos dos seus dois menores lados é igual ao quadrado do comprimento do terceiro lado.

58.4. Se um quadrilátero é um paralelogramo, então os seus lados opostos são congruentes.

1.2.11. Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos

Este subtópico aborda técnicas e estratégias para manipular condições e conjuntos, ilustrando como essas operações podem simplificar a resolução de problemas complexos e permitir uma compreensão mais profunda das estruturas matemáticas subjacentes.



Exemplo 37

Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$(x+1)(x-5)=0 \iff$

Para resolvermos a equação podemos aplicar a "lei do anulamento do produto".

$\iff (x+1)=0 \lor (x-5)=0 \iff$

$\iff x+1=0 \lor x-5=0 \iff$

$\iff x=-1 \lor x=5$

C.S. $=\{-1\,;\ 5\}$

Exercício

59 Resolve, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

59.1. $(x+2)(7-x)=0$

59.2. $(x^2-9)(x+9)=0$

59.3. $(3x^2-27)(2x+12)=0$

Exemplo 38

Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte condição:

$x^2-9<0 \iff$ [caso notável]

$\iff (x-3)(x+3)<0 \iff$ [garantir que o produto é negativo]

$\iff (x-3<0 \land x+3>0) \lor (x-3>0 \land x+3<0) \iff$ [princípio de equivalência]

$\iff (x<3 \land x>-3) \lor \underbrace{(x>3 \land x<-3)}_{\text{condição impossível}} \iff$ [propriedades da conjunção e disjunção de condições]

$\iff x<3 \land x>-3$

C.S. $=]-3\,;\ 3[$

Exercício

60 Resolve, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

60.1. $(x+2)(4-x)>0$

60.2. $x^2-1>0 \land x+4<0$

60.3. $2x^2-8>0 \land x>8$

Síntese

Expressão proposicional ou condição

Uma **expressão proposicional** (ou **condição**) é uma expressão com variáveis que se transforma em proposição quando as variáveis são substituídas por designações.

Classificação de condições		
Possíveis		**Impossíveis em U**
Universais em U	**Não universais em U**	
Qualquer que seja o termo do universo U que substitui a variável, a condição transforma-se sempre numa proposição verdadeira.	Existem termos do universo U que substituídos na variável transformam a condição numa proposição verdadeira e existem termos do universo U que transformam a condição numa proposição falsa.	É uma condição que se transforma sempre numa proposição falsa, qualquer que seja o termo do universo U que substitui a variável.

Quantificador universal e quantificador existencial	
Quantificador universal ($\forall$)	**Quantificador existencial ($\exists$)**
Seja $p(x)$ uma condição: A proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é verdadeira se, e só se, $p(x)$ for universal.	Seja $p(x)$ uma condição: A proposição $\exists x \in U:\ p(x)$ é falsa se, e só se, $p(x)$ não for universal.

Propriedades da conjunção e disjunção de condições	
Sejam: $a(x) \longleftarrow$ condição universal $b(x) \longleftarrow$ condição possível $c(x) \longleftarrow$ condição impossível $d(x) \longleftarrow$ condição qualquer	Temos: $a(x) \vee d(x)$ é uma condição universal. $b(x) \vee d(x)$ é uma condição possível (universal ou não universal). $c(x) \wedge d(x)$ é uma condição impossível.

Síntese

Segundas leis de De Morgan

Negação do quantificador universal

Negar que todos os elementos, ou valores, de um dado universo verificam uma condição é afirmar que existe pelo menos um elemento, ou valor, do dado universo que não verifica a condição.

$$\sim (\forall x \in U,\ p(x)) \text{ é equivalente a } \exists x \in U:\ \sim p(x)$$

Negação do quantificador existencial

Negar que existe pelo menos um elemento, ou valor, de um dado universo que verifica uma condição é afirmar que todos os elementos, ou valores, do dado universo não verificam a condição.

$$\sim (\exists x \in U:\ p(x)) \text{ é equivalente a } \forall x \in U,\ \sim p(x)$$

Representação de conjuntos

Um **conjunto** está **representado em extensão** quando os seus elementos são apresentados, um a um, entre chavetas e separados por vírgulas.

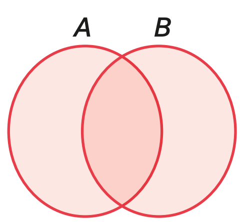
Um **conjunto** está **representado em compreensão** quando é apresentada uma propriedade que carateriza os seus, e só os seus, elementos.

Um conjunto está **representado através de um diagrama de Venn** se cada elemento é representado por um ponto e todos os pontos estão rodeados por uma linha fechada.

União de conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos, chama-se **conjunto união** (ou **reunião**) de A e B, e representa-se simbolicamente por $A \cup B$, ao conjunto definido pela condição $x \in A \vee x \in B$.

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

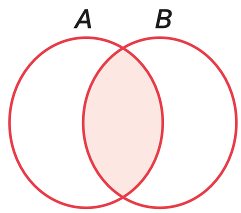


Síntese

Interseção de conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos, chama-se **conjunto interseção** de A e B, e representa-se simbolicamente por $A \cap B$, ao conjunto definido pela condição $x \in A \wedge x \in B$.

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

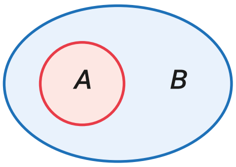


Inclusão de conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos, dizemos que A **está contido em** B, e representa-se simbolicamente por $A \subset B$, quando:

$$\forall x,\ x \in A \implies x \in B$$

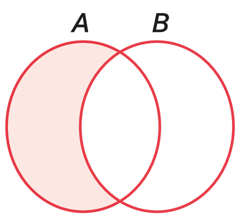
Nesta situação, A **é um subconjunto próprio** (ou parte) **de** B.



Diferença de conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos, designamos por **diferença entre** A **e** B, e representa-se simbolicamente por $A \setminus B$, o conjunto que:

$$\forall x,\ x \in A \wedge x \notin B$$



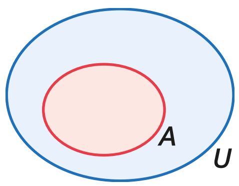
Conjunto complementar

Seja A um conjunto do universo U, designamos por **complementar de** A, e representa-se simbolicamente por $\bar{A}$, o conjunto que:

$$\forall x,\ x \in U \wedge x \notin A$$

Ou seja, o complementar A é composto por todos os elementos do universo que não pertencem a A.

$$\bar{A} = U \setminus A$$



Síntese

Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem

Se A e B forem conjuntos definidos, num universo U, pelas condições $p(x)$ e $q(x)$:

Operações entre condições	Operações entre conjuntos
Disjunção $p(x) \vee q(x)$	Reunião $A \cup B$
Conjunção $p(x) \wedge q(x)$	Interseção $A \cap B$
Negação $\sim p(x)$	Complementar $\overline{A}$

Propriedades das operações entre conjuntos:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Princípio de dupla inclusão

Se A e B forem conjuntos definidos, num universo U, pelas condições $p(x)$ e $q(x)$ que são equivalentes, então A e B são iguais.

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \text{ é equivalente a } (A = B)$$

Contrarrecíproco

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições, então:

$$(\forall x, \ p(x) \implies q(x)) \iff (\forall x, \ \sim q(x) \implies \sim p(x))$$

Dizemos que a segunda proposição $(\forall x, \ \sim q(x) \implies \sim p(x))$ é o **contrarrecíproco** da primeira proposição $(\forall x, \ p(x) \implies q(x))$.

Para aplicar

1 Indica o valor lógico das seguintes proposições. Para cada caso falso, apresenta um contraexemplo.

1.1. $\nexists x \in \mathbb{N} : x < 0$

1.2. $\nexists x \in \mathbb{Q} : x < 0$

1.3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{Q}$

1.4. $\exists x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}$

1.5. $\forall x \in \mathbb{N},\ x - 1 \geqslant -1$

1.6. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0 \wedge x^3 > 0$

2 Considera as condições: "$x = x$", "$x \neq x$", "$x \in \mathbb{R}$" e "$0 \leqslant x$".

2.1. Classifica cada uma das condições no conjunto dos números reais.

2.2. Para cada uma das seguintes condições indica se é possível, universal ou impossível.

a) $x = x \wedge x \in \mathbb{R}$

b) $x = x \wedge 0 \leqslant x$

c) $x \neq x \wedge 0 \leqslant x$

d) $x \in \mathbb{R} \vee 0 \leqslant x$

3 Completa a tabela.

Linguagem natural	Linguagem simbólica
Todos os cabo-verdianos gostam de cachupa.	
Alguns turistas visitam o Parque Natural da Serra da Malagueta.	
	$\forall x,\ x$ *é bicicleta* $\Rightarrow\ x$ *tem rodas*
	$\exists x :\ x$ *é retângulo* $\wedge\ x$ *é quadrado*
Alguns cabo-verdianos já participaram nos Jogos Olímpicos.	
Existe pelo menos um número racional positivo que é par.	
	$\forall x \in \mathbb{N},\ x < 3 \wedge x$ *é primo* $\Rightarrow\ x$ *é par*
Existem triângulos que são isósceles.	

4 **Justifica que as seguintes proposições são falsas.**

4.1. Qualquer número natural que seja múltiplo de 7 é múltiplo de 14.

4.2. O cubo de um número inteiro é sempre maior do que o quadrado desse número.

4.3. Qualquer quadrilátero que tenha todos os lados iguais é um quadrado.

5 **Considera o conjunto $D = \{2, 3, 4, 5\}$. Seja $p(x)$ a condição "x é número primo" e seja $q(x)$ a condição "x é múltiplo de 2".**

5.1. Indica o valor lógico da proposição $\forall x \in D,\ p(x)$.

5.2. Indica o valor lógico da proposição $\exists x \in D:\ q(x)$.

5.3. Escreve uma proposição, começando com um quantificador, equivalente à respetiva negação de $\forall x \in D,\ p(x)$.

5.4. Traduz, para linguagem corrente, a negação da proposição $\exists x \in D:\ q(x)$.

6 **Considera, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:**

$p(x):\ x^2 - x - 2 = 0$; $q(x):\ -1 < x \leqslant \pi$

6.1. Indica, justificando, o valor lógico da proposição: $\exists x \in \mathbb{R}:\ p(x) \wedge q(x)$.

6.2. Considera os seguintes conjuntos de números reais:

$A = \{x \in \mathbb{R}:\ p(x)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}:\ q(x)\}$

Indica, em extensão ou na forma de intervalo, os seguintes conjuntos:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A \cap B}$

7 **Demonstra por contrarrecíproco a proposição: Se um número natural n não é divisível por 9, então não é divisível por 27.**

8 **Considera os seguintes conjuntos de números reais:**

$A = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geqslant 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}:\ x < \pi\}$ e $C = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x > \frac{20}{7}\right\}$

Define, sob a forma de intervalo, ou de reunião de intervalos disjuntos, os seguintes conjuntos, considerados como subconjuntos de $\mathbb{R}$.

8.1. $A \cup B$ **8.2.** $A \cap B$ **8.3.** $B \cap C$

8.4. $\overline{A \cup B}$ **8.5.** $\bar{C} \cup \bar{B}$ **8.6.** $A \setminus B \cup C$

8.7. $(\bar{A} \cup B) \cap \bar{C}$

Teste

1 Considera as proposições:

$p: (-5)^2 < 5^2$ $\qquad$ $q: -\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$

Para as proposições podemos concluir que:

(A) *p é verdadeira* e *q é verdadeira.* **(B)** *p é verdadeira* e *q é falsa.*

(C) *p é falsa* e *q é verdadeira.* **(D)** *p é falsa* e *q é falsa.*

2 Indica qual das seguintes condições é universal em $\mathbb{Z}$.

(A) $x^2 - 1 \geqslant 0$ **(B)** $x^2 - 1 \leqslant 0$ **(C)** $x^2 + 1 \geqslant 0$ **(D)** $x^2 - 1 \leqslant 0$

3 Sejam a e b duas proposições, sendo a verdadeira, podemos concluir que:

(A) $a \Rightarrow b$ é verdadeira qualquer que seja o valor lógico de b.

(B) $a \Leftrightarrow b$ é verdadeira qualquer que seja o valor lógico de b.

(C) $a \wedge b$ é verdadeira qualquer que seja o valor lógico de b.

(D) $a \vee b$ é verdadeira qualquer que seja o valor lógico de b.

4 Qual das seguintes expressões é equivalente à negação da proposição "Ana está na escola ou Pedro está no trabalho" de acordo com as leis de De Morgan?

(A) Ana não está na escola ou Pedro não está no trabalho.

(B) Ana não está na escola e Pedro não está no trabalho.

(C) Ana está na escola e Pedro não está no trabalho.

(D) Ana está na escola ou Pedro não está no trabalho.

5 O possível contrarrecíproco de "Se souberes nadar não te afogas facilmente" é:

(A) Se não souberes nadar, afogas-te facilmente.

(B) Facilmente te afogas se não souberes nadar.

(C) Não te afogas facilmente se souberes nadar.

(D) Saber nadar implica não te afogares facilmente.

6 Sejam F e G dois conjuntos, se $F \subset G$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) Todos os elementos de F estão em G.

(B) Todos os elementos de G estão em F.

(C) F e G são complementares.

(D) F e G são iguais.

7 Escreve, em linguagem corrente, a negação das seguintes proposições:

7.1. O Martim tem 8 anos e é estudante.

7.2. Se a Margarida tem 7 anos, então é estudante.

7.3. A Luana é brasileira ou nasceu no Brasil.

8 Sejam a e b duas proposições. Simplifica as seguintes expressões utilizando as propriedades das operações lógicas.

$$a \vee (b \wedge \sim a)$$

9 Seja a uma proposição verdadeira e b uma proposição falsa.

9.1. Determina o valor lógico de $\sim a \vee b \implies \sim b$.

9.2. Determina o valor lógico da proposição c, sabendo que $a \wedge c \implies b$ é uma proposição falsa.

10 Considera os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$.
Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

10.1. $\forall x \in A,\ x < 8$

10.2. $\forall x \in A,\ 2x$ *é um número par*

10.3. $\forall x \in A,\ x$ *é um número primo*

10.4. $\forall x \in A,\ x \in B$

10.5. $\exists x \in B: \frac{x}{2} \in A$

10.6. $\exists x: x \notin A \wedge x \in B \wedge x < 3$

11 Considera, no universo $U = \{-3; -1; 0; 2; 4\}$, os seguintes conjuntos:
$A = \{x: x < 4\}$; $B = \{x: x^2 < 4\}$; $C = \{x: x \leqslant 0\}$
Determina em extensão:

11.1. B

11.2. C

11.3. $A \cup B$

11.4. $B \cap C$

11.5. $\bar{A} \cap C$

11.6. $\overline{\bar{A} \cup B}$

12 Resolve, em $\mathbb{R}$, a condição: $x^2 - 9 > 0 \vee x \geqslant 8$.

13 Considera, em $\mathbb{R}$, as condições: $p(x): x < 4$ e $q(x): x \geqslant 7$.

13.1. Representa na forma de intervalo o conjunto $\{x \in \mathbb{R}: \sim p(x) \wedge \sim q(x)\}$.

13.2. Justifica que a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) \implies \sim q(x)$ é verdadeira.

13.3. Apresenta, em extensão, o conjunto $\{x \in \mathbb{N}: \sim (p(x) \vee q(x))\}$.

14 Demonstra, por contrarrecíproco, que:
"Se o quadrado de um número inteiro n é ímpar, então n é ímpar".


2
M

Métodos de apoio à decisão

O que vou aprender neste tema

Desde as assembleias democráticas, na Antiga Grécia, até as eleições modernas, a forma como tomamos decisões coletivas evoluiu significativamente. Este tema, “Métodos de Apoio à Decisão”, aborda dois subtemas principais: a Teoria matemática das eleições e a Teoria da partilha equilibrada, que te ajudam a entender como as decisões podem ser feitas de maneira justa e eficiente.

Uma pintura de Philipp Foltz, do século XIX, representando um discurso do estadista grego Péricles.

A Teoria matemática das eleições explora o conceito de votar e a importância das eleições, bem como diferentes sistemas de votação, critérios de justiça e os limites para melhorar esses sistemas. Desde a votação majoritária até ao voto preferencial, diferentes métodos tentam capturar a “voz” das populações de maneira justa, apesar dos desafios e das imperfeições inerentes. Neste tema também vais conhecer e compreender melhor os sistemas de votação utilizados em Cabo Verde.

O subtema Teoria da partilha equilibrada trata da divisão justa de recursos, quer seja um bem indivisível, como uma casa, ou um recurso divisível, como dinheiro. A matemática fornece métodos para garantir que todos percebam a divisão como justa. A Teoria da partilha equilibrada aborda problemas de partilha, desde a divisão discreta até à contínua, procurando sempre a equidade.

Este tema oferece uma visão fundamental sobre como a matemática e a teoria das decisões podem ser aplicadas para resolver problemas complexos e promover a justiça em processos coletivos e individuais.

O que vou aprender neste tema

2.1. Teoria matemática das eleições

- Perceber a importância da matemática aplicada a algumas questões sociais.
- Compreender os diferentes sistemas de votação.
- Compreender como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições.
- Compreender que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes.
- Analisar algumas situações paradoxais.
- Compreender que há limitações à melhoria dos sistemas de eleições.
- Resolver problemas de modelação matemática no contexto da vida real.
- Resolver problemas e atividades de investigação tirando partido da tecnologia (calculadora gráfica, GeoGebra e folha de cálculo, por exemplo).
- Desenvolver competências sociais de intervenção.

2.2. Teoria da partilha equilibrada

- Compreender a problemática da partilha equilibrada.
- Experimentar os algoritmos usados em situações de partilha no caso contínuo e no caso discreto.
- Compreender que a aplicação de algoritmos de partilha diferentes pode produzir resultados diferentes.
- Conceber e analisar estratégias variadas de resolução de problemas e criticar os resultados obtidos.
- Compreender e construir argumentos matemáticos e raciocínios lógicos.
- Resolver problemas de modelação matemática no contexto da vida real.
- Resolver problemas e atividades de investigação tirando partido da tecnologia (calculadora gráfica, GeoGebra e folha de cálculo, por exemplo).

Antes de começar

1 **Na escola da Mayra, todos os alunos foram chamados a participar numa votação para eleger a nova cor das paredes exteriores do edifício principal. A escola da Mayra tem 1450 alunos.**

Estava decidido que: se uma cor não obtivesse maioria absoluta, as duas cores mais votadas passariam a uma final. No dia da eleição da cor, votaram 958 alunos.

Cores	N.º de votos
Azul	285
Cinzento	42
Verde	345
Branco	163
Vermelho	123

A tabela apresenta os resultados obtidos na votação.

1.1. Indica, justificando, se, com esta votação, é possível decidir a cor para pintar o edifício.

1.2. Se existir uma final para a votação, que cores vão a eleição?

1.3. Determina o número de alunos que não votaram (abstenção) e indica a sua percentagem em relação ao número total de alunos.

1.4. O Mário disse à Mayra: "*Tenho a certeza que na final a cor verde vai ganhar*". Concordas com o Mário? Justifica a tua resposta.

2 **A Associação "Ilha Sustentável" é uma associação local que se dedica à realização de atividades ambientais. Nos últimos anos tem realizado diversas atividades que protegem o ambiente e que aumentam o bem-estar da população da ilha e de quem a visita.**

Este ano, os associados vão eleger a nova direção da associação para os próximos quatro anos. Ganha as eleições a equipa que obtiver maior pontuação na votação.

Os estatutos da associação estabelecem três tipos de sócios:

- Sócio *pi pitxi*, membros há menos de 5 anos – cada voto vale 1 ponto.
- Sócio *fó*, membros há 5 ou mais anos e menos de 10 anos – cada voto vale 2 pontos.
- Sócio *pi ghã*, membros há 10 ou mais anos – cada voto vale 3 pontos.

A tabela ao lado apresenta o número de votos obtidos pelas equipas, por cada tipo de sócio.

	Sócio *pi pitxi*	Sócio *fó*	Sócio *pi ghã*
Equipa X	24	10	11
Equipa Y	5	15	16
Equipa Z	12	30	2

2.1. Qual foi a equipa que obteve mais votos?

2.2. Qual foi a equipa que ganhou?

2.3. Consideras correto o método utilizado pela associação? Justifica a tua resposta. Apresenta vantagens e desvantagens.

2 Métodos de apoio à decisão

2.1. Teoria matemática das eleições

2.1.1. Introdução – A sociedade e as eleições

Votar é o ato de expressar uma escolha ou opinião numa decisão coletiva.

Em Cabo Verde, como em muitas democracias, votar é um direito fundamental dos cidadãos, que lhes permite participar no processo democrático, escolhendo os seus representantes e influenciando as políticas públicas. O voto pode ser exercido para diferentes objetivos, como são exemplo as eleições presidenciais, as legislativas e as autárquicas. O ato de votar é uma componente essencial para assegurar que os eleitos refletem a vontade do povo e funciona como um mecanismo de responsabilidade e transparência.

O voto de cada cidadão é secreto, ninguém pode ser obrigado a revelar o seu sentido de voto.

As **eleições** são processos formais pelos quais os cidadãos de um país escolhem indivíduos para ocupar cargos públicos. Em Cabo Verde, as eleições são realizadas de maneira periódica e são fundamentais para a manutenção do sistema democrático. Os eleitores cegos, ou que possuam uma deficiência física visível que os impeça de realizar sozinhos o ato de votar, têm o direito de votar acompanhados por um cidadão eleitor da sua escolha. Esse acompanhante não pode ser um candidato nem um representante de um candidato.

Em Cabo Verde, o **direito de votar** é garantido pela Constituição e regulado pela legislação eleitoral. Para ser eleitor, a pessoa deve cumprir os seguintes requisitos:

- **Idade:** deve ter pelo menos 18 anos de idade no dia da eleição.
- **Nacionalidade:** deve ser cidadão cabo-verdiano.
- **Registo eleitoral:** deve estar registado como eleitor. O registo eleitoral é necessário para assegurar que o eleitor esteja listado e possa votar nas eleições.

Existem vários tipos de eleições no nosso país.

Eleições presidenciais

As **eleições presidenciais** são realizadas para eleger o Presidente da República, que é o Chefe de Estado de Cabo Verde. O presidente é eleito por voto popular direto e serve um mandato de cinco anos, podendo ser reeleito por mais um mandato consecutivo.

Na eleição ao cargo de Presidente da República é eleito o candidato que conseguir a **maioria absoluta** dos votos. A maioria absoluta consiste em alcançar uma quantidade de votos superior à metade dos votos realizados.

O sistema de representação maioritário é realizado a duas voltas. Ou seja, se na primeira volta nenhum dos candidatos obtiver maioria absoluta, é realizada uma segunda volta com os dois candidatos mais votados na primeira volta.

Presidentes da República de Cabo Verde

Presidentes	Período do mandato		Imagem
Aristides Pereira (1923-2011)	8 de julho de 1975	22 de março de 1991	
António Mascarenhas Monteiro (1944-2016)	22 de março de 1991	22 de março de 2001	
Pedro Pires (n.1934)	22 de março de 2001	9 de setembro de 2011	
Jorge Carlos Fonseca (n.1950)	9 de setembro de 2011	9 de novembro de 2021	
José Maria Neves (n.1960)	9 de novembro de 2021	Presente	

Para ser candidato a Presidente da República de Cabo Verde, deve-se atender a uma série de requisitos estabelecidos pela Constituição e pela legislação eleitoral.

Os principais critérios incluem:

- **Nacionalidade:** deve ser cidadão cabo-verdiano de origem.
- **Idade:** deve ter pelo menos 35 anos de idade.
- **Capacidade civil e política:** deve ter pleno gozo dos direitos civis e políticos. Isso significa que não pode estar privado desses direitos por sentença judicial transitada em julgado.
- **Residência:** deve ter residido em Cabo Verde por pelo menos três anos consecutivos imediatamente antes da data da eleição.
- **Elegibilidade:** não pode estar em situação de inelegibilidade, que inclui casos de crimes graves, corrupção ou outras infrações que resultem na perda de direitos políticos.

Além destes requisitos, o candidato deve ser formalmente apresentado por um partido político ou por um grupo de cidadãos eleitores. A candidatura deve ser apoiada por um número mínimo de assinaturas de eleitores, conforme determinado pela legislação eleitoral. Esses requisitos garantem que os candidatos a Presidente da República tenham um compromisso claro com o país e estejam aptos a representar os interesses da nação.

Para as eleições presidenciais, está definido no Código Eleitoral dois círculos eleitorais: o Círculo Eleitoral Nacional, para o território nacional; e o Círculo Eleitoral do Estrangeiro, para o conjunto dos países estrangeiros onde Cabo Verde tem estabelecida representação diplomática. Deste modo, podem participar cabo-verdianos emigrantes em várias partes do mundo.

Exercícios

1 **Já possuis todos os requisitos para usufruíres do direito de votar?**
Indica os requisitos que possuis e os que não possuis, referindo o que deverá acontecer para que possas votar.

2 **Para cada uma das seguintes afirmações, indica se são verdadeiras ou falsas, justificando as falsas.**

a) Qualquer cidadão cabo-verdiano pode votar ao fazer 18 anos.

b) Em Cabo Verde, as mulheres não podem votar.

c) Um cidadão cabo-verdiano registado como eleitor tem possibilidade de votar no estrangeiro para as eleições presidenciais.

d) Qualquer cidadão cabo-verdiano de origem, com pelo menos 35 anos de idade, pode candidatar-se a Presidente da República.

e) Até 2010, Cabo Verde teve três presidentes da República.

f) É possível um Presidente da República de Cabo Verde estar no cargo por 15 anos consecutivos.

g) O direito de voto pode ser exercido, em Cabo Verde, em várias eleições: presidenciais, legislativas e autárquicas.

3 **Desde 1975, qual foi o Presidente da República Democrática de Cabo Verde com um mandato de maior duração? Justifica a tua resposta.**

4 **A seguinte tabela apresenta o número de votos, e respetiva percentagem, obtidos pelos seis candidatos às eleições presidenciais de 2021.**

Círculo eleitoral (n.° de votos e %)	Fernando Rocha Delgado	Gilson J. dos Santos Alves	José Maria Pereira Neves	Carlos Alberto W. C. Veiga	Hélio de Jesus Pina Sanches	Casimiro J. Lopes de Pina
Nacional	2457	1332	87440	72800	2031	3134
	1,44%	0,78%	51,27%	42,69%	1,19%	1,84%
Estrangeiro	61	78	8595	5803	103	211
	0,41%	0,52%	57,67%	38,93%	0,69%	1,42%
Total	2518	1410	96035	78603	2134	3345
	1,36%	0,76%	51,79%	42,39%	1,15%	1,80%

Fonte: I Série do Boletim Oficial do dia 25 de outubro de 2021

4.1. Qual foi o candidato vencedor?

4.2. Sabendo que estes resultados foram obtidos na primeira volta, houve necessidade de se realizar uma segunda volta? Justifica a tua resposta.

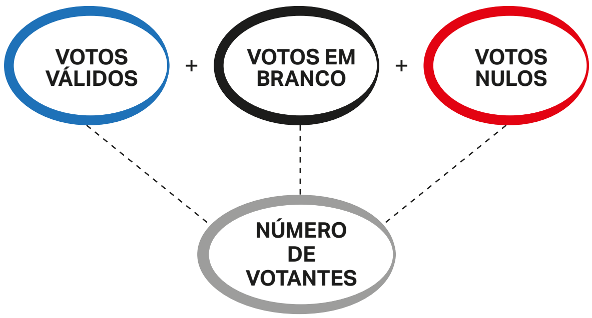
4.3. Determina o número de votos válidos em território nacional.

4.4. Determina o número total de pessoas que votaram no estrangeiro, sabendo que o apuramento no círculo eleitoral do estrangeiro registou 142 votos brancos e 85 votos nulos.

4.5. Sabe-se que estavam inscritos nos cadernos de recenseamento 398 690 eleitores e que, na eleição, se registaram 4295 votos em branco e 1592 votos nulos. Determina:

a) o número total de pessoas que votaram;

b) a taxa de abstenção registada e interpreta o resultado no contexto do problema.



Eleições legislativas

O Parlamento de Cabo Verde é constituído por uma única câmara, designada Assembleia Nacional. As **eleições legislativas** são realizadas para eleger os deputados, membros da Assembleia Nacional. Os deputados são eleitos por voto popular direto, em cada círculo eleitoral, e servem um mandato de cinco anos. A Assembleia Nacional é responsável por conceber e aprovar leis, além de fiscalizar as ações do Governo.

Para a eleição dos deputados à Assembleia Nacional estão definidos um total de 13 círculos eleitorais, sendo 10 no território nacional e três no estrangeiro. Há três círculos de grande dimensão devido ao maior número de eleitores registados: Santiago Sul; Santiago Norte e São Vicente. Há um círculo de dimensão média, a ilha de Santo Antão. Depois, existem nove círculos de pequena dimensão: São Nicolau, Sal, Boa Vista, Maio, Fogo, Brava, África, Américas e Europa e Resto do Mundo.

A Assembleia Nacional é composta por 72 deputados. O número de deputados é baseado na dimensão demográfica de cada círculo eleitoral. Assim, os eleitores do círculo de Santiago Sul elegem 19 deputados, os eleitores de Santiago Norte elegem 14 deputados e assim sucessivamente, conforme indicado na tabela.

Círculo eleitoral	Número de deputados
Santiago Sul	19
Santiago Norte	14
São Vicente	11
Santo Antão	6
São Nicolau	2
Sal	3
Boa Vista	2
Maio	2
Fogo	5
Brava	2
África	2
Américas	2
Europa e Resto do Mundo	2

Como a dimensão demográfica varia ao longo dos anos, o mínimo de deputados para cada círculo eleitoral pode também variar.

Exercícios

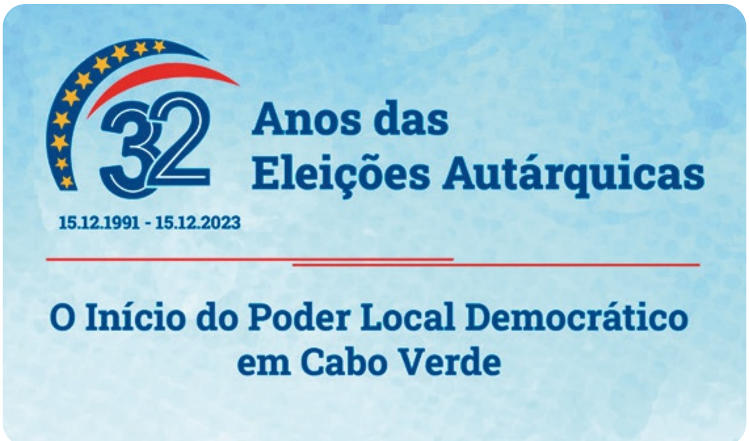
5 **Quantos deputados para a Assembleia Nacional são eleitos através do círculo da Boa Vista nas eleições legislativas?**

6 **Nas eleições legislativas, quais são os círculos eleitorais que elegem menos deputados?**

7 **Os eleitores inscritos nos círculos de Santiago Sul, Santiago Norte e São Vicente podem eleger mais de metade dos deputados para a Assembleia Nacional? Justifica a tua resposta.**

Eleições autárquicas

Nas **eleições autárquicas** são eleitos os representantes locais, como presidentes de câmaras municipais e membros das assembleias municipais. Estas eleições ocorrem a cada quatro anos e são essenciais para a governação local, fazendo-se a gestão das autarquias.



Nas eleições autárquicas, cada eleitor preenche dois boletins de voto:

- um boletim de voto para eleger os membros da Assembleia Municipal;
- um boletim de voto para eleger os membros da Câmara Municipal (vereadores e presidente).

O presidente da Câmara é o cidadão que encabeça a lista mais votada na eleição para Câmara Municipal.

O número de membros da Assembleia Municipal e da Câmara Municipal depende do número de habitantes do respetivo município, conforme consta da tabela seguinte.

Número de Membros da Assembleia e Câmara Municipal		
N.º de habitantes do município	**Membros da Assembleia Municipal**	**Membros da Câmara Municipal (presidentes e vereadores)**
Superior a 30 000	21	9
De 10 000 a 30 000	17	7
Inferior a 10 000	13	5

Fonte: Direção-Geral de Apoio ao Processo Eleitoral (DGAPE): https://dgape.cv/tipos-de-eleicao/

Os membros da Assembleia Municipal são eleitos através do sistema de representação proporcional, utilizando-se o **método de Hondt**.

Os membros da Câmara Municipal são eleitos através do **sistema maioritário**, conquistando todos os mandatos a lista que obtiver a maioria absoluta dos votos válidos. Não havendo maioria absoluta, utiliza-se o **sistema de representação proporcional**, convertendo os votos em mandatos, de acordo com o método de Hondt.

O sistema maioritário, o sistema de representação proporcional e o método de Hondt serão aprofundados neste subtema "Teoria matemática das eleições".

Exemplo 1: Assembleia Municipal

Na seguinte imagem, apresentam-se os resultados obtidos nas eleições autárquicas de 2020, para eleger os membros da Assembleia Municipal, no município de São Domingos.


Resultados Eleições autárquicas 2020
São Domingos

Câmara Municipal

INSCRITOS	VOTANTES
9544	6945
VOTOS EM BRANCO 115	% VOTOS EM BRANCO 1,7
VOTOS NULOS 82	% VOTOS NULOS 1,2

MPD	N.º VOTOS 2699	38,9 %
PAICV	N.º VOTOS 3704	53,3 %
AMIESD	N.º VOTOS 345	5,0 %

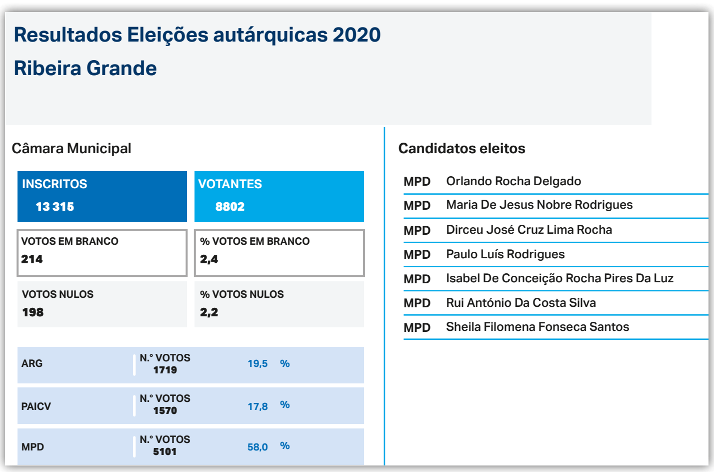
Candidatos eleitos

PAICV	Felismina Dos Santos Moreno
MPD	Admilson Manuel Monteiro Moniz
PAICV	Fernando Jorge Moniz Pereira
MPD	Carla Romira Freire Moreira
PAICV	Márcio Evandro Andrade Furtado Mendonça Júnior
PAICV	Zenaida Vaz Gonçalves
MPD	José Jorge Lopes Fernandes
PAICV	Pedro Gonçalves Monteiro
MPD	Adilson Lopes Pinto
PAICV	Edmilson Gonçalves Tavares
MPD	Vera Patrícia Andrade Rodrigues
PAICV	Maria De Lourdes Ferreira Martins
PAICV	Ulisses De Jesus Afonso Monteiro Borges
MPD	Adilson Da Costa De Carvalho
PAICV	Renato Mendonça Pinto Frederico
MPD	João Da Luz Ferreira Tavares
PAICV	Zuleica Maria Ferreira Lopes

Como os membros da Assembleia Municipal são eleitos através do sistema de representação proporcional, mesmo existindo uma lista com maioria absoluta, os lugares de deputados municipais são distribuídos proporcionalmente pelas diferentes listas, utilizando-se o método de Hondt.

Exemplo 2: Câmara Municipal (com maioria absoluta)

Na seguinte imagem apresentam-se os resultados obtidos nas eleições autárquicas de 2020, para eleger os membros da Câmara Municipal, no município da Ribeira Grande.


Resultados Eleições autárquicas 2020
Ribeira Grande

Câmara Municipal

INSCRITOS	VOTANTES
13 315	8802
VOTOS EM BRANCO 214	% VOTOS EM BRANCO 2,4
VOTOS NULOS 198	% VOTOS NULOS 2,2

ARG	N.º VOTOS 1719	19,5 %
PAICV	N.º VOTOS 1570	17,8 %
MPD	N.º VOTOS 5101	58,0 %

Candidatos eleitos

MPD	Orlando Rocha Delgado
MPD	Maria De Jesus Nobre Rodrigues
MPD	Dirceu José Cruz Lima Rocha
MPD	Paulo Luís Rodrigues
MPD	Isabel De Conceição Rocha Pires Da Luz
MPD	Rui António Da Costa Silva
MPD	Sheila Filomena Fonseca Santos

Como a lista mais votada obteve maioria absoluta (mais de 50% dos votos válidos), a lista conquista todos os mandatos.

Exemplo 3: Câmara Municipal (sem maioria absoluta)

Na seguinte imagem, apresentam-se os resultados obtidos nas eleições autárquicas de 2020, para eleger os membros da Câmara Municipal, no município de São Vicente.

Resultados Eleições autárquicas 2020

São Vicente

Câmara Municipal

INSCRITOS	VOTANTES
52 547	29 734

VOTOS EM BRANCO	% VOTOS EM BRANCO
608	2,0

VOTOS NULOS	% VOTOS NULOS
355	1,2

MIMS	N.º VOTOS 2357	7,9 %
MPD	N.º VOTOS 11 146	37,5 %
UCID	N.º VOTOS 9416	31,7 %
PAICV	N.º VOTOS 5851	19,7 %

Candidatos eleitos

MPD	Augusto César Lima Neves
UCID	António Delgado Monteiro
PAICV	Albertina Lopes Da Graça
MPD	Silmara Sueli Sousa
UCID	Neusa Isabel De Pina Araújo Sança
MPD	Rodrigo Regalia Rendall Leite De Oliveira Martins
UCID	Anilton Rodrigues Ferreira Andrade
PAICV	Celeste Dias Sousa Da Paz
MPD	José Carlos Da Luz

Como nenhuma lista obteve maioria absoluta (mais de 50% dos votos válidos), utiliza-se o sistema de representação proporcional, convertendo os votos em mandatos, de acordo com o método de Hondt.

Exercícios

8 **Para cada uma das seguintes afirmações, indica se são verdadeiras ou falsas, justificando as falsas.**

a) As eleições autárquicas realizam-se a cada seis anos.

b) Nas eleições autárquicas só podem votar eleitores com mais de 21 anos.

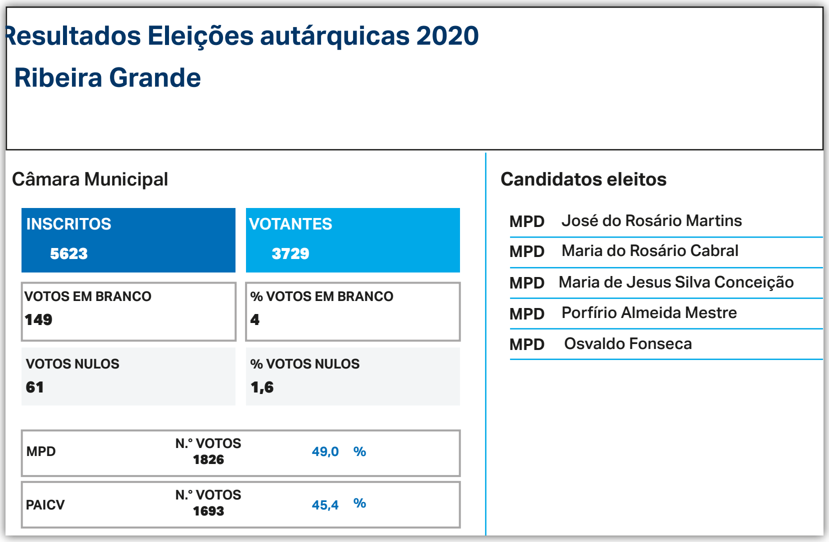
c) Nas eleições autárquicas cada eleitor preenche dois boletins de voto.

d) Todos os municípios têm o mesmo número de membros da Assembleia Municipal.

e) Os membros da Assembleia Municipal são eleitos através do sistema de representação proporcional, utilizando-se o método de Hondt.

f) Os membros da Câmara Municipal são eleitos através do sistema de representação proporcional, utilizando-se o método de Hondt.

9 Na seguinte imagem, apresentam-se os resultados das eleições autárquicas de 2020, para eleger os membros da Câmara Municipal, no município da Ribeira Grande.



Resultados Eleições autárquicas 2020
Ribeira Grande

Câmara Municipal

INSCRITOS 5623	VOTANTES 3729
VOTOS EM BRANCO 149	% VOTOS EM BRANCO 4
VOTOS NULOS 61	% VOTOS NULOS 1,6

MPD	N.º VOTOS 1826	49,0 %
PAICV	N.º VOTOS 1693	45,4 %

Candidatos eleitos

MPD	José do Rosário Martins
MPD	Maria do Rosário Cabral
MPD	Maria de Jesus Silva Conceição
MPD	Porfírio Almeida Mestre
MPD	Osvaldo Fonseca

9.1. Determina a taxa de abstenção registada nas eleições autárquicas de 2020, no município da Ribeira Brava.

9.2. Considerando os resultados obtidos, deve utilizar-se o sistema de representação proporcional, convertendo os votos em mandatos? Justifica a tua resposta.

2.1.2. Sistemas de votação

Os sistemas de votação são métodos matemáticos e estatísticos utilizados para recolher e interpretar as preferências de um grupo de indivíduos.

Os sistemas de votação desempenham um papel crucial em eleições políticas, decisões corporativas e até mesmo em competições e programas de TV.

A escolha do sistema de votação pode influenciar significativamente o resultado e a perceção de justiça acerca do processo.

Um **sistema de votação** é um conjunto de regras que determinam como as preferências expressas pelos votantes são recolhidas, contabilizadas e transformadas em decisão coletiva.

Existem diversos sistemas de votação. Vamos abordar os seguintes:

- Sistemas maioritários
- Sistemas preferenciais
- Sistemas de aprovação
- Sistemas de representação proporcional

2.1.2.1. Sistemas maioritários

Os sistemas de votação maioritários, tanto de uma volta quanto de duas ou mais voltas, são amplamente utilizados em várias democracias do mundo. A escolha entre esses sistemas depende de uma série de fatores, incluindo a cultura política, a estrutura do Governo e as preferências dos eleitores.

Enquanto o sistema de uma volta é simples e rápido, o sistema de duas ou mais voltas assegura que o vencedor tenha apoio da maioria absoluta, contribuindo para uma maior legitimidade e representatividade.

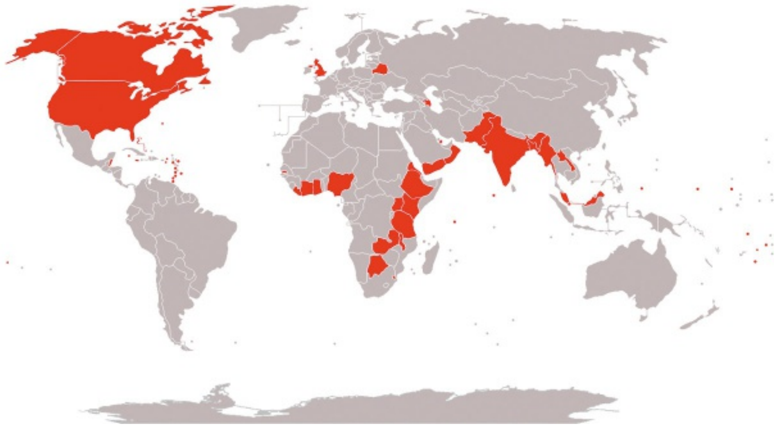
Sistema de maioria simples

No **Sistema de maioria simples** ou **Sistema maioritário de uma volta**, o candidato ou a proposta que recebe o maior número de votos numa única volta de votação é declarado vencedor, independentemente de ter obtido a maioria absoluta (mais de 50% dos votos).

Este sistema é caraterizado pela simplicidade e rapidez no apuramento. No entanto, podem acontecer situações em que o vencedor não tem o apoio da maioria dos eleitores.

Exemplo 4: Eleições gerais no Reino Unido

Nas eleições gerais no Reino Unido é utilizado o sistema de votação "first-past--the-post". O candidato com mais votos em cada distrito eleitoral vence, independentemente de obter a maioria absoluta.



À semelhança do Reino Unido, muitos países utilizam o sistema de votação de maioria simples, principalmente para eleições legislativas nacionais.

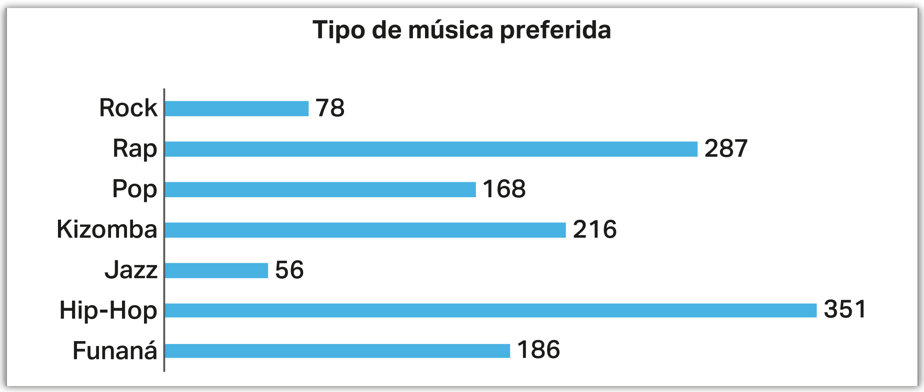
Exemplo 5: Eleições presidenciais no México (2006)

Nas eleições presidenciais realizadas no México, em 2006, Felipe Calderón venceu com 35,89% dos votos, uma margem muito estreita sobre o segundo colocado, Andrés Manuel López Obrador, que recebeu 35,32% dos votos.

https://www.brasildefato.com.br/especiais/cobertura-especial-or-eleicoes-no-mexico

Exercício

10 **Para saber qual o tipo de música preferido dos alunos de uma escola realizou-se um questionário. Os resultados estão apresentados no seguinte gráfico.**



10.1. Qual é o tipo de música que ganha a preferência dos alunos, utilizando o sistema de maioria simples?

10.2. Determina, com arredondamento às décimas, a percentagem de votos obtida por cada tipo de música.

10.3. Comenta a afirmação: "Os alunos gostam mais de *hip-hop* do que de *rap*".

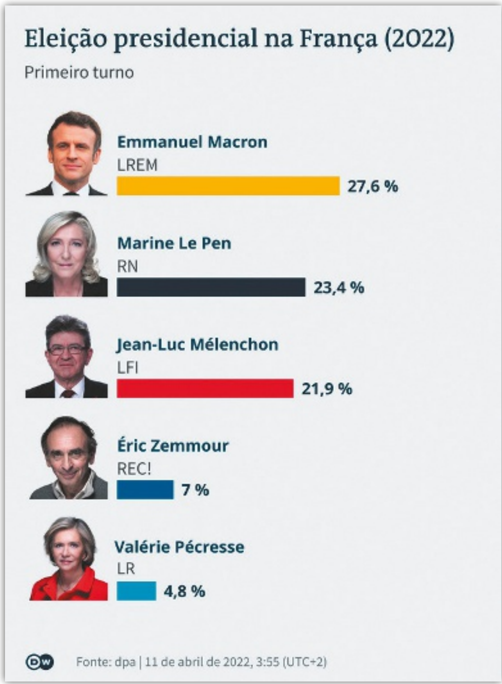
Sistema de maioria absoluta

No **sistema de maioria absoluta**, se nenhum candidato ou proposta obtiver a maioria absoluta (mais de 50% dos votos) na primeira volta, realiza-se uma segunda volta entre os dois candidatos ou propostas mais votadas. A segunda volta garante que o vencedor obtenha a maioria absoluta.

No sistema de maioria absoluta garante-se que o vencedor tem o apoio da maioria dos votantes, no entanto pode ser necessário uma segunda volta, acarretando, por vezes, mais custos.

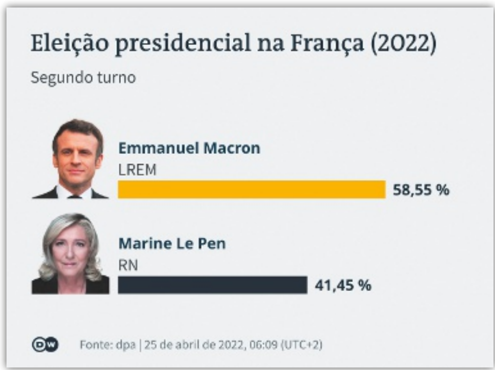
Exemplo 6: Eleições presidenciais em França

Nas eleições presidenciais, a França utiliza o sistema de duas voltas. Se nenhum candidato obtiver mais de 50% dos votos na primeira volta, realiza-se uma segunda volta entre os dois mais votados.



Na eleição presidencial francesa de 2017, nenhum candidato obteve, na primeira volta, maioria absoluta.

Realizada uma segunda volta, com os dois candidatos mais votados na primeira volta, foi possível eleger-se o novo presidente francês.



Exercícios

11 **A turma da Luana votou para eleger o desporto preferido para realizar um torneio. A tabela regista o número de votos obtidos por cada desporto.**

Modalidade desportiva	N.º de votos
Basquetebol	8
Atletismo	6
Futebol	9
Natação	1
Andebol	2
Ciclismo	1
Ginástica	1
Xadrez	2

11.1. Sabendo que todos os alunos da turma votaram e que todos os votos foram considerados válidos, indica o número de alunos da turma.

11.2. Que modalidade desportiva vence, se o sistema de eleição for maioritário simples? Justifica a tua resposta.

11.3. O que aconteceria se o sistema de eleição fosse de maioria absoluta? Justifica a tua resposta.

11.4. Que sistema de eleição consideras mais justo para esta situação? Apresenta vantagens e desvantagens.

12 **Para assumir a direção de um clube desportivo apresentaram-se três candidatos à liderança. Após cada candidato apresentar as suas propostas, a escolha foi sujeita a votação pelos sócios do clube. Não tendo sido registados votos brancos ou nulos, os resultados da votação estão apresentados na tabela seguinte.**

Candidato	Número de votos
A	1836
B	1148
C	1607

12.1. Determina, com arredondamento às décimas, a percentagem obtida por cada um dos candidatos.

12.2. Sabendo que o candidato A venceu, através de sistema maioritário, qual foi o tipo de sistema de maioria utilizado?

Sistema maioritário de duas ou mais voltas

O **sistema maioritário de mais de duas voltas** é uma variação que envolve múltiplas rodadas de votação. Se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta na primeira volta, realizam-se rodadas adicionais, eliminando gradualmente os candidatos com menos votos até que um candidato obtenha a maioria absoluta.

No sistema maioritário de duas ou mais voltas garante-se que o vencedor tem o apoio da maioria dos votantes, no entanto, pode envolver múltiplos atos eleitorais de votação até que um candidato alcance a maioria absoluta, acarretando por vezes mais custos.

Exemplo 7: Sistema maioritário de duas ou mais voltas

Para assumir o cargo de líder associativo, apresentaram-se quatro candidatos. Pelos estatutos da associação, utiliza-se o sistema maioritário de duas ou mais voltas em que, se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta na primeira volta, realizam-se rodadas adicionais, eliminando-se gradualmente os candidatos com menos votos até que um candidato obtenha a maioria absoluta.

Resultados obtido na primeira volta:

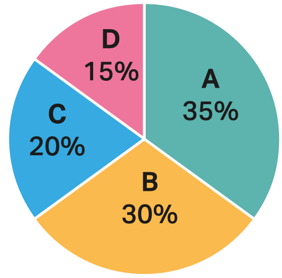
Candidato A: 35%

Candidato B: 30%

Candidato C: 20%

Candidato D: 15%

Como nenhum candidato obteve a maioria absoluta, o candidato D é eliminado e realiza-se uma segunda volta.



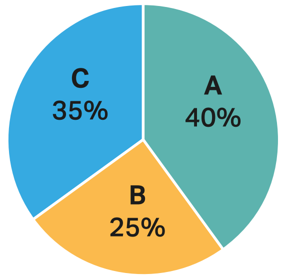
Resultados da segunda volta:

Candidato A: 40%

Candidato B: 25%

Candidato C: 35%

Como nenhum candidato obteve a maioria absoluta, o candidato B é eliminado e realiza-se uma segunda volta.

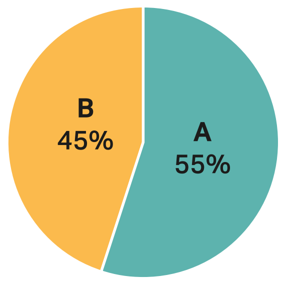


Resultados da terceira volta:

Candidato A: 55%

Candidato C: 45%

Como o candidato A obteve maioria absoluta, vence a eleição.



Exemplo 8: Eleição presidencial no Uruguai (1929)

Resultados da primeira volta:

Gabriel Terra: 47%   Juan Campisteguy: 41%

Outros candidatos dividiram os restantes votos.

Nenhum candidato obteve a maioria absoluta dos votos. O candidato com menos votos foi eliminado e realizou-se uma segunda volta.

Resultados da segunda volta:

Nenhum candidato obteve a maioria absoluta dos votos.

O candidato com menos votos foi eliminado e realizou-se uma terceira volta.

Resultados da terceira volta:

Uma terceira volta foi realizada, resultando na eleição de Gabriel Terra.

Exemplos históricos de eleições nacionais que chegaram à terceira volta são raros, pois a maioria dos sistemas eleitorais maioritários de múltiplas voltas geralmente resolve a eleição na segunda volta. No entanto, existem alguns contextos específicos em que ocorrem eleições com mais de duas voltas, especialmente em processos internos de partidos políticos ou eleições locais, em alguns países.

Exercício

13 **Numa determinada eleição, existem quatro candidatos:**

Candidato I ; Candidato II ; Candidato III ; Candidato IV .

Votaram, nessa eleição, 1000 eleitores e utilizou-se o sistema maioritário de duas ou mais voltas. Pressupondo que não existiram votos nulos, nem votos em branco:

13.1. É possível não se realizar uma segunda volta, sabendo que o candidato II obteve 260 votos e que o candidato IV obteve 289 votos na primeira volta? Justifica a tua resposta.

13.2. Num sistema em que, na falta de maioria absoluta, é eliminado o último classificado e realiza-se uma nova volta, é possível um candidato com 71 votos passar à segunda volta? Justifica a tua resposta.

13.3. Num sistema em que, na falta de maioria absoluta, é eliminado o último classificado e realiza-se uma nova volta, é possível um candidato com 251 votos não passar à segunda volta? Justifica a tua resposta.

2.1.2.2. Sistemas preferenciais

Os **sistemas preferenciais de votação** permitem que os eleitores classifiquem os candidatos por ordem de preferência. Ao invés de votar apenas num candidato, estes sistemas são projetados para refletir melhor as preferências dos eleitores e evitar a eleição de um candidato impopular que poderia vencer num sistema de votação simples.

Exemplo 9: Cenário de sistema preferencial de votação

Temos uma eleição para escolher o presidente de uma associação e temos três candidatos: o Leandro, a Kiara e a Melissa. Cinco eleitores participam na votação.

Passo 1: *Recolha dos votos*

Os eleitores classificam os candidatos por ordem de preferência.

As preferências escolhidas pelos eleitores são as seguintes:

Eleitores	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Eleitor 1	**Kiara**	Leandro	Melissa
Eleitor 2	**Leandro**	Melissa	Kiara
Eleitor 3	**Melissa**	Kiara	Leandro
Eleitor 4	**Kiara**	Melissa	Leandro
Eleitor 5	**Leandro**	Kiara	Melissa

Passo 2: *Contagem dos votos*

Na primeira rodada, contamos os votos de primeira preferência:

Leandro: 2 votos (eleitor 2 e eleitor 5)

Kiara: 2 votos (eleitor 1 e eleitor 4)

Melissa: 1 voto (eleitor 3)

Passo 3: *Eliminação do candidato com menos votos*

Como nenhum candidato recebeu mais de metade dos votos (3 votos ou mais), eliminamos o candidato com o menor número de votos.

A Melissa é eliminada.

Eleitores	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Eleitor 1	**Kiara**	Leandro	
Eleitor 2	**Leandro**		Kiara
Eleitor 3		**Kiara**	Leandro
Eleitor 4	**Kiara**		Leandro
Eleitor 5	**Leandro**	Kiara	

Passo 4: *Redistribuição dos votos*

Os votos de Melissa são redistribuídos de acordo com a próxima preferência dos eleitores que votaram nela. Os eleitores que votaram em Melissa como primeira opção foram o eleitor 3, que tinha Kiara como segunda opção.

Redistribuição:

A Kiara recebe 1 voto do eleitor 3

Agora, a contagem é:

Leandro: 2 votos (eleitor 2 e eleitor 5)

Kiara: 3 votos (eleitor 1, eleitor 3, eleitor 4)

Resultado final:

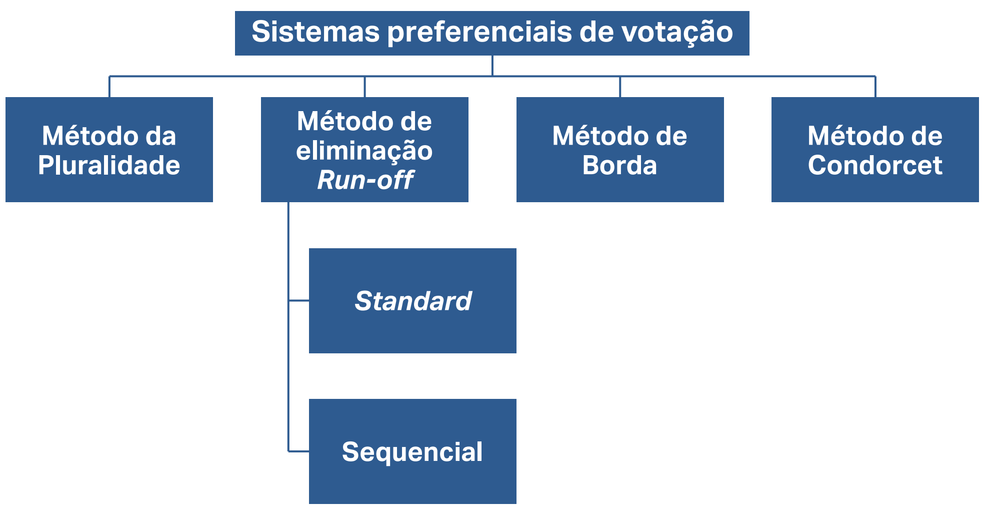
A Kiara tem mais da metade dos votos (3 de 5) e é declarada vencedora.

Este exemplo mostra como funciona uma possível votação por sistema preferencial com os candidatos Leandro, Kiara e Melissa.

Em eleições, e noutras situações de tomada de decisão, os sistemas de votação desempenham um papel crucial na determinação dos resultados finais. Entre os diversos sistemas disponíveis, os sistemas preferenciais oferecem uma maneira mais refinada de captar as preferências dos eleitores. Esses sistemas permitem que os eleitores classifiquem os candidatos por ordem de preferência, proporcionando uma visão mais completa das escolhas dos eleitores em comparação com o voto único tradicional. Neste contexto, exploraremos como esses sistemas preferenciais funcionam e as implicações de cada método na obtenção de resultados representativos e justos.

Nos sistemas preferenciais, estudamos quatro métodos distintos: o método de pluralidade, que considera apenas a primeira preferência de cada eleitor; o método de eliminação *run-off*, que possui variações – *standard* e sequencial – e elimina gradualmente os candidatos menos votados; o método de Borda, que atribui pontos com base na classificação de cada candidato; e o método de Condorcet, que compara cada candidato diretamente com os demais para determinar o vencedor.

Cada um desses métodos oferece uma abordagem única para a agregação das preferências dos eleitores, contribuindo para a escolha do candidato mais preferido pela maioria.



Organização dos dados em sistemas preferenciais de votação

A organização dos dados em sistemas preferenciais de votação é crucial para facilitar a análise e garantir a precisão dos resultados.

Uma estrutura bem organizada permite rastrear facilmente as preferências dos eleitores, realizar contagens e redistribuições de votos de forma eficiente e identificar rapidamente o candidato vencedor. Além disso, a clareza e a organização dos dados ajudam a manter a transparência do processo eleitoral, aumentando a confiança dos eleitores no sistema de votação.

Exemplo 10: Organização dos dados em sistemas preferenciais de votação

O exemplo anterior tratava de uma eleição para escolher o presidente de uma associação, com três candidatos: o Leandro, a Kiara e a Melissa.

Conforme se mostra na tabela, os eleitores podem ordenar, por preferência, os três candidatos de seis formas diferentes.

	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Ordenações possíveis, por preferência	Kiara	Leandro	Melissa
	Kiara	Melissa	Leadro
	Leandro	Kiara	Melissa
	Leandro	Melissa	Kiara
	Melissa	Leandro	Kiara
	Melissa	Kiara	Leandro

Se o número de eleitores aumenta, é importante organizarmos bem os dados para facilitar as contagens e para aplicar corretamente os procedimentos necessários.

Uma forma de organização dos dados, em sistemas preferenciais de votação, é a contagem de votos com a mesma ordem de preferência e organizar essa informação numa tabela.

Se na eleição para escolher o presidente da associação, com os três candidatos – o Leandro, a Kiara e a Melissa – em vez de cinco eleitores, tivéssemos 21 eleitores, uma forma de organizar os dados seria:

N.º de votos	7	7	6	1
1.ª preferência	Melissa	Leandro	Kiara	Melissa
2.ª preferência	Leandro	Melissa	Melissa	Kiara
3.ª preferência	Kiara	Kiara	Leandro	Leandro

Ao analisarmos a tabela, verificamos que:

- votaram 21 eleitores $(7+7+6+1=21)$
- sete eleitores colocaram como ordem de preferência:

1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Melissa	Leandro	Kiara

- sete eleitores colocaram como ordem de preferência:

1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Leandro	Melissa	Kiara

- seis eleitores colocaram como ordem de preferência:

1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Kiara	Melissa	Leandro

- um eleitor colocou como ordem de preferência:

1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
Melissa	Kiara	Leandro

- a Melissa foi a candidata com mais votos em primeira preferência, $7+1=8$.

Exercícios

14 **A seguinte tabela apresenta os resultados de uma votação fictícia, com quatro candidatos, A, B, C e D.**

N.º de votos	21	15	14	12	10	8
1.ª preferência	D	B	A	A	B	C
2.ª preferência	A	D	C	D	A	D
3.ª preferência	B	A	B	C	D	B
4.ª preferência	C	C	D	B	C	A

Analisa a tabela e responde às seguintes questões.

14.1. Quantas pessoas votaram?

14.2. Qual dos candidatos obteve mais votos em primeira preferência?

14.3. Qual dos candidatos obteve mais votos em segunda preferência?

14.4. Algum dos candidatos não obteve votos em segunda preferência?

14.5. Quantos votos obteve o candidato A em quarta preferência?

15 **Numa eleição com cinco candidatos utiliza-se o sistema preferencial de votação.**
De quantas maneiras diferentes pode votar um eleitor?
Explica o teu raciocínio.

Método da pluralidade

O método da pluralidade é o método mais conhecido e mais utilizado para se eleger um vencedor em processos eleitorais.

O método também é conhecido como "first-past-the-post", em que o candidato com o maior número de votos vence e cada eleitor vota apenas num único candidato.

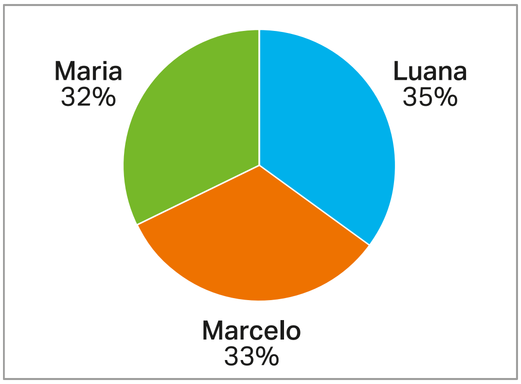
Exemplo 11: Eleição com o método da pluralidade

A turma do Daniel vai eleger um aluno da turma para representar os colegas na atividade "Assembleia dos jovens".

Como candidatos, temos a Luana, o Marcelo e a Maria.

Após cada elemento da turma votar, apuraram-se os seguintes resultados: Luana (35%), Marcelo (33%) e Maria (32%).

A Luana vence com 35% dos votos.



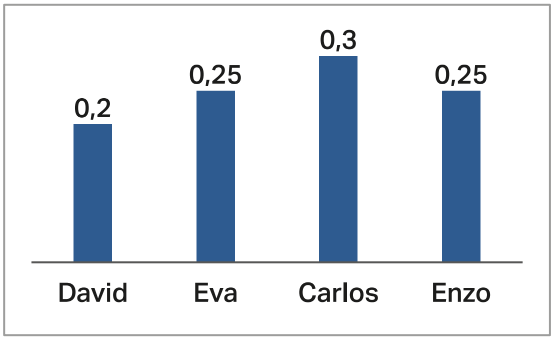
Procedimento de aplicação: método da pluralidade

Cada eleitor vota apenas num candidato, indicando sua primeira preferência. Após a coleta de todos os boletins de voto, realiza-se a sua contagem e o candidato que receber o maior número de votos de primeira preferência é declarado o vencedor.

Exercício

16 Concorreram quatro candidatos à presidência de um clube náutico: o David, a Eva, o Carlos e o Enzo.

Sabendo que se utilizou o método da pluralidade no processo de eleição, indica, analisando o gráfico, o vencedor.



Método de eliminação *run-off standard*

O **Método de eliminação *run-off standard*** é um sistema de votação preferencial em que os eleitores classificam os candidatos por ordem de preferência. Se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta nos votos de primeira preferência, os candidatos com o menor número de votos são eliminados, com a exceção dos dois mais votados, e os seus votos são redistribuídos de acordo com as próximas preferências pelos dois candidatos mais votados. O candidato que alcance a maioria absoluta é declarado vencedor.

Manual Interativo

Vídeo
Método de eliminação *run-off standard*

Exemplo 12: Aplicação do método de eliminação *run-off standard* (poucos eleitores)

A turma do Daniel, com 30 alunos, vai eleger novamente um aluno da turma, agora para representar os colegas na atividade "Conta um conto".

Como candidatos temos a Ellen (E), o Gil (G), o Tiago (T) e a Maria (M).

Após cada elemento da turma votar, apuraram-se os seguintes resultados:

Eleitores	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência	4.ª preferência
Eleitor 1	Ellen	Gil	Tiago	Maria
Eleitor 2	Tiago	Gil	Ellen	Maria
Eleitor 3	Gil	Ellen	Maria	Tiago
Eleitor 4	Maria	Tiago	Gil	Ellen
Eleitor 5	Ellen	Tiago	Maria	Gil
Eleitor 6	Gil	Maria	Ellen	Tiago
Eleitor 7	Tiago	Gil	Ellen	Maria
Eleitor 8	Maria	Ellen	Tiago	Gil
Eleitor 9	Ellen	Gil	Maria	Tiago
Eleitor 10	Gil	Tiago	Maria	Ellen
Eleitor 11	Maria	Gil	Ellen	Tiago
Eleitor 12	Tiago	Gil	Maria	Ellen
Eleitor 13	Ellen	Maria	Tiago	Gil
Eleitor 14	Gil	Ellen	Tiago	Maria
Eleitor 15	Maria	Tiago	Ellen	Gil
Eleitor 16	Tiago	Gil	Maria	Ellen
Eleitor 17	Ellen	Tiago	Gil	Maria
Eleitor 18	Gil	Maria	Tiago	Ellen
Eleitor 19	Maria	Ellen	Tiago	Gil
Eleitor 20	Tiago	Maria	Gil	Ellen
Eleitor 21	Ellen	Maria	Gil	Tiago
Eleitor 22	Gil	Tiago	Ellen	Maria
Eleitor 23	Maria	Ellen	Gil	Tiago
Eleitor 24	Tiago	Gil	Ellen	Maria
Eleitor 25	Ellen	Gil	Maria	Tiago
Eleitor 26	Gil	Ellen	Tiago	Maria
Eleitor 27	Ellen	Tiago	Maria	Gil
Eleitor 28	Tiago	Gil	Maria	Ellen
Eleitor 29	Ellen	Maria	Tiago	Gil
Eleitor 30	Gil	Tiago	Ellen	Maria

Contagem dos votos de primeira preferência:

Ellen: 9 votos; Gil: 8 votos; Tiago: 7 votos; Maria: 6 votos.

Como nenhum candidato recebeu a maioria absoluta dos votos de primeira preferência (mais de 15 votos), ainda não existe vencedor.

Portanto, os candidatos com o menor número de votos de primeira preferência são eliminados. Neste exemplo, a Maria e o Tiago são eliminados.

Vamos agora redistribuir os votos da Maria e do Tiago pelos outros candidatos, de acordo com a próxima preferência indicada nos boletins de voto.

Eleitores	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência	4.ª preferência
Eleitor 1	Ellen	Gil	Tiago	Maria
Eleitor 2	Tiago	Gil	Ellen	Maria
Eleitor 3	Gil	Ellen	Maria	Tiago
Eleitor 4	Maria	Tiago	Gil	Ellen
Eleitor 5	Ellen	Tiago	Maria	Gil
Eleitor 6	Gil	Maria	Ellen	Tiago
Eleitor 7	Tiago	Gil	Ellen	Maria
Eleitor 8	Maria	Ellen	Tiago	Gil
Eleitor 9	Ellen	Gil	Maria	Tiago
Eleitor 10	Gil	Tiago	Maria	Ellen
Eleitor 11	Maria	Gil	Ellen	Tiago
Eleitor 12	Tiago	Gil	Maria	Ellen
Eleitor 13	Ellen	Maria	Tiago	Gil
Eleitor 14	Gil	Ellen	Tiago	Maria
Eleitor 15	Maria	Tiago	Ellen	Gil
Eleitor 16	Tiago	Gil	Maria	Ellen
Eleitor 17	Ellen	Tiago	Gil	Maria
Eleitor 18	Gil	Maria	Tiago	Ellen
Eleitor 19	Maria	Ellen	Tiago	Gil
Eleitor 20	Tiago	Maria	Gil	Ellen
Eleitor 21	Ellen	Maria	Gil	Tiago
Eleitor 22	Gil	Tiago	Ellen	Maria
Eleitor 23	Maria	Ellen	Gil	Tiago
Eleitor 24	Tiago	Gil	Ellen	Maria
Eleitor 25	Ellen	Gil	Maria	Tiago
Eleitor 26	Gil	Ellen	Tiago	Maria
Eleitor 27	Ellen	Tiago	Maria	Gil
Eleitor 28	Tiago	Gil	Maria	Ellen
Eleitor 29	Ellen	Maria	Tiago	Gil
Eleitor 30	Gil	Tiago	Ellen	Maria

Contagem após redistribuição dos votos da Maria e do Tiago:

Ellen: $9+4=13$ votos (9 votos de $1.^{a}$ preferência $+4$ votos redistribuídos)

Gil: $8+9=17$ votos (8 votos de $1.^{a}$ preferência $+9$ votos redistribuídos)

Assim, o Gil é o vencedor com 17 votos.

Procedimento de aplicação: eliminação *run-off standard*

Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência.
Inicialmente, são contados os votos de primeira preferência de todos os eleitores.
Se um candidato obtiver a maioria absoluta desses votos, é declarado vencedor.
Caso contrário, eliminam-se todos os candidatos com o menor número de votos de primeira preferência, com a exceção dos dois candidatos mais votados.
Os votos dos candidatos eliminados são redistribuídos pelos candidatos restantes, com base na primeira preferência indicada dos eleitores.
O candidato que obtenha a maioria absoluta dos votos redistribuídos é declarado vencedor.

Exemplo 13: Aplicação do método de eliminação *run-off standard* (Número elevado de eleitores)

No exemplo anterior aplicámos o método de eliminação *run-off standard* num processo de votação com 30 eleitores. À medida que o número de votantes aumenta, torna-se mais complexo organizar e aplicar o método de eliminação *run-off standard*.

Na eleição para dirigente da associação juvenil comunitária da vila da Joana concorreram quatro candidatos (A, B, C e D), tendo votado 100 jovens.

A seguinte tabela apresenta as votações organizadas.

N.º de votos	40	25	20	10	5
1.ª preferência	C	B	A	D	C
2.ª preferência	B	A	D	C	A
3.ª preferência	A	C	C	B	B
4.ª preferência	D	D	B	A	D

Contagem de votos iniciais (1.ª preferência):

A: 20 votos

B: 25 votos

C: 45 votos $(40+5)$

D: 10 votos

Nenhum candidato tem mais de 50 votos, então o candidato D e A são eliminados.

N.º de votos	**40**	**25**	**20**	**10**	**5**
1.ª preferência	C	B	~~A~~	~~D~~	C
2.ª preferência	B	~~A~~	~~D~~	C	~~A~~
3.ª preferência	~~A~~	C	C	B	B
4.ª preferência	~~D~~	~~D~~	B	~~A~~	~~D~~

Os votos do candidato D e A são redistribuídos de acordo com o candidato mais preferido (entre C e B).

Contagem após redistribuição dos votos:

B : 25 votos

C : 75 votos (45 + 20 +10)

Agora, o candidato C tem 75 votos, que é mais de 50% do total (100 votos).

Logo, o candidato C é o vencedor.

Exercícios

17 **O Amílcar é responsável por organizar a eleição que permitirá eleger o representante da festa da sua comunidade. Concorreram três candidatos a representante: o José, a Maria e o João.**

Há 150 votantes, e cada votante pode classificar os candidatos por ordem de preferência.

O Amílcar quer aplicar o método de eliminação *run-off standard.*

As preferências dos votantes foram organizadas pelo Amílcar da seguinte forma:

Preferência	**Número de votos**
José > Maria > João	40
José > João > Maria	30
Maria > João > José	35
Maria > José > João	20
João > José > Maria	15
João > Maria > José	10

Ajuda o Amílcar a apurar o vencedor. Justifica o apuramento do vencedor, apresentando os procedimentos necessários na aplicação do método de eliminação *run-off standard*.

Manual Interativo

Vídeo
Método de eliminação *run-off* sequencial

18 **Numa eleição com quatro candidatos, David, Eva, Frank e Grace, aplica-se o método de eliminação *run-off standard*.**

As percentagens de votos obtidos na primeira volta foram: David (35%), Eva (30%), Frank (20%), Grace (15%).

18.1. Sabendo que votaram 500 pessoas, quantas pessoas votaram no David?

18.2. Quais são os candidatos que passam à segunda contagem e quais são os candidatos eliminados?

18.3. Sabendo que todos os votantes que colocaram o Frank e a Grace em primeira preferência, escolheram a Eva como segunda preferência, o que podes concluir quanto ao vencedor? Justifica a tua resposta.

Método de eliminação *run-off* sequencial

O **Método de eliminação *run-off* sequencial** é um sistema de votação preferencial em que os eleitores classificam os candidatos por ordem de preferência. Se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta nos votos de primeira preferência, o candidato com o menor número de votos é eliminado e os seus votos são redistribuídos de acordo com as próximas preferências, até que um candidato alcance a maioria absoluta e seja declarado vencedor.

Exemplo 14: Aplicação do método de eliminação *run-off* sequencial

Vamos aplicar o método de eliminação *run-off* sequencial na eleição do dirigente da associação juvenil comunitária da vila da Joana. Concorreram quatro candidatos (A , B , C e D) e votaram 100 jovens.

A seguinte tabela apresenta as votações organizadas.

N.º de votos	40	25	20	10	5
1.ª preferência	C	B	A	D	C
2.ª preferência	B	A	~~D~~	C	A
3.ª preferência	A	C	C	B	B
4.ª preferência	~~D~~	~~D~~	B	A	D

Primeira ronda

Contagem de votos iniciais (1.ª preferência):

A : 20 votos

B : 25 votos

C : 45 votos $(40 + 5)$

D : 10 votos

Nenhum candidato obteve maioria absoluta, mais de 50 votos, então o candidato D é eliminado e são redistribuídos os votos.

Segunda ronda

Os votos do candidato D são redistribuídos de acordo com as segundas preferências dos que votaram em D como primeira preferência.

N.º de votos	40	25	20	10	5
1.ª preferência	C	B	A	~~D~~	C
2.ª preferência	B	A	~~D~~	**C**	A
3.ª preferência	A	C	C	B	B
4.ª preferência	~~D~~	~~D~~	B	A	~~D~~

Nova contagem de votos:

A : 20 votos

B : 25 votos

C : 55 votos $(45 + 10)$

D : Eliminado

Agora, o candidato C tem 55 votos, que é mais de 50% do total (100 votos).

O candidato C é o vencedor após a segunda ronda, com a redistribuição.

Caso na segunda ronda nenhum candidato tivesse obtido a maioria absoluta, eliminar-se-ia o candidato com menor votação e redistribuir-se-iam os seus votos até se encontrar um candidato com maioria absoluta.

Procedimento de Aplicação: eliminação *run-off* sequencial

Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência.
Inicialmente, são contados os votos de primeira preferência de todos os eleitores. Se um candidato obtiver a maioria absoluta desses votos, é declarado vencedor. Caso contrário, elimina-se o candidato com menor número de votos de primeira preferência e os votos do candidato eliminado são redistribuídos pelos candidatos restantes, com base na segunda preferência indicada dos eleitores.
O candidato que obtenha a maioria absoluta dos votos redistribuídos é declarado vencedor. Caso seja necessário, efetuam-se rondas sucessivas até um dos candidatos obter maioria absoluta.

Exercícios

19 O Amílcar é responsável por organizar a eleição que permitirá eleger o representante da festa da sua comunidade. Concorreram três candidatos a representante: o José, a Maria e o João.

Há 150 votantes, e cada votante pode classificar os candidatos por ordem de preferência.

O Amílcar quer aplicar o método de eliminação *run-off* sequencial.

As preferências dos votantes foram organizadas pelo Amílcar seguinte forma:

Preferência	Número de Votos
José > Maria > João	40
José > João > Maria	30
Maria > João > José	35
Maria > José > João	20
João > José > Maria	15
João > Maria > José	10

Ajuda o Amílcar a apurar o vencedor. Justifica o apuramento do vencedor, apresentando os procedimentos necessários na aplicação do método de eliminação *run-off* sequencial.

20 Numa eleição com quatro candidatos, João, Margarida, Martin e Ana, aplica-se o método de eliminação *run-off standard*.

As percentagens de votos obtidos na primeira volta foram: João (35%), Margarida (30%), Martin (20%) e Ana (15%).

20.1. Sabendo que 60 pessoas votaram na Margarida em 1^{a} preferência, quantas pessoas votaram no total?

20.2. Quais os candidatos que passam à segunda volta e qual é o candidato eliminado?

20.3. Quantas voltas são necessárias para se apurar o vencedor? Justifica a tua resposta.

21 Depois de analisarem as votações para a associação de estudantes da escola, realizadas no ano anterior, três amigos, a Bruna, a Carla e o Denilson, disseram o seguinte:

- Bruna: "A lista X ganhava por qualquer método de eliminação *run-off*".
- Carla: "A lista X ganhava pelo método de eliminação *run-off standard*, mas a lista C ganhava pelo método de eliminação *run-off* sequencial".
- Denilson: "A lista X ganhava por qualquer método de eliminação *run-off*".

A seguinte tabela apresenta as votações organizadas obtidas pelas quatro listas existentes (A , C , F e X).

N.º de votos	83	60	59	33	21	10	8
1.ª preferência	X	C	A	F	C	X	F
2.ª preferência	A	A	F	X	X	C	C
3.ª preferência	C	X	C	C	A	A	X
4.ª preferência	F	F	X	A	C	F	A

Aplica os dois métodos de eliminação *run-off* e indica qual dos amigos tem razão.

Manual Interativo

Vídeo
Método de Borda

Método de Borda

O método de Borda é outro sistema de votação preferencial usado em eleições e tomadas de decisão coletivas. Desenvolvido pelo matemático francês Jean-Charles de Borda, no século XVIII, o método de Borda procura encontrar uma opção vencedora que seja a mais preferida pelo grupo, levando em consideração as classificações ordenadas dos votantes. Cada votante classifica as opções por ordem de preferência e são atribuídos pontos com base nessas classificações.

Exemplo 15: Aplicação do método de Borda

Consideremos um exemplo simples com três candidatos (A , B e C) e cinco eleitores.

Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência:

Eleitor	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B
4	A	C	B
5	B	A	C

Recolha das preferências

Cada eleitor classifica todos os candidatos por ordem de preferência.

1. Atribuição de pontos:

- A cada posição na classificação é atribuído um número de pontos. Neste exemplo, temos três candidatos, então a 1.ª preferência recebe 3 pontos, a 2.ª preferência recebe 2 pontos e a 3.ª preferência recebe 1 ponto.

2. Cálculo dos pontos totais:

- Somamos os pontos atribuídos a cada candidato por todos os eleitores.

  Candidato A:

  3 (Eleitor 1) $+ 1$ (Eleitor 2) $+ 2$ (Eleitor 3) $+ 3$ (Eleitor 4) $+ 2$ (Eleitor 5)

  $= 11$ pontos

  Candidato B:

  2 (Eleitor 1) $+ 3$ (Eleitor 2) $+ 1$ (Eleitor 3) $+ 1$ (Eleitor 4) $+ 3$ (Eleitor 5)

  $= 10$ pontos

  Candidato C:

  1 (Eleitor 1) $+ 2$ (Eleitor 2) $+ 3$ (Eleitor 3) $+ 2$ (Eleitor 4) $+ 1$ (Eleitor 5)

  $= 9$ pontos

Tabela resumida de pontos

Candidato	Pontos Totais
A	11
B	10
C	9

3. Decisão sobre o vencedor

- O candidato com o maior número de pontos totais é declarado o vencedor. No nosso exemplo, o candidato A é o vencedor com 11 pontos.

Procedimento de aplicação: método de Borda

Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência, sem empates.
A cada posição na classificação dos eleitores são atribuídos pontos decrescentes, começando no número total de candidatos até 1 ponto.
Os pontos atribuídos a cada candidato por cada eleitor são somados para obter o total de pontos de cada candidato.
O candidato com o maior número de pontos totais é eleito ou escolhido.

Exemplo 16: Aplicação do método de Borda

Vamos aplicar o método de Borda na eleição para dirigente da associação juvenil comunitária da vila da Joana, sabendo que concorreram quatro candidatos (A, B, C e D) e que votaram 100 jovens.

A seguinte tabela apresenta as votações organizadas:

N.º de votos	40	25	20	10	5
1.ª preferência	A	B	C	D	C
2.ª preferência	B	A	D	C	A
3.ª preferência	C	C	A	B	B
4.ª preferência	D	D	B	A	D

Como são quatro candidatos, atribuímos as pontuações a cada preferência:

Preferência	Pontos
1.ª preferência	4
2.ª preferência	3
3.ª preferência	2
4.ª preferência	1

De seguida, contabilizamos o total de pontos obtido por cada candidato:

Candidatos		Total
A	$4 \times 40 + 3 \times (25 + 5) + 2 \times 20 + 1 \times 10$	300 pontos
B	$4 \times 25 + 3 \times 40 + 2 \times (10 + 5) + 1 \times 20$	270 pontos
C	$4 \times (20 + 5) + 3 \times 10 + 2 \times (40 + 25)$	260 pontos
D	$4 \times 10 + 3 \times 20 + 1 \times (40 + 25 + 5)$	170 pontos

Assim, o candidato A é o vencedor com o maior número de pontos, 300 pontos.

Manual Interativo

Atividade
Aplicação do Método de Borda

Exercícios

22 **Uma turma de 30 alunos do ensino secundário está a realizar uma eleição para escolher a espécie de planta autóctone preferida.**

As espécies candidatas são:

A: Dragoeiro (*Dracaena draco*)

B: Tamareira-do-Saara (*Phoenix dactylifera*)

C: Poinciana (*Delonix regia*)

Cada aluno classifica as três espécies por ordem de preferência (1.ª, 2.ª, 3.ª).
A espécie com a maior pontuação total será eleita como a preferida da turma.

Os alunos votaram e os resultados das suas preferências apresentam-se na seguinte tabela:

Número de alunos	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
10	A	B	C
8	B	C	A
7	C	A	B
5	B	A	C

Cada linha representa as classificações de um grupo de alunos que votaram da mesma maneira.

Determina a espécie vencedora aplicando o método de Borda.

23 Seis turistas em Cabo Verde querem escolher dois locais a visitar.

Os locais candidatos são:

- Ilha do Sal
- Praia (Ilha de Santiago)
- Mindelo (Ilha de São Vicente)
- Boa Vista

Cada turista classifica os quatro locais por ordem de preferência (1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª) e, de seguida, aplica-se o método de Borda. Os dois locais com maior pontuação total serão os eleitos para serem visitados.

23.1. Qual é a pontuação máxima que um local poderá obter?

23.2. Os turistas votaram e as suas preferências apresentam-se na seguinte tabela:

Turista	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência	4.ª preferência
1	Ilha do Sal	Praia	Mindelo	Boa Vista
2	Praia	Mindelo	Boa Vista	Ilha do Sal
3	Mindelo	Boa Vista	Ilha do Sal	Praia
4	Boa Vista	Ilha do Sal	Praia	Mindelo
5	Ilha do Sal	Mindelo	Praia	Boa Vista
6	Praia	Boa Vista	Mindelo	Ilha do Sal

Que locais foram eleitos?

Paradoxo de Borda

O paradoxo de Borda ocorre quando, apesar de cada candidato ser preferido diretamente por uma maioria em comparação com outro candidato, a agregação das preferências de todos os eleitores pelo método de Borda pode levar a um resultado aparentemente paradoxal, onde o candidato preferido por menos eleitores em duelos diretos vence a eleição.

Exemplo 17: Paradoxo de Borda

Consideremos uma eleição com quatro candidatos (A, B, C, e D) e vinte eleitores, com os seguintes resultados:

Número de eleitores	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência	4.ª preferência
11	A	B	C	D
5	B	C	D	A
3	C	D	B	A
1	D	C	B	A

Verificamos que o candidato A obteve maioria absoluta na primeira preferência.

No entanto, se aplicarmos o método de Borda nesta situação, obtemos:

Candidato	Pontos totais
A	53
B	61
C	52
D	34

Pelo método de Borda, o candidato B é o vencedor.

Este exemplo demonstra o paradoxo de Borda: apesar do candidato A ser o favorito de uma maioria absoluta de eleitores na primeira preferência, a agregação das preferências pelo método de Borda leva à vitória de outro candidato, neste caso o candidato B, cujo apoio está mais distribuído entre as segundas e terceiras preferências.

Método de Condorcet

O método de Condorcet é uma abordagem de votação nomeada em homenagem a Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, marquês de Condorcet, que foi um matemático e filósofo francês do século XVIII.
Condorcet propôs este método como parte de seus estudos sobre a teoria das eleições e a justiça das decisões coletivas.

Manual Interativo

Vídeo
Método de Condorcet

O marquês de Condorcet defendia que, para se determinar o verdadeiro vencedor de uma eleição, se deveria considerar a preferência da maioria em comparações diretas entre todos os pares de candidatos.

Este método visa garantir que o candidato preferido pela maioria dos eleitores em todas as comparações diretas seja eleito.

Exemplo 18: Método de Condorcet

Consideremos um exemplo com três candidatos (A, B e C) e três eleitores, com as seguintes preferências:

Eleitor	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

Comparações diretas

A *vs* B:

Eleitor 1: Prefere A sobre B

Eleitor 2: Prefere B sobre A

Eleitor 3: Prefere A sobre B

A vence por 2-1

A *vs* C:

Eleitor 1: Prefere A sobre C

Eleitor 2: Prefere C sobre A

Eleitor 3: Prefere C sobre A

C vence por 2-1

B *vs* C:

Eleitor 1: Prefere B sobre C

Eleitor 2: Prefere C sobre B

Eleitor 3: Prefere C sobre B

C vence por 2-1

Determinação do vencedor:

- **A** vence B.
- **C** vence A e B.

Neste exemplo, o vencedor de Condorcet é o candidato **C**, porque vence nas comparações diretas contra todos os outros candidatos.

Procedimento de aplicação: Método de Condorcet

Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência. Para cada par de candidatos, contabiliza-se quantos eleitores preferem um candidato sobre o outro. Um candidato vence um confronto direto contra outro se ele for preferido pela maioria dos eleitores.
O candidato que vence todos os confrontos diretos contra todos os outros candidatos é o **vencedor de Condorcet**.

Exercícios

24 Considera uma eleição com quatro candidatos (A, B, C e D) e sete eleitores. As preferências dos eleitores são as seguintes:

Eleitor	1.ª preferência	2.ª preferência	3.ª preferência	4.ª preferência
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C
5	A	C	D	B
6	B	D	A	C
7	C	A	B	D

Determina o vencedor utilizando o método de Condorcet.

Manual Interativo

Atividade
Aplicação do Método de Condorcet

25 Considera uma eleição com quatro candidatos: David, Eva, Frank e Grace, em que se verificam os resultados no confronto direto na tabela ao lado.

Existe um vencedor de Condorcet? Justifica a tua resposta e, caso exista um vencedor de Condorcet, indica o seu nome.

Confronto	Vencedor
David *vs* Eva	David
David *vs* Frank	Frank
David *vs* Grace	Grace
Eva *vs* Frank	Eva
Eva *vs* Grace	Grace
Frank *vs* Grace	Frank

26 Depois de aprender o método de Condorcet, o Amílcar ficou curioso em saber quem seria o representante da festa da sua comunidade se fosse utilizado o método de Condorcet.
As preferências dos votantes foram organizadas pelo Amílcar da seguinte forma:

Preferência	Número de votos
José > Maria > João	**40**
José > João > Maria	**30**
Maria > João > José	**35**
Maria > José > João	**20**
João > José > Maria	**15**
João > Maria > José	**10**

Ajuda o Amílcar a encontrar o vencedor.
Apresenta os procedimentos necessários para justificar a tua resposta.

Paradoxo de Condorcet

O paradoxo de Condorcet ocorre quando as preferências dos eleitores criam um ciclo em que cada candidato é preferido em relação a outro candidato, mas não há um vencedor claro. Em outras palavras, o paradoxo surge quando não existe um vencedor de Condorcet, pois as comparações diretas entre candidatos formam um ciclo em que A vence B, B vence C e C vence A, por exemplo.

Este paradoxo ilustra que, apesar de cada eleitor ter uma preferência ordenada clara, a agregação dessas preferências pode resultar num ciclo sem um vencedor claro. Isso levanta questões sobre a consistência e a transitividade das preferências coletivas num grupo, tornando desafiador determinar um vencedor justo em algumas situações.

Exemplo 19: Paradoxo de Condorcet

Com três candidatos (A, B, C):

A é preferido a B. B é preferido a C. C é preferido a A.

Resultado: Ciclo de preferências, sem nenhum vencedor de Condorcet.

2.1.2.3. Sistemas de aprovação

O **método de voto por aprovação**, ou **método de aprovação**, é um sistema de votação simples e eficaz, em que os eleitores podem votar nos candidatos que quiserem, sem a necessidade de classificar ou escolher apenas um.

Em vez de indicar uma preferência única, os eleitores podem "aprovar" todos os candidatos que considerem aceitáveis. O candidato com o maior número de aprovações é declarado vencedor.

Este método é particularmente útil em situações em que a escolha binária (sim/não) pode indicar, de melhor forma, as preferências do eleitorado, em vez da classificação ordinal (preferencial). O voto por aprovação é valorizado pela sua simplicidade, flexibilidade e por, potencialmente, reduzir o impacto de votos estratégicos negativos.

Procedimento deaplicação: método de voto por aprovação

Recolher as aprovações dos eleitores: cada eleitor marca todos os candidatos que ele aprova.
Contar as aprovações: para cada candidato, contabiliza-se o número total de aprovações recebidas.
Determinar o vencedor: o candidato com o maior número de aprovações é declarado vencedor.

Exemplo 20: Método de voto por aprovação

Considera uma eleição com três candidatos (A, B e C) e cinco eleitores, realizada por aplicação do método de aprovação. Os eleitores aprovam os candidatos da seguinte forma:

Eleitor	Aprovações
1	A, B
2	A, C
3	A, B, C
4	A, C
5	B

Contagem de aprovações:

A: 4 aprovações (eleitores 1, 2, 3, 4)

B: 3 aprovações (eleitores 1, 3, 5)

C: 3 aprovações (eleitores 2, 3, 4)

Determinação do vencedor

O candidato A tem o maior número de aprovações, referentes a quatro eleitores.

O candidato A é o vencedor.

Exercícios

27 **Um grupo de alunos de uma escola secundária está a escolher atividades extracurriculares para o próximo ano letivo.**
As atividades candidatas são: futebol, dança, e teatro.
Cada aluno pode aprovar quantas atividades desejar.

Aluno	Aprovações
1	Futebol, Teatro
2	Dança, Teatro
3	Futebol
4	Futebol, Teatro
5	Teatro
6	Dança
7	Futebol, Dança, Teatro

27.1. Qual é a atividade mais desejada pelos alunos?

27.2. Qual é a atividade menos desejada pelos alunos?

28 **Os alunos da turma do Martin estão a escolher o representante de turma.**
Os candidatos são: o João, a Maria e o Carlos.
Cada aluno pode aprovar quantos candidatos quiser.

Obtiveram-se os seguintes resultados:

N.° de aprovações	Aprovações
3	João, Maria
3	Maria, Carlos
2	João
4	João, Carlos
5	Carlos
6	Maria
7	João, Maria, Carlos
8	Maria

28.1. Quantos alunos votaram?

28.2. Que candidato venceu a eleição?

O método de voto por aprovação é eficaz em várias situações, incluindo eleições políticas, escolhas em grupos de trabalho, ou seleções de preferências em contextos educacionais.

A simplicidade e a flexibilidade do método permitem que seja aplicado de forma justa e direta, ajudando a encontrar as verdadeiras preferências dos eleitores sem a complexidade de sistemas de classificação mais elaborados.

2.1.3. Sistemas de representação proporcional

Os sistemas de representação proporcional, utilizados em diversos sistemas eleitorais de diferentes países, são mecanismos de alocação de assentos num corpo legislativo que procuram refletir proporcionalmente o voto dos eleitores.

Os sistemas de representação proporcionais garantem que os partidos ou candidatos recebem assentos em proporção ao número de votos que obtiveram. Isto é particularmente importante para assegurar a representatividade e a equidade na composição dos órgãos legislativos.

Existem três métodos amplamente utilizados para alocação proporcional: o método de Hondt, o método de Sainte-Laguë e o método de Hamilton.

Método de Hondt

O **método de Hondt**, ou **método de D'Hondt**, foi desenvolvido pelo advogado e matemático belga Victor D'Hondt, no final do século XIX. Introduzido pela primeira vez em 1878, este método tornou-se amplamente utilizado em sistemas eleitorais proporcionais em todo o mundo devido à sua simplicidade e eficácia na distribuição de assentos parlamentares.

Manual Interativo

Vídeo
Método de Hondt

O método de D' Hondt é utilizado em vários países, incluindo Espanha, Portugal, Bélgica, Argentina e Cabo Verde. O método é frequentemente escolhido pela capacidade de favorecer a governabilidade ao conceder uma leve vantagem aos maiores partidos, incentivando a formação de governos estáveis.

Exemplo 21: Método de Hondt

Consideremos uma eleição com três partidos (A, B e C) que disputam sete assentos.

Os votos recebidos foram os seguintes:

Partido	Votos
A	100 500
B	97 000
C	60 500

1.º **Dividir os votos de cada partido por números inteiros consecutivos**, começando no 1 até ao número de assentos a serem distribuídos.

Partido	Votos 1	Votos 2	Votos 3	Votos 4	Votos 5	Votos 6	Votos 7
A	100 500	50 250	33 500	25 125	20 100	16 750	14 357
B	97 000	48 500	32 333	24 250	19 400	16 167	13 857
C	60 500	30 250	20 167	15 125	12 100	10 083	8643

2.º **Ordenar as frações resultantes**, da maior para a menor.

Os sete maiores valores são:

- A: 100 500 (Assento 1)
- B: 97 000 (Assento 2)
- C: 60 500 (Assento 3)
- A: 50 250 (Assento 4)
- B: 48 500 (Assento 5)
- A: 33 500 (Assento 6)
- B: 32 333 (Assento 7)

3.º **Alocar os assentos** de acordo com as maiores frações.

Portanto, os assentos são distribuídos da seguinte forma:

- **Partido A**: 3 assentos
- **Partido B**: 3 assentos
- **Partido C**: 1 assento

Exercícios

29 Numa eleição, cinco partidos (A, B, C, D e E) estão a disputar 10 assentos.

Os votos recebidos foram os seguintes:

Partido	Votos
A	150 000
B	120 000
C	80 000
D	50 000
E	40 000

Distribui os assentos utilizando o método de Hondt.

30 Uma escola está a realizar eleições para criar um parlamento escolar e para eleger os membros do conselho estudantil, com quatro listas (A, B, C e D) e seis assentos em disputa.

Os votos recebidos foram os seguintes:

Lista	Votos
A	200
B	150
C	100
D	50

Distribui os assentos utilizando o método de Hondt.

Método de Sainte-Laguë

O método de Sainte-Laguë, também conhecido como método de Webster, foi desenvolvido pelo matemático francês André Sainte-Laguë, no início do século XX.

Este método é semelhante ao de D'Hondt, mas utiliza uma série diferente de divisores para minimizar a vantagem dos maiores partidos.

O método de Sainte-Laguë é utilizado em países como a Nova Zelândia, a Alemanha, a Noruega e a Suécia. É apreciado pela sua capacidade em proporcionar uma representação mais equitativa, especialmente para partidos menores.

Manual Interativo

Vídeo
Método de Sainte-Laguë

Atividade
Vantagens e limitações dos métodos de Hondt de Sainte-Laguë

Exemplo 22: Método de Sainte-Laguë

Consideremos uma eleição com três partidos (A, B e C), que disputam sete assentos.

Os votos recebidos foram os seguintes:

Partido	Votos
A	100 500
B	97 000
C	60 500

1.º **Dividir os votos de cada partido por números ímpares consecutivos**, começando em 1 e até realizar tantas divisões como número de assentos a serem distribuídos.

Partido	Votos: 1	Votos: 3	Votos: 5	Votos: 7	Votos: 9	Votos: 11	Votos: 13
A	100 500	33 500	20 100	14 357	11 167	9136	7731
B	97 000	32333	19 400	13 857	10 778	8818	7462
C	60 500	20 167	12 100	8643	6722	5500	4654

2.º **Ordenar as frações resultantes**, da maior para a menor.

Os sete maiores valores são:

A: 100 500 (Assento 1)　　B: 97 000 (Assento 2)　　C: 60 500 (Assento 3)
A: 33 500 (Assento 4)　　B: 32 333 (Assento 5)
C: 20 167 (Assento 6)　　A: 20 100 (Assento 7)

3.º **Alocar os assentos** de acordo com as maiores frações.

Portanto, os assentos são distribuídos da seguinte forma:

Partido A: 3 assentos　　**Partido B:** 2 assentos　　**Partido C:** 2 assentos

Manual Interativo

Vídeo
Método de Hamilton

Exercício

31 Numa eleição, cinco partidos (A, B, C, D e E) disputam 10 assentos.
Os votos recebidos foram os seguintes:

Partido	Votos
A	150 000
B	120 000
C	80 000
D	50 000
E	40 000

Distribui os assentos utilizando o método de Sainte-Laguë.

Método de Hamilton

O **método de Hamilton**, também conhecido como o **método de maiores restos**, foi desenvolvido por Alexander Hamilton, no final do século XVIII.

Este método foi uma das primeiras tentativas de criar um sistema de alocação proporcional de assentos e é notável pela sua simplicidade e equidade.

O método de Hamilton é usado em algumas formas modificadas em várias eleições do mundo. O método de Hamilton ficou bastante conhecido por ser o método utilizado na distribuição de assentos na Câmara dos Representantes dos Estados Unidos durante os primeiros anos da República.

Exemplo 23: Método de Hamilton

Consideremos uma eleição com três partidos (A, B e C) que disputam sete assentos.

Os votos recebidos foram os seguintes:

Partido	Votos
A	100 500
B	97 000
C	60 500

1.º **Calcular o divisor-padrão.** Dividir o total de votos pelo número de assentos.

$$\text{divisor-padrão} = \frac{258\,000}{7} \approx 36\,857$$

2.º **Calcular a quota-padrão do partido.** Dividir o total de votos do partido pelo divisor-padrão.

3.º **Distribuir os assentos inteiros.** Cada partido recebe um número de assentos igual à parte inteira do quociente dos seus votos pela quota.

4.º **Distribuir os assentos que restam.** Baseado nas maiores frações restantes.

Partido	Votos	Quota-padrão	Assentos inteiros	Resto	Assentos a acrescentar
A	100 500	$\frac{100\,500}{36\,857} \cong 2{,}73$	2	0,73	1
B	97 000	$\frac{97\,000}{36\,857} \cong 2{,}63$	2	0,63	0
C	60 500	$\frac{60\,500}{36\,857} \cong 1{,}64$	1	0,64	1

Na distribuição dos assentos, pela parte inteira, só são distribuídos cinco. Dos sete existentes, sobram dois a atribuir aos partidos com os dois maiores restos (A e C).

Portanto, os assentos são distribuídos da seguinte forma:

Partido A: 3 assentos **Partido B:** 2 assentos **Partido C:** 2 assentos

Exercícios

32 **Num círculo eleitoral, concorrem quatro partidos (A, B, C e D) que disputam nove assentos. Os votos recebidos foram os seguintes:**

Partido	Votos
A	180 000
B	150 000
C	120 000
D	90 000

Distribui os assentos utilizando o método de Hamilton.

33 **Num círculo eleitoral, seis partidos (A, B, C, D, E e F) estão a concorrer para eleger sete assentos na assembleia.**
A votação foi a seguinte:

Partido	Votos
A	150 000
B	120 000
C	80 000
D	50 000
E	40 000
F	5000

33.1. Distribui os sete assentos utilizando:

a) o método de Hondt;

b) o método de Sainte-Laguë;

c) o método de Hamilton.

33.2. Compara os resultados obtidos na alínea anterior. O que concluis?

Síntese

Sistemas de votação

Um **sistema de votação** é um conjunto de regras que determinam como as preferências expressas pelos votantes são recolhidas, contabilizadas e transformadas numa decisão coletiva.

Sistemas maioritários

Um sistema de votação maioritário é um método de eleição no qual o candidato ou partido que recebe a maioria dos votos é declarado vencedor. Existem diferentes variações deste sistema, sendo as mais comuns: sistema de maioria simples, em que o candidato ou partido que obtém mais votos do que qualquer outro vence; e sistema de maioria absoluta, em que o vencedor tem de obter mais de 50% dos votos, sendo por vezes necessária uma segunda volta.

Sistemas preferenciais

Os sistemas preferenciais de votação permitem que os eleitores classifiquem os candidatos por ordem de preferência. Em vez de votar apenas num candidato, estes sistemas são projetados para refletir melhor as preferências dos eleitores e evitar a eleição de um candidato impopular que poderia vencer num sistema de votação simples.

Sistemas de aprovação

Os sistemas de votação por aprovação são métodos de eleição em que os eleitores podem votar/aprovar quantos candidatos quiserem, sem a necessidade de escolher apenas um. Cada candidato aprovado pelo eleitor recebe um voto, e o candidato com o maior número de votos é o vencedor.

Sistemas de representação proporcional

Os sistemas de representação proporcional, utilizados em diversos sistemas eleitorais de diferentes países, são mecanismos de alocação de assentos num corpo legislativo que procuram refletir proporcionalmente o voto dos eleitores. Os sistemas de representação proporcional garantem que os partidos ou candidatos recebem assentos em proporção ao número de votos que obtiveram.

Síntese

Sistemas maioritários

Sistema de maioria simples	O candidato ou a proposta que recebe o maior número de votos numa única ronda de votação é declarado vencedor, independentemente de ter obtido a maioria absoluta.
Sistema de maioria absoluta	No **sistema de maioria absoluta de duas voltas**, se nenhum candidato ou proposta obtiver a maioria absoluta (mais de 50% dos votos) na primeira volta, realiza-se uma segunda volta entre os dois candidatos mais votados. A segunda volta garante que o vencedor obtenha a maioria absoluta.
	O **sistema maioritário de mais de duas voltas** é uma variação que envolve múltiplas rondas de votação. Se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta na primeira volta, realizam-se rondas adicionais, eliminando-se gradualmente os candidatos com menos votos até que um candidato obtenha a maioria absoluta.

Sistemas preferenciais

Método da pluralidade	Cada eleitor vota nos candidatos, indicando a sua preferência. Após a coleta de todos os boletins de voto, são contados apenas os votos da 1.ª opção de preferência. O candidato que receber o maior número de votos é declarado o vencedor.
Método de eliminação *run-off*	**Método de eliminação *run-off standard*** Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência. Inicialmente, são contados os votos de primeira preferência de todos os eleitores. Se um candidato obtiver a maioria absoluta desses votos, é declarado vencedor. Caso contrário, eliminam-se todos os candidatos com o menor número de votos de primeira preferência, com a exceção dos dois candidatos mais votados. Reorganiza-se a ordenação, atendendo à ordem relativa de cada um dos candidatos nos diferentes votos. Contam-se os votos dos dois candidatos em primeira preferência. O candidato que obtenha a maioria absoluta dos votos redistribuídos é declarado vencedor.

Síntese

Sistemas preferenciais

Método de eliminação *run-off*	**Método de eliminação *run-off* sequencial** Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência. Inicialmente, são contados os votos de primeira preferência de todos os eleitores. Se um candidato obtiver a maioria absoluta desses votos, é declarado vencedor. Caso contrário, elimina-se o candidato com menor número de votos de primeira preferência. Reorganizam-se as ordenações, atendendo à ordenação relativa, e volta a fazer-se a contagem de primeiras preferências. O candidato que obtenha a maioria absoluta dos votos redistribuídos é declarado vencedor. Caso seja necessário, efetuam-se rondas sucessivas até um dos candidatos obter maioria absoluta.
Método de Borda	Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência, sem empates. A cada posição na classificação dos eleitores são atribuídos pontos decrescentes, começando do número total de candidatos até 1. Os pontos atribuídos a cada candidato por cada eleitor são somados para obter o total de pontos de cada candidato. O candidato com o maior número de pontos totais é eleito ou escolhido.
Método de Condorcet	Cada eleitor classifica os candidatos por ordem de preferência. Para cada par de candidatos, contabiliza-se quantos eleitores preferem um candidato sobre o outro. Um candidato vence um confronto direto contra outro se ele for preferido pela maioria dos eleitores. O candidato que vence todos os confrontos diretos contra todos os outros candidatos é o vencedor de Condorcet.

Síntese

Sistemas de aprovação

Método de voto por aprovação ou método de aprovação	Os eleitores podem selecionar todos os candidatos que considerem aceitáveis. O candidato com o maior número de aprovações é declarado vencedor.

Sistemas de representação proporcional

Método de Hondt ou método de D'Hondt	Cada eleitor vota apenas num partido. Dividem-se os votos de cada partido por números inteiros consecutivos, começando em 1 até ao número de assentos a serem distribuídos. Ordenam-se as frações resultantes, da maior até à menor. Alocam-se os assentos de acordo com as maiores frações.
Método de Sainte-Laguë	Cada eleitor vota apenas num partido. Dividem-se os votos de cada partido por números ímpares consecutivos, começando em 1 até realizar tantas divisões quanto o número de assentos a serem distribuídos. Ordenam-se as frações resultantes, da maior à menor. Alocam-se os assentos de acordo com as maiores frações.
Método de Hamilton ou método de maiores restos	Cada eleitor vota apenas num partido. Calcula-se o divisor-padrão (razão entre o número total de votos e o número de assentos). Calcula-se a quota-padrão de cada partido (razão entre o número total de votos do partido e o divisor-padrão). Distribuem-se os assentos inteiros, ou seja, cada partido recebe um número de assentos igual à parte inteira do quociente dos seus votos pela quota-padrão. Distribuem-se os assentos que restam, com base nas maiores frações restantes.

Para aplicar

Manual Interativo

Atividade
Aplicação do Método de Hondt e do Método de Sainte-Laguë

1 **Para cada uma das seguintes frases, indica as verdadeiras e corrige as falsas.**

(A) No sistema de maioria absoluta se um candidato ou proposta obtiver 50% dos votos vence na primeira volta.

(B) Na eleição para o cargo de Presidente da República, é eleito o candidato que conseguir a maioria absoluta dos votos. O sistema de representação maioritário é sempre realizado a duas voltas.

(C) Os membros das assembleias municipais são eleitos através do sistema de representação proporcional.

(D) Os sistemas preferenciais de votação permitem que os eleitores votem apenas num candidato.

(E) No método de eliminação *run-off standard*, se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta nos votos de primeira preferência, o candidato com o menor número de votos é eliminado.

(F) Se numa eleição, um candidato vencer todos os confrontos diretos com os outros candidatos, diz-que que é um vencedor de Borda.

2 **Realizou-se uma assembleia, de uma associação cultural e recreativa, para eleger, entre quatro candidatos, o novo diretor da associação. Apresentaram a sua candidatura o Lopes (L), o Gomes (G), o Mendes (M) e o Tavares (T).**

Segundo os estatutos da associação, cada associado vota nos candidatos por ordem de preferência. Obtiveram-se os seguintes resultados:

Ordem de preferência	Candidatos			
1.ª	L	T	M	G
2.ª	G	M	L	T
3.ª	M	G	G	L
4.ª	T	L	T	M
N.º de votos	25	50	30	45

2.1. Indica o número total de associados que votaram.

2.2. Determina, com aproximação às décimas, a percentagem de primeiras preferências que cada candidato obteve.

2.3. Indica o número mínimo de votos necessários, na primeira preferência, para um candidato ser eleito vencedor por maioria absoluta.

2.4. Determina qual o candidato vencedor, recorrendo ao método de eliminação *run-off standard.*

2.5. Determina qual o candidato vencedor utilizando o método de Borda.

3 **No Dia Internacional da Matemática, a escola da Joana organizou um concurso em que os alunos podiam construir esculturas com formas originais.**

Três alunos, o Francisco, a Filomena e o Nélson, apresentaram-se a concurso.

A tabela seguinte apresenta as votações, pelo sistema de aprovação, realizadas pelos elementos do júri.

Elementos do júri						
J1	J2	J3	J4	J5	J6	**Candidatos**
X		X		X		Francisco
X	X		X	X	X	Filomena
	X	X	X		X	Nélson

3.1. Determina a percentagem de votos obtida por cada um dos concorrentes.

3.2. Quem vence a eleição, considerando o método utilizado?

4 **Observa os resultados obtidos numa votação para escolher a cor para pintar a sala de aula.**

1.ª preferência	**2.ª preferência**	**3.ª preferência**	**N.º de votos**
Branco	Amarelo	Azul	14
Amarelo	Azul	Branco	12
Azul	Branco	Amarelo	10

4.1. Determina o vencedor aplicando o método da pluralidade.

4.2. Determina o vencedor aplicando um método de eliminação *run-off*.

4.3. Quem vence nos "confrontos":

a) Branco / Amarelo? **b)** Azul / Amarelo?

5 **Nas eleições legislativas de um país, obtiveram-se os resultados da tabela ao lado para o círculo eleitoral Y.**

Partido	**N.º de votos**
A	3500
B	2800
C	2000
D	1200
E	500
Total	**10 000**

5.1. Determina a percentagem de votos obtida por cada partido.

5.2. Sabendo que o círculo eleitoral Y elege 12 deputados e que é utilizado o método de Hondt, distribui o número de deputados pelos partidos.

5.3. Se fosse utilizado o método de Hamilton, como ficaria a distribuição dos cargos de deputados pelos partidos?

2.2. Teoria da partilha equilibrada

A partilha de recursos é uma questão fundamental em muitas áreas do conhecimento humano, desde a economia até à sociologia, passando pela política e, claro, pela matemática. A teoria da partilha equilibrada, ou justa, surge como uma área de estudo que pretende encontrar formas de dividir recursos de forma que todas as partes envolvidas considerem a divisão justa. Este tema é particularmente relevante em contextos onde a justiça e a equidade são essenciais, como na distribuição de heranças, divisão de bens entre sócios, partilha de recursos naturais ou simplesmente numa divisão justa entre amigos.

A preocupação com a divisão justa de bens e recursos tem raízes profundas na História da Humanidade. Desde as civilizações antigas, que filósofos e legisladores se têm debruçado sobre questões de justiça distributiva. Aristóteles, por exemplo, nas suas obras sobre ética, já refletia sobre a equidade na distribuição. No século XX, com o avanço da matemática e da economia, surgiram abordagens mais formais e algoritmos (regras matemáticas) específicos para resolver problemas de partilha.

Um dos marcos na formalização matemática desta teoria foi o trabalho de Hugo Steinhaus e dos seus colegas, na década de 40 do século XX, que desenvolveram métodos para a divisão justa de bens indivisíveis. Posteriormente, a teoria foi expandida para incluir recursos divisíveis, levando ao desenvolvimento de algoritmos sofisticados aplicados em diversas áreas.

Neste tema vamos explorar, compreender e aplicar diversos tipos e métodos de partilha. Assim, estarás preparado para abordar uma variedade de problemas de partilha, utilizando técnicas matemáticas para alcançar soluções justas e equilibradas. Este conhecimento não é só fundamental para a matemática aplicada, mas também te proporciona uma base sólida para entender questões mais amplas de justiça social e económica.

2.2.1. Partilha discreta

A partilha discreta é um ramo da teoria da partilha equilibrada que se dedica à divisão de bens entre várias partes de modo que a divisão seja considerada justa por todos os envolvidos. Este tipo de partilha é particularmente relevante quando os itens a serem divididos não podem ser fracionados sem perderem o seu valor ou utilidade, como, por exemplo, uma casa, um relógio ou um carro, ou seja, são indivisíveis.

A partilha discreta tem aplicações práticas e históricas que vão desde a divisão de heranças até à alocação de recursos limitados entre diferentes comunidades ou grupos.

Divisão do património de Ronald e Nancy Reagan: Após a morte de Ronald Reagan em 2004, houve um interesse significativo na partilha do património deixado pelo ex-presidente dos Estados Unidos. A divisão envolveu itens de grande valor histórico e sentimental, incluindo cartas, fotografias e outros pertences pessoais, que tiveram de ser distribuídos entre os filhos e outros beneficiários.

Este exemplo ilustra a complexidade de partilhar bens indivisíveis de maneira justa.

Partilha de territórios após a Segunda Guerra Mundial: A Conferência de Yalta em 1945, em que os líderes dos países aliados se reuniram para decidir a reorganização da Europa após a guerra, é um exemplo de partilha discreta num contexto geopolítico. Os territórios foram divididos entre as nações vencedoras e essa divisão teve em conta considerações políticas, étnicas e de sustentabilidade, influenciando significativamente a cidadania e a estabilidade regional nas décadas seguintes.

Também em muitas culturas africanas, a divisão de heranças é uma prática comum que envolve a partilha de bens indivisíveis, como terras, casas e gado, entre os membros da família. A prática e os métodos de partilha variam de comunidade para comunidade e podem incluir procedimentos tradicionais e conselhos de anciãos para assegurar que a divisão seja justa.

A partilha discreta, quando realizada de maneira justa e equitativa, pode promover a cidadania ao assegurar que todos os membros de uma comunidade recebem uma parte justa dos recursos disponíveis. Além disso, a sustentabilidade é promovida quando a divisão de recursos considera a utilização responsável e a conservação dos bens indivisíveis a longo prazo, garantindo que as futuras gerações também possam beneficiar deles.

Manual Interativo

Vídeo
Método do ajuste na partilha

Neste subtema vamos estudar dois métodos de partilha discreta, em que a matemática é fundamental:

- método do ajuste na partilha;
- método das licitações secretas.

2.2.1.1. Método do ajuste na partilha

O **método do ajuste na partilha**, também conhecido por **método do vencedor ajustado,** foi patenteado em 1999 por Steven Brams e Alan Taylor.

O método do ajuste na partilha pode ser aplicado quando estão apenas envolvidos dois intervenientes.

Procedimento de aplicação: método do ajuste na partilha

1) Distribuição de pontos

Cada interveniente distribui 100 pontos entre os bens (itens) a serem divididos, refletindo a importância ou o valor percebido de cada bem.

2) Atribuição dos itens

Cada item é atribuído, temporariamente, ao interveniente que alocou mais pontos ao item.

3) Determinar pontuações

Determinar o total de pontos com que cada interveniente fica após a atribuição dos itens:

- caso os dois intervenientes obtenham o mesmo número de pontos, a partilha está ajustada e concluída;
- caso os dois intervenientes não obtenham o mesmo número de pontos, a partilha ainda não está ajustada e continua a aplicar-se o método.

O interveniente que fica com mais pontos é considerado o vencedor inicial, sendo o outro considerado o perdedor inicial.

4) Calcular o quociente de compensação

Para cada item atribuído ao vencedor inicial, determina-se o quociente:

$$\frac{\text{pontuação atribuída pelo vencedor inicial}}{\text{pontuação atribuída pelo perdedor inicial}}$$

5) Transferir itens

Por ordem crescente dos coeficientes de compensação, inicia-se a transferência de itens do vencedor para o perdedor. Após cada transferência verifica-se a pontuação:

- caso os dois intervenientes obtenham o mesmo número de pontos, a partilha está ajustada e concluída;
- caso os dois intervenientes não obtenham o mesmo número de pontos, a partilha ainda não está ajustada e continua a efetuar-se transferências até que o vencedor inicial obtenha menos pontos do que o perdedor inicial.

6) Equacionar a partilha do item final

Considera-se como x a parte do item que corresponde ao vencedor inicial.

Considera-se como $1 - x$ a parte do item que corresponde ao perdedor inicial.

Escreve-se a equação que traduza o equilíbrio em que ambos os intervenientes terminem com o mesmo número de pontos.

7) Partilhar o item final

Resolve-se a equação e obtém-se a fração (parte do item) correspondente ao vencedor inicial. A restante parte corresponde ao perdedor inicial.

Escreve-se uma equação que traduza o equilíbrio na partilha. Cada interveniente tem de terminar com o mesmo número de pontos.

Exemplo 23: Ajuste na partilha

O Pedro e a Luana formaram uma equipa de voleibol de praia e participaram num torneio interescolar. Como obtiveram o primeiro lugar no torneio, a equipa foi premiada com uma bola de voleibol de praia, uma camisola, um par de sapatilhas e um saco desportivo.

Para partilharem os prémios resolveram utilizar o método da partilha ajustada.

Na tabela seguinte, temos os pontos atribuídos pelo Pedro e pela Luana a cada um dos itens.

1) Distribuição de pontos

	Bola	Camisola	Sapatilhas	Saco
Pedro	5	25	40	30
Luana	10	20	45	25

2) Atribuição dos itens

O Pedro fica, temporariamente, com a camisola e com o saco desportivo.

A Luana fica, temporariamente, com a bola e com as sapatilhas.

3) Determinar pontuações

Pedro: $25 + 30 = 55$

Luana: $10 + 45 = 55$

Como o Pedro e a Luana obtiveram o mesmo número de pontos, a partilha está ajustada e concluída.

Exemplo 24: Ajuste na partilha

O avô do Martin e do João resolveu fazer uma limpeza na sua garagem.

O avô guardou muitas coisas na garagem durante muitos anos.

Como os netos ajudaram, o avô deu-lhes, com a condição de efetuarem uma partilha justa, um rádio, um relógio, uns binóculos e um cavaquinho que trouxe da ilha de São Vicente.

O Martin e o João ficaram contentes com as ofertas e com as histórias que o avô lhes contou sobre cada uma delas.

Resolveram partilhar os itens recorrendo ao método de ajuste na partilha.

Na tabela seguinte, temos os pontos atribuídos a cada item pelo Martin e pelo João.

1) Distribuição de pontos

	Rádio	Relógio	Binóculos	Cavaquinho
Martin	15	20	35	30
João	25	15	28	32

2) Atribuição dos itens

O Martin fica, temporariamente, com o relógio e com os binóculos.

O João fica, temporariamente, com o rádio e com o cavaquinho.

3) Determinar pontuações

Martin: $20 + 35 = 55 \longleftarrow$ perdedor inicial

João: $25 + 32 = 57 \longleftarrow$ vencedor inicial

Como o Martin e o João não obtiveram o mesmo número de pontos, a partilha ainda não está ajustada e continua a aplicar-se o método.

4) Calcular o quociente de compensação

Para cada item atribuído ao vencedor inicial, determina-se o quociente:

$$\text{rádio: } \frac{\text{pontuação atribuída pelo vencedor inicial}}{\text{pontuação atribuída pelo perdedor inicial}} = \frac{25}{15} \approx 1{,}67$$

$$\text{cavaquinho: } \frac{\text{pontuação atribuída pelo vencedor inicial}}{\text{pontuação atribuída pelo perdedor inicial}} = \frac{32}{30} \approx 1{,}07$$

5) Transferir itens

Por ordem crescente dos coeficientes de compensação, inicia-se a transferência de itens do vencedor para o perdedor. Após cada transferência verifica-se a pontuação.

Vamos transferir o cavaquinho do João para o Martin e verificar novamente a pontuação.

Martin: $20 + 35 + 30 = 85$

João: 25

Como o vencedor inicial ficou com menos pontos do que o perdedor inicial, é necessário fracionar o último item, o cavaquinho.

6) Equacionar a partilha do item final

Considera-se x como a parte do item que corresponde ao vencedor inicial.

Considera-se $1 - x$ como a parte do item que corresponde ao perdedor inicial.

Escreve-se a equação que traduza o equilíbrio em que ambos os intervenientes terminem com o mesmo número de pontos.

$25 + 32x = 20 + 35 + 30\,(1 - x)$

7) Partilhar o item final

Resolve-se a equação e obtém-se a fração (parte do item) correspondente ao vencedor inicial. A restante parte corresponde ao perdedor inicial.

Escreve-se uma equação que traduza o equilíbrio na partilha. Cada interveniente tem de terminar com o mesmo número de pontos.

$25 + 32x = 20 + 35 + 30\,(1 - x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 32x + 30x = 20 + 35 - 25 + 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 62x = 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{60}{62}$

Como $\dfrac{60}{62} \approx 0{,}97$, o João fica, aproximadamente, com 97% do cavaquinho e o Martin com, aproximadamente, 3%.

Como o cavaquinho é um item indivisível, o Martin e o João vão ter de partilhar o item.

Distribuição final

O Martin fica com o relógio, com os binóculos e com 3% do cavaquinho.

O João fica com o rádio e com 97% do cavaquinho.

Exercícios

34 Dois irmãos, Manuel Gomes e Carlos Gomes, herdaram alguns bens de um tio que não tinha filhos: um carro, uma pequena casa e um terreno de cultivo. Os irmãos decidiram dividir os bens utilizando o método de ajuste na partilha.

A tabela seguinte apresenta os pontos atribuídos pelos irmãos a cada item.

	Carro	Casa	Terreno
Manuel	5	45	50
Carlos	6	66	28

Aplica o método de ajuste na partilha e indica a distribuição final dos bens.

35 Dois países, país A e país B, necessitam dividir de forma justa cinco itens importantes para as suas economias e bem-estar. A divisão deve realizar-se por aplicação do método de partilha ajustada, de modo a maximizar a satisfação de ambos os países.

Os itens que devem ser divididos entre os países encontram-se pontuados na tabela seguinte.

Item	Pontuação do país A	Pontuação do país B
Recurso energético	30	20
Recurso hídrico	25	30
Produto agrícola	15	25
Tecnologia	18	15
Recurso mineral	12	10

Como os países acordaram realizar a divisão através do método de ajuste na partilha, aplica-o e apresenta a divisão final dos itens.

36 **Com um colega ou uma colega simula a aplicação do método de ajuste na partilha para dividirem os seguintes itens: um *smartphone*, uma bicicleta, um computador e um CD original autografado pela cantora Cesária Évora.**

Manual Interativo

Vídeo
Método das licitações secretas

2.2.1.2. Método das licitações secretas

O **método das licitações secretas**, também conhecido por **método das propostas fechadas**, foi proposto por Bronislak Knaster e por Hugo Steinhaus, em 1948. Neste método, os participantes fazem licitações secretas (atribuem valores monetários) dos itens a serem partilhados. Cada item é atribuído ao licitante que oferece o maior valor e o total das licitações é ajustado para garantir que todos recebem uma parte justa do valor total dos bens.

Este método é útil para assegurar a equidade quando os participantes atribuem valores diferentes aos itens indivisíveis.

Procedimento de aplicação: método das licitações secretas

1) Licitações secretas

Cada interveniente atribui secretamente um valor monetário a cada um os bens (itens) a serem divididos, refletindo a importância ou o valor percebido de cada bem.

2) Valor justo

Determina-se, para cada um dos intervenientes, o quociente entre o valor total que atribui aos bens e o número de intervenientes.

Exemplo do valor justo para o interveniente 1 (Int 1)

$$\text{valor justo (Int 1)}: \frac{\text{soma das licitações do Int 1}}{\text{n.º de intervenientes}}$$

3) Atribuição dos itens

Cada item é atribuído ao interveniente que ofereceu maior licitação pelo item.

4) Calcular o saldo dos intervenientes

Para cada interveniente determina-se a diferença entre o valor justo e o valor total dos itens que recebeu.

Exemplo do saldo para o interveniente 1 (Int 1)

$$\text{saldo (Int 1)} = \text{valor justo (Int 1)} - \text{valor total dos itens recebidos (Int 1)}$$

- Caso o saldo seja positivo, o interveniente recebe esse valor.
- Caso a saldo seja negativo, o interveniente paga esse valor.

5) Determinar o excedente monetário

Verifica-se se existe dinheiro disponível através da diferença entre a soma dos valores a pagar e a soma dos valores a receber.

Se existir excedente monetário, divide-se de modo igual por todos os intervenientes.

6) Distribuição

A cada interveniente corresponde o(s) item(ns) que recebeu, o saldo e a parte do eventual excedente monetário.

Exemplo 25: Método das licitações secretas

Os dois irmãos, Manuel Gomes e Carlos Gomes, simularam a partilha, com o método das licitações secretas, dos bens que herdaram do tio: um carro, uma pequena casa e um terreno de cultivo.

A tabela seguinte apresenta as licitações secretas (em escudos) atribuídas por cada um dos irmãos aos itens.

1) Licitações secretas

	Carro	Casa	Terreno
Manuel	1 200 000 escudos	5 000 000 escudos	3 000 000 escudos
Carlos	1 500 000 escudos	8 000 000 escudos	2 100 000 escudos

2) Valor justo

Valor justo (Manuel): $\dfrac{1\,200\,000 + 5\,000\,000 + 3\,000\,000}{2} = 4\,600\,000$ escudos

Valor justo (Carlos): $\dfrac{1\,500\,000 + 8\,000\,000 + 2\,100\,000}{2} = 5\,800\,000$ escudos

3) Atribuição dos itens

Manuel: terreno 3 000 000 escudos

Carlos: carro e casa (1 500 000 + 8 000 000 = 9 500 000 escudos)

4) Calcular o saldo dos intervenientes

Para cada interveniente determina-se a diferença entre o valor justo e o valor total dos itens que recebeu.

Exemplo do saldo para o interveniente 1 (Int 1)

saldo (Manuel) = 4 600 000 – 3 000 000 = 1 600 000 escudos

saldo (Carlos) = 5 800 000 – 9 500 000 = – 3 700 000 escudos

O Manuel recebe 1 600 000 escudos e o Carlos paga 3 700 000 escudos

5) Determinar o excedente monetário

3 700 000 – 1 600 000 = 2 100 000 escudos

$$\frac{2\,100\,000}{2} = 1\,050\,000 \text{ escudos}$$

6) Distribuição

Manuel: Fica com o terreno e recebe 2 650 000 escudos (1 600 000 + 1 050 000)

Carlos: Fica com o carro e com a casa e paga 2 650 000 escudos (– 3 700 000 + 1 050 000)

Exercícios

37 **Três herdeiros, H1, H2 e H3, precisam dividir quatro itens de uma herança deixada por um parente muito rico. Os itens são valiosos e cada herdeiro fará uma licitação secreta, indicando em escudos o valor que atribui a cada item.**

Item	Licitação de H1	Licitação de H2	Licitação de H3
Casa de praia	30 000 000	20 800 000	30 200 000
Carro de luxo	15 000 000	17 000 000	16 000 000
Coleção de obras de arte	2 200 000	2 500 000	2 300 000
Terreno agrícola	10 000 000	12 000 000	11 000 000

Sabendo que os herdeiros aplicaram o método da licitação secreta, responde:

37.1. Que herdeiro fica com a casa na praia? Justifica a tua resposta.

37.2. Algum herdeiro ficou sem nenhum bem? Justifica a tua resposta.

37.3. Que itens são atribuídos ao herdeiro H2 ?

38 **Três sócios de uma empresa, o Arlindo, o Benvindo e a Celestina, decidiram encerrar a sua atividade conjunta e dividir os principais ativos da empresa.**
Os itens são valiosos e cada sócio fará uma licitação secreta, indicando em escudos o valor que atribui a cada item, apresentados na seguinte tabela.

Itens	Licitação do Arlindo	Licitação do Benvindo	Licitação da Celestina
Escritório central	50 000 000	48 000 000	52 000 000
Frota de veículos	36 000 000	52 000 000	41 000 000
Equipamentos de TI	15 000 000	17 000 000	16 000 000
Marca registada	30 000 000	28 000 000	31 000 000

Sabendo que os sócios efetuam a partilha aplicando o método das licitações secretas, indica:

38.1. os itens com que fica cada sócio;

38.2. qual dos sócios recebe maior valor monetário no final da partilha.

39 **Indica uma vantagem e uma desvantagem do método das licitações secretas em relação ao método de ajuste na partilha.**

2.2.2. Partilha contínua

A partilha contínua é um conceito da teoria da partilha equilibrada que se refere à divisão de recursos que podem ser divididos infinitamente sem perderem o seu valor ou utilidade. Diferente da partilha discreta, em que os itens são indivisíveis, a partilha contínua lida com bens como dinheiro, terrenos, líquidos ou qualquer outro recurso que possa ser fracionado em partes menores, garantindo que cada parte envolvida na divisão recebe uma porção justa do total.

Exemplos mundialmente famosos

Divisão de terras agrícolas: Um exemplo notável de partilha contínua ocorreu no processo de reforma agrária em diversos países, onde grandes extensões de terras agrícolas foram redistribuídas entre agricultores. No Brasil, por exemplo, a reforma agrária tem como objetivo dividir grandes propriedades de terra em parcelas menores para distribuir entre famílias, permitindo uma divisão contínua e justa do recurso.

Alocação da água do rio Colorado: Nos Estados Unidos, a alocação da água do rio Colorado entre sete estados e o México é outro exemplo de partilha contínua. A água do rio é um recurso essencial e deve ser dividida de maneira justa entre as partes envolvidas, levando em consideração as necessidades de consumo humano, agricultura e preservação ambiental.

A partilha contínua está intrinsecamente ligada aos princípios de cidadania e sustentabilidade. Ao dividir recursos de maneira justa, assegura-se que todos os membros de uma comunidade tenham acesso equitativo aos bens essenciais, promovendo a justiça social e a inclusão. Além disso, a divisão sustentável de recursos contínuos, como água e terra, é crucial para a preservação ambiental e o uso responsável desses recursos, garantindo que futuras gerações também possam usufruir desses bens.

Assim, vamos estudar dois métodos de partilha contínua, onde a matemática é fundamental:

- método do divisor-selecionador
- método do divisor único

2.2.2.1. Método do divisor-selecionador

O **método do divisor-selecionador** envolve duas pessoas. Uma pessoa (o divisor) que divide o recurso contínuo em porções que acredita serem justas. O outro participante (o selecionador) escolhe, então, a sua porção com base na divisão feita. Este método incentiva o divisor a ser o mais justo possível, pois ele fica com a parte que o selecionador não escolheu.

Procedimento de aplicação: método do divisor-selecionador

1) **Atribuição de funções**

   Escolher um divisor e um selecionador de modo aleatório.

2) **Divisão dos itens**

   O divisor divide os itens em porções que acredita serem justas.

3) Distribuição dos itens

O selecionador escolhe primeiro uma das porções. O divisor fica com a parte que o selecionador não escolheu.

Manual Interativo

Vídeo
Método do divisor-selecionador

O método do divisor-selecionador assegura equidade na divisão de bens ao incorporar uma abordagem que equaliza o poder de decisão entre as partes envolvidas. No processo, um indivíduo (o "divisor") divide os bens em partes que considera justas, enquanto o outro participante (o "selecionador") escolhe a sua parte preferida entre a divisão feita. Essa dinâmica incentiva o divisor a ser o mais equitativo possível ao fazer as divisões, pois qualquer perceção de injustiça poderá levar a uma escolha desfavorável para si mesmo.

Consequentemente, o método promove um equilíbrio de interesses e garante que cada participante recebe uma parte que, de acordo com o seu julgamento, é justa e satisfatória, mitigando o potencial de conflitos e ressentimentos.

Exercícios

40 **Lê as afirmações seguintes sobre o método do divisor-selecionador e indica se cada uma delas é verdadeira (V) ou falsa (F).**

(A) O método do divisor-selecionador é usado apenas para dividir bens tangíveis, como imóveis e objetos físicos.

(B) No método do divisor-selecionador, o divisor tem a responsabilidade de fazer uma divisão que ele considera justa.

(C) O selecionador escolhe a parte da divisão que ele prefere após o divisor fazer a divisão.

(D) O método do divisor-selecionador é sempre justo, independentemente das preferências individuais dos participantes.

(E) O método do divisor-selecionador pode ser aplicado em situações de divisão de recursos intangíveis, como tempo e direitos autorais.

(F) No método do divisor-selecionador, a pessoa que faz a divisão também escolhe a primeira parte.

41 **O Miguel e a Isabel ganharam um bolo num concurso de culinária. Metade do bolo tem sabor a chocolate e a outra metade tem sabor a chá verde. Decidiram aplicar o método do divisor-selecionador para partilhar o bolo.**

Sabendo que o Miguel e a Isabel desconhecem as preferências um do outro, que divisão consideras ser mais equitativa?

2.2.2.2. Método do divisor único

O método do divisor único deriva do método do divisor-selecionador, mas procura dar uma resposta mais equitativa para quando existe mais de dois intervenientes.

No **método do divisor único**, uma pessoa divide o recurso em porções e cada participante, incluindo o divisor, recebe uma parte. Para garantir que é justo, a divisão deve ser feita de modo que todos considerem as suas porções aceitáveis.

Este método é simples e eficiente, especialmente em situações em que há confiança mútua entre os participantes.

Manual Interativo

Vídeo
Método do divisor único

Procedimento de aplicação: método do divisor único (para três participantes)

1) **Atribuição de funções**

Escolhe-se um divisor de modo aleatório, sendo os restantes participantes considerados os selecionadores.

2) **Divisão dos itens**

O divisor divide os itens em três porções que acredita serem justas:

Parte 1 (P1), Parte 2 (P2) e Parte 3 (P3)

3) **Licitação secreta**

Os selecionadores atribuem, secretamente, uma percentagem a cada uma das partes conforme as suas preferências.

Como o divisor divide os itens em três porções que acredita serem justas, a sua licitação é definida como $\frac{100\%}{3} \simeq 33,(3)\%$.

4) **Distribuição das partes**

As partes são distribuídas pelos participantes de acordo com as suas preferências. No mínimo, cada participante deverá receber $33,(3)\%$ das suas preferências.

Em caso de empate entre dois dos participantes, juntam-se as partes sobrantes e aplica-se o método do divisor-selecionador.

O método do divisor único assegura equidade na divisão de bens ao permitir que uma única pessoa, designada como o divisor, tenha a responsabilidade de criar uma divisão que seja justa e equilibrada, sabendo que os outros participantes terão a liberdade de escolher as partes resultantes da divisão. Este método incentiva o divisor a ser o mais equitativo possível, pois qualquer perceção de injustiça ou parcialidade pode resultar na sobra das partes menos desejáveis para o próprio divisor.

Exemplo 26: Método do divisor único

O senhor José Tavares resolveu dar aos seus netos muito do material de pesca que tinha em excesso.

Os netos do senhor José são a Ana, o Domingos e o Francisco, e resolveram dividir o material através do método do divisor único.

Material a ser dividido:

- 3 canas de pesca grandes;
- 4 canas de pesca pequenas;
- 1 cadeira de pesca desdobrável;
- 50 anzois simples;
- 10 anzois especiais.

1) Atribuição de funções

Efetuaram um sorteio e a Ana ficou como divisora. O Domingos e o Francisco ficaram como selecionadores.

2) Divisão dos itens

A Ana dividiu os itens em três partes, que acredita serem justas:

Parte 1	Parte 2	Parte 3
1 cana de pesca grande 2 canas de pesca pequenas 10 anzois simples 2 anzois especiais	1 cana de pesca grande 1 cana de pesca pequena 1 cadeira de pesca 10 anzois simples 2 anzois especiais	1 cana de pesca grande 1 cana de pesca pequena 30 anzois simples 6 anzois especiais

3) Licitação secreta

O Domingos e o Francisco atribuíram, secretamente, uma percentagem a cada uma das partes, conforme as suas preferências.

	Parte 1	Parte 2	Parte 3
Ana	33,(3)%	33,(3)%	33,(3)%
Domingos	40%	35%	25%
Francisco	25%	45%	30%

4) Distribuição das partes

As partes são distribuídas pelos participantes de acordo com as suas preferências.

Domingos: Parte 1 Francisco: Parte 2 Ana: Parte 3

Exercícios

Manual Interativo

Atividade
Métodos de partilha equilibrada

42 A Margarida, a Maya e a Mariana participaram num *atelier* de pintura, durante as férias escolares. No final do *atelier*, sobrou algum material para ser dividido pelas três amigas.

Material a ser dividido:

- 4 conjuntos de pincéis grandes
- 2 cavaletes ajustáveis
- 10 tubos de tinta a óleo
- 5 conjuntos de pincéis pequenos
- 20 tubos de tinta acrílica

Como decidiram partilhar o material por aplicação do método do divisor único, efetuaram um sorteio e a Maya ficou como divisora. As tabelas seguintes apresentam a divisão em partes efetuada pela Maya e as licitações secretas efetuadas pela Margarida e pela Mariana.

1) Divisão das partes

Parte 1	Parte 2	Parte 3
1 conjunto de pincéis grandes 2 conjuntos de pincéis pequenos 1 cavalete ajustável 5 tubos de tinta acrílica 3 tubos de tinta a óleo	1 conjunto de pincéis grandes 2 conjuntos de pincéis pequenos 10 tubos de tinta acrílica 5 tubos de tinta a óleo	2 conjuntos de pincéis grandes 1 conjunto de pincéis pequenos 1 cavalete ajustável 5 tubos de tinta acrílica 2 tubos de tinta a óleo

2) Licitação secreta

	Parte 1	Parte 2	Parte 3
Maya	33,(3)%	33,(3)%	33,(3)%
Margarida	20%	40%	40%
Mariana	30%	45%	25%

42.1. Que parte deverá ser atribuída a cada amiga considerando a licitação secreta?

42.2. Consideras que a divisão realizada pela Maya foi justa? Justifica a tua resposta.

42.3. Verifica-se algum empate que implique utilizar o método do divisor--selecionador para desempatar? Justifica a tua resposta.

43 Em grupos de três colegas aplica o método do divisor único para simularem a divisão dos seguintes itens:

- 2 pares de chinelos de dedo;
- 2 óculos de sol;
- 3 porta-chaves;
- 1 tabuleiro de xadrez;
- 1 par de brincos de argolas;
- 2 baralhos de cartas;
- 1 máquina de calcular simples;
- 2 tabuleiros de damas.

Síntese

Partilha discreta

Os métodos de partilha discreta aplicam-se na divisão de bens indivisíveis entre vários envolvidos de modo que a divisão seja considerada justa por todos. Este tipo de partilha é particularmente relevante quando os itens a serem divididos não podem ser fracionados sem perderem o seu valor ou utilidade, como, por exemplo, uma casa, um relógio ou um carro.

Método do ajuste na partilha ou método do vencedor ajustado

O método do ajuste na partilha pode ser aplicado quanto estão apenas envolvidos dois intervenientes.

Procedimento – método do ajuste na partilha

1) **Distribuição de pontos**
   Cada interveniente distribui 100 pontos entre os bens (itens) a serem divididos, refletindo a importância ou o valor percebido de cada bem.
2) **Atribuição dos itens**
   É atribuído, temporariamente, o item ao interveniente que lhe alocou mais pontos.
3) **Determinar pontuações**
   Determinar o total de pontos com que cada interveniente fica após a atribuição dos itens:
   - Caso os dois intervenientes obtenham o mesmo número de pontos, a partilha está ajustada e concluída.
   - Caso os dois intervenientes não obtenham o mesmo número de pontos, a partilha ainda não está ajustada e continua a aplicar-se o método.

   O interveniente que fica com mais pontos é considerado o vencedor inicial, sendo o outro considerado o perdedor inicial.
4) **Calcular o quociente de compensação**
   Para cada item atribuído ao vencedor inicial, determina-se o quociente:
   $$\frac{\text{pontuação atribuída pelo vencedor inicial}}{\text{pontuação atribuída pelo perdedor inicial}}$$
5) **Transferir itens**
   Por ordem crescente dos coeficientes de compensação, inicia-se a transferência de itens do vencedor para o perdedor. Após cada transferência verifica-se a pontuação.

Síntese

- Caso os dois intervenientes obtenham o mesmo número de pontos, a partilha está ajustada e concluída.
- Caso os dois intervenientes não obtenham o mesmo número de pontos, a partilha ainda não está ajustada e continua a efetuar-se transferências até que o vencedor inicial obtenha menos pontos do que o perdedor inicial.

6) Equacionar a partilha do item final

Considera-se como x a parte do item que corresponde ao vencedor inicial.

Considera-se como $1-x$ a parte do item que corresponde ao perdedor inicial.

Escreve-se a equação que traduza o equilíbrio em que ambos os intervenientes terminem com o mesmo número de pontos.

7) Partilhar o item final

Resolve-se a equação e obtém-se a fração (parte do item) correspondente ao vencedor inicial. A restante parte corresponde ao perdedor inicial.

Escreve-se uma equação que traduza o equilíbrio na partilha. Cada interveniente tem de terminar com o mesmo número de pontos.

Método das licitações secretas ou método das propostas fechadas

No método das licitações secretas os participantes fazem licitações secretas (atribuem valores monetários) sobre os itens a serem partilhados. Cada item é atribuído ao licitante que oferece o maior valor e o total das licitações é ajustado para garantir que todos recebam uma parte justa do valor total dos bens.

Procedimento – método das licitações secretas

1) Licitações secretas

Cada interveniente atribui secretamente um valor monetário a cada um dos bens (itens) a serem divididos, refletindo a importância ou o valor percebido de cada bem.

2) Valor justo

Determina-se, para cada um dos intervenientes, o quociente entre o valor total que atribui aos bens e o número de intervenientes.

Exemplo do valor justo para o interveniente 1 (Int 1)

$$\text{valor justo (Int 1)}: \frac{\text{soma das licitações do Int 1}}{\text{n.º de intervenientes}}$$

Síntese

3) Atribuição dos itens

Cada item é atribuído ao interveniente que ofereceu maior licitação pelo item.

Determinam-se os itens atribuídos a cada interveniente.

4) Calcular o saldo dos intervenientes

Para cada interveniente determina-se a diferença entre o valor justo e o valor total dos itens que recebeu.

Exemplo do saldo para o interveniente 1 (Int 1)

saldo (Int 1) = valor justo (Int 1) – valor total dos itens recebidos (Int 1)

- Caso o saldo seja positivo, o interveniente recebe esse valor.
- Caso a saldo seja negativo, o interveniente paga esse valor.

5) Determinar o excedente monetário

Verifica-se se existe dinheiro disponível através da diferença entre a soma dos valores a pagar e a soma dos valores a receber.

Se existir excedente monetário, divide-se de modo igual por todos os intervenientes.

6) Distribuição

A cada interveniente corresponde o(s) item(ns) que recebeu, o saldo e a parte do eventual excedente monetário.

Partilha contínua

A partilha contínua é um conceito da teoria da partilha equilibrada que se refere à divisão de recursos que podem ser divididos infinitamente sem perderem o seu valor ou utilidade. Diferente da partilha discreta, em que os itens são indivisíveis, a partilha contínua lida com bens como dinheiro, terrenos, líquidos ou qualquer outro recurso que possa ser fracionado em partes menores, garantindo que cada parte envolvida na divisão recebe uma porção justa do total.

Método do divisor-selecionador

O método do divisor-selecionador envolve uma pessoa (o divisor) que divide o recurso contínuo em porções que acredita serem justas. O outro participante (o selecionador) escolhe, então, a sua porção com base na divisão feita. Este método incentiva o divisor a ser o mais justo possível, pois ele fica com a parte que o selecionador não escolheu.

Síntese

Procedimento – método do divisor-selecionador

1) **Atribuição de funções**
   Escolher um divisor e um selecionador de modo aleatório.
2) **Divisão dos itens**
   O divisor divide os itens em porções que acredita serem justas.
3) **Distribuição dos itens**
   O selecionador escolhe primeiro uma das porções. O divisor fica com a parte que o selecionador não escolheu.

Método do divisor único

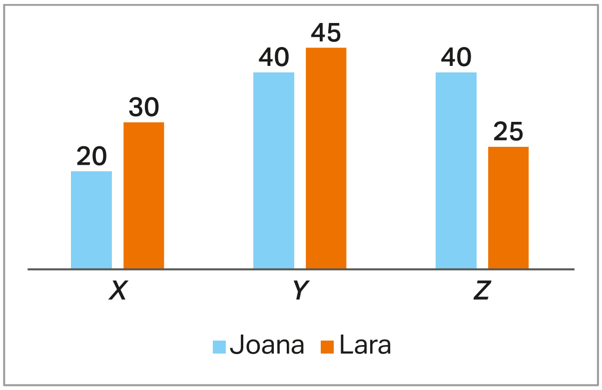
No método do divisor único uma pessoa divide o recurso em porções e cada participante, incluindo o divisor, recebe uma parte. Para garantir que é justo, a divisão deve ser feita de modo que todos considerem as suas porções aceitáveis. Este método é simples e eficiente, especialmente em situações em que há confiança mútua entre os participantes.

Procedimento – método do divisor único (para três participantes)

1) **Atribuição de funções**
   Escolhe-se um divisor de modo aleatório, sendo os restantes participantes considerados os selecionadores.
2) **Divisão dos itens**
   O divisor divide os itens em três porções que acredita serem justas:
   Parte 1 (P1), Parte 2 (P2) e Parte 3 (P3)
3) **Licitação secreta**
   Os selecionadores atribuem, secretamente, uma percentagem a cada uma das partes conforme as suas preferências.
   Como o divisor divide os itens em três porções que acredita serem justas, a sua licitação é definida como $\frac{100\%}{3} = 33,(3)\%$.
4) **Distribuição das partes**
   As partes são distribuídas pelos participantes de acordo com as suas preferências. No mínimo, cada participante deverá receber 33,(3)% das suas preferências.
   Em caso de empate entre dois dos participantes, juntam-se as partes sobrantes e aplica-se o método do divisor-selecionador.

Para aplicar

1 **A Joana e a Iara atribuíram, secretamente, a cada um dos itens X, Y, Z, a pontuação apresentada no gráfico ao lado.**



Sabendo que a Joana e a Iara vão partilhar os itens utilizando o método de ajuste na partilha:

1.1. Com que itens fica, inicialmente, cada uma das amigas?

1.2. No final da partilha, como ficam distribuídos os itens?

2 **O António, o Rodrigo e o Henrique receberam uma herança que terão de partilhar. A herança é composta por um terreno urbano, um terreno rural, uma casa, um apartamento e um automóvel.**

Resolveram aplicar o método das licitações secretas para realizarem a partilha.

A tabela seguinte apresenta as licitações realizadas por cada herdeiro a cada item, em escudos.

Item	Licitação do António	Licitação do Rodrigo	Licitação do Henrique
Terreno urbano	7 500 000	7 500 000	9 200 000
Terreno rural	6 000 000	7 000 000	6 000 000
Casa	18 200 000	16 500 000	15 000 000
Apartamento	12 000 000	14 000 000	11 000 000
Automóvel	4 000 000	4 200 000	4 500 000

2.1. Quanto é o valor que cada um dos herdeiros considera que vale a herança?

2.2. Indica com que item fica cada um dos herdeiros.

2.3. Comenta a afirmação: "O Henrique irá ficar com o terreno urbano e com o automóvel, mas não irá receber nenhum dinheiro".

2.4. Efetua a distribuição final da herança.

3 **Os primos Mário, Rita e Cristina foram almoçar a casa da tia Maria, que lhes preparou uma piza deliciosa, com vários ingredientes.**

3.1. Porque é que os primos não devem utilizar o método das licitações secretas na divisão da piza?

3.2. Os primos decidiram utilizar o método do divisor único para partilhar a piza. O Mário foi destacado como divisor, tendo divido a piza em três partes: $P1$, $P2$ e $P3$.

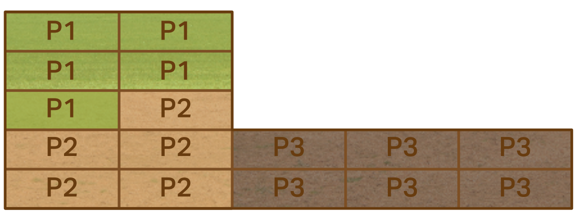
Após o Mário dividir a piza, cada uma das primas atribui a cada uma das partes as pontuações que se seguem.

	Parte 1	Parte 2	Parte 3
Rita	40%	35%	25%
Cristina	20%	40%	30%

a) Com que parte ficou cada um dos primos?

b) Porque é importante para o Mário fazer uma boa divisão?

4 **Três primos, o Rafael, o Diego e o Gabriel, herdaram um grande terreno que pretendem partilhar através do método do divisor único. O Rafael foi sorteado como divisor e dividiu o terreno em três partes ($P1$, $P2$ e $P3$), como está ilustrado na figura seguinte.**



A tabela seguinte apresenta a pontuação atribuída por cada um dos primos a cada uma das partes.

	Parte 1	Parte 2	Parte 3
Diego	35%	25%	40%
Gabriel	25%	25%	50%
Rafael	33,(3)%	33,(3)%	33,(3)%

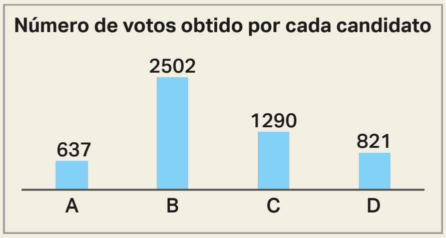
4.1. Indica como ficará, no final, a distribuição das partes pelos primos.

4.2. Consideras que o Rafael efetuou uma divisão justa? Justifica a tua resposta.

Teste

1 Num processo eleitoral estavam registados 7000 eleitores para eleger quatro candidatos (candidato A, candidato B, candidato C e candidato D).

Os resultados obtidos estão ilustrados no gráfico ao lado.



1.1. Num sistema eleitoral maioritário simples o que sucederia?

(A) O candidato A era eliminado e os seus votos distribuídos.

(B) O candidato B vencia as eleições.

(C) Os candidatos B e C realizariam uma segunda volta.

(D) Os candidatos A e D eram eliminados e os seus votos distribuídos.

1.2. Sabendo que os votos de todos os eleitores foram válidos, qual é a taxa de abstenção?

(A) 85% **(B)** 15% **(C)** 75% **(D)** 25%

2 Num determinado método de eleição:

- Cada eleitor classifica os candidatos em ordem de preferência.
- São contados os votos de primeira preferência de todos os eleitores.
  - Se um candidato obtiver a maioria absoluta desses votos, é declarado vencedor.
  - Caso contrário, elimina-se o candidato com menor número de votos de primeira preferência. Os votos do candidato eliminado são redistribuídos para os candidatos restantes com base na segunda preferência indicada dos eleitores.

Os procedimentos apresentados referem-se ao:

(A) Método de eliminação *run-off standard*

(B) Método de eliminação *run-off* sequencial

(C) Método de Borda

(D) Método de Condorcet

3 Em Cabo Verde, nas eleições autárquicas, os membros da Assembleia Municipal são eleitos através de um:

(A) sistema de representação proporcional

(B) sistema de maioria simples

(C) sistema de maioria absoluta

(D) sistema de aprovação

4 A tabela ao lado representa as preferências da votação para presidente nacional da confederação de associações de desenvolvimento sustentável.

N.º de votos	55	41	34
1.ª preferência	A	C	B
2.ª preferência	B	A	C
3.ª preferência	C	B	A

4.1. Pelo método de Condorcet, nesta eleição vence:

(A) O candidato A.

(B) O candidato B.

(C) O candidato C.

4.2. Pelo método de eliminação *run-off standard*, nesta eleição vence:

(A) O candidato A.

(B) O candidato B.

(C) O candidato C.

5 Um município elege para o parlamento nacional do seu país sete deputados. Concorreram três partidos (partido A, partido B e partido C) para eleger representantes pelo município.

Os resultados obtidos apresentam-se na seguinte tabela:

Partido	A	B	C	Total
N.º de votos	7080	1770	6573	15 423

Sabendo que se aplica o método de Hondt, o número de representantes eleitos por partido é:

(A) O partido A elege 3. O partido B elege 2. O partido C elege 2.

(B) O partido A elege 4. O partido B elege 1. O partido C elege 2.

(C) O partido A elege 3. O partido B elege 1. O partido C elege 3.

(D) O partido A elege 4. O partido B elege 0. O partido C elege 3.

6 O método adequado para se dividir um bem divisível por três pessoas é:

(A) Método do ajuste na partilha

(B) Método das licitações secretas

(C) Método do divisor-selecionador

(D) Método do divisor único

7 Em que método matemático de partilha pode acontecer um interveniente ficar, por exemplo, com 30% de um carro e outro interveniente com 70% do carro?

(A) Método do ajuste na partilha

(B) Método das licitações secretas

(C) Método do divisor-selecionador

(D) Método do divisor único

Teste

8 Considera o procedimento para um processo eleitoral de maioria absoluta:

1.º Cada eleitor vota num só candidato.

2.º Ordenam-se os candidatos por ordem decrescente das suas percentagens de votação.

3.º Se um candidato obtiver maioria absoluta vence a eleição.

4.º Se nenhum candidato obtiver maioria absoluta, eliminam-se os candidatos que obtiveram menos de 25% na votação e realiza-se uma segunda volta, que irá garantir que um dos candidatos obtenha a maioria absoluta.

8.1. O procedimento está correto? Justifica a tua resposta.

8.2. Considerando o procedimento apresentado, é garantido que apenas dois candidatos disputem a segunda volta? Justifica a tua resposta.

9 Na final de um concurso televisivo de artistas musicais, os telespectadores votam considerando as suas preferências.

A tabela seguinte apresenta os resultados da votação obtidos por cada um dos artistas: Amadeu (A), Bianca (B), Naíra (N), Milene (M).

N.º de votos	405	250	103	86	51
1.ª preferência	A	B	N	M	N
2.ª preferência	B	A	M	N	A
3.ª preferência	N	N	A	B	B
4.ª preferência	M	M	B	A	M

9.1. Ordena os candidatos pelo número de pontos obtidos, sabendo que no concurso se aplica o método de Borda.

9.2. Se o método utilizado fosse o método da pluralidade, os resultados seriam os mesmos? Justifica a tua resposta.

10 Um restaurante de cozinha tradicional auscultou as opiniões dos seus clientes para identificar qual o prato mais apreciado.

As opiniões recolhidas foram as seguintes:

- 16 clientes votaram na cachupa.
- 12 clientes votaram na feijoada de polvo.
- 10 clientes votaram na feijoada de polvo e nas papas de milho.
- 5 clientes votaram na cachupa e na moreia de cebolada.
- 4 clientes votaram nas papas de milho e na cachupa.
- 4 clientes votaram na moreia de cebolada e na feijoada de polvo.

10.1. Qual foi o prato que venceu a votação, pelo método de aprovação?

10.2. Será que se fosse apenas possível escolher um prato, o prato vencedor seria sempre o mesmo? Justifica a tua resposta.

11 Três irmãos, a Beatriz, a Daniela e o Tiago, dividiram uma herança composta por: uma casa grande, uma casa pequena, uma motorizada e um cavalo.

Os resultados finais da divisão foram:

Beatriz: recebeu 15 000 000 escudos.

Daniela: casa pequena, motorizada, cavalo e pagou 1 500 000 escudos.

Tiago: casa grande e pagou x escudos.

Sabendo que os irmãos utilizaram o método das licitações secretas, responde às seguintes questões.

11.1. Porque é que a Beatriz não ficou com nenhum item?

11.2. Quantos escudos pagou o Tiago?

11.3. Quem ofereceu a maior licitação pelo cavalo? Justifica a tua resposta.

12 As equipas de andebol, basquetebol e de voleibol de um clube desportivo têm de partilhar o pavilhão para realizarem os treinos semanais.

Os treinadores das três modalidades efetuaram um sorteio para escolherem um divisor e aplicarem o método do divisor único na partilha do pavilhão.

O senhor Pereira, treinador de andebol, ficou com a tarefa de ser o divisor. Como sentia que era uma tarefa de muita responsabilidade, procurou ser justo e equitativo na divisão dos horários pelos dias da semana. Dividiu o horário de utilização em três horários (H1 , H2 e H3).

12.1. Sabendo que o voleibol ficou com o horário H2 , completa a tabela com as percentagens correspondentes às licitações dos treinadores.

	H1	H2	H3
Andebol			
Basquetebol		35%	25%
Voleibol			30%

12.2. Ao verificar os três horários disponíveis, a professora Inês, treinadora de voleibol, verificou que o horário H1 é muito inconveniente para a sua equipa. Será que a treinadora pode ter alguma estratégia durante as licitações para evitar o horário H1 ? Justifica a tua resposta.


3

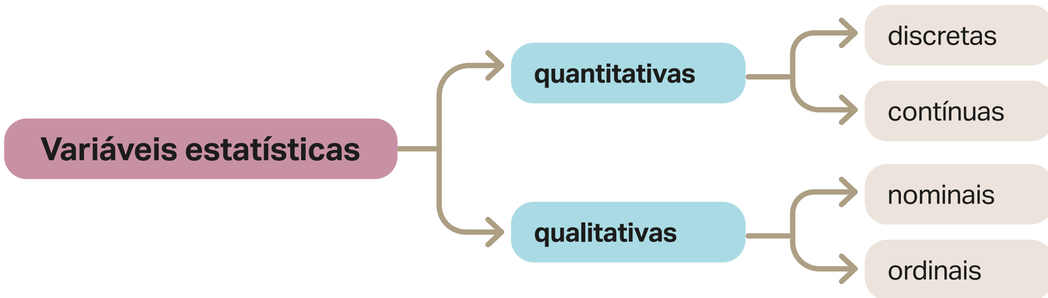
Estatística

Recorda

Manual Interativo

Atividade
Classificação de variáveis estatísticas

Variável estatística é uma característica que admite diferentes valores (um número ou uma modalidade), um por cada unidade estatística.



Frequência absoluta (f_a) representa o número total de vezes que um determinado valor ou categoria ocorre num conjunto de dados. Ou seja, é uma contagem direta de ocorrências de um dado específico num conjunto de observações.

Frequência relativa (f_r) indica a proporção de vezes que um determinado valor ou categoria aparece num conjunto de dados em relação ao total de observações. É geralmente expressa como uma fração, um número decimal ou uma percentagem.

$$f_r = \frac{\text{Frequência absoluta}}{\text{Total de observações}}$$

Agrupar os dados em classes

Num estudo estatístico, quando os dados estatísticos quantitativos (discretos ou contínuos) são em número elevado e variados, é útil agrupá-los em classes. As classes correspondem a intervalos de números reais, fechados à esquerda e abertos à direita.

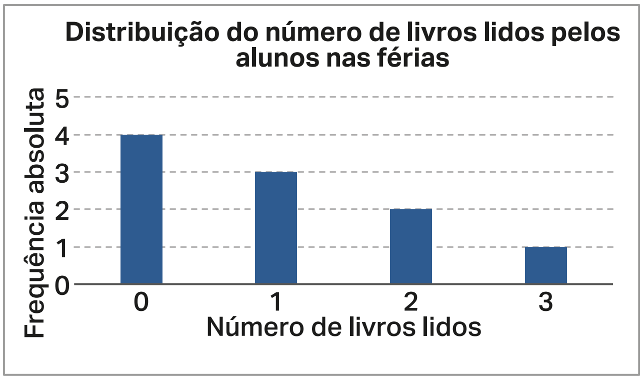
Tabelas de frequências são ferramentas usadas na estatística para organizar e resumir um conjunto de dados, apresentando o número de vezes (frequência) que cada valor ou grupo de valores ocorre. Permitem identificar padrões, tendências e distribuições de dados de forma clara e estruturada.

Exemplos:

Tabela das leituras realizadas por 10 alunos nas férias

N.º de livros lidos	Frequência absoluta	Frequência relativa (Decimal)	Frequência relativa (%)
0	4	$\frac{4}{10} = 0{,}4$	40%
1	3	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	30%
2	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	20%
3	1	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	10%
Total	10	1	100%

Gráfico de barras representa dados qualitativos ou quantitativos discretos, em que se utiliza barras retangulares cuja altura ou comprimento é proporcional ao valor que representam.



Manual Interativo
Atividade Classificação de variáveis estatísticas

Histograma

É um gráfico de barras retangulares justapostas, sendo a área dos retângulos diretamente proporcional à frequência absoluta.

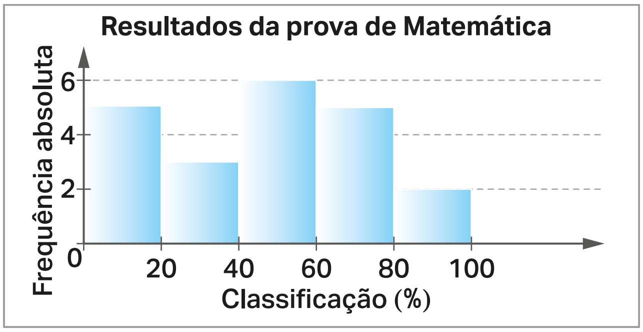
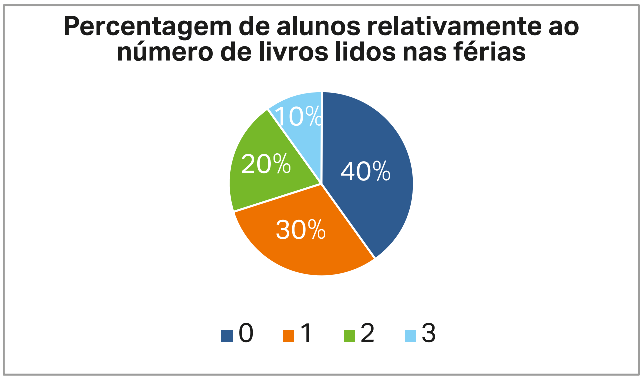


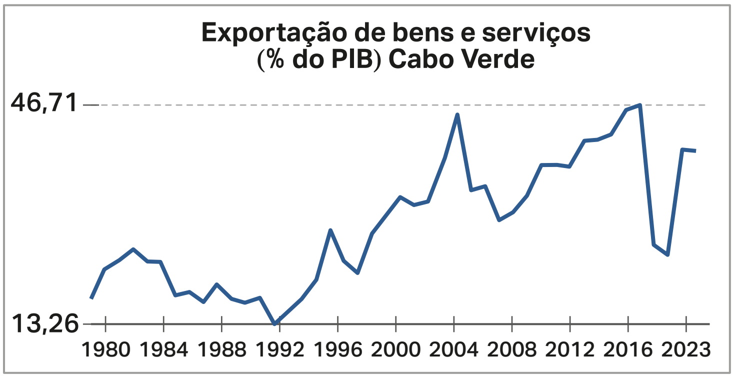
Gráfico circular apresenta dados em forma de setores circulares.

Cada setor representa uma categoria e a amplitude o setor é proporcional à frequência absoluta ou relativa da categoria no conjunto de dados.



Recorda

Gráfico de linhas representa dados contínuos ao longo de um intervalo de tempo.



Fonte: https://pt.theglobaleconomy.com/Cape-Verde/exports/

Medidas de tendência central

Média: Valor igual ao quociente entre a soma de todos os dados e a quantidade deles.

Mediana: Valor central num conjunto ordenado de dados.

Moda: Valor mais frequente no conjunto de dados.

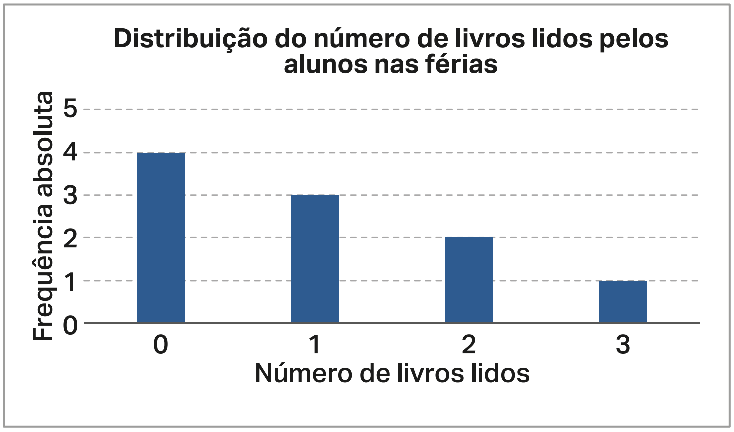
Exemplo:

A média de livros lidos pelos alunos foi de 1, pois $\frac{0 \times 4 + 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1}{10} = 1$.

A moda é 0, ou seja, a maioria dos alunos leu 0 livros.

A mediana relativamente ao número de livros lidos pelos alunos é de $\frac{1+1}{2} = 1$.

Dados ordenados: $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3$



Noção de quartil

Os quartis, num conjunto de dados numéricos ordenados, são valores que dividem os dados em quatro partes de igual percentagem de ocorrência. Como medidas de localização, os quartis permitem obter a indicação da variabilidade e a distribuição dos dados.

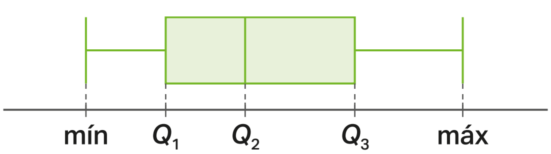
- O **2.º quartil** (Q_2), igual à **mediana** (M_d), é o valor que divide o conjunto em duas partes com o mesmo número de elementos:
  - quando o número de dados é ímpar, a mediana (ou 2.º quartil) é o dado que ocupa a posição central: valor de ordem $\frac{n+1}{2}$;
  - quando o número de dados é par, a mediana (ou 2.º quartil) é a média dos dois dados centrais: valores de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.
- O **1.º quartil** (Q_1) é a mediana dos dados que ficam à esquerda do 2.º quartil.
- O **3.º quartil** (Q_3) é a mediana dos dados que ficam à direita do 2.º quartil.

Nota: Quando o número de dados é ímpar, a mediana é um dos dados. Esse dado é rejeitado para se determinar o Q_1 à esquerda dele e o Q_3 à direita dele. Quando o número de dados é par, a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais. Esses valores não são rejeitados, para a determinação de Q_1 e Q_3.

Diagramas de extremos e quartis

O diagrama de extremos e quartis, ou *boxplot*, é uma representação gráfica que permite a interpretação da distribuição de dados numéricos.

O diagrama de extremos e quartis divide os dados em partes iguais, cada uma contendo aproximadamente 25% dos dados do conjunto.



Amplitude interquartil é a diferença entre o 3.º e o 1.º quartis de um conjunto de dados.

Amplitude é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de um conjunto de dados.

Antes de começar

1 **A professora de Matemática questionou os alunos da sua turma sobre o número de horas que eles dedicam a atividades extracurriculares por semana. Os dados recolhidos foram os seguintes:**

$$2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 5,\ 5,\ 3,\ 0,\ 2,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5,\ 3,\ 3,\ 2,\ 4,\ 0,\ 3,\ 1$$

1.1. Identifica a variável estatística presente neste estudo.

1.2. A variável é quantitativa ou qualitativa? Justifica.

1.3. Quantos alunos tem a turma?

1.4. Constrói uma tabela de frequências que inclua a frequência absoluta e a frequência relativa em percentagem.

2 **Numa outra turma, a professora questionou os alunos sobre o número de minutos semanais de leitura. Os resultados obtidos foram os seguintes:**

$$30,\ 10,\ 25,\ 75,\ 40,\ 50,\ 60,\ 15,\ 20,\ 45,\ 70,\ 35,\ 40,\ 55,\ 60,\ 30,\ 25,\ 45,\ 55,\ 65$$

2.1. Quantos alunos tem a turma?

2.2. Agrupa os dados em classes com amplitude 10.

2.3. Constrói um histograma para representar os dados agrupados.

2.4. Calcula a frequência relativa para cada classe e constrói um gráfico circular com as frequências relativas (em percentagem).

3 **Os números de livros lidos por um grupo de alunos durante um ano foram registados da seguinte forma:**

$$0,\ 4,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 3$$

3.1. Calcula a média do número de livros lidos.

3.2. Determina a mediana do conjunto de dados.

3.3. Identifica a moda.

3.4. Qual é a amplitude dos dados?

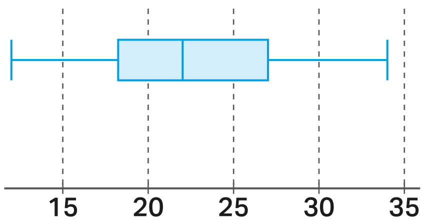
4 **Os resultados de um teste de Matemática foram:**

$$12,\ 14,\ 15,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30,\ 32$$

4.1. Determina o Q_1, Q_2 (mediana) e Q_3.

4.2. Calcula a amplitude interquartil.

4.3. O seguinte diagrama é o digrama de extremos e quartis relativo aos dados recolhidos? Justifica.



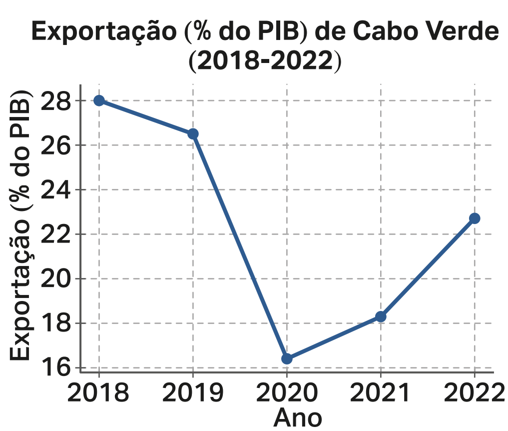
5 A seguinte tabela mostra o peso, em percentagem, da exportação de bens e serviços, no PIB de Cabo Verde, ao longo dos últimos cinco anos.

Ano	Exportação (% do PIB)
2018	28,0
2019	26,5
2020	16,4
2021	18,3
2022	22,7

5.1. Calcula a média dos pesos, no PIB, em percentagem, das exportações, nos cinco anos indicados.

5.2. Determina o ano em que a exportação atingiu o valor, em percentagem do PIB, mais baixo e o valor mais alto. Qual é a amplitude desses dados?

5.3. Com base no seguinte gráfico de linhas, analisa a tendência dos dados e sugere possíveis fatores que expliquem a variação.



3 Estatística

Manual Interativo

Vídeo
A estatística no dia a dia

3.1. Organização e interpretação de caracteres estatísticos

3.1.1. A importância da estatística na sociedade atual

A estatística é uma ciência fundamental na sociedade moderna, desempenhando um papel indispensável na análise e compreensão de dados que afetam a vida quotidiana.

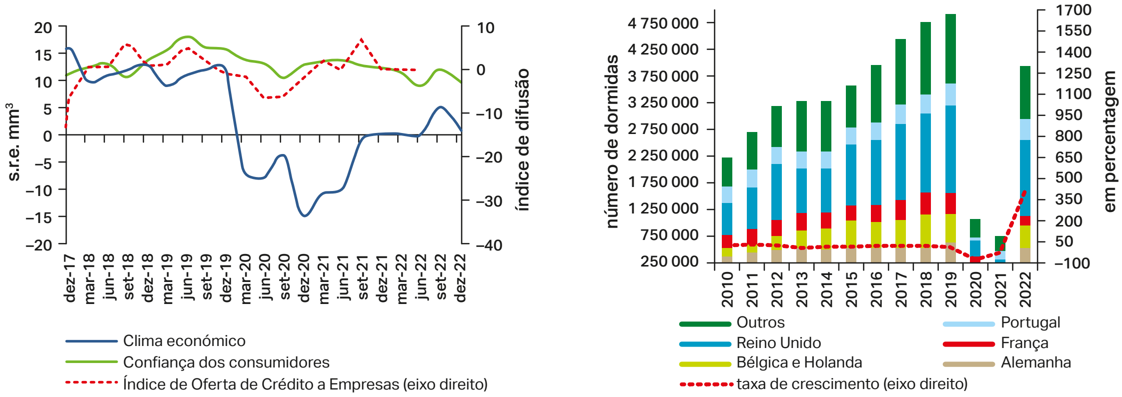
A estatística oferece ferramentas cruciais para a recolha, análise e interpretação de dados. Num mundo cada vez mais regido pela informação, a capacidade de transformar números e dados em conhecimento acionável é essencial para a tomada de decisões informadas em diversos setores, como economia, saúde, educação, tecnologia, política e meio ambiente.

No campo da saúde, a estatística auxilia na análise de dados epidemiológicos, permitindo o controlo de pandemias e a elaboração de políticas públicas de prevenção e tratamento.

Na economia, é fundamental para a avaliação de mercados, previsões económicas, políticas fiscais e monetárias.

O impacto da estatística pode ser observado, por exemplo, na educação, quando se avalia o desempenho escolar, e no meio ambiente, ao medir as mudanças climáticas e os seus impactos.

Indicadores de confiança e procura turística



Além disso, num contexto de globalização, no qual existem disponíveis grandes volumes de dados, conhecido como *Big Data*, a estatística é a chave para compreender padrões, tendências e fazer previsões.

As empresas utilizam a análise estatística para otimizar operações e desenvolver estratégias de mercado, enquanto os governos aplicam-na para incrementar políticas públicas, baseadas em dados concretos. Nesse sentido, a importância da estatística vai além dos números, ela molda a sociedade, orientando decisões que afetam diretamente a vida das pessoas.

Os dois gráficos anteriores, apresentam dados sobre a procura turística em Cabo Verde, permitindo assim ao setor privado e público tomar decisões em relação ao turismo com base em informação estatística.

História da estatística no mundo

A história da estatística remonta a civilizações antigas, em que os primeiros registos de atividades estatísticas podem ser observados no Egito e na Babilónia, por volta de 3000 a. C.. Nessa época, as sociedades contabilizavam colheitas, impostos e propriedades.

Na China, o Governo também realizava censos regulares para quantificar a população e os recursos disponíveis.

A palavra "estatística" deriva do termo latino *status*, que se referia a dados do Estado, um reflexo da sua aplicação inicial na gestão de governos e populações.

Durante a Idade Média, a estatística avançou lentamente, mas ganhou um impulso significativo no século XVII, com o surgimento da Probabilidade como uma disciplina formal. Este período foi marcado pelo trabalho de estudiosos como Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que desenvolveram as bases da teoria das probabilidades. No século XVIII, a estatística moderna começou a consolidar-se com a introdução de técnicas como o recurso ao cálculo da média aritmética, bem como fazendo-se os primeiros estudos demográficos, como o trabalho de John Graunt, que analisou dados sobre a mortalidade em Londres.

No século XIX, a estatística passou por uma revolução com o desenvolvimento de métodos mais robustos para análise de dados. Personagens como Karl Pearson e Francis Galton foram cruciais para o avanço da estatística, estabelecendo a correlação e o conceito de regressão e introduzindo a distribuição normal. A criação do conceito de amostragem e a introdução de métodos inferenciais, desenvolvidos por Ronald Fisher no início do século XX, também foram passos fundamentais para o crescimento da estatística como ciência.

No século XXI, a estatística continua a evoluir rapidamente graças à parceria com a ciência da computação, permitindo a análise de grandes volumes de dados (*Big Data*). Esses avanços ampliam ainda mais o impacto da estatística em praticamente todos os domínios da vida humana.

A estatística em Cabo Verde

Em Cabo Verde, como em outros países, a estatística desempenha um papel crucial na formulação de políticas públicas e no desenvolvimento socioeconómico do país. As informações estatísticas são vitais para o governo, instituições e organizações internacionais avaliarem o progresso em diversas áreas, incluindo a saúde, educação, infraestruturas e desenvolvimento humano. A realização de censos periódicos e pesquisas estatísticas ajudam a desenhar um retrato detalhado da população, das suas condições de vida e dos desafios que enfrentam, contribuindo para a implementação de políticas mais eficazes e alinhadas com as necessidades reais da população, como, por exemplo, o planeamento de infraestruturas, como escolas e hospitais.

Espécies terrestres conhecidas, por ilha (2016)

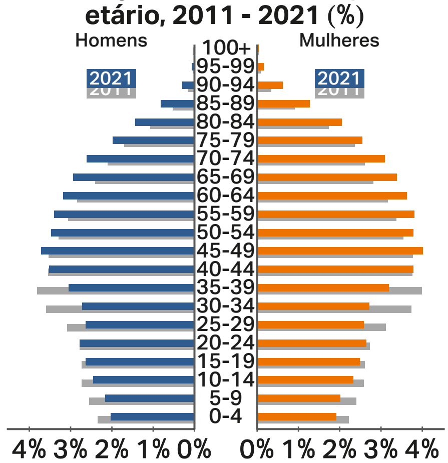
	Fungos	Líquenes	Plantas	Animais	Total
	Número (N.º)				
Santo Antão	26	158	617	794	1595
São Vicente	26	81	328	569	1004
Santa Luzia	0	1	79	65	145
Ilhéu Branco	0	2	64	22	88
Ilhéu Raso	2	2	65	31	100
São Nicolau	16	113	405	560	1094
Sal	7	32	146	355	540
Boavista	1	28	222	360	611
Maio	0	13	229	260	502
Santiago	60	132	519	1204	1915
Fogo	5	105	451	519	1080
Brava	2	59	276	371	708

Fonte: INIDA

O primeiro censo oficial em Cabo Verde ocorreu em 1940, ainda sob a administração colonial portuguesa, e, desde então, os censos têm sido realizados regularmente. O mais recente aconteceu em 2021.

Os censos têm como objetivo recolher dados fundamentais sobre a população, como o número de habitantes, estrutura etária, nível de educação, situação profissional e condições habitacionais.

População residente por grupo etário, 2011 - 2021 (%)



Além dos censos, o Instituto Nacional de Estatística (INE) de Cabo Verde, fundado em 1996, é a principal instituição responsável pela produção, análise e divulgação de dados estatísticos no país.

O INE conduz inquéritos de diversos tipos, como o Inquérito Demográfico e de Saúde Reprodutiva (IDSR), o Inquérito Multiobjetivo Contínuo (IMC) e o Inquérito às Despesas e Receitas Familiares (IDRF). Estes inquéritos permitem obter uma visão ampla das condições socioeconómicas do país e oferecem informações valiosas para, como já referido, a formulação de políticas públicas e o desenvolvimento de estratégias de combate à pobreza e à desigualdade social.

A produção e disseminação de estatísticas confiáveis são também essenciais para a monitorização dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) das Nações Unidas, com os quais Cabo Verde está comprometido. Assim, o país pode monitorizar indicadores essenciais relacionados com a saúde, educação, igualdade de género, meio ambiente e outros aspetos importantes para o desenvolvimento sustentável.

Proporção (%) da população abrangida por:			
	Proteção social (INPS+CNPS)	**Regime contributivo (INPS)**	**Regime não contributivo (CNPS)**
Total	48,0	43,9	4,1
Feminino	49,6	43,8	5,8
Masculino	46,6	44,1	2,5

Fonte: Instituto Nacional de Previdência Social e Centro Nacional de Pensão Social

Tomar decisões informadas e resolver problemas de maneira eficaz depende da capacidade de analisar dados de forma crítica e estruturada. Para isso, é essencial desenvolver habilidades de matematização, isto é, de organizar e representar dados usando conceitos matemáticos, para então tirar conclusões que nos ajudem a entender melhor a realidade. Este processo envolve não apenas a manipulação de números e gráficos, mas também a consciência dos limites dessa matematização, para que possamos interpretar as conclusões com responsabilidade.

3.1.2. Recolha e organização de dados de natureza quantitativa e qualitativa, variáveis discretas e contínuas

Neste capítulo, vamos analisar aspetos relacionados com a formulação de questões pertinentes para a realização de um estudo estatístico, com a organização e representação dos dados de forma eficaz e como devem ser tratados esses dados de forma crítica, reconhecendo as limitações que podem existir durante todo o processo.

Recorda que a recolha de dados, a sua organização e tratamento, assim como a análise e interpretação dos mesmos, fazem parte de qualquer estudo estatístico.

Todos os dias são publicadas notícias baseadas em estudos estatísticos de maior ou menor relevância, as quais pretendem transmitir informações em diferentes domínios da atualidade.

Formular questões relevantes

O primeiro passo para analisar uma situação é definir o que queremos saber ou estudar. A formulação de questões claras e bem definidas é fundamental para guiar o processo de investigação e análise.

Exemplos de questões relevantes:

- Como tem evoluído a taxa de alfabetização nas diferentes ilhas ao longo dos anos?
- Qual é a distribuição da população em idade ativa nas zonas urbanas e rurais de Cabo Verde?
- Quais são os impactos das mudanças climáticas na agricultura local?

Ao formular questões, lembra-te de que elas devem ser:

- claramente definidas;
- específicas, pois quanto mais precisa for a pergunta, mais fácil será proceder à sua análise;
- relevantes, ou seja, as perguntas devem ser importantes para o contexto local e para a realidade.

Exemplo 1

Em vez de se perguntar "Como está o turismo de Cabo Verde?", uma pergunta mais pertinente seria "Como a pandemia afetou o turismo em Cabo Verde nos últimos dois anos?".

Manual Interativo

Vídeos
População e amostra

Como elaborar um estudo estatístico

Exercício

1 **Estabelece a associação entre as diferentes situações a ser estudadas e a questão estatística mais adequada.**

Situação			Questão estatística
Uma escola quer avaliar o desempenho dos seus alunos no exame nacional de Matemática.	•	•	Quantos turistas visitaram cada ilha de Cabo Verde no último ano?
Uma empresa de transportes marítimos em Cabo Verde deseja saber a satisfação dos passageiros com os serviços oferecidos.	•	•	Qual é a média das notas dos alunos no exame nacional de Matemática?
Uma operadora turística quer avaliar a distribuição de turistas entre as diferentes ilhas do arquipélago.	•	•	Qual é a proporção da população vacinada contra a doença em cada ilha?
O Ministério da Saúde de Cabo Verde quer estudar a taxa de vacinação completa contra uma doença específica em diferentes ilhas.	•	•	Qual é a percentagem de passageiros que classificam o serviço como "muito bom" ou "excelente"?
Uma organização ambiental quer analisar a quantidade de resíduos reciclados em diferentes municípios ao longo dos últimos cinco anos.	•	•	Qual é a tendência na quantidade de resíduos reciclados nos últimos cinco anos em cada município?

Definir a amostra

Durante a realização de um estudo estatístico é necessário definir a população sobre a qual realizamos esse estudo. Essa população não corresponde necessariamente à população de um país, pois podemos realizar estudos sobre parte de uma população ou ainda sobre instituições ou objetos.

Assim, consideramos **população**, ou u**niverso**, uma coleção de objetos com uma característica comum.

A cada elemento da população damos o nome de **indivíduo** ou **unidade estatística**.

Exemplo 2

Numa pesquisa realizada numa escola secundária com 800 alunos sobre continuar os estudos no ensino superior, teremos como população estatística todos os alunos dessa escola secundária, ou seja, os 800 alunos, e como indivíduo cada aluno dessa escola.

Um **censo** ou **recenseamento** é um estudo estatístico que implica a observação de todos os elementos da população.

A realização de censos é, por vezes, muito dispendiosa pelo facto de terem de ser recolhidos dados de todos os indivíduos da população. Noutras situações, nem é possível estudar toda a população.

Exemplo 3

Uma empresa quer determinar o tempo médio de vida útil de lâmpadas LED que produz. Para isso, terá de realizar testes para descobrir o número de horas que cada lâmpada funciona antes de fundir.

Repara que não é possível estudar toda a população, neste caso todas as lâmpadas LED produzidas pela empresa, pois:

- testar todas as lâmpadas seria inviável, pois isso exigiria destruir todas as lâmpadas durante os testes, não restando nada para ser vendido;
- o número total de lâmpadas produzidas é muito grande, tornando o estudo de toda a população inviável em termos de tempo e custo.

Assim, muitos estudos estatísticos são realizados observando só uma parte da população. Um estudo estatístico deste tipo é uma sondagem.

Uma **amostra** é um subconjunto de elementos extraídos da população em estudo utilizando uma metodologia adequada. O processo ou técnica usada para selecionar a amostra designa-se **amostragem**.

Uma **sondagem** é um estudo estatístico de uma população a partir de uma amostra.

Exercício

2 **Para cada uma das seguintes situações indica a população, o indivíduo e se o estudo é, ou não, uma sondagem.**

Situação 1: Uma fábrica de ***smartphones*** **pretende saber o número médio de defeitos encontrados nos seus produtos numa linha de produção. Para isso, a fábrica recolhe dados sobre a quantidade de defeitos por dispositivo fabricado.**

Situação 2: Uma pesquisa pretende avaliar o consumo mensal de energia elétrica de diversas casas num bairro. Os dados são coletados de todas as residências do bairro, com a quantidade de kWh consumidos por mês.

Situação 3: Uma universidade realiza um estudo sobre a produção de pesquisas científicas nas suas faculdades. A análise concentra-se no número de artigos científicos publicados por cada faculdade nos últimos cinco anos.

Situação 4: Está a ser feita uma análise de mercado sobre o preço médio de um produto em várias lojas de uma cidade. A pesquisa recolhe dados de preços de um produto específico em diferentes pontos de venda.

Situação 5: Uma empresa agrícola quer estudar o "peso" médio das mangas produzidas na sua plantação. A empresa recolhe dados de "peso" de todas as mangas colhidas numa safra.

Manual Interativo

Exercício
Identificar a população, amostra e unidade estatística de um estudo estatístico

A fiabilidade de uma sondagem depende das metodologias usadas para construir a amostra. A este procedimento de seleção chama-se amostragem.

Processos de amostragem

A **amostragem** é usada para selecionar uma parte da população que representará o todo, otimizando recursos e tempo.

As amostragens mais usuais são:

a) Amostragem aleatória simples

Na amostragem aleatória simples cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado, é um processo ideal para ser utilizado em populações homogéneas.

Exemplo 4

Uma escola com 500 alunos quer saber qual é a média de horas que eles gastam a estudar em casa por semana. Para isso, a escola decide realizar uma pesquisa, mas, em vez de perguntar a todos os 500 alunos, escolhe uma amostra aleatória, de 50 alunos, para fazer o levantamento.

Como na **amostragem aleatória simples**, cada aluno tem a mesma probabilidade de ser escolhido para participar na pesquisa. A seleção dos alunos é feita de forma completamente aleatória, sem que haja qualquer tipo de critério para escolher quem será incluído.

Para o processo de seleção é dado um número de identificação (ID) a cada aluno (de 1 a 500) e, posteriormente, são escolhidos os 50 alunos através de um sorteio aleatório, ou seja, qualquer aluno de 1 a 500 tem a mesma possibilidade de ser selecionado.

Manual Interativo

Vídeos
Como selecionar uma amostra?

Técnicas de amostragem aleatória

Vantagens da amostragem aleatória simples:

- Imparcialidade: Todos os indivíduos têm a mesma possibilidade de serem selecionados, o que elimina qualquer viés na amostra.
- Simplicidade: A técnica é fácil de implementar e pode ser aplicada de maneira eficiente.
- Representatividade: Quando bem realizada, a amostra tende a ser representativa da população, permitindo generalizações confiáveis.

Desvantagens da amostragem aleatória simples:

- Dificuldade na obtenção de uma lista completa da população: Para realizar a seleção aleatória, é necessário ter uma lista completa de todos os elementos da população, o que pode ser inviável em populações grandes ou dispersas.
- Custos elevados e tempo: O processo pode ser caro e demorado, especialmente quando envolve populações extensas ou geograficamente distribuídas, exigindo muitos recursos para recolher dados de diferentes locais.

Exercício

3 **Uma empresa quer saber a preferência dos seus funcionários em relação ao tipo de transporte que utilizam para chegar ao trabalho. Para isso, decide realizar uma pesquisa com todos os trabalhadores.**

3.1. Identifica:

a) a população estatística;

b) o indivíduo ou a unidade estatística.

3.2. Supõe que a empresa tem 500 funcionários, mas decide entrevistar apenas 100. Este estudo trata-se de um censo ou de uma sondagem?

3.3. Explica como aplicarias uma amostragem aleatória simples nesta situação.

b) Amostragem estratificada

Na amostragem estratificada, a população é dividida em diferentes estratos, devendo a proporção de indivíduos escolhidos em cada estrato ser aproximadamente igual à proporção do estrato no total da população. É bastante útil quando há subgrupos com características diferentes.

Exemplo 5

Uma universidade pretende saber a opinião dos estudantes sobre a qualidade das instalações do *campus*.

A população total é composta por $10\,000$ estudantes, divididos em quatro grupos:

- Curso de Engenharia: 4000 estudantes
- Curso de Economia: 2500 estudantes
- Curso de Letras: 2000 estudantes
- Curso de Artes: 1500 estudantes

Como esses grupos têm tamanhos diferentes, a universidade decide usar amostragem estratificada, de 1000 estudantes, para garantir que cada grupo seja proporcionalmente representado na amostra.

Assim, procede-se da seguinte forma:

1) Dividir a população em estratos.

Neste caso os estratos são os cursos: Engenharia, Economia, Letras e Artes.

2) Calcular a proporção de cada estrato na população.

- Engenharia: $\frac{4000}{10\,000}=40\%$
- Economia: $\frac{2500}{10\,000}=25\%$
- Letras: $\frac{2000}{10\,000}=20\%$
- Artes: $\frac{1500}{10\,000}=15\%$

3) Distribuir a amostra proporcionalmente para cada estrato.

- Engenharia: $1000\times 40\%=400$
- Economia: $1000\times 25\%=250$
- Letras: $1000\times 20\%=200$
- Artes: $1000\times 15\%=150$

4) Selecionar os indivíduos.

Dentro de cada estrato (curso), são escolhidos os 400, 250, 200 e 150 estudantes, recorrendo ao método de amostragem aleatória (ex.: sorteio ou números aleatórios).

A amostra total de 1000 estudantes será composta por:

- 400 estudantes de Engenharia
- 250 estudantes de Economia
- 200 estudantes de Letras
- 150 estudantes de Artes

Assim, a amostra é proporcional aos tamanhos dos estratos, garantindo que as opiniões de cada curso sejam representadas de forma justa.

Vantagens da amostragem estratificada:

- Representatividade garantida: grupos menores são incluídos de forma proporcional, o que não aconteceria numa amostragem simples.
- Redução de vieses: cada estrato é representado de acordo com a sua importância na população total.

Desvantagem da amostragem estratificada:

- Requer conhecimento prévio da população, bem como da estratificação que se pretende realizar, tornando o processo mais trabalhoso.

Exercício

4 **Uma empresa quer avaliar a satisfação dos seus clientes em relação aos serviços oferecidos. A empresa possui uma base de 6000 clientes, distribuídos por duas regiões:**

- Barlavento: 4000 clientes
- Sotavento: 2000 clientes

A empresa decide entrevistar uma amostra de 600 clientes, utilizando o método de amostragem estratificada proporcional para garantir que cada região esteja devidamente representada na amostra.

4.1. Quantos clientes devem ser selecionados de cada região?

4.2. Explica por que a amostragem estratificada proporcional é uma boa escolha para esse estudo.

4.3. Se a empresa, por questões de praticidade, decidir entrevistar apenas 50% dos clientes sorteados no Barlavento, mas mantiver os números exatos do Sotavento, qual seria o total de clientes entrevistados?

4.4. Analisa os riscos de alterar o tamanho da amostra de apenas uma região na representatividade dos resultados gerais.

c) Amostragem sistemática

Na amostragem sistemática, os elementos da população são escolhidos a partir de uma regra previamente definida. É um processo simples e rápido, mas pode ser enviesado se houver padrões na população.

Exemplo 6

Uma empresa de pesquisas quer avaliar a satisfação dos clientes em relação a um novo produto lançado. A empresa tem uma lista de 1000 clientes e decide selecionar uma amostra de 100 clientes para responder à pesquisa, sendo que a seleção decorrerá através de uma amostragem sistemática.

Assim, procede-se da seguinte forma:

1) Identificar o tamanho da amostra.

A empresa quer entrevistar 100 clientes a partir de uma lista de 1000 clientes.

2) Calcular o intervalo de amostragem.

O intervalo de amostragem é o número de elementos entre cada amostra. Para calcular, dividimos o tamanho da população pelo tamanho da amostra:

$$\text{Intervalo de amostragem} = \frac{\text{População}}{\text{Tamanho da amostra}} = \frac{1000}{100} = 10$$

Isto significa que, para selecionar a amostra, os clientes da lista serão escolhidos de 10 em 10.

3) Escolher um ponto de partida aleatório.

O próximo passo é escolher aleatoriamente o primeiro cliente da lista entre os primeiros 10. Suponhamos que o número sorteado seja o 6.

4) Selecionar os clientes.

A partir do número sorteado, a seleção é feita sistematicamente, de 10 em 10:

- primeiro cliente sorteado: 6.º da lista;
- depois serão os clientes nas posições 16.º, 26.º, 36.º, 46.º, ..., até se definirem os 100 clientes para a amostra.

5) Resultado da amostra.

A amostra será composta pelos clientes nas posições 6, 16, 26, 36, 46,..., 996 na lista de 1000 clientes.

Vantagens da amostragem sistemática:

- Simplicidade: O processo é fácil de aplicar, especialmente quando os dados estão organizados numa lista ordenada.

Desvantagens da amostragem sistemática:

- Risco de viés: Se a lista tiver algum padrão (como clientes em ordem de frequência de compras), a amostragem pode ser enviesada. Por exemplo, se a lista estiver ordenada por data de compra, e houver um padrão de compras que se repete a cada 10 clientes, a amostra pode não ser representativa.

Exercício

5 **Uma empresa de telefones quer avaliar a qualidade do atendimento ao cliente na sua central de suporte. Para isso, decide entrevistar 500 clientes a partir de uma lista ordenada de $10\,000$ clientes atendidos no último mês. Será realizada uma amostragem sistemática.**

5.1. Qual será o intervalo de amostragem?

5.2. Se o ponto de partida aleatório sorteado for o cliente número 8, quais serão os primeiros cinco clientes selecionados?

5.3. Explica por que a amostragem sistemática pode ser uma boa escolha para este estudo.

5.4. Quais são os potenciais riscos de usar a lista fornecida pela empresa para aplicar a amostragem sistemática?

d) Amostragem por conglomerados

A **amostragem por conglomerados** é um método em que a população é dividida em *clusters* (grupos) e alguns *clusters* são selecionados aleatoriamente para análise completa. Revela-se muito útil em populações geograficamente dispersas.

Exemplo 7

O Ministério da Educação quer avaliar a qualidade do ensino nas escolas públicas de todo o país. Como o país tem várias ilhas e muitas escolas, seria impraticável entrevistar alunos de todas as escolas de todas as ilhas. Assim, o Ministério decide usar uma amostragem por conglomerados.

Procede-se da seguinte forma:

1) Definir os conglomerados.

Neste caso, as escolas públicas de uma ilha são os conglomerados. Cada escola de uma ilha pode ser considerada um conglomerado.

2) Seleção dos conglomerados.

O Ministério decide selecionar quatro ilhas de forma aleatória entre as nove ilhas que têm escolas.

3) Seleção dentro dos conglomerados.

O Ministério decide entrevistar todos os alunos de todas as escolas das quatro ilhas selecionadas. Ou seja, dentro de cada ilha, todos os alunos, de todas as escolas públicas, serão entrevistados sobre a qualidade do ensino.

Vantagens da amostragem por conglomerados:

- Eficiência: É mais prático do que realizar uma amostragem aleatória simples em toda a população, especialmente se os dados estão agrupados de forma natural (como neste caso, em escolas).
- Economia de tempo e custo: Selecionar grupos inteiros (escolas) e estudar todos os indivíduos dentro desses grupos pode ser mais rápido e barato, pois evita deslocamentos para entrevistar pessoas dispersas geograficamente.

Desvantagens da amostragem por conglomerados:

- Maior variação dentro dos conglomerados: Se os conglomerados não são homogéneos entre si (ou seja, se dentro de uma mesma escola as opiniões dos alunos variam muito), a amostra pode não ser representativa da população inteira.

- Possível viés: Se as escolas selecionadas não forem representativas das diferentes características da cidade (por exemplo, escolas de bairros mais ricos ou mais pobres), os resultados podem ser enviesados.

Exercício

6 **O Ministério do Turismo de Cabo Verde deseja realizar uma pesquisa para avaliar a satisfação dos turistas com os serviços de transporte entre as ilhas, como os *ferries* e voos domésticos. Existem nove ilhas habitadas em Cabo Verde e o Ministério tem dados sobre as condições de transporte em todas elas.**

Como seria inviável entrevistar todos os turistas de todas as ilhas, a pesquisa será feita usando uma amostragem por conglomerados. O Ministério decide selecionar algumas ilhas como conglomerados e entrevistar todos os turistas que estiverem nessas ilhas no momento da pesquisa.

A população deste estudo corresponde ao total de $200\,000$ turistas que visitaram as ilhas no último ano, e as principais ilhas turísticas são: Santiago, Sal, Boa Vista, São Vicente e Santo Antão.

O Ministério decide selecionar três ilhas aleatoriamente e, dentro dessas ilhas, entrevistar todos os turistas.

6.1. Quantos conglomerados foram selecionados para a amostra?

6.2. Supondo que as três ilhas selecionadas sejam Santiago, Sal e Boa Vista, e que o número de turistas em cada ilha seja o seguinte:

Santiago: $70\,000$ turistas

Sal: $50\,000$ turistas

Boa Vista: $30\,000$ turistas

Quantos turistas serão entrevistados no total?

6.3. Explica por que a amostragem por conglomerados foi uma boa escolha para esse estudo em Cabo Verde.

6.4. Quais são os potenciais riscos ou limitações ao usar a amostragem por conglomerados para avaliar a satisfação dos turistas nas ilhas de Cabo Verde?

e) Amostragem por conveniência

A **amostragem por conveniência** é um método em que a amostra é escolhida com base na facilidade de acesso aos elementos, sem um critério aleatório ou sistemático. Embora seja prática e económica, pode não ser representativa da população, resultando em possíveis vieses.

Exemplo 8

A Câmara Municipal da Boa Vista deseja saber a opinião dos moradores sobre a construção de uma nova praça pública. Por limitações de tempo e de recursos, decide entrevistar apenas as pessoas que estão a passear no parque central da cidade quando se realiza a pesquisa.

Assim, não existe um processo propriamente dito.

A população em estudo são todos os moradores da cidade.

A amostra corresponde apenas às pessoas que estavam presentes no parque central no momento da pesquisa e a escolha dos entrevistados é baseada na facilidade de acesso (as pessoas disponíveis no local), sem considerar se a amostra é representativa da população geral.

Vantagens da amostragem por conveniência:

- Rapidez e facilidade: É um método simples, ideal para quando há restrições de tempo, recursos ou acesso.
- Baixo custo: Não requer planeamentos ou métodos elaborados para selecionar a amostra.

Desvantagens da amostragem por conveniência:

- Falta de representatividade: As opiniões das pessoas podem não refletir as opiniões de toda a população, já que quem é escolhido pode ter características ou interesses diferentes dos restantes moradores.
- Vieses: O método pode resultar numa amostra enviesada, influenciando a validade dos resultados.

Exercício

7 **Um pesquisador está a desenvolver um estudo sobre as preferências gastronómicas dos turistas que visitam Cabo Verde. Como o estudo precisa de ser realizado rapidamente, o pesquisador decide aplicar um método de amostragem por conveniência.**

Ele escolhe realizar as entrevistas nos restaurantes do centro turístico de Santa Maria, na ilha do Sal, durante um único dia de trabalho. No total, ele entrevista 150 turistas que estavam a almoçar ou a jantar nos restaurantes, durante o período da pesquisa.

7.1. Qual é a população que é o alvo deste estudo?

7.2. A amostra de 150 turistas obtida neste estudo é representativa de todos os turistas que visitam Cabo Verde? Justifica.

7.3. Quais são as principais vantagens da amostragem por conveniência neste caso?

7.4. Quais são os riscos de usar a amostragem por conveniência para um estudo que pretende representar as preferências gastronómicas de todos os turistas em Cabo Verde?

7.5. Como o pesquisador poderia melhorar a representatividade do estudo?

De uma forma genérica, considerando as características da população, podemos dizer que:

- Para uma população grande e homogénea, a amostragem aleatória simples será o método mais adequado.
- Para uma população heterogénea, será melhor optar por uma amostragem estratificada.
- No caso da população ser dispersa ou agrupada, a amostragem por conglomerados será uma boa opção.
- No caso de um estudo exploratório inicial, será mais fácil utilizar uma amostragem por conveniência.

Repara que estes métodos garantem análises estatísticas confiáveis, permitindo inferências robustas e representativas dos dados populacionais.

Exercícios

8 **O INE – Instituto Nacional de Estatística deseja realizar diferentes estudos estatísticos para recolher dados sobre várias situações. Para cada caso, indica qual o tipo de amostragem que consideras mais adequado. Justifica a tua escolha.**

8.1. Pretende-se avaliar a satisfação dos turistas que visitaram todas as ilhas de Cabo Verde durante o ano, desejando obter-se dados representativos de todas as ilhas, mas existe um orçamento limitado para a realização da pesquisa e só se podem visitar três ilhas para recolher os dados.

8.2. Pretende-se investigar a saúde mental dos alunos, sendo que possuem os dados dos estudantes divididos por faculdades (Ciências, Engenharia, Direito, Medicina, etc.). Deseja-se garantir que a amostra represente proporcionalmente os alunos de cada faculdade.

8.3. Pretende-se medir a satisfação dos passageiros que utilizam os *ferries* para se deslocarem de uma ilha para outra. Então, decide-se entrevistar passageiros em diferentes pontos de recolha de passageiros, durante um único dia de pesquisa.

8.4. Pretende-se avaliar a satisfação dos clientes que utilizam serviços de fornecimento de energia de diferentes empresas. Então, selecionaram-se aleatoriamente 5000 clientes de uma lista de $50\,000$ clientes registados.

8.5. Pretende-se avaliar o nível de poluição do ar em diferentes bairros de uma cidade. Então, selecionaram-se cinco bairros ao acaso e mediu-se a qualidade do ar em todos eles.

9 **Justifica, em cada uma das seguintes situações, porque é que a amostra escolhida não é aquela que conduz a resultados mais fiáveis.**

9.1. Para saber qual o candidato mais votado para as eleições de Primeiro-Ministro em Cabo Verde, ouviu-se a opinião dos simpatizantes de determinado partido político.

9.2. Para avaliar a qualidade dos fósforos produzidos numa fábrica, acenderam-se todos os fósforos fabricados num dia.

9.3. Para saber a opinião das pessoas sobre música *rock*, questionou-se um grupo de pessoas que saíam de um concerto de música *rock*.

Organizar dados

Depois de formular a questão, o próximo passo é recolher dados que ajudem a responder à mesma. Os resultados obtidos, sejam quantitativos ou qualitativos, chamam-se dados estatísticos.

A organização desses dados de forma estruturada facilita a sua análise posterior.

Os dados podem ser organizados de diferentes formas, dependendo do tipo de informação recolhida. Contudo, normalmente, são organizados em **tabelas**.

Exemplo:

Número de turistas que visitaram Cabo Verde ao longo dos últimos anos

Ano	Total de turistas	Ilha do Sal	Ilha da Boa Vista	Ilha de Santiago	Ilha de São Vicente
2022	705 555	59,1%	34,5%	2,3%	2,1%
2021	302 957	61,2%	33,6%	2,2%	1,9%
2020	85 897	74,3%	20,0%	3,9%	1,0%
2019	819 308	40,2%	39,9%	11,7%	5,1%

Fonte: Instituto Nacional de Estatística (INE), 2022

Analisando a tabela anterior, podemos dizer que:

- a Ilha do Sal continua a ser a mais visitada, com a maioria dos turistas escolhendo esta ilha para a sua estadia;
- o número de turistas diminuiu significativamente em 2020, com um total de 85 897 turistas;
- o número de turistas aumentou significativamente em 2022, com um total de 705 555 turistas, mas não alcançando os valores anteriores a 2020.

Tabelas de frequências

Como já foi referido, quando se recolhem dados estatísticos é essencial organizá-los de forma a facilitar a sua leitura e interpretação, por exemplo, recorrendo a tabelas.

Uma das questões mais importantes é que a variável estatística em estudo seja definida de forma clara, bem como a população ou a amostra sobre a qual incidem os dados.

Sempre que se conhece o valor da variável estatística para cada indivíduo ou elemento da população ou da amostra em estudo dizemos que temos uma **distribuição estatística.**

Designam-se por x_1, x_2, x_3, ..., x_n os diferentes valores que a variável estatística x pode assumir.

No caso da variável estatística x ser quantitativa e assumir apenas um número limitado de valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n, é necessário ordenar os valores que a variável assume por ordem crescente.

Exemplo 9

Na turma do 10.º ano de uma determinada escola, realizou-se um estudo sobre as idades dos alunos da turma. Os dados obtidos estão registados na seguinte tabela:

16	17	17	16	18	16	16	15	16	17
15	16	17	18	19	17	16	17	16	18
17	17	16	15	18	16	16	16	17	18

A variável estatística em estudo é a "Idade", sendo que a população em estudo é uma turma do 10.º ano.

Neste caso, a variável estatística pode assumir os valores:

15, 16, 17, 18, 19

Assim, $x_1 = 15$; $x_2 = 16$; $x_3 = 17$; $x_4 = 18$; $x_5 = 19$

Quando se pretende organizar os dados numa tabela, na coluna da esquerda colocam-se os diferentes valores x_i que a variável em estudo pode assumir e na coluna seguinte regista-se o número de vezes que cada valor x_i da variável aparece na amostra estudada.

Exemplo 10

Considerando a situação do estudo da idade dos alunos de uma turma do 10.º ano, teríamos:

Idade	N.º de alunos
15	3
16	12
17	9
18	5
19	1

A **frequência absoluta** de um dado estatístico é o número de vezes que este se repete e representa-se por f_i.

A tabela do exemplo é então representada da seguinte forma:

x_i	f_i
15	3
16	12
17	9
18	5
19	1
Total	30

Exemplo 11

Supõe que precisávamos de comparar as idades dos alunos da turma do 10.º ano com as idades dos alunos da turma do 11.º ano da mesma escola, e sabíamos que 8 alunos do 11.º ano tinham 17 anos.

Esta informação, por si só, não nos permite fazer uma comparação, pois não sabemos o "peso" dos 8 alunos no total dos alunos do 11.º ano.

Imagina que o número total de alunos do 11.º ano é de 32, então $\frac{8}{32} = 25\%$ têm 17 anos.

Mas se forem apenas 20 alunos, então $\frac{8}{20} = 40\%$ dos alunos do 11.º ano têm 17 anos.

A razão entre a frequência absoluta e o total de observações permite-nos comparar melhor as duas distribuições.

A **frequência relativa** de um dado estatístico corresponde ao quociente entre a frequência absoluta (f_i) e o número total de dados observados (n) e representa-se por: $fr_i = \frac{f_i}{n}$.

A frequência relativa pode ser apresentada na forma de fração, número decimal ou percentagem.

Exemplo 12

Assim, na turma do 10.º ano, teríamos a seguinte tabela de frequências absolutas e relativas:

x_i	f_i	fr_i
15	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1 = 10\%$
16	12	$\frac{12}{30} = 0{,}4 = 40\%$
17	9	$\frac{9}{30} = 0{,}3 = 30\%$
18	5	$\frac{5}{30} = 0{,}1(6) \cong 17\%$
19	1	$\frac{1}{30} = 0{,}0(3) \cong 3\%$
Total	30	100%

E, agora, supondo que os alunos do 11.º ano eram 24, já poderíamos comparar a proporção de alunos com 17 anos.

$$\frac{8}{24} \approx 33\%$$

Logo, apesar de no 10.º ano existirem mais alunos com 17 anos, no 11.º a proporção de alunos com 17 anos é maior.

Suponhamos agora que nos questionavam quantos alunos do 10.º ano têm 17 anos ou menos.

Para responder à questão, teríamos de somar as frequências absolutas ou relativas para os 15 anos, 16 anos e 17 anos, ou seja:

- $3 + 12 + 9 = 24$ alunos têm 17 anos ou menos;
- $10\% + 40\% + 30\% = 80\%$ dos alunos têm 17 anos ou menos.

Para responder a este tipo de questões é útil determinarmos e indicar na tabela as frequências absolutas acumuladas e as frequências relativas acumuladas.

Manual Interativo

Vídeo
Tabela de frequências acumuladas

Exercício
Construir uma tabela de frequências absolutas e relativas

Exemplo 13

x_i	f_i	fr_i	F_i	Fr_i
15	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1 = 10\%$	3	10%
16	12	$\frac{12}{30} = 0{,}4 = 40\%$	$3 + 12 = 15$	$10\% + 40\% = 50\%$
17	9	$\frac{9}{30} = 0{,}3 = 30\%$	$15 + 9 = 24$	$50\% + 30\% = 80\%$
18	5	$\frac{5}{30} = 0{,}1\,(6) \cong 17\%$	$24 + 5 = 29$	$80\% + 17\% = 97\%$
19	1	$\frac{1}{30} = 0{,}0\,(3) \cong 3\%$	$29 + 1 = 30$	$97\% + 3\% = 100\%$
Total	30	100%		

Chama-se **frequência absoluta acumulada** do valor x_i à soma das frequências absolutas de todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por F_i.
Chama-se **frequência relativa acumulada** do valor x_i à soma das frequências relativas de todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por Fr_i.

Exercício

10 Registou-se o número de crias nascidas por ninhada de um casal de coelhos, obtendo-se os seguintes dados:

5 2 3 2 5 3 4 1 3 5 5 2 4 1 5 5 1 2 4 4
2 3 3 4 2 3 5 4 3 5 4 4 3 5 4 4 5 4 4 2

Constrói uma tabela de frequências absolutas simples, relativas simples e absolutas e acumuladas.

Representar dados

Uma vez organizados, os dados precisam de ser apresentados à sociedade de forma precisa, clara, confortável e apelativa. Na maioria das vezes, essa informação apresenta-se recorrendo a representações gráficas, que podem assumir diferentes formas, e que irão facilitar a compreensão dos dados recolhidos.

Independentemente do tipo de gráfico utilizado, estes devem conter informações básicas, tais como:

- título: indicam o tema principal da tabela ou gráfico;
- eixos (em gráficos): o eixo x e o eixo y mostram as variáveis representadas;
- legendas: ajudam a identificar o que cada elemento visual (cores, linhas, barras) representa;
- escalas: identificam unidades e intervalos, garantindo que os dados sejam comparáveis.

Manual Interativo

Vídeo
Gráfico de barras

Exercício
Interpretar um gráfico de barras

Gráficos de barras

Os **gráficos de barras** são ferramentas visuais amplamente utilizados em estatística e em análises de dados para comparar e representar dados qualitativos ou quantitativos discretos de forma clara, permitindo identificar padrões, tendências ou discrepâncias nos dados.

Esta é uma das representações gráficas mais usuais.

As categorias são dispostas no eixo horizontal (eixo do x) se as barras forem verticais, no eixo vertical (eixo do y) se as barras forem horizontais.

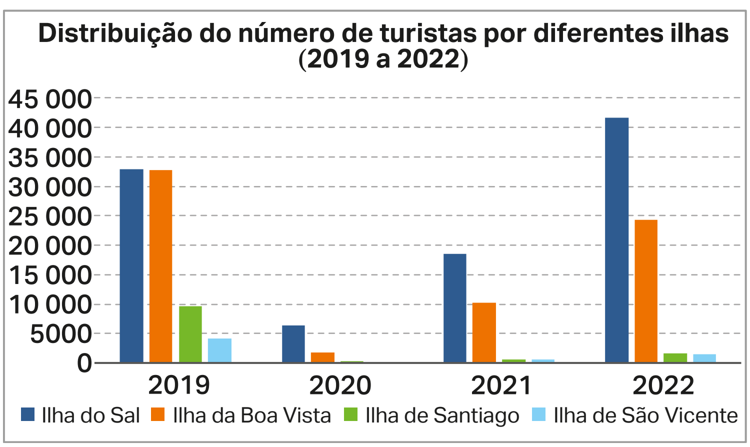
A altura (ou comprimento) da barra reflete o valor ou a frequência da categoria correspondente, ou seja, é proporcional à frequência que lhe corresponde.

Os gráficos de barras são de fácil leitura, por serem simples e intuitivos, mesmo para quem não tem conhecimentos estatísticos avançados. Além disso, são **flexíveis**, uma vez que podem ser usados para dados quantitativos ou qualitativos, e **versáteis**, funcionam bem para pequenas ou grandes quantidades de categorias.

Contudo, pode-se tornar confuso se houver muitas categorias ou subcategorias e uma escolha inadequada da escala do gráfico pode distorcer a interpretação.

Exemplo 14

Um gráfico de barras permite-nos comparar, neste caso, o número de turistas em cada uma das ilhas ao longo de quatro anos.



Neste caso, podemos dizer que:

- o número de turistas baixou drasticamente em 2020, provavelmente devido à pandemia do Covid-19;
- em 2022, o número total de turistas aproximou-se dos valores de 2019, sendo que na ilha do Sal receberam mais turistas do que em 2019.

Exercício

11 **Numa turma com 20 alunos, recolheram-se dados sobre o número de calçado de cada um.**

Os resultados obtidos foram os seguintes:

43 42 41 39 41 37 40 43 44 40 39 39 38 41 40 39 38 39 39 40

11.1. Constrói uma tabela de frequências absolutas simples e de frequências relativas.

11.2. Constrói um gráfico de barras que traduza as frequências absolutas da distribuição.

Gráficos circulares

Este tipo de representação pode ser utilizado em dados quantitativos e qualitativos. É uma ferramenta visual usada em estatística e em análise de dados para representar proporções ou percentagens de categorias num conjunto de dados.

Num gráfico circular, representamos cada uma das categorias de dados por um setor circular cuja amplitude é proporcional à frequência relativa. Assim, para obter a amplitude de cada setor é suficiente multiplicar a respetiva frequência relativa, expressa em numeral decimal, por 360°.

Normalmente, é utilizado para destacar a contribuição relativa de cada categoria em relação ao todo, sendo ideal para comparar visualmente as proporções entre categorias.

É fácil de entender e interpretar, mas não é adequado para conjuntos de dados com muitas categorias, pois pode-se tornar confuso e pode ser menos preciso do que outros gráficos (como o de barras) para comparar valores próximos.

Exemplo 15

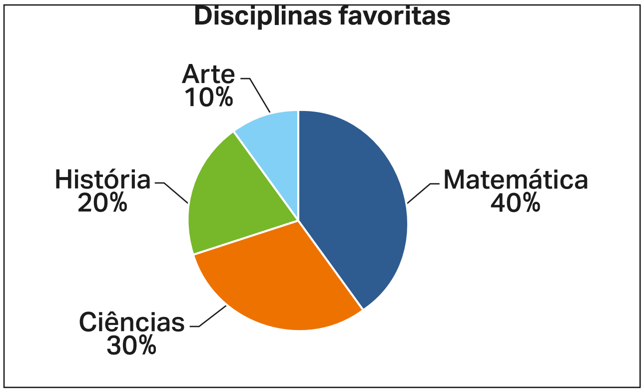
Imagina que foi realizada uma pesquisa com 100 alunos sobre as suas disciplinas favoritas e os resultados foram:

Disciplina favorita	N.º de alunos
Matemática	40
Ciências	30
História	20
Arte	10
Total	100

Ao criar um gráfico circular, os setores terão as seguintes amplitudes:

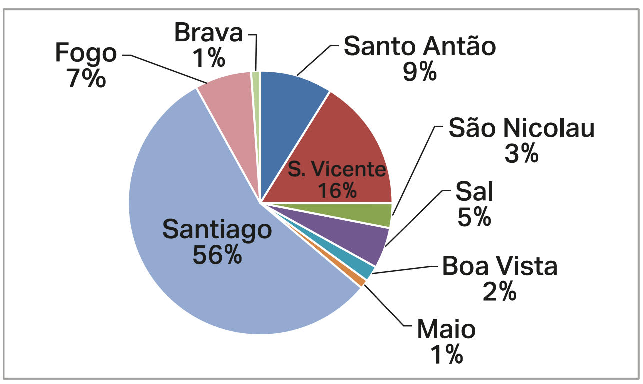
- Matemática: $\frac{40}{100} \times 360° = 144°$
- Ciências: $\frac{30}{100} \times 360° = 108°$
- História: $\frac{20}{100} \times 360° = 72°$
- Arte: $\frac{10}{100} \times 360° = 36°$

Assim, obteríamos o seguinte gráfico circular:



Exemplo 16

Considera o seguinte gráfico circular relativo à distribuição da população de Cabo Verde, em 2010.



Fonte: Fernandes, Nélida & Carvalho, Paulo. (2014). Território, população e desenvolvimento em Cabo Verde. DELOS. 7 (19). 12 pp.

Neste caso, podemos dizer que:

- em 2010, a maioria da população cabo-verdiana estava concentrada na ilha de Santiago;
- em 2010, as ilhas de Maio e Brava eram as ilhas com menor número de habitantes.

Exercício

12 Considera a situação do exercício anterior:

Numa turma com 20 alunos, recolheram-se dados sobre o número de calçado de cada um.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

43 42 41 39 41 37 40 43 44 40 39 39 38 41 40 39 38 39 39 40

Constrói um gráfico circular que traduza a distribuição.

Gráficos de linhas

Os **gráficos de linhas** são ferramentas visuais usadas para mostrar tendências, variações ou padrões em dados contínuos ao longo de um intervalo (como tempo, distância ou qualquer outra variável ordenada). Eles utilizam pontos conectados por linhas para representar os dados.

Por norma, no **eixo do** x (horizontal) surge a variável independente, como anos, meses, ou dias e no **eixo do** y (vertical) a variável dependente, como valores ou medições. Os pontos são marcados em coordenadas no plano cartesiano e conectados por linhas.

Este tipo de gráfico permite mostrar como os valores variam ou evoluem ao longo do tempo e identificar padrões como aumento, redução ou ciclos nos dados.

Os gráficos de linhas podem ser:

- **simples:** representa uma única série de dados;
- **múltiplo:** representa várias séries de dados num único gráfico para comparações.

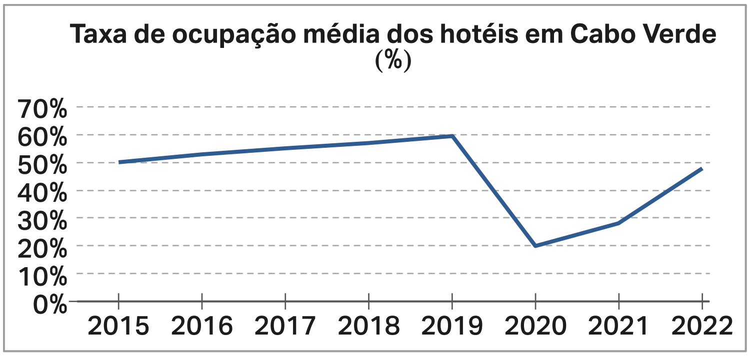
Estes gráficos são fáceis de interpretar visualmente para identificar picos, quedas ou estabilidade, são excelentes para mostrar tendências e mudanças ao longo do tempo e permitem comparar várias séries num mesmo gráfico.

Contudo, não são adequados para dados sem uma ordem lógica e pode ser confuso representar diferentes distribuições em simultâneo.

Devem ser utilizados para mostrar como os valores mudam ao longo do tempo, para destacar padrões e tendências, como crescimento, declínio ou sazonalidade, e para comparar o desempenho de diferentes séries temporais num único gráfico.

Exemplo 17

A evolução da taxa de ocupação dos hotéis ao longo do tempo pode ser melhor visualizada num gráfico de linhas.



Neste caso, podemos dizer que:

- a taxa de ocupação média de hotéis, em Cabo Verde, decaiu de 2019 para 2020;
- a partir de 2020 tem vindo a aumentar, sendo que ainda não alcançou os valores de 2015.

Exercício

13 **A seguinte tabela apresenta o crescimento de uma criança, considerando variáveis comuns como idade (anos), altura (em cm) e "peso" (em kg) durante 15 anos.**

Idade (anos)	Altura (cm)	"Peso" (kg)
1	75	9,5
2	88	11,0
3	95	12,5
4	102	14,0
5	108	15,5
6	115	17,0
7	122	18,5
8	130	20,0
9	137	22,0
10	143	24,0
11	150	26,0
12	157	28,0
13	163	30,5
14	168	32,0
15	172	34,0

Constrói os gráficos de linhas relativos à variação da altura e à variação do "peso", em função da idade.

Pictograma

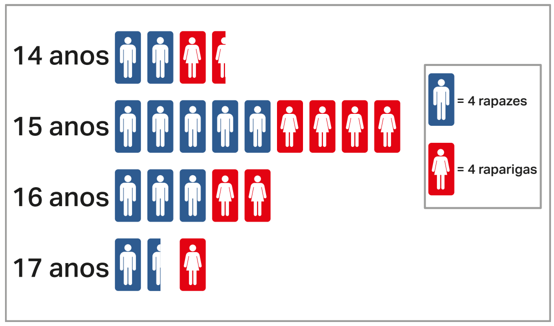
Um **pictograma** é um tipo de gráfico que utiliza ícones ou imagens para representar dados quantitativos de forma visual e acessível. Cada ícone ou figura no gráfico corresponde a um valor ou quantidade específicos e o número de ícones reflete a frequência do dado.

Um pictograma também torna a apresentação de dados intuitiva e visualmente atraente, simplificando a compreensão de quantidades e proporções e facilitando a comparação entre categorias de forma direta e visual.

Contudo, pode ser pouco preciso, principalmente se os ícones forem divididos.

Exemplo 18

Distribuição de idades dos alunos de um curso profissional de uma escola



Neste caso, podemos dizer que:

- a maioria dos alunos tem 15 anos e desses 20 são rapazes e 16 são raparigas;
- há 8 alunos com 14 anos e seis alunas com 14 anos.

Exercício

14 Uma escola realizou uma pesquisa sobre os estilos musicais preferidos de 30 alunos. Os resultados da pesquisa estão organizados na tabela seguinte.

Estilo musical	Frequência absoluta (n.º de alunos)
Pop	8
Hip-Hop	6
Kizomba	5
Rock	4
Música clássica	3
Reggae	4

Constrói um **pictograma** para representar estes dados.

Sugestão: Escolhe um símbolo, por exemplo, um círculo, que pode representar **dois alunos.**

Histograma

Um **histograma** é um tipo de gráfico usado para representar dados quantitativos de forma visual, mostrando a **distribuição de frequências** de um conjunto de dados. É muito usado em estatística para analisar dados numéricos contínuos ou discretos organizados em intervalos, ou seja, dados agrupados em classes.

O gráfico é formado por uma sucessão de retângulos adjacentes, ou seja, não existe espaço entre eles. Isso indica que os dados são contínuos, tendo cada um por base um intervalo de classe e por altura a frequência relativa ou absoluta.

Exemplo 18

Numa associação, perguntou-se a um grupo de crianças quantos cromos de uma determinada coleção tinham. As respostas foram:

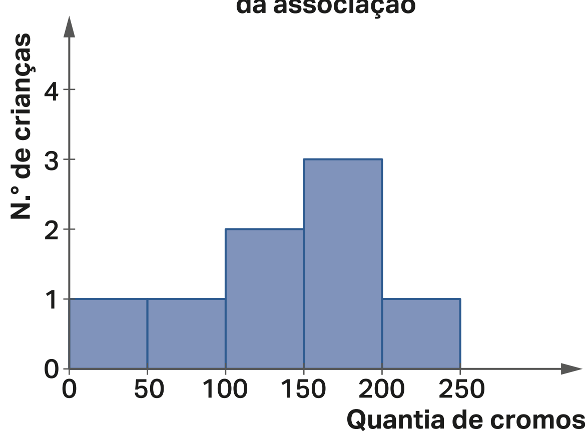
170 ; 220 ; 100 ; 150 ; 50 ; 24 ; 118 ; 181

Organizaram-se os dados em classes e construiu-se a tabela de frequências absolutas:

Quantidade de cromos na coleção	frequência absoluta
[0 , 50[	1
[50 , 100[	1
[100 , 150[	2
[150 , 200[	3
[200 , 250[	1
Total	8

Por fim, construiu-se um histograma para representar a distribuição:

Coleção de cromos das crianças da associação



Manual Interativo

Vídeos
Histogramas

Representação de dados em histogramas

Exercício

15 Uma turma de 30 alunos do 10.º ano foi questionada sobre o número de horas que dedicam ao estudo diário.

Os resultados obtidos foram agrupados na tabela a seguir.

Horas de estudo por dia	Frequência absoluta
$[0\,,\,1[$	5
$[1\,,\,2[$	8
$[2\,,\,3[$	9
$[3\,,\,4[$	5
$[4\,,\,5[$	3

Constrói um **histograma** que represente estes dados.

É importante ter sempre em consideração que a escolha da representação gráfica deve ser feita com base no tipo de dados e na pergunta a que se quer responder.

Atualmente, a construção de gráficos estatísticos manualmente tem-se tornado obsoleta devido ao avanço tecnológico e ao surgimento de diversas **ferramentas digitais** especializadas. Estas ferramentas são mais eficientes, precisas e rápidas, pois automatizam o processo de criação e análise de gráficos, eliminando erros humanos comuns na elaboração manual.

Com o uso de *software* como **Excel, Google Sheets, SPSS, Tableau ou outros programas estatísticos**, é possível criar gráficos de forma rápida e interativa, o que facilita a análise visual de dados. Além disso, esses recursos permitem ajustes automáticos, atualizações em tempo real e acesso a recursos avançados de visualização de dados.

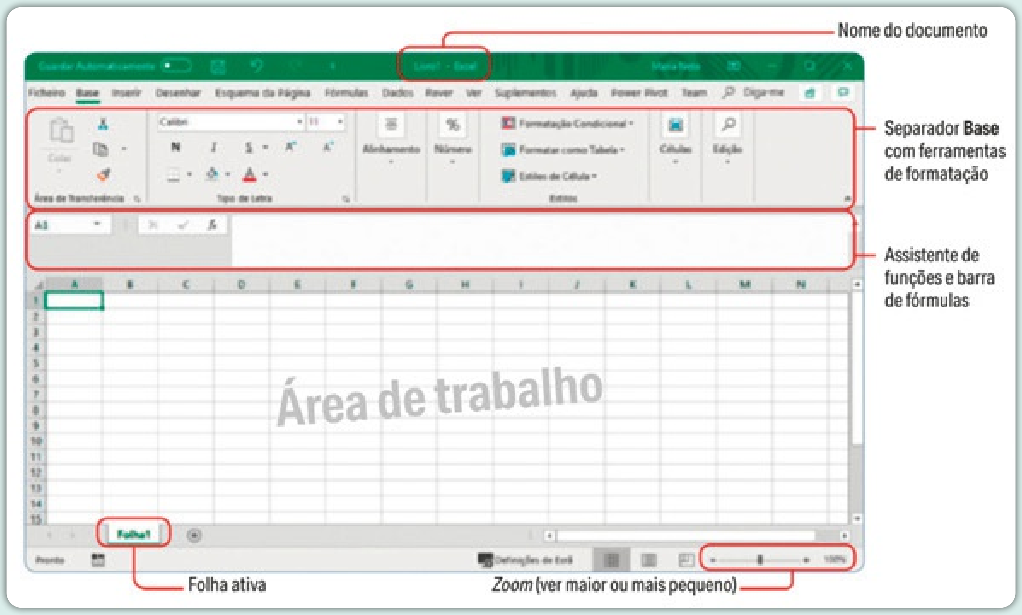
Portanto, ao invés de recorrer à elaboração manual de tabelas e representações gráficas, as ferramentas digitais oferecem maior praticidade, confiabilidade e produtividade para estudantes, pesquisadores e profissionais na análise e interpretação de informações estatísticas.

Tarefa

1 Construção de tabelas e gráficos com recurso ao Excel

1. Abrir o Excel.

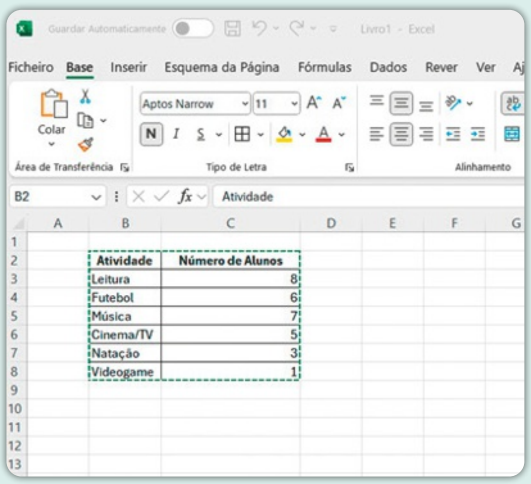
No teu computador abre o programa Excel. O aspeto visual assemelha-se a uma tabela (folha de cálculo), sendo que os diferentes separadores se assemelham aos separadores que surgem no Word.



2. Insere os dados.

Na folha de cálculo insere os seguintes dados. Tem em atenção que em cada célula deves colocar a informação correspondente.

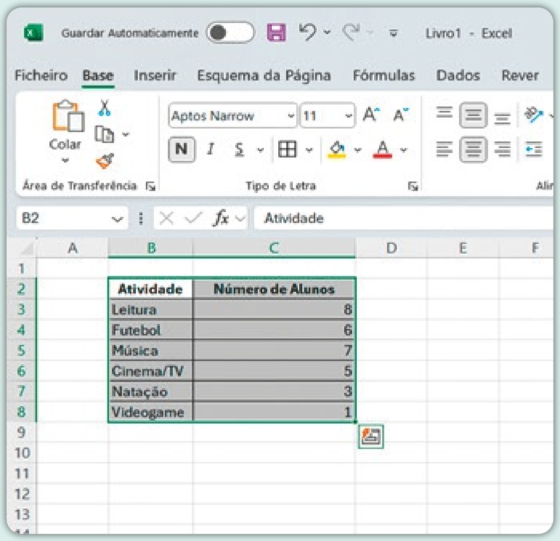
Atividade	Número de alunos
Leitura	8
Futebol	6
Música	7
Cinema/TV	5
Natação	3
Videogame	1



3. Construir gráficos.

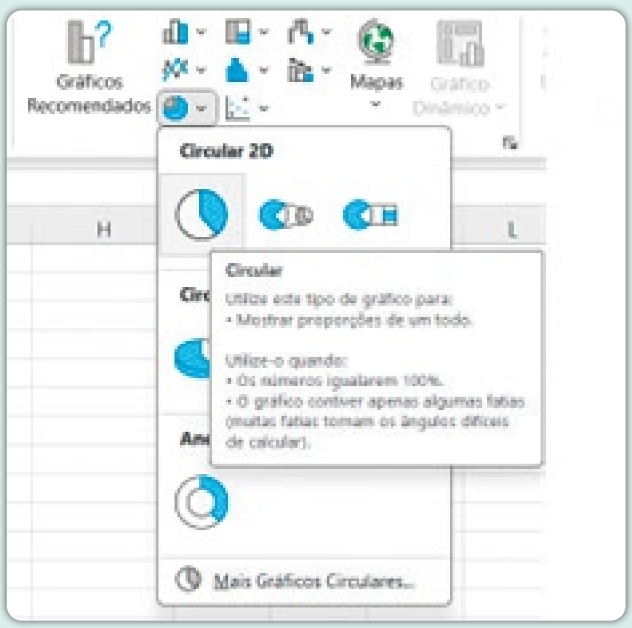
Depois de inserirmos os dados, podemos construir diferentes tipos de gráficos.

- **Selecionar todas as células que contêm informação**

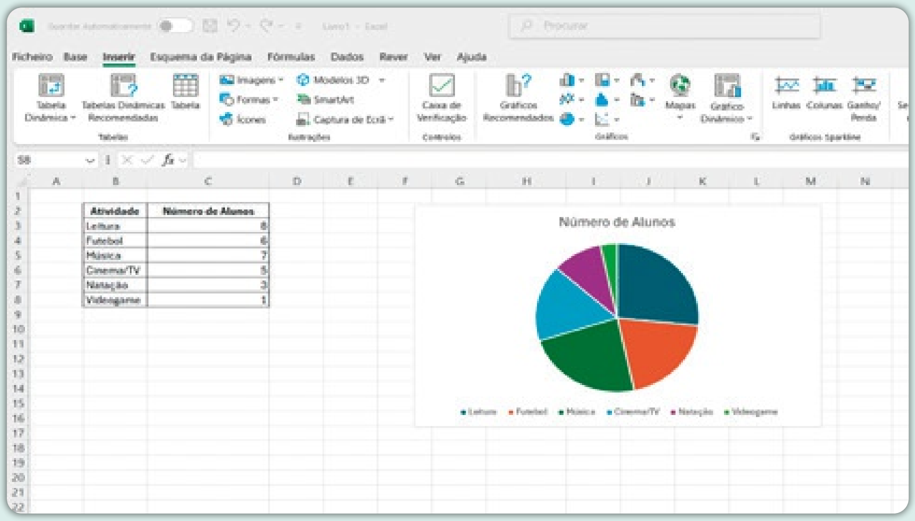


- **Clicar em "Inserir".**

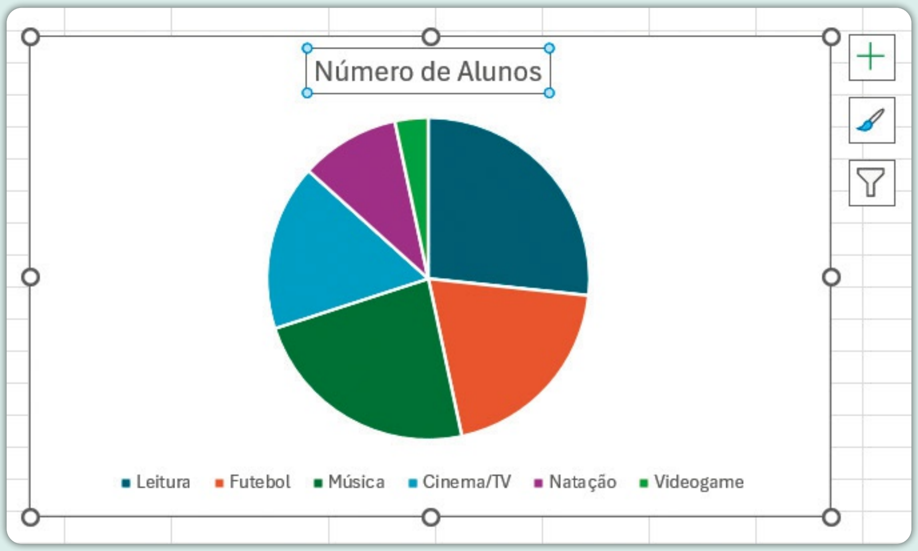
- **Escolher o tipo e estilo de gráfico pretendido, por exemplo, Gráfico Circular >>Circular 2D.**



O gráfico surgirá na folha de cálculo.



Atenção: Podes alterar o aspeto visual do gráfico incluindo o título clicando sobre as diferentes caixas que surgem.



4. Explora o programa e constrói agora um gráfico de barras.

2 Considera todos os gráficos que construíste nesta seção.
Utilizando o Excel ou outro *software* de estudo estatístico e constrói novamente, agora em formato digital, esses gráficos.

Manual Interativo
Vídeo
Pictograma
Exercício
Interpretar um histograma

Interpretação de tabelas e gráficos

Em qualquer estudo estatístico, após a recolha, organização e representação dos dados, é fundamental realizar a análise e reflexão sobre os resultados obtidos. Isso significa que apenas apresentar os dados de forma visual ou numérica não é suficiente. É necessário interpretá-los de maneira crítica para identificar padrões, tendências, correlações ou problemas relevantes.

O tratamento e a análise dos dados envolvem examinar as informações para responder às perguntas do estudo, validar hipóteses ou identificar oportunidades de ação. A reflexão permite compreender o significado dos dados no contexto da situação analisada, ajudando na tomada de decisões fundamentadas.

Portanto, após a representação visual (gráficos, tabelas, histograma, etc.) ou numérica dos dados, é essencial não apenas observar, mas analisar, interpretar e refletir sobre esses resultados para implementar ações eficazes e orientadas pela realidade dos dados.

Essa abordagem transforma a informação em conhecimento prático, que pode ser aplicado para resolver problemas, planear estratégias e tomar decisões mais precisas e fundamentadas.

Vejamos, então, essas etapas.

Tratar dados e realizar conclusões

Após a representação, é necessário tratar os dados. Isso envolve cálculos, análises e a interpretação crítica dos resultados.

Outras técnicas podem ajudar a tirar conclusões a partir dos dados, como:

- média, mediana e moda, para descrever características da distribuição;
- cálculos de crescimento ou variação, para entender tendências.

(Na secção seguinte proceder-se-á ao estudo destas medidas de localização e dispersão.)

No entanto, é importante ter consciência dos limites dessa matematização. As conclusões tiradas a partir dos dados podem ser influenciadas por diversos fatores externos, como erros na recolha dos dados, limitações nas fontes ou até mesmo na amostra considerada para aplicar o estudo estatístico. Por isso, ao concluíres as tuas análises, reflete sempre sobre as possíveis incertezas e limitações do processo.

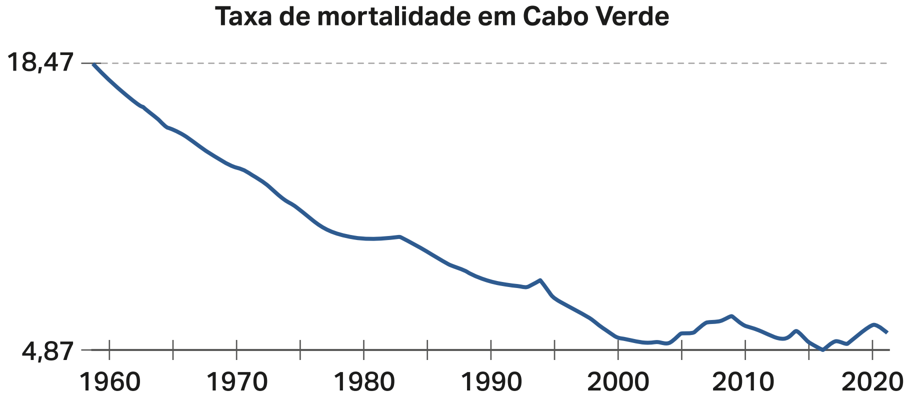
Reflexão crítica e conclusão

Por fim, a análise crítica dos dados implica questionar as conclusões tiradas. Não se deve confiar cegamente nos resultados obtidos, mas sim refletir sobre as implicações desses dados para a sociedade, para a política e para o futuro.

Exemplo 20

Considera o seguinte gráfico de linhas no qual se apresenta a taxa de mortalidade, desde 1960 a 2022, em Cabo Verde.

A taxa de mortalidade é expressa como "número de mortes por mil habitantes por ano".



Considerando o gráfico, podemos concluir que:

- em 2022, Cabo Verde teve uma taxa de mortalidade de cerca de 5 mortes por cada 1000 habitantes;
- o valor mínimo foi de $4{,}87$ mortes por 1000 habitantes, entre 2015 e 2020, e o máximo foi de $18{,}47$ em 1960;
- o gráfico indica que a taxa de mortalidade tem diminuído desde 1960. Contudo, a taxa de mortalidade sofreu ligeiros aumentos por volta de 2005 e, novamente, por volta de 2019.

Refletindo sobre os dados apresentados, podemos dizer que:

- o aumento da taxa de mortalidade, em 2020, é justificado pela pandemia Covid-19;
- refletindo criticamente sobre mudanças em políticas públicas para reduzir a taxa de mortalidade, poderiam ser priorizadas as seguintes ações:
  - melhoria no acesso aos serviços de saúde: garantir acesso a hospitais, clínicas e programas de vacinação;
  - programas de prevenção de doenças: campanhas de consciencialização sobre doenças crónicas e transmissíveis;
  - investimentos em saneamento básico e água potável: evitando doenças causadas por falta de infraestruturas;
  - educação em saúde materna e infantil: reduzir a mortalidade neonatal e a materna com acompanhamento pré-natal;
  - atenção a grupos vulneráveis: apoio a idosos e a populações de risco com programas específicos.

Atenção: Há alguns erros comuns que se cometem na análise de dados e tabelas, tais como:

- não compreender as escalas dos eixos;
- ignorar os rótulos ou títulos;
- assumir tendências sem base nos dados apresentados.

Exercícios

16 **A seguinte tabela apresenta a proporção da população pobre, por sexo, grupo etário e população empregada.**

	Proporção de população pobre (%)
Cabo Verde	35,2
Sexo	
Masculino	34,5
Feminino	35,9
Grupo etário	
0 – 4 anos	44,4
5 – 14 anos	43,1
15 – 24 anos	38,4
25 – 34 anos	27,7
35 – 64 anos	29,0
65 anos ou mais	27,2
População empregada	27,2
Masculino	27,1
Feminino	27,4

Nota: Proporção da população pobre = Incidência da pobreza
Fonte: INE – Inquérito às Despesas e Receitas Familiares (DIRF), 2015.

16.1. Qual é a proporção total da **população pobre** em Cabo Verde, de acordo com os dados fornecidos?

16.2. A tabela mostra diferenças na proporção de pobreza entre homens e mulheres.

a) Qual dos dois sexos tem uma maior incidência de pobreza?

b) Qual é a diferença percentual entre eles?

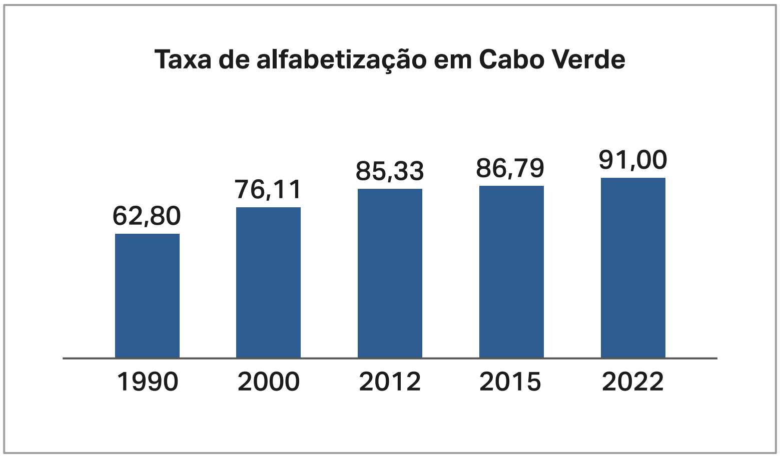
16.3. De acordo com a tabela, que grupo etário apresenta a maior proporção de população pobre? Que grupo apresenta a menor?

16.4. A incidência de pobreza também é analisada entre a população empregue.

a) Qual é a proporção de pobreza entre os homens empregados e as mulheres empregadas?

b) Há diferença significativa entre os dois?

17 **Considera o seguinte gráfico de barras em que se apresenta a taxa de alfabetização em Cabo Verde em diferentes anos.**



Fonte: https://pt.theglobaleconomy.com/Cape-Verde/Literacy_rate/

17.1. Qual era a taxa de alfabetização em Cabo Verde em 1990?

17.2. Qual foi a taxa de alfabetização em 2000?

17.3. Qual foi o aumento da taxa de alfabetização entre 1990 e 2000?

17.4. Compara a taxa de alfabetização entre os anos de 2012, 2015 e 2022. Houve algum aumento significativo durante esse período?

17.5. Qual foi o ano em que a taxa de alfabetização apresentou o maior valor?

17.6. Calcula a diferença entre a taxa de alfabetização em 2012 e a taxa em 2015.

17.7. Considerando a taxa de alfabetização em 2022, qual é o percentual de aumento em relação a 1990?

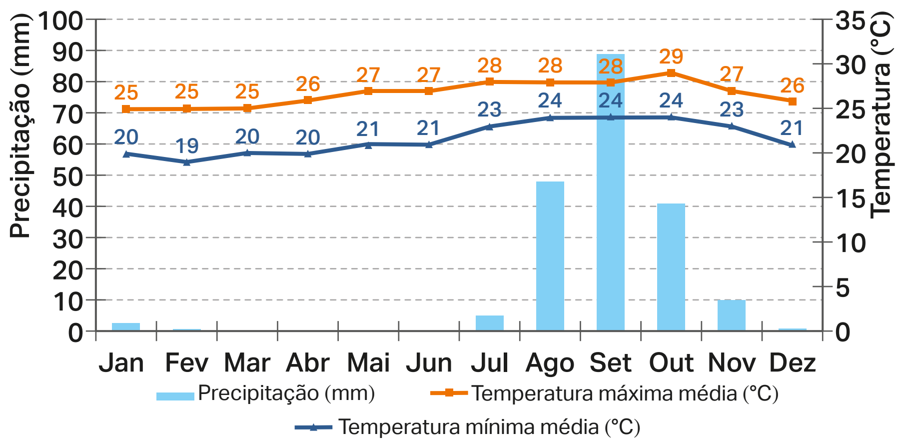
17.8. Que fatores acreditas que contribuíram para o aumento da taxa de alfabetização em Cabo Verde desde 1990 até 2022?

17.9. De acordo com os dados apresentados, é possível identificar uma tendência de crescimento na taxa de alfabetização em Cabo Verde?
Justifica a tua resposta.

17.10. Com base nos dados históricos do gráfico, que ações poderiam ser implementadas para continuar o progresso na taxa de alfabetização no futuro?

18 Considera o seguinte gráfico em que se apresentam as temperaturas médias anuais, máxima e mínima, bem como a precipitação média anual, na Cidade da Praia.

Gráfico de temperatura e precipitação anual na estação meteorológica da Cidade da Praia



Fonte: https://www.destinoseviagens.com/clima-cabo-verde-quando-ir/#google_vignette

18.1. Quais são as variáveis em estudo?

18.2. Qual é a temperatura máxima média no mês de setembro?

18.3. Em que mês ocorre o maior nível de precipitação?

18.4. Qual é a temperatura mínima média no mês de fevereiro?

18.5. Como varia a temperatura máxima média durante o ano?

18.6. Observa as variações da precipitação no período de julho a setembro. O que se nota acerca desses meses?

18.7. Considerando o padrão da precipitação nos meses de agosto e setembro, qual pode ser a explicação para o aumento observado?

18.8. Há alguma relação aparente entre a precipitação e as variações de temperatura?

Justifica a tua resposta.

18.9. Qual foi a diferença da temperatura máxima média entre janeiro e setembro?

18.10. Se tivesses de prever as condições climáticas para o mês de outubro, com base neste gráfico, como farias?

Que fatores considerarias?

19 **Foi realizada uma pesquisa com 50 estudantes do 10.° ano para avaliar o número de horas que eles estudam por semana. Os resultados estão apresentados na tabela seguinte.**

Horas de estudo por semana	Frequência absoluta (número de estudantes)
$[0, 5[$	10
$[5, 10[$	15
$[10, 15[$	12
$[15, 20[$	8
$[20, 25[$	5

19.1. Calcula a frequência relativa em percentagem de cada classe de horas de estudo por semana.

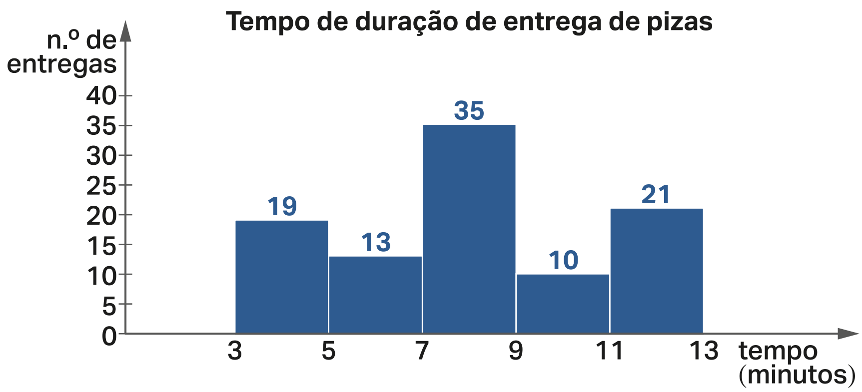
19.2. Apresenta os resultados numa tabela com as frequências relativas.

19.3. Constrói um histograma para representar esses dados.

19.4. Constrói um gráfico circular para visualizar as frequências relativas calculadas na questão anterior.

19.5. O que podes concluir com este estudo?

20 **Uma pizaria faz entregas ao domicílio. Para avaliar a qualidade do seu serviço, durante uma semana, registaram a duração de cada entrega, desde o momento em que o funcionário sai da pizaria até à entrega em casa do cliente.**



20.1. Qual é a variável em estudo?

20.2. Que tipo de gráfico foi utilizado para representar os dados obtidos?

20.3. Consideras que o gráfico foi bem escolhido? Porquê?

20.4. Qual a classe de tempos mais habitual nas entregas de pizas?

3.1.3. Medidas de localização de uma amostra (moda, média, mediana, quartis e percentis) e medidas de dispersão (amplitude interquartil, variância, desvio-padrão)

Manual Interativo

Atividade
Medidas de localização

Medidas de localização e de dispersão

Os gráficos, como histogramas, gráficos de linhas ou gráficos de dispersão, são representações visuais que ajudam a identificar padrões, tendências e a estrutura geral dos dados de forma empírica e rápida, oferecendo uma visão panorâmica e intuitiva da distribuição dos dados, mas existem outros elementos estatísticos que nos permitem, também, compreender os dados recolhidos: as medidas de localização e dispersão.

As medidas de localização e dispersão são valores numéricos que resumem aspetos específicos da distribuição dos dados, fornecendo precisão e detalhe quantitativo sobre as características desses dados. São fundamentais em estatística, permitindo a compreensão da sua variabilidade e tendência.

Enquanto as medidas de localização, como média, mediana e moda, indicam onde os dados estão concentrados, as medidas de dispersão, como variância, desvio-padrão e amplitude, quantificam o grau de variação ou afastamento em torno dessa concentração. Juntas, são essenciais para análises comparativas, previsões e tomadas de decisão informadas, pois ajudam a capturar tanto a essência geral, quanto as peculiaridades dos dados analisados.

Em conjunto, gráficos e medidas de localização e de dispersão permitem uma análise estatística mais completa, uma vez que se complementam.

Medidas de localização

As medidas de localização, como média, mediana e moda, identificam os valores centrais ou mais frequentes, servindo como pontos de referência que resumem o conjunto de dados.

Média

A **média**, também conhecida como média aritmética, é a medida de localização mais utilizada.

Representa-se por $\bar{x}$ e determina-se da seguinte forma:

- somam-se todos os valores;
- divide-se a soma pelo número total de elementos.

Exemplo

Registaram-se as classificações de um aluno:

$$8\ ,\ 8\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ 12\ ,\ 15$$

Assim, a média das suas classificações é dada por:

$$\overline{x} = \frac{8+8+8+12+12+15}{6} = 10{,}5$$

Mas também poderia ser feito de forma mais simples e rápida:

$$\overline{x} = \frac{3 \times 8 + 2 \times 12 + 15}{6} = 10{,}5$$

Dada uma amostra ou uma população com n elementos, sejam x_1, x_2, x_3, ..., x_n os dados recolhidos e seja $\overline{x}$ a média, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Em geral, dada uma amostra ou população com n elementos, onde cada variável x_i assume k valores diferentes, sendo f_i e fr_i a frequência absoluta e relativa de x_i, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \ldots + f_k \times x_k}{n}$$

$$\overline{x} = fr_1 \times x_1 + fr_2 \times x_2 + fr_3 \times x_3 + \ldots + fr_k \times x_k$$

Exemplo 21

Consideremos a situação da pesquisa da idade dos alunos numa turma do 10.° ano, em que obtivemos a distribuição de dados representada na tabela de frequências seguinte:

x_i	f_i	fr_i
15	3	0,1
16	12	0,4
17	9	0,3
18	5	0,17
19	1	0,03
Total	30	1

Neste caso, a média é dada por:

$$\overline{x} = \frac{3 \times 15 + 12 \times 16 + 9 \times 17 + 5 \times 18 + 1 \times 19}{30} = 16{,}6\,(3) \approx 17$$

Ou $\overline{x} = 0{,}1 \times 15 + 0{,}4 \times 16 + 0{,}3 \times 17 + 0{,}17 \times 18 + 0{,}03 \times 19 = 16{,}\,6\,(3) \approx 17$

Ou seja, em média, os alunos, nesta turma, têm aproximadamente 17 anos de idade.

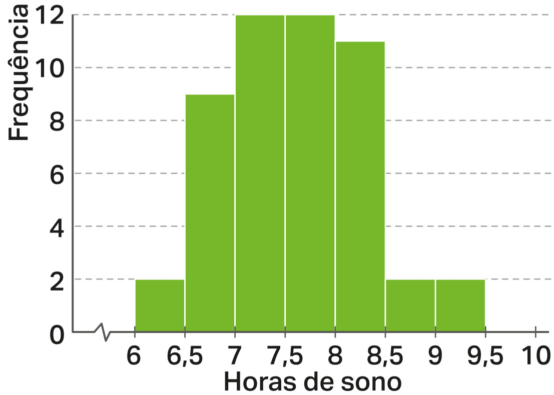
Manual Interativo

Vídeo
Média de dados discretos e de dados agrupados em classes

Exercício
Calcular a média para dados agrupados em classes

Exemplo 22

A Mayra decidiu registar o número de horas que dormiu durante 50 dias. Depois construiu o histograma ao lado.



Como os dados estão agrupados em classe, para determinar o número médio de horas que dormiu, ela precisa de determinar a marca de cada classe, ou seja, a média dos extremos da classe.

Assim:

Classe	Marca da classe	f_i
$[6\,;\ 6{,}5[$	$\frac{6{,}5+6}{2}=6{,}25$	2
$[6{,}5\,;\ 7[$	$\frac{7+6{,}5}{2}=6{,}75$	9
$[7\,;\ 7{,}5[$	$\frac{7{,}5+7}{2}=7{,}25$	12
$[7{,}5\,;\ 8[$	$\frac{8+7{,}5}{2}=7{,}75$	12
$[8\,;\ 8{,}5[$	$\frac{8{,}5+8}{2}=8{,}25$	11
$[8{,}5\,;\ 9[$	$\frac{9+8{,}5}{2}=8{,}75$	2
$[9\,;\ 9{,}5[$	$\frac{9{,}5+9}{2}=9{,}25$	2
Total		50

E a média será dada por:

$$\overline{x}=\frac{2\times 6{,}25+9\times 6{,}75+12\times 7{,}25+12\times 7{,}75+11\times 8{,}25+2\times 8{,}75+2\times 9{,}25}{50}=$$

$$=7{,}6\approx 8$$

Ou seja, em média, a Mayra dormiu aproximadamente 8 horas por noite.

Atenção, embora a média seja fácil de calcular e interpretar, ela pode ser sensível a valores extremos (*outliers*).

Por exemplo, num conjunto de salários em que a maioria das pessoas ganha 18 000 escudos cabo-verdianos e uma única pessoa ganha 100 000 escudos cabo-verdianos, a média será influenciada pelo valor mais alto e poderá não representar com precisão a maioria dos casos.

Exercícios

21 As temperaturas observadas na cidade da Praia foram registadas durante 30 dias de um determinado mês.

26	27	26	29	30	31	27	31	29	30
26	29	27	30	31	26	27	29	29	30
31	32	29	28	30	31	30	29	31	30

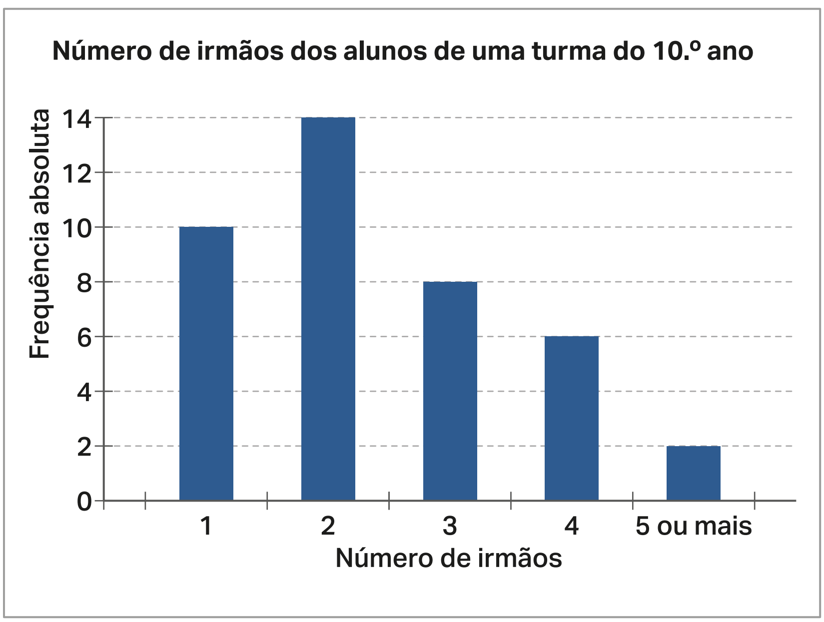
Determina a média das temperaturas registadas nesses 30 dias.

22 Considera a seguinte distribuição de idades:

x_i	f_i
26	6
28	7
30	4
32	3

Determina a média da distribuição dada.

23 O seguinte gráfico de barras apresenta a frequência relativa em relação ao número de irmãos dos alunos de uma turma do 10.º ano.



Determina a média do número de irmãos.

24 **Um serviço telefónico recolheu informações sobre o tempo de espera, em minutos, até a chamada ser reencaminhada para um assistente.**

Os dados obtidos, depois de agrupados em classes, foram os seguintes:

Tempo de atendimento (min)	N.º de pessoas
$[0, 2[$	54
$[2, 4[$	80
$[4, 6[$	32
$[6, 8[$	16
$[8, 10[$	12
$[10, 12[$	6

Em média, quanto tempo demora até que uma chamada seja reencaminhada para um assistente?

Mediana

A mediana é uma medida de localização que indica o valor central de um conjunto de dados, dividindo-o em duas metades iguais, quando os valores estão organizados por ordem crescente ou decrescente.

A mediana, ao contrário da média, não é influenciada por valores extremos (*outliers*), pelo que é ideal para representar dados que possuem distribuição assimétrica, ou seja, muito díspar.

Representa-se por $\tilde{x}$ e determina-se da seguinte forma:

- Organiza-se o conjunto de dados por ordem:
  - se o número de elementos for ímpar, a mediana será o valor no meio da sequência;
  - se o número for par, a mediana será a média dos dois valores centrais.

Exemplo 23

- No seguinte conjunto de dados ímpar: $3, 7, 9, 12, 15$.
  O valor central é 9, logo a mediana é 9.
- No seguinte conjunto de dados par: $2, 4, 6, 8, 9, 9$.
  A mediana será a média dos dois valores centrais: $\tilde{x} = \frac{6+8}{2} = 7$.

A mediana é o valor (pertencente ou não ao conjunto de dados) que divide esse conjunto ordenado ao meio, ou seja, 50% dos elementos da amostra são inferiores ou iguais à mediana e os outros 50% são superiores ou iguais à mediana.

Para determinar a mediana de uma amostra de n elementos, primeiro ordenam-se os elementos da amostra e:

- se n é ímpar: a mediana é o elemento que ocupa a posição $\frac{n+1}{2}$;
- se n é par: a mediana é a média dos elementos que ocupam as posições $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

Manual Interativo

Atividade
Propriedades da média

Exemplo 24

Registou-se o número de crias nascidas por ninhada de um casal de coelhos:

N.º de crias	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
2	3	3
3	24	27
4	30	57
5	13	70
6	7	77
Total	77	

O número total de crias é 77 (ímpar), a mediana é o valor que ocupa a posição:

$\frac{77+1}{2}=\frac{78}{2}=39$.

Observando a coluna das frequências absolutas, podemos concluir:

Os elementos x_1, x_2, x_3 são todos iguais a 2, do x_4 até x_{27} são todos iguais a 3 e assim sucessivamente. Logo, a mediana é $\tilde{x}=x_{39}=4$.

Em 50% das ninhadas nasceram quatro crias ou menos.

Considerando que houve mais algumas ninhadas, tem-se agora a seguinte distribuição, com um número total de crias de 114 (par).

N.º de crias	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
2	3	3
3	24	27
4	30	57
5	30	87
6	27	114
Total	114	

Como o número de dados é par, então a mediana é dada pelos valores que se encontram nas posições $\frac{114}{2} = 57$ e $\frac{114}{2} + 1 = 58$.

Assim, $\tilde{x} = \frac{x_{57} + x_{58}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$

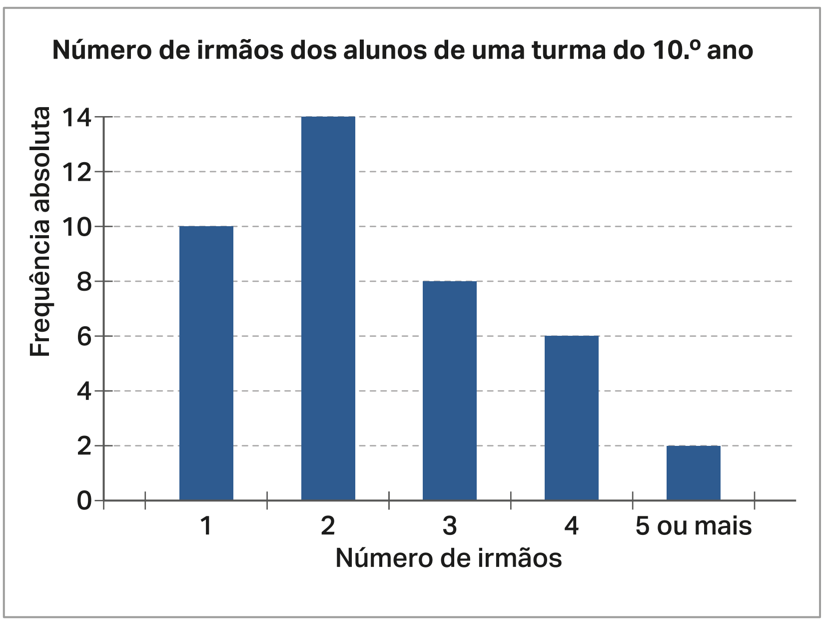
Exercícios

25 Considera a seguinte distribuição de idades:

x_i	f_i
26	6
28	7
30	4
32	3

Determina a mediana das idades.

26 Considera o gráfico de barras relativo ao número de irmãos dos alunos de uma turma do 10.º ano.



Determina a mediana do número de irmãos.

27 **Um serviço telefónico recolheu informações sobre o tempo de espera, em minutos até a chamada ser reencaminhada para um assistente. Os dados obtidos, depois de agrupados em classes, foram os seguintes:**

Tempo de atendimento (min)	N.º de pessoas
$[0, 2[$	54
$[2, 4[$	80
$[4, 6[$	32
$[6, 8[$	16
$[8, 10[$	12
$[10, 12[$	6

Determina a classe onde se encontra a mediana dos tempos de atendimento.

Moda

A moda é uma medida de localização em estatística que indica o valor ou categoria que ocorre com maior frequência num conjunto de dados. É especialmente útil para identificar tendências em dados qualitativos (como cores ou marcas) ou quantitativos, destacando o elemento mais comum dentro de um grupo.

Exemplo 25

Numa pesquisa sobre as cores preferidas de um grupo de pessoas, se a cor "azul" foi a mais escolhida, a moda será "azul".

No conjunto de números como $2, 3, 3, 4, 5$, a moda é 3, porque é o número que aparece mais vezes.

Sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ os k valores distintos de uma variável estatística, a moda corresponde ao valor que apresenta maior frequência absoluta (ou relativa) e representa-se por *Mo*.

Exemplo 26

No seguinte conjunto de dados $3;\ 4;\ 3;\ 6;\ 2;\ 3;\ 6;\ 5;\ 3$.

A moda é 3.

Exemplo 27

No seguinte conjunto de dados $3;\ 4;\ 3;\ 6;\ 2;\ 3;\ 6;\ 5;\ 6$.

Existem dois valores que apresentam a mesma frequência (3 e 6).

Assim, dizemos que a distribuição é bimodal e as modas são 3 e 6.

Exemplo 28

No seguinte conjunto de dados: 4 , 3 , 5 , 7 , 1 , 2

Nenhum valor se repete, logo, dizemos que não existe moda.

Manual Interativo

Vídeo
Classe modal

Assim, relativamente a um conjunto de dados ou distribuição, podemos dizer que:

- A moda pode ser única – unimodal
- Pode haver mais do que uma – bimodal ou multimodal
- Pode não existir, caso nenhum valor se repita – amodal

Exercício

28 **Considera a seguinte distribuição de idades:**

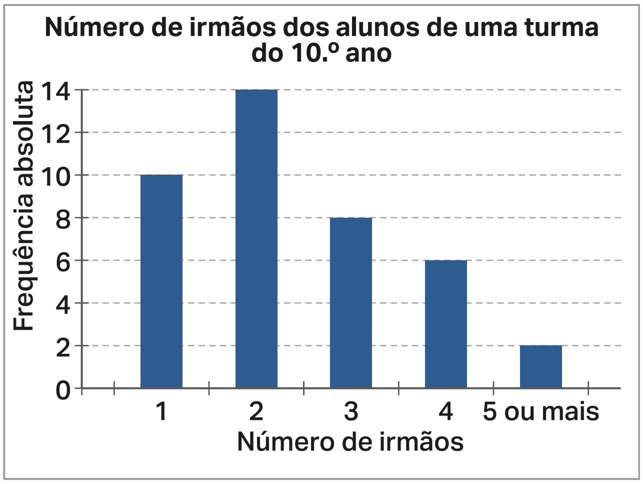
x_i	f_i
26	6
28	7
30	4
32	3

Indica a moda das idades.

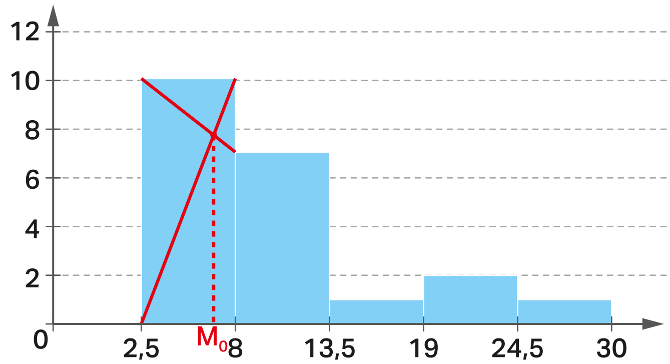
No caso de os dados estarem agrupados em classes, à classe com maior frequência absoluta dá-se o nome de **classe modal.**

Exercício

29 **Considerando a distribuição do número de irmãos dos alunos de uma turma do 10.º ano, representada no gráfico de barras abaixo, qual é a moda do número de irmãos?**



Se representamos os dados agrupados em classes por um histograma é possível fazer uma estimativa geométrica para a moda, procedendo da seguinte forma:



- representar os dados num histograma;
- determinar a classe modal;
- unir os vértices superiores do retângulo da classe modal com os vértices superiores das classes contíguas;
- traçar uma perpendicular ao eixo das abcissas, partindo do ponto de interseção das linhas obtidas anteriormente;
- indicar a localização gráfica da moda.

Exercício

30 **Considera os dados obtidos, depois de agrupados em classes, relativamente a um serviço telefónico que recolheu informações sobre o tempo de espera, em minutos, até a chamada ser reencaminhada para um assistente.**

Tempo de atendimento (min)	N.º de pessoas
[0 , 2[	54
[2 , 4[	80
[4 , 6[	32
[6 , 8[	16
[8 , 10[	12
[10 , 12[	6

30.1. Qual é a classe modal?

30.2. Representa os dados num histograma.

30.3. Determina geometricamente a moda deste conjunto de dados.

Quartis e percentis

Em muitos estudos estatísticos, com populações ou amostras de grande dimensão, é interessante conhecer a maior ou menor concentração de dados ao longo do intervalo de variação dos seus valores, ou seja, entre o maior e o menor valor que a distribuição toma.

Os quartis e percentis são medidas de posição que ajudam a dividir um conjunto de dados ordenado em partes iguais, permitindo analisar a dispersão e distribuição dos valores.

Manual Interativo
Vídeo
Quartis

- **Quartis**

Os quartis dividem o conjunto ordenado de dados em quatro partes com a mesma quantidade de dados, cada uma representando 25% dos valores:

- **1.º quartil (Q_1):** é o valor da variável, tal que 25% dos dados são menores ou iguais e 75% são maiores ou iguais;
- **2.º quartil (Q_2):** é o valor da variável que coincide com a mediana;
- **3.º quartil (Q_3):** é o valor da variável tal que 75% dos dados são menores ou iguais e 25% são maiores ou iguais.

Exemplo 29

Foi registado o número de mensagens SMS recebidas num telemóvel durante 11 dias.

$$12 \quad 12 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 10 \quad 9 \quad 10 \quad 11$$

- Primeiro ordenamos os elementos da distribuição:

$$5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 12$$

- Depois, determina-se a mediana.
  O número de dados é ímpar (11), logo, a mediana corresponde ao valor na posição $\frac{11+1}{2}=6$.

$$5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \mathbf{9} \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 12$$

- De seguida, determina-se o 1.º quartil.
  Neste caso, teremos de determinar a mediana entre o 1.º e o 5.º valores.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 10 & 11 & 12 & 12 \\ & & Q_1 & & & Q_2 & & & & & \end{array}$$

- Por fim, determina-se o 3.º quartil.
  Neste caso, a mediana entre o 7.º e o 11.º valores.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 10 & 11 & 12 & 12 \\ & & Q_1 & & & Q_2 & & & Q_3 & & \end{array}$$

Para este conjunto temos:

$$Q_1 = 6\ ;\ Q_2 = \tilde{x} = 9\ ;\ Q_3 = 11$$

Como o menor valor deste conjunto de dados é 5 e o maior é 12, é possível construir o diagrama de extremos e quartis.

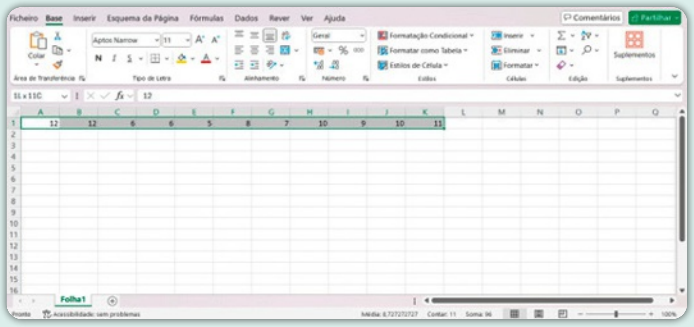
Tarefa

3 Na **Folha de Cálculo** é possível construir rapidamente o diagrama de extremos e quartis:

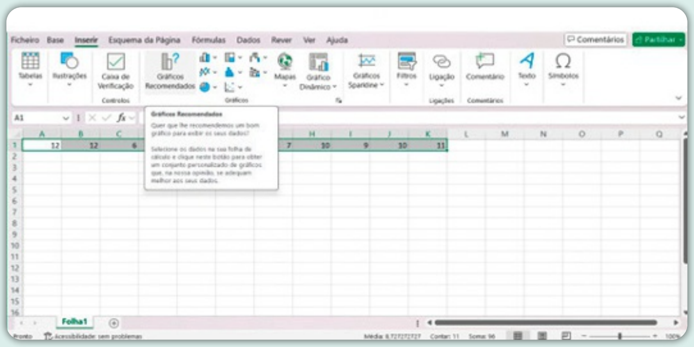
1) Abre a **Folha de Cálculo.**

2) Insere os dados recolhidos.

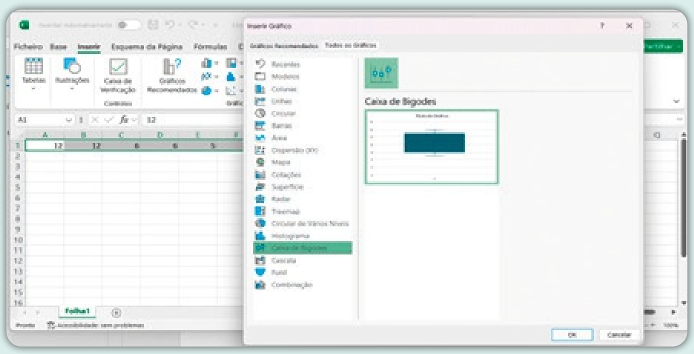
3) Seleciona os dados.



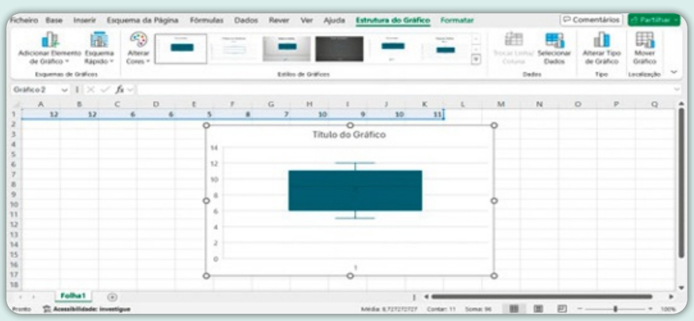
4) Seleciona Inserir > Gráficos Recomendados.



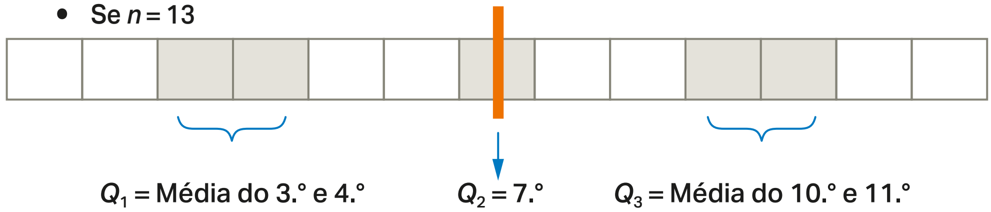
5) Seleciona o separador Todos os Gráficos e escolhe a opção Diagrama de Bigodes.



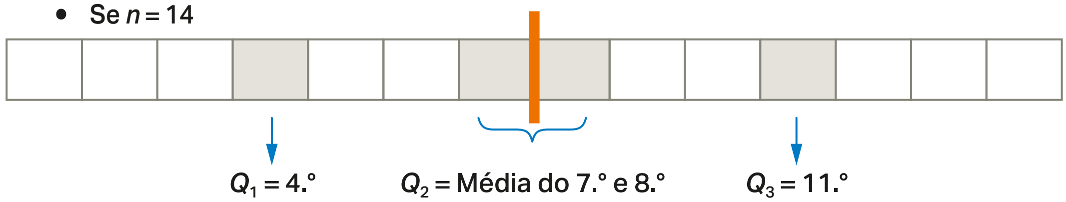
6) Clica em OK e o diagrama de extremos e quartis surge na área de trabalho.



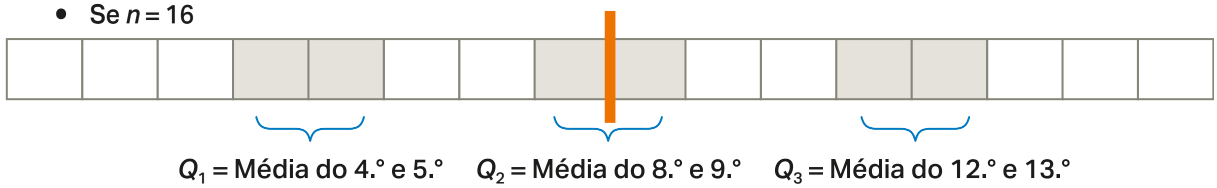
- Se $n = 13$



- Se $n = 14$



- Se $n = 16$



Exercício

31 A tabela seguinte apresenta os "pesos" (em kg) de 20 atletas.

"Peso" (kg)	55	57	60	62	65	68	70	72	75	78
Frequência	2	1	3	2	4	2	3	1	1	1

31.1. Constrói a tabela de frequências relativas acumuladas.

31.2. Determina a mediana do conjunto de dados.

31.3. Calcula o 1.º quartil (Q_1) e o 3.º quartil (Q_3).

- **Percentis**

Os **percentis** são medidas que dividem a amostra (por ordem crescente dos dados) em 100 partes, cada uma com uma percentagem de dados aproximadamente igual.

O *k-ésimo* percentil P_k é o valor $x\,(x_k)$ que corresponde à frequência cumulativa e $n \cdot \frac{k}{100}$, onde n é o tamanho amostral.

Portanto:

- o 1.º percentil (P_1) determina o 1% menor dos dados;
- o 98.º percentil (P_{98}) determina os 98% menores dos dados;
- o 25.º percentil (P_{25}) corresponde ao 1.º quartil;
- o 50.º percentil (P_{50}) corresponde à mediana;
- o 75.º percentil (P_{75}) corresponde ao 3.º quartil.

Percentis são amplamente usados em áreas como avaliação de desempenho (como em testes padronizados, em que um aluno no 90.º percentil superou 90% dos outros) e saúde (análise de crescimento infantil ou níveis de colesterol).

Exemplo 30

Numa prova de acesso a um emprego candidataram-se 40 pessoas.

Decidiu-se que todos os candidatos com classificações acima do percentil 70 passariam a uma fase de entrevista.

As classificações obtidas pelos candidatos foram (numa escala de 0 a 150):

78	83	100	93	35	99	28	99
102	95	102	89	38	108	89	140
110	93	109	50	41	140	111	77
150	70	35	148	84	84	106	85
141	46	149	137	96	78	95	86

Para determinar a classificação que corresponde ao percentil 70, temos de perceber em que posição estará, na lista das classificações organizadas.

Assim, sendo 40 classificações, o percentil 70 está na posição

$$n \cdot \frac{k}{100} = 40 \times \frac{70}{100} = 28$$

Então, vamos procurar a $28.^a$ classificação, na lista de dados ordenados

$$28;\ 35;\ 35;\ 38;\ 41;\ 46;\ 50;\ 70;\ 77;\ 78;\ 78;\ 83;\ 84;\ 84;\ 85;\ 86;\ 89;$$
$$89;\ 93;\ 93;\ 95;\ 95;\ 96;\ 99;\ 99;\ 100;\ 102;\ 102;\ 106;\ 108;\ 109;\ 110;$$
$$111;\ 137;\ 140;\ 140;\ 141;\ 148;\ 149;\ 150$$

$P_{70} = 102$

Assim, serão entrevistados os candidatos que obtiveram uma classificação superior a 102.

Exercício

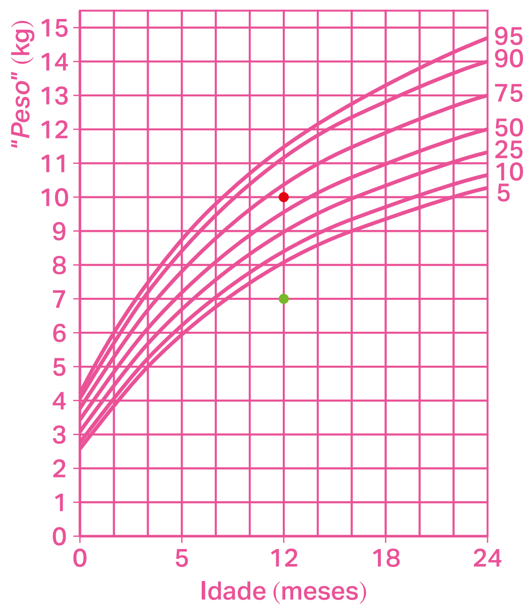
32 Numa prova, 650 alunos foram aprovados com nota igual ou superior a 10 .
A distribuição das notas foram de acordo com a seguinte tabela:

Notas	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N.° de alunos	125	106	58	100	60	151	0	25	18	5	2

Os alunos com classificação inferior ou igual ao percentil 60 terão de realizar uma prova prática. Determinar as notas dos alunos que terão de realizar essa prova.

Exemplo 31

Observa o gráfico de percentis, ao lado, que serve para analisar uma criança num dado momento da sua evolução, relacionando a idade com o "peso".



No gráfico podes observar várias curvas (os percentis 5 , 10 , 25 , 50 , 75 , 90 e 95) e o valor de "normalidade" geralmente encontra-se entre o 5% e o 95% .

O gráfico de percentis serve tanto para analisar a criança num dado momento como perspetivar a sua evolução.

Há um gráfico para cada parâmetro e intervalo de tempo. Por exemplo, o gráfico de "peso" para a idade de 0 a 24 meses. Para exemplificar, vamos dizer que existe uma criança de 1 ano de idade (12 meses) com 10 kg .

Em que parte do gráfico estaria essa criança?

Podemos ver então que, cruzando os eixos idade e "peso", uma criança com 1 ano de idade (12 meses) e 10 kg encontra-se entre os percentis 50 e 75 (ponto vermelho), estando dentro da faixa de normalidade.

Já uma criança com a mesma idade e 7 kg (ponto verde), estaria abaixo do percentil 5 , sendo um sinal de alerta para desnutrição, por exemplo.

Consulta o gráfico e repara:

- em que linha se posiciona uma criança com 22 meses e com 10 kg?

  Está precisamente na curva de percentil 5. Isso quer dizer que, para a idade de 22 meses, 5% das crianças têm 10 kg ou menos.

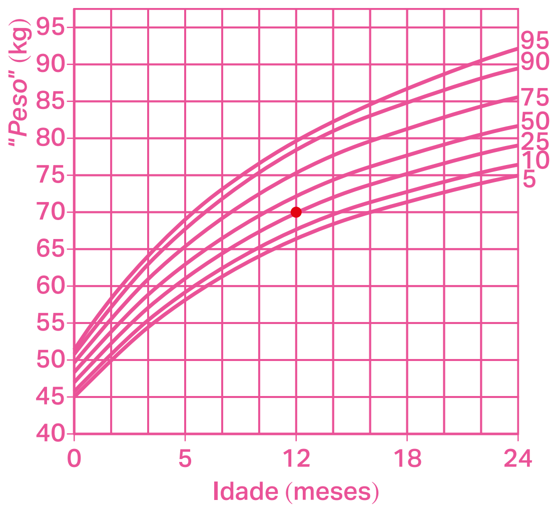
- e se considerarmos uma criança com 14 meses, que pese 11 kg, percebemos que está na linha do percentil 75.

  Isso significa que, 75% das crianças nessa idade têm esse "peso" ou menos, e apenas 25% delas terão mais de 10 kg.

Exercício

33 **Considera o gráfico de percentis ao lado que relaciona a idade de uma criança com a sua altura.**

O que poderás dizer sobre uma criança que tenha 12 meses e 70 cm de altura?



Manual Interativo

Vídeos
Medidas de dispersão, para quê?

Amplitude e amplitude interquartil

Medidas de dispersão

Já as medidas de dispersão, como desvio-padrão, variância e amplitude, quantificam o grau de afastamento dos dados ao redor da localização central, indicando a consistência ou heterogeneidade do conjunto.

Amplitude Interquartil é uma medida de dispersão que indica a extensão dos dados dentro do intervalo compreendido entre o **1.º quartil** (Q_1) e o **3.º quartil** (Q_3).

$$\text{Amplitude interquartil} = Q_3 - Q_1$$

Recorda que:

- Q_1 (1.º quartil): é o valor que separa os 25% menores dados do conjunto;
- Q_3 (3.º quartil): é o valor que separa os 25% maiores dados do conjunto.

Logo, a amplitude interquartil mostra onde está concentrada a metade central dos dados (entre Q_1 e Q_3), ignorando os valores mais extremos.

Esta medida é útil para comparar a dispersão, uma vez que conjuntos de dados com maior amplitude interquartil têm uma maior variação na metade central dos valores.

Exemplo 32

Dados: $10\,,\ 15\,,\ 20\,,\ 25\,,\ 30\,,\ 35\,,\ 40$

- $Q_1 = 15$ (25% dos dados estão abaixo).
- $Q_3 = 35$ (25% dos dados estão acima).

Amplitude interquartil é $Q_3 - Q_1 = 35 - 15 = 20$.

A metade central dos dados está concentrada no intervalo de 20 unidades, entre 15 e 35.

Manual Interativo

Vídeo
Variância e desvio-padrão de uma amostra

Exercício

34 **A tabela abaixo apresenta os "pesos" (em kg) de 20 atletas.**

"Peso" (kg)	55	57	60	62	65	68	70	72	75	78
Frequência	2	1	3	2	4	2	3	1	1	1

Determina o intervalo interquartil.
(Nota: Já determinaste, anteriormente, os quartis para este conjunto de dados.)

Variância e desvio-padrão

A medida de localização central mais utilizada é a média. O desvio-padrão é uma medida de dispersão associada à média. Vejamos:

- Variância

A variância é a medida que se obtém dividindo a soma dos quadrados dos desvios das observações relativamente à média pelo número de observações e representa-se por s^2.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Caso os dados sejam discretos e tenhamos a frequência absoluta de cada valor, temos que:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Portanto, a variância é uma medida estatística que descreve o grau de dispersão dos dados em relação à média. Por outras palavras, indica o quão espalhados ou concentrados estão os valores de um conjunto de dados, respondendo à questão:

"Em média, quanto se afastam os dados da média do conjunto?"

Assim:

- valores pequenos de variância indicam que os dados estão muito próximos da média, ou seja, há baixa variabilidade;
- valores grandes de variância indicam que os dados estão mais espalhados, ou seja, há alta variabilidade.

Exemplo 33

Considera a tabela ao lado onde se apresenta o número de golos marcados por um clube em cada uma das 20 primeiras jornadas de um campeonato.

N.º de golos	N.º de jogos
0	2
1	5
2	4
3	5
4	3
5	1

Para determinar a variância:

- Determinamos a média:

$$\overline{x} = \frac{2\times 0 + 5\times 1 + 4\times 2 + 5\times 3 + 3\times 4 + 1\times 5}{20} = 2{,}25$$

- Construímos uma tabela com os valores envolvidos no cálculo da variância, o que facilitará a organização dos dados.

x_i	f_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i\,(x_i - \overline{x})^2$
0	2	$0 - 2{,}25 = -2{,}25$	$(-2{,}25)^2 = 5{,}0625$	$2\times 5{,}0625 = 10{,}125$
1	5	$1 - 2{,}25 = -1{,}25$	$(-1{,}25)^2 = 1{,}5625$	$5\times 1{,}5625 = 7{,}8125$
2	4	$2 - 2{,}25 = -0{,}25$	$(-0{,}25)^2 = 0{,}0625$	$4\times 0{,}0625 = 0{,}25$
3	5	$3 - 2{,}25 = 0{,}75$	$0{,}75^2 = 0{,}5625$	$5\times 0{,}5625 = 2{,}8125$
4	3	$4 - 2{,}25 = 1{,}75$	$1{,}75^2 = 3{,}0625$	$3\times 3{,}0625 = 9{,}1875$
5	1	$5 - 2{,}25 = 2{,}75$	$2{,}75^2 = 7{,}5625$	$1\times 7{,}5625 = 7{,}5625$
Total	20			

Assim, $\sum_{i=1}^{5} f_i(x_i - \overline{x})^2 = 10{,}125 + 7{,}8125 + 0{,}25 + 2{,}8125 + 9{,}1875 + 7{,}5625 = 37{,}75$

e $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{37{,}75}{20} = 1{,}8875$.

A variância calculada é $1{,}8875$, o que indica o grau de dispersão dos números de golos marcados em relação à média (2,25 golos).

Nota: No caso de dados contínuos, agrupados em classes, determina-se a variância usando a marca da classe.

Manual Interativo

Exercício
Determinar o desvio-padrão de uma amostra

Atividade
Propriedades do desvio-padrão

Exercício

35 **Realizou-se um controlo de qualidade a um fio elétrico produzido por uma empresa, medindo-se o comprimento de 10 fios.**
Obtiveram-se os seguintes resultados:

10,4	10,3	9,8	10,2	10	10,2
10,2	10,1	9,8	9,9	10	9,7

35.1. Determina a média do comprimento do fio.

35.2. Determina a variância da distribuição e indica se há uma grande variabilidade dos dados, justificando a tua resposta.

- **Desvio-padrão**

A variância permite-nos comparar diferentes distribuições, pois quanto maior forem os quadrados dos desvios em relação à média, maior será a variância. Não é, no entanto, reveladora em relação aos dados da distribuição, pois a ordem de grandeza é diferente da dos desvios.

Por este motivo, em vez de usar a variância como medida de dispersão relativa à média, usamos a sua raiz quadrada a que chamamos desvio-padrão.

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Exemplo 34

Sabendo que:

$$s^2 = 1{,}8875$$

temos que:

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}8875} \approx 1{,}37 \text{ (2 c.d.)}$$

De forma análoga à variância, relativamente ao desvio-padrão podemos dizer que:

- um desvio-padrão pequeno indica que os dados estão muito próximos da média, ou seja, há uma baixa variabilidade e os dados são consistentes;
- um desvio-padrão grande indica que os dados estão espalhados em relação à média, ou seja, há uma alta variabilidade e uma maior diversidade entre os dados.

Exemplo 35

Considera que duas turmas fizeram a mesma prova e os resultados foram os seguintes:

- Turma A (Notas): 50, 52, 54, 51, 53 $\longrightarrow$ Média: 52
  - O desvio-padrão será pequeno, pois as notas estão todas próximas de 52.

$$\sigma=\sqrt{\frac{(50-52)^2+(52-52)^2+(54-52)^2+(51-52)^2+(53-52)^2}{5}}\cong 1{,}41$$

- Turma B (Notas): 30, 60, 90, 20, 100 $\longrightarrow$ Média: 60
  - O desvio-padrão será grande, pois as notas variam bastante em relação a 60.

$$\sigma=\sqrt{\frac{(30-60)^2+(60-60)^2+(90-60)^2+(20-60)^2+(100-60)^2}{5}}\cong 31{,}62$$

A turma B tem maior dispersão dos dados em relação à sua média, quando comparativamente com a dispersão existente nos dados da turma A.

Repara que a variância mede a dispersão, mas a sua unidade é ao quadrado (por exemplo, se os dados são em metros, a variância será em metros quadrados), enquanto o desvio-padrão, sendo a raiz quadrada da variância, tem a mesma unidade dos dados originais, o que facilita a interpretação.

Exercício

36 **Num viveiro de peixes foi medido o comprimento de cada peixe, de uma amostra, para estudar o impacto de uma nova alimentação no seu crescimento. Obtiveram-se os seguintes dados, em cm.**

29,9	40,2	37,8	19,7	30,0	29,7	19,4	39,2	24,7	20,4	19,1	34,7	33,5	18,3
19,4	27,3	38,2	16,2	36,8	33,1	41,4	13,6	32,2	24,3	19,1	37,4	23,6	33,3
31,6	20,1	17,2	13,3	37,7	12,6	39,6	24,6	18,6	18,0	33,7	38,2		

36.1. Agrupa os dados em classes, construindo uma tabela de frequências.

36.2. Determina o desvio-padrão.

36.3. O que podes dizer relativamente à variabilidade dos dados recolhidos? Justifica a tua resposta.

Síntese

População, ou **universo**, corresponde a uma coleção de objetos com uma característica comum.
A cada elemento da população damos o nome de **indivíduo** ou **unidade estatística.**
Um **censo** ou **recenseamento** é um estudo estatístico que implica a observação de todos os elementos da população.
Uma **amostra** é um subconjunto de elementos extraídos da população em estudo utilizando uma metodologia adequada.
Uma **sondagem** é um estudo estatístico de uma população a partir de uma amostra.

Processos de amostragem

a) Amostragem aleatória simples

- Cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado.
- Ideal para populações homogéneas.

b) Amostragem estratificada

- Seleciona elementos de diferentes estratos da população, em número proporcional ao existente na população.
- Representatividade de todos os estratos da população assegurada, em proporção igual à existente na população, salientando a influência de cada um para o todo.

c) Amostragem sistemática

- Seleciona elementos a partir de uma regra previamente definida.
- Simples e rápida, mas pode ser enviesada se houver padrões na população.

d) Amostragem por conglomerados

- A população é dividida em *clusters* (grupos) e alguns *clusters* são selecionados aleatoriamente para análise completa.
- Útil para populações geograficamente dispersas.

e) Amostragem por conveniência

- Baseia-se na facilidade de acesso aos participantes.
- Rápida e económica, mas menos representativa.

Uma **distribuição estatística** corresponde ao valor da variável estatística para cada indivíduo ou elemento da população ou amostra em estudo**.**

Designam-se por x_1, x_2, x_3, $\dots$, x_n os diferentes valores que a variável estatística x pode assumir.

Síntese

A **frequência absoluta** de um dado estatístico é o número de vezes que este se repete e representa-se por f_i.

A **frequência relativa** de um dado estatístico corresponde ao quociente entre a frequência absoluta (f_i) e o número total de dados observados (n) e representa-se por $fr_i = \frac{f_i}{n}$.

A frequência relativa por ser apresentada na forma de uma fração, número decimal ou percentagem.

A frequência absoluta acumulada do valor x_i corresponde à soma das frequências absolutas correspondentes a todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por $\boldsymbol{F_i}$.

A frequência relativa acumulada do valor x_i corresponde à soma das frequências relativas correspondentes a todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por $\boldsymbol{Fr_i}$.

Representações gráficas

Gráfico de barras

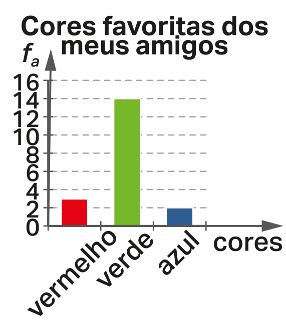
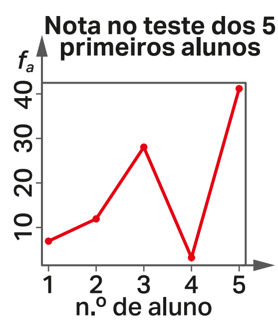
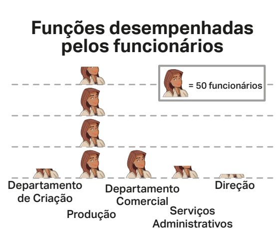


Gráfico circular

Gráfico de linhas



Pictograma



Histograma

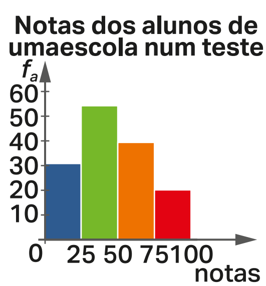
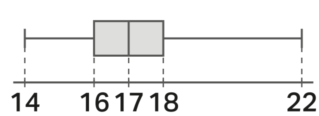


Diagrama de extremos e quartis



Síntese

A **média** representa o valor médio de um conjunto de dados.

Dada uma amostra ou uma população com n elementos, sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os dados recolhidos e seja $\overline{x}$ a média, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Sendo f_i e fr_i a frequência absoluta e relativa de x_i, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \ldots + f_k \times x_k}{n}$$

$\overline{x} = fr_1 \times x_1 + fr_2 \times x_2 + fr_3 \times x_3 + \ldots + fr_k \times x_k$

A **mediana** é uma medida de localização que indica o valor central de um conjunto ordenado de dados, dividindo-o em duas metades de igual dimensão.

- Se n é ímpar: a mediana é o elemento que ocupa a posição $\frac{n+1}{2}$.
- Se n é par: a mediana é a média dos elementos que ocupam as posições $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

Sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ os k valores distintos de uma variável estatística, a **moda** corresponde ao valor que apresenta maior frequência absoluta (ou relativa) e representa-se por *Mo*.

- A moda pode ser única – unimodal
- Pode haver mais de uma – bimodal ou multimodal
- Pode não existir, caso nenhum valor se repita – amodal

Os **quartis** dividem o conjunto ordenado de dados em quatro partes de iguais dimensões, cada uma representando 25% dos valores.

- **1.º quartil (Q_1):** é o valor da variável, tal que 25% dos dados são menores ou iguais e 75% são maiores ou iguais.
- **2.º quartil (Q_2):** é o valor da variável que coincide com a mediana.
- **3.º quartil (Q_3):** é o valor da variável tal que 75% dos dados são menores ou iguais e 25% são maiores ou iguais.

Síntese

Se n é par:

Quartil	Localização
$Q_1 = x_k$	$k = \frac{n+2}{4}$
$Q_2 = \tilde{x}$	$k = \frac{n}{2}$
$Q_3 = x_k$	$k = \frac{3n+2}{4}$

Se n é ímpar:

Quartil	Localização
$Q_1 = x_k$	$k = \frac{n+1}{4}$
$Q_2 = \tilde{x}$	$k = \frac{n+1}{2}$
$Q_3 = x_k$	$k = 3\frac{n+1}{4}$

Os **percentis** são medidas que dividem a amostra (por ordem crescente dos dados) em 100 partes, cada uma com uma percentagem de dados aproximadamente igual.

- O 1.º percentil (P_1) determina o 1% menor dos dados.
- O 98.º percentil (P_{98}) determina os 98% menores dos dados.
- O 25.º percentil (P_{25}) corresponde ao 1.º quartil.
- O 50.º percentil (P_{50}) corresponde à mediana.

Amplitude interquartil indica a extensão dos dados dentro do intervalo compreendido entre o 1.º quartil (Q1) e o 3.º quartil (Q3).

$$\text{Amplitude interquartil} = Q_3 - Q_1$$

Variância

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

- Um desvio-padrão pequeno indica que os dados estão muito próximos da média, ou seja, há uma baixa variabilidade e os dados são consistentes.
- Um desvio-padrão grande indica que os dados estão espalhados em relação à média, ou seja, há uma alta variabilidade e uma maior diversidade entre os dados.

Para aplicar

1 **Uma universidade deseja realizar uma pesquisa sobre a satisfação dos alunos com os serviços de apoio académico, como orientação académica, biblioteca e apoio psicológico. A universidade possui um total de 10 000 alunos matriculados, distribuídos por cinco faculdades (Faculdade de Ciências, Faculdade de Engenharia, Faculdade de Direito, Faculdade de Medicina e Faculdade de Economia).**

A pesquisa deve ser feita com uma amostra de 500 alunos e a universidade quer usar diferentes métodos de amostragem para selecionar essa amostra.

1.1. Se a universidade utilizar amostragem aleatória simples, como deve proceder para selecionar a amostra de 500 alunos?

Explica como a amostra será escolhida de forma aleatória.

1.2. Se a universidade optar por amostragem estratificada, como deve dividir os alunos e como serão os alunos selecionados de cada estrato?

1.3. Se a universidade decidir usar amostragem sistemática, qual seria o intervalo de amostragem para selecionar 500 alunos a partir dos alunos matriculados?

Calcula o intervalo de amostragem e explica como seria utilizado.

1.4. Se a universidade escolher a amostragem por conglomerados, como poderia selecionar os conglomerados e quais seriam os alunos incluídos na amostra?

1.5. Se a universidade optasse por amostragem por conveniência, onde poderia selecionar os alunos e como seria obtida a amostra?

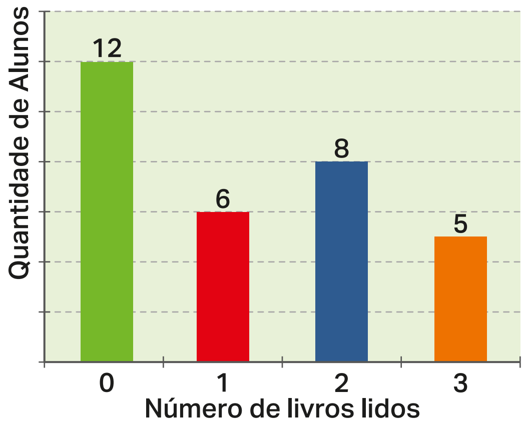
2 **A tabela ao lado apresenta os resultados obtidos por 20 alunos numa prova de Matemática.**

2.1. Calcula a **média**, a **mediana** e a **moda** dos resultados.

2.2. Determina a **variância** e o **desvio-padrão**.

Nota (%)	Frequência
0-10	2
11-20	3
21-30	5
31-40	4
41-50	3
51-60	2
61-70	1

3 **O gráfico de barras ao lado mostra o número de livros lidos por mês por um grupo de estudantes.**



3.1. Qual é o número médio de livros lidos por mês?

3.2. Calcula a **amplitude interquartil**, considerando os dados do gráfico.

3.3. Determina e explica a importância do desvio-padrão para estes dados.

4 **Os dados a seguir representam as idades (em anos) de 15 pessoas que participaram de uma pesquisa:**

$21, 25, 30, 35, 28, 40, 20, 22, 32, 31, 33, 27, 29, 23, 34$

4.1. Organiza os dados por ordem crescente.

4.2. Calcula a **mediana**, o **1.º quartil** **(Q_1)** e o **3.º quartil** **(Q_3)**.

4.3. Calcula a **variância** e o **desvio-padrão** dos dados.

5 **A tabela a seguir apresenta as notas médias de dois grupos de estudantes em dois exames diferentes.**

Grupo	Exame 1	Exame 2
Grupo A	14	16
Grupo B	12	15

5.1. Compara as notas médias dos dois grupos nos dois exames.

5.2. Calcula o **desvio-padrão** de cada grupo para os dois exames.

5.3. Com base nos resultados, qual o grupo que teve uma *performance* mais consistente? Justifica a tua resposta.

Para aplicar

6 A tabela a seguir mostra o número de vendas mensais de um produto durante seis meses.

Mês	Vendas
Janeiro	50
Fevereiro	70
Março	60
Abril	80
Maio	75
Junho	90

6.1. Constrói um **gráfico de linhas** para representar a evolução das vendas ao longo dos meses.

6.2. Calcula a **média** de vendas durante os seis meses.

6.3. Que mês teve o maior aumento nas vendas em relação ao mês anterior?

7 Considera as seguintes afirmações e classifica-as de Verdadeira (V) ou Falsa (F), justificando as respostas.

(A) O 1.º quartil (Q_1) é o percentil que separa os 25% menores dados do conjunto de dados.

(B) O percentil 90 (P_{90}) indica que 90% dos dados estão abaixo do valor correspondente a esse percentil.

(C) A mediana de um conjunto de dados é sempre igual ao 2.º quartil (Q_2).

(D) O percentil 50 (P_{50}) corresponde à mediana de um conjunto de dados.

(E) O 3.º quartil (Q_3) é o percentil que separa os 25% maiores dados de um conjunto.

(F) O intervalo entre o 1.º quartil (Q_1) e o 3.º quartil (Q_3) é chamado de amplitude interquartil e mede a dispersão dos dados no meio da distribuição.

3.2. Distribuições bidimensionais

3.2.1. Dados bidimensionais

Introdução às distribuições bidimensionais

As **distribuições bidimensionais** exploram a relação entre duas variáveis e ajudam-nos a compreender como elas se relacionam. No nosso dia a dia, encontramos situações em que duas variáveis estão relacionadas. Por exemplo:

- Será que há relação entre o número de horas de estudo e o desempenho escolar?
- A temperatura e o consumo de energia starão relacionados?

Por meio do estudo das distribuições bidimensionais, poderemos analisar essas relações e tirar conclusões importantes.

Neste subtema, começaremos por perceber que dados bidimensionais se relacionam com observações de valores de duas variáveis.

Compreenderemos como esses dados são organizados e apresentados, formando a base para as análises subsequentes. A partir de representações visuais, com uma **abordagem gráfica e intuitiva**, aprenderemos a interpretar e identificar padrões em **distribuições bidimensionais**, o que nos permitirá perceber como duas variáveis se relacionam entre si.

O **diagrama de dispersão** é uma ferramenta gráfica muito útil que nos ajuda a visualizar a correlação entre duas variáveis. Também estudaremos a **reta de regressão**, que nos permite descrever, de forma aproximada, a relação entre as variáveis em estudo. Por fim, trataremos com o **coeficiente de correlação**, uma medida numérica que expressa a força e a direção da relação entre duas variáveis. Este conceito será essencial para uma análise quantitativa mais rigorosa das distribuições bidimensionais.

Distribuições bidimensionais

Os **dados bivariados** consistem em pares ordenados de valores associados a duas variáveis. Normalmente, para uma população de n elementos, representam-se por:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$$

Manual Interativo

Vídeo
Dados bivariados

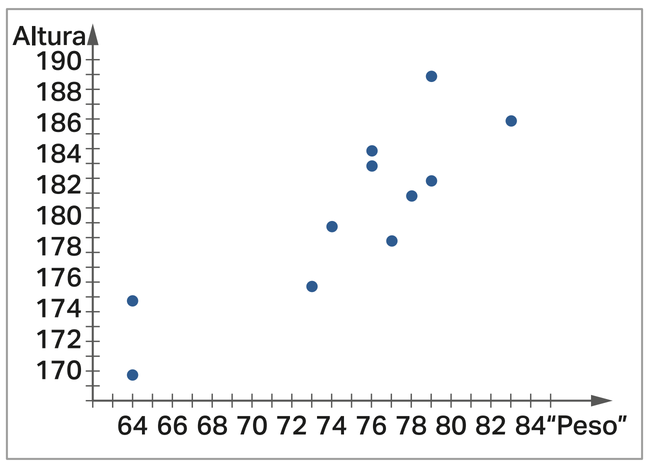
Cada par ordenado representa uma observação em que os valores de duas variáveis são registados simultaneamente. Por exemplo, num estudo sobre a altura e o "peso" de atletas de uma equipa, cada atleta fornece um par de valores: a altura (em centimetros) e o "peso" (em quilogramas).

Atletas	**"Peso" (em quilogramas) (x)**	**Altura (em metros) (y)**
Atleta 1	84 (x_1)	1,87 (y_1)
Atleta 2	78 (x_2)	1,82 (y_2)
...		
Atleta n	79 (x_n)	1,90 (y_n)

A **distribuição bidimensional** refere-se à distribuição conjunta de duas variáveis. É representada por tabelas ou gráficos que mostram como os valores de uma variável se associam à outra. Esta abordagem é essencial para compreender a interação e a interdependência entre variáveis.

"Peso"	**Altura**
84	187
78	182
74	180
64	170
76	184
79	183
77	179
76	185
64	175
83	187
73	176
79	190

Diagrama de dispersão



Quando duas variáveis exibem uma relação próxima à linear, dizemos que há uma correlação entre elas. A **correlação** é uma medida estatística que avalia a força e a direção dessa relação linear.

3.2.2. Abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais

Um **diagrama de dispersão**, também chamado de **nuvem de pontos**, é o gráfico utilizado para representar visualmente a relação entre duas variáveis quantitativas. Cada ponto no gráfico corresponde a uma observação dos dados, com a coordenada horizontal (x_i) que representa o valor de uma variável e a coordenada vertical (y_i) o valor da outra variável.

Manual Interativo

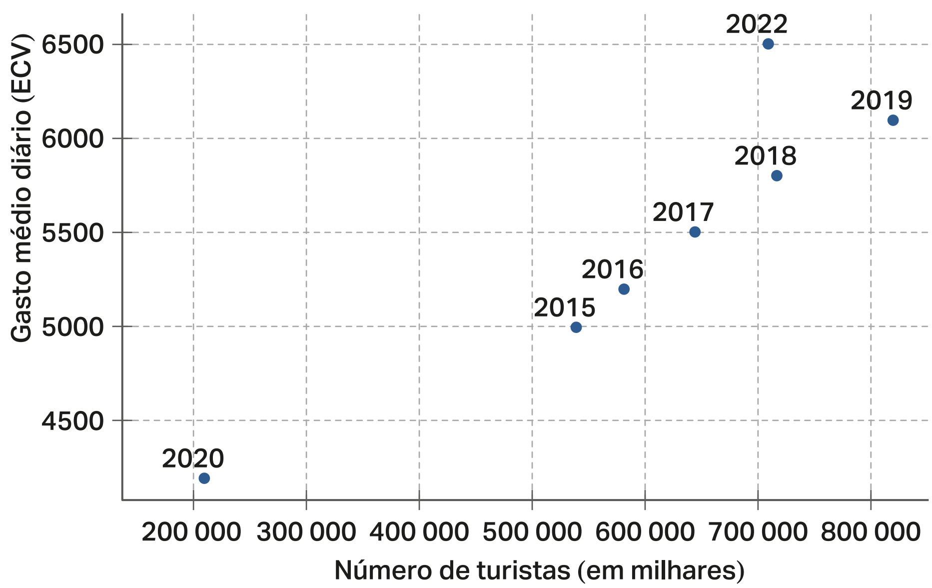
Vídeo
Nuvem de pontos

Exercício
Identificar o diagrama de dispersão (ou nuvem de pontos)

Exemplo 36

Um gráfico de dispersão mostra a relação, neste caso, entre o número de turistas e o gasto médio diário em Cabo Verde, entre os anos 2015 e 2022.

Relação entre número de turistas e gasto médio diário (Cabo Verde, 2015-2022)

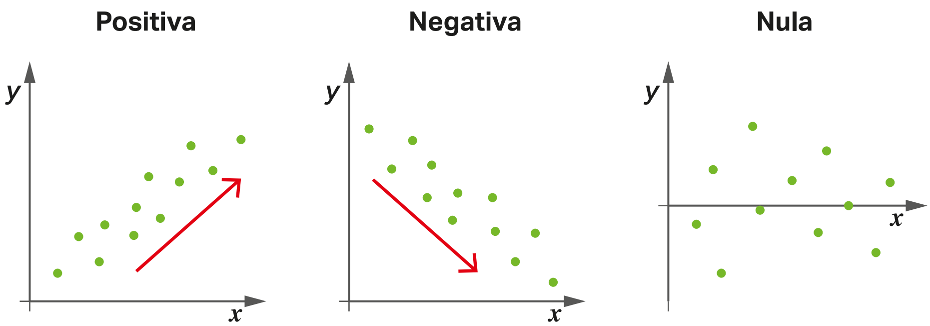


Cada ponto representa um ano, com os valores do número de turistas no eixo do X e o gasto médio diário no eixo do Y.

Assim, por exemplo, em 2017, um número de cerca de $650\,000$ turistas conduziu a um gasto diário médio de 5500 escudos.

Esse gráfico é utilizado em estatística para analisar padrões, tendências e relações entre as variáveis, sendo uma ferramenta fundamental na análise de correlação e regressão.

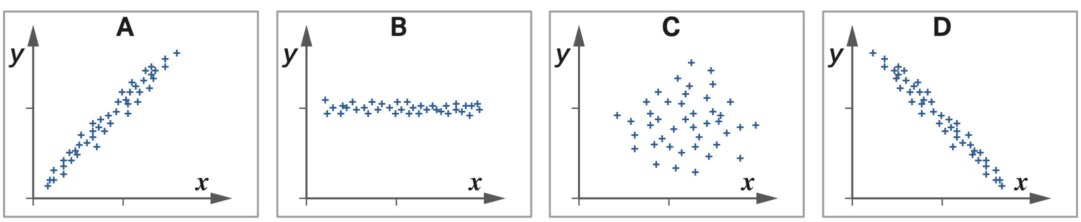
Podemos analisar as distribuições bidimensionais através da abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais:



- **Correlação positiva:** Os pontos formam uma tendência ascendente, ou seja, conforme x aumenta, y também aumenta.
- **Correlação negativa:** Os pontos formam uma tendência descendente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui.
- **Sem correlação:** Os pontos estão distribuídos de forma aleatória, sem um padrão aparente.

Exercício

37 Interpreta a correlação de cada um dos seguintes diagramas de dispersão (A, B, C e D).



Num diagrama de dispersão é comum representar-se o centro de gravidade da distribuição.

O centro de gravidade de uma distribuição bidimensional ou ponto médio da nuvem de pontos é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Exemplo 37

No caso dos atletas aos quais se recolheu as medidas do "peso" e da altura, a distribuição bidimensional dos valores (x, y), onde x é o peso e y é a altura, o centro de gravidade é, aproximadamente, o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}) = (76, 182)$.

Exercícios

38 **Em diferentes dias, foram registados as temperaturas médias e o consumo de energia elétrica (em kWh).**

Representa os dados num gráfico, de modo a obteres um diagrama de dispersão.

Temperatura (°C)	Consumo de energia (kWh)
20	300
22	320
25	360
28	400
30	420

38.1. Determina e marca o centro de gravidade da distribuição bidimensional.

38.2. Interpreta a relação das variáveis.

39 **Constrói um gráfico e analisa a relação entre a temperatura média mensal (em °C) e o consumo médio de energia elétrica (em kWh), por residência. No gráfico marca o centro de gravidade da distribuição.**

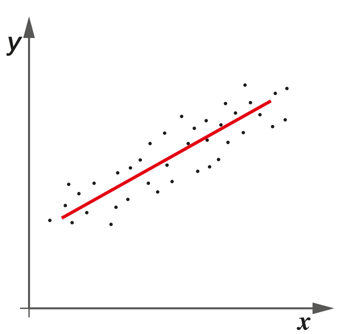
Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov
(°C)	24	25	26	27	28	29	30	31	30	28	25
(kWh)	150	160	170	180	190	200	210	220	210	190	160

Reta de regressão

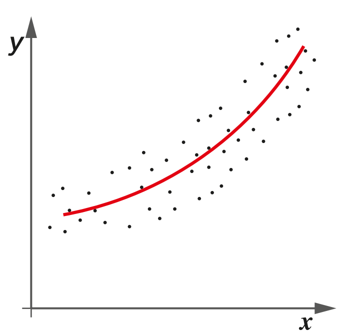
Quando verificamos que existe correlação linear entre as variáveis, em estudos de distribuições bidimensionais, é possível prever o valor de uma das variáveis conhecido o valor da outra variável correspondente. Para isso, necessitamos de determinar a reta de regressão para o nosso conjunto de dados.

A **reta de regressão linear** de um conjunto de dados bidimensionais é a reta que passa pelo centro de gravidade da distribuição e que melhor se ajusta à nuvem de pontos.

Os gráficos seguintes são exemplos de uma distribuição de bidimensional linear e de uma distribuição de bidimensional não linear.



Linear



Não linear

Para exemplificar como podemos obter a equação da reta de regressão linear e representá-la no gráfico de modo adequado, vamos recorrer ao seguinte exemplo.

Manual Interativo

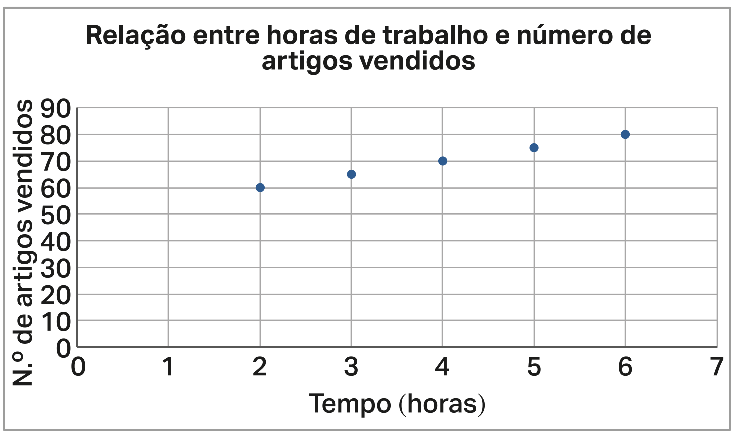
Vídeo
Reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados

Exemplo 38

Equação da reta de regressão linear e representação gráfica

O seguinte conjunto de dados corresponde à relação entre o número de horas de trabalho e venda de um determinado artigo.

x (horas de trabalho)	y (número de artigos vendidos)
2	60
3	65
4	70
5	75
6	80



Como visualmente verificamos que existe correlação entre as duas variáveis, podemos determinar a equação da reta de regressão.

A equação da reta de regressão é do tipo $y = mx + b$ e passa no ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, em que m é o coeficiente angular (o declive da reta).

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{60+65+70+75+80}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (4,70)$$

Para determinar o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$, precisamos dos seguintes somatórios:

$\Sigma x = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

$\Sigma y = 60 + 65 + 70 + 75 + 80 = 350$

$\Sigma(xy) = (2 \times 60) + (3 \times 65) + (4 \times 70) + (5 \times 75) + (6 \times 80) = 1450$

$\Sigma(x^2) = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 90$

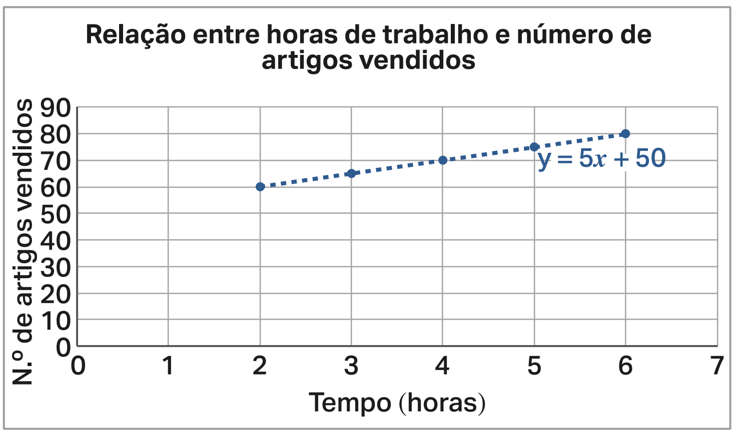
$$\boldsymbol{m} = \frac{n\Sigma(xy) - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma(x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{5 \times 1450 - 20 \times 350}{5 \times 90 - 20^2} = \frac{7250 - 7000}{450 - 400} = \frac{250}{50} = 5$$

Então, a reta será do tipo $y = 5x + b$.

Para determinar $\boldsymbol{b}$ (coeficiente linear), como $(4, 70)$ pertence à reta, resolvemos a equação:

$70 = 5 \times 4 + \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} = 70 - 20 \iff \boldsymbol{b} = 50$

Logo, a equação da reta de regressão é $\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} + 50$.



Assim, podemos representar a equação da reta de regressão de modo rigoroso.

Para prevermos o valor de uma das variáveis conhecido o valor da outra variável correspondente, utilizamos a visualização gráfica ou a equação da reta de regressão.

Qual será o número estimado de artigos vendidos em oito horas de trabalho?
$y = 5 \times 8 + 50 = 90$

Em oito horas de trabalho, prevê-se que sejam vendidos 90 artigos.

Exercícios

40 **Para o conjunto de dados bivariados ao lado:**

x	y
5	50
10	40
15	30
20	20
25	10

40.1. Representa o diagrama de dispersão.

40.2. Determina a equação da reta de regressão linear.

40.3. Qual é o valor estimado de y se $x = 12$?

40.4. Qual é o valor estimado de x se $y = 12$?

41 **A tabela seguinte apresenta a relação entre a precipitação média anual (x, em mm) e a produção de milho (y, em toneladas).**

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
x (mm)	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380
y (t)	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330

41.1. Representa o diagrama de dispersão.

41.2. Consideras que existe uma correlação entre a precipitação média anual e a produção de milho? Justifica a tua resposta.

41.3. Determina a equação da reta de regressão linear e indica a previsão de toneladas produzidas se a precipitação média anual for de 250 mm.

42 **Em diferentes dias, foram registadas temperaturas médias (em °C) e os consumos de energia elétrica (em kWh).**

Temperatura (°C)	Consumo de energia (kWh)
20	300
22	320
25	360
28	400
30	420

42.1. Representa os dados num gráfico e determina a reta de regressão.

42.2. Prevê o consumo de energia para um dia de temperatura média de 32 °C.

42.3. Comenta a afirmação: "Não existe relação entre as temperaturas médias e o consumo de energia elétrica".

3.2.3. Coeficiente de correlação

O **coeficiente de correlação** é uma medida estatística que permite estabelecer o grau de correlação entre duas variáveis. Geralmente, dizemos que o coeficiente de correlação mede a força e a direção da relação linear entre duas variáveis e usualmente é representado pela letra $\boldsymbol{r}$.

A fórmula para o cálculo do coeficiente de correlação, para duas variáveis quantitativas, é dada por:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\Sigma\left((x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)}{\sqrt{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}\times\sqrt{\Sigma(y_i-\overline{y})^2}}$$

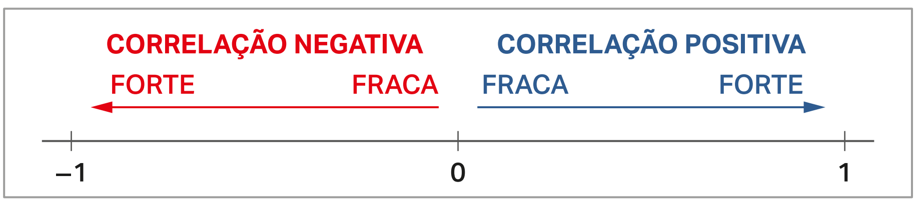
Em que:

$\overline{x}$ e $\overline{y}$ são, respetivamente, as médias das variáveis x e y;

Σ representa a soma de todos os valores.

O valor do **coeficiente de correlação varia entre** -1 **e** 1**,** em que:

- se $\boldsymbol{r}<0$, a **correlação é negativa** e significa que a variação das variáveis é feita em sentidos opostos, quando uma aumenta a outra diminui;
- se $\boldsymbol{r}>0$, a **correlação é positiva** e significa que a variação das variáveis é feita no mesmo sentido, quando uma aumenta a outra também aumenta;
- se $\boldsymbol{r}=0$, a **correlação é nula** e significa que não há correlação entre as variáveis.



- Quando $\boldsymbol{r}=1$ indica uma **correlação positiva perfeita.**
- Quando $\boldsymbol{r}=-1$ indica uma **correlação negativa perfeita.**

Manual Interativo

Vídeo
Coeficiente de correlação Linear

Exemplo 39

Interpretações do coeficiente de correlação linear

Se $\boldsymbol{r}=0{,}85$, existe uma correlação positiva forte entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r}=0{,}15$, existe uma correlação positiva fraca entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r}=-0{,}91$, existe uma correlação negativa forte entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r}=-0{,}12$, existe uma correlação negativa fraca entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r}=0{,}51$, existe uma correlação positiva moderada entre as variáveis.

Manual Interativo

Exercício
Interpretar o coeficiente de correlação

Exemplo 40

Determinar e interpretar o coeficiente de correlação

(x)	(y)
5	16
7	19
4	11
6	16
5	11
3	14
1	8
4	10
6	17
4	13
3	13
2	10
2	11

Para os 13 estudantes de uma turma, a tabela apresenta o tempo de estudo médio realizado por semana para a disciplina A por cada estudante, em horas (x), e a correspondente classificação obtida no final do ano letivo à mesma disciplina A (y).

Para determinarmos o coeficiente de correlação, vamos começar por determinar $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

$$\overline{x} = \frac{5+8+4+\ldots+3+2+2}{13} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\overline{y} = \frac{16+19+\ldots+13+10+11}{13} = \frac{169}{13} = 13$$

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
5	16	1	3	3	1	9
7	19	3	6	18	9	36
4	11	0	– 2	0	0	4
6	16	2	3	6	4	9
5	11	1	– 2	– 2	1	4
3	14	– 1	1	– 1	1	1
1	8	– 3	– 5	15	9	25
4	10	0	– 3	0	0	9
6	17	2	4	8	4	16
4	13	0	0	0	0	0
3	13	– 1	0	0	1	0
2	10	– 2	– 3	6	4	9
2	11	– 2	– 2	4	4	4
				$\Sigma((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})) = 57$	$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 38$	$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = 126$

$$\boldsymbol{r} = \frac{\Sigma\left((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right)}{\sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{57}{\sqrt{38} \times \sqrt{126}} \approx 0{,}823754$$

Com este valor para o coeficiente de correlação, podemos afirmar que existe uma correlação positiva forte entre o tempo de estudo médio realizado por semana para a disciplina A e a classificação obtida no final do ano letivo à disciplina.

Manual Interativo

Exercício
Determinar e interpretar o valor do coeficiente de correlação

Exercícios

43 **Para cada conjunto de dados seguinte, determina e interpreta o coeficiente de correlação.**

43.1.

x	y
1	9
3	7
5	5
7	3
9	1

43.2.

x	y
5	50
10	40
15	30
20	20
25	10

44 **Numa determinada região de um país, a relação entre a população de um município (x, em milhares) e o número de escolas (y) pode ser verificada na seguinte tabela.**

Município	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x (mil)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y (escolas)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

44.1. Existe uma correlação entre o número de habitantes e o número de escolas por município existentes naquele país?

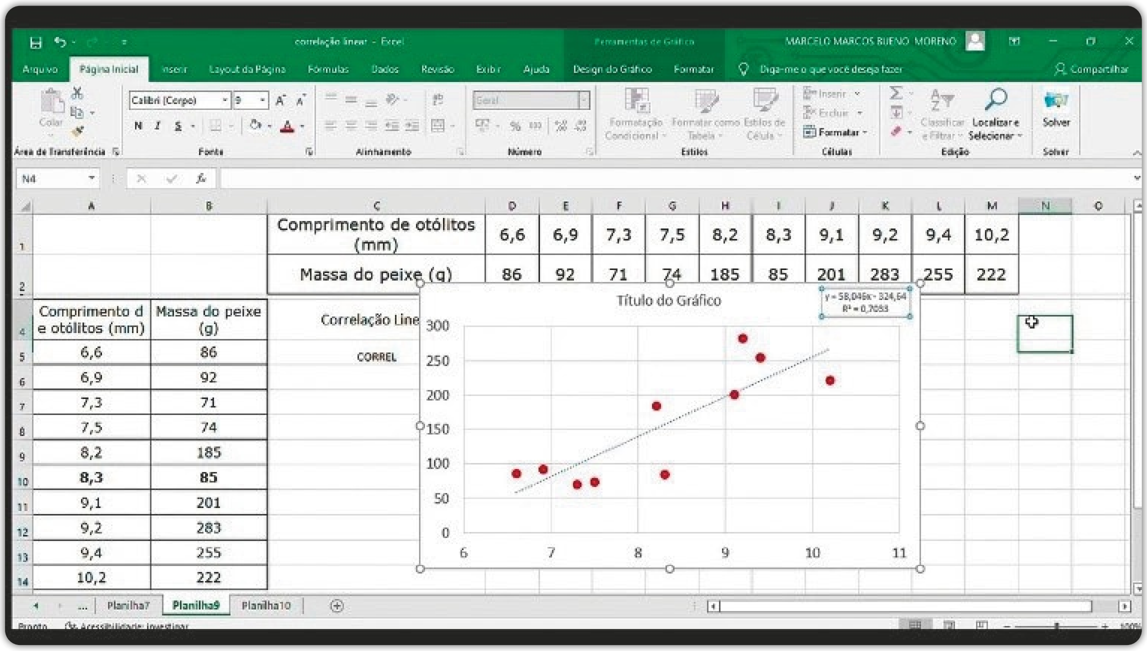
44.2. Se um município tiver 135 890 habitantes, qual será o número previsível de escolas?

44.3. Se um município tem duas escolas, qual será o número previsível de habitantes?

3.2.4. Distribuições bidimensionais com folha de cálculo bidimensional

Diagrama de dispersão e reta de regressão

A análise de distribuições bidimensionais, em particular a determinação do coeficiente de correlação e a construção gráfica do diagrama de dispersão e da reta de regressão, é um processo demorado e que exige muitos cálculos.



Para tornar a análise de distribuições bidimensionais mais eficaz, podemos realizá-la com o auxílio de folhas de cálculo como *Excel* ou *Google Sheets*. Este tipo de análise permite estudar a relação entre duas variáveis, representadas como pares ordenados, para identificar padrões, correlações ou tendências.

Numa folha de cálculo, é possível organizar os dados em tabelas, calcular medidas estatísticas como média, desvio-padrão e correlação, além de visualizar a relação entre as variáveis por meio de gráficos de dispersão e retas de regressão. Essa abordagem prática e visual facilita a interpretação dos dados e o entendimento das interações entre variáveis, sendo amplamente utilizada em diversas áreas, como economia, ciência e engenharia.

Exemplo 41

Determinar o coeficiente de correlação e efetuar representações gráficas com uma folha de cálculo.

x	y
5	16
7	19
4	11
6	16
5	11
3	14
1	8
4	10
6	17
4	13
3	13
2	10
2	11

Neste exemplo vamos recorrer a um outro já realizado, mas agora com uma folha de cálculo.

Para os 13 estudantes de uma turma, a tabela apresenta o tempo de estudo médio realizado por semana para a disciplina A por cada estudante, em horas (x), e a correspondente classificação obtida no final do ano letivo à mesma disciplina A (y).

Procedimentos

1) Abre o *Excel* ou *Google Sheets*.

2) Insere as variáveis e os dados fornecidos. Por exemplo, a variável x na célula A1 e os dados na coluna A e a variável y na célula B1 e os dados na coluna B.

	A	B	C	D
1	x	y		
2	5	16		
3	7	19		
4	4	11		
5	6	16		
6	5	11		
7	3	14		
8	1	8		
9	4	10		
10	6	17		
11	4	13		
12	3	13		
13	2	10		
14	2	11		

Para determinar o **coeficiente de correlação**

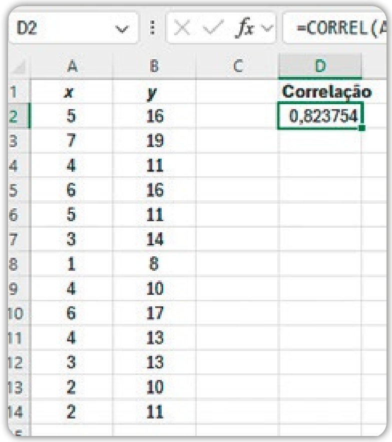
3) Numa célula vazia (por exemplo, D1), insere o título "Correlação".

4) Na célula abaixo (por exemplo, D2), insere a fórmula para calcular o coeficiente de correlação:

– No *Excel*: Usa a fórmula
=***CORREL (A*2*:A*14*;B*2*:B*14*)***.

– No *Google Sheets*: Usa a fórmula
=***CORREL (A*2*:A*14*, B*2*:B*14*)***.

5) Pressiona ***Enter*** para obteres o valor do coeficiente de correlação.



Representação gráfica – **Gráfico de dispersão**

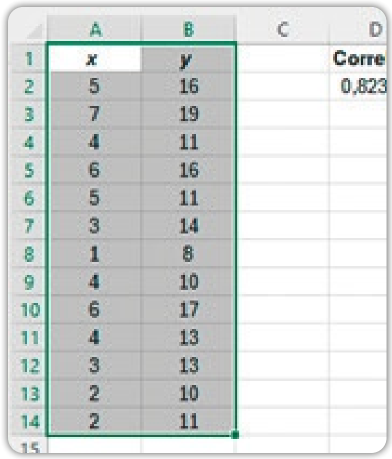
6) Seleciona os dados.

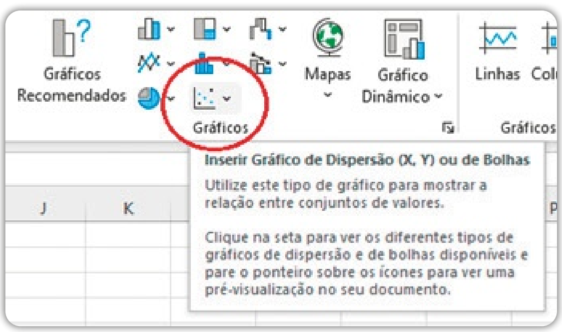
Clica e arrasta para selecionares as colunas x e y (incluindo os cabeçalhos).

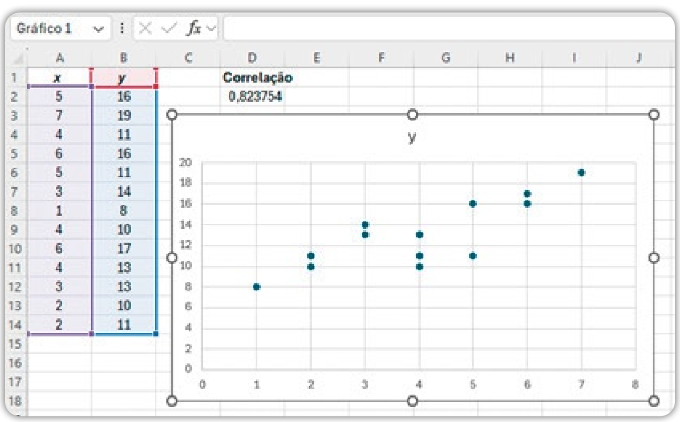
7) Insere o gráfico.

– Vai até à aba **Inserir**.

– Escolhe o **Gráfico Dispersão** (XY).



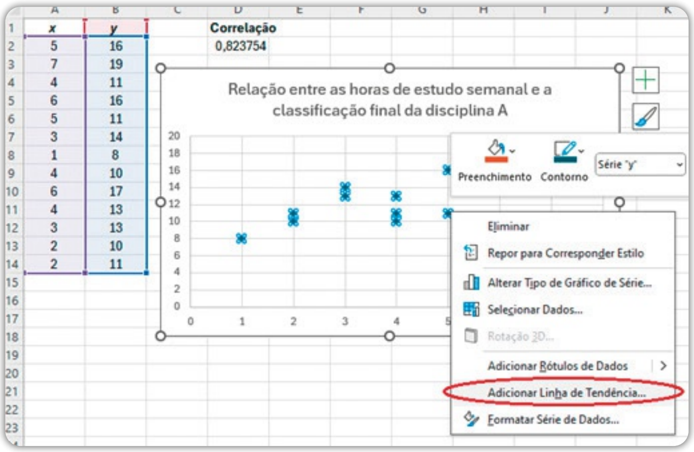


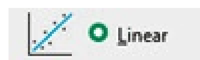


8) Adiciona a **Reta de regressão linear**.

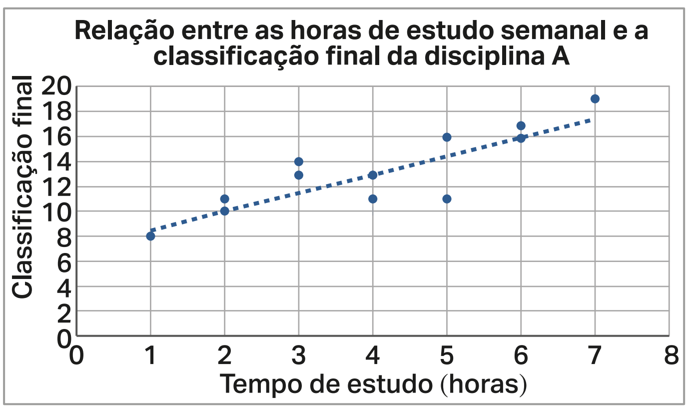
Seleciona os pontos do gráfico, clicando num dos pontos.

Seleciona as opções: ***Adicionar Linha de Tendência...*** e ***Linear***.





Deste modo, obténs o traçado da reta de regressão linear juntamente com o diagrama de dispersão.



Exercício

45 Para cada conjunto de dados seguinte, e recorrendo a uma folha de cálculo, determina e interpreta o coeficiente de correlação e representa graficamente o diagrama de dispersão e a reta de regressão.

45.1.

(x)	(y)
1	9
3	7
5	5
7	3
9	1

45.2.

(x)	(y)
5	50
10	40
15	30
20	20
25	10

Para aplicar

1 **Analisa cuidadosamente cada uma das afirmações seguintes e indica se cada afirmação a seguir é Verdadeira (V) ou Falsa (F).**

(A) Quando o coeficiente de correlação linear r é igual a zero, significa que as variáveis não possuem relação.

(B) Uma dispersão de pontos alinhada numa reta inclinada positivamente indica uma correlação positiva perfeita.

(C) O coeficiente de correlação linear r pode assumir valores fora do intervalo $[-1, 1]$.

(D) O gráfico de dispersão é uma ferramenta útil para visualizar a relação entre duas variáveis qualitativas.

(E) A regressão linear procura modelar a relação entre duas variáveis utilizando uma equação de reta.

(F) A equação de regressão é única para cada conjunto de dados e depende das variáveis em estudo.

(G) No estudo de variáveis bidimensionais, uma relação não linear entre variáveis não pode ser analisada por regressão linear.

(H) É possível ter uma correlação perfeita mesmo com dados que não sejam linearmente relacionados.

2 **Observa os seguintes diagramas que relacionam duas variáveis.**

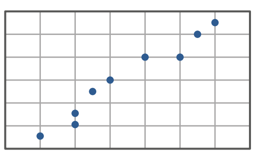


Diagrama I

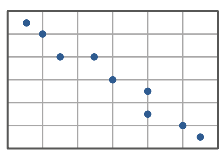


Diagrama II

2.1. Apresenta dois exemplos de variáveis estatísticas que possam corresponder a cada um dos diagramas.

2.2. Interpreta as correlações de cada diagrama.

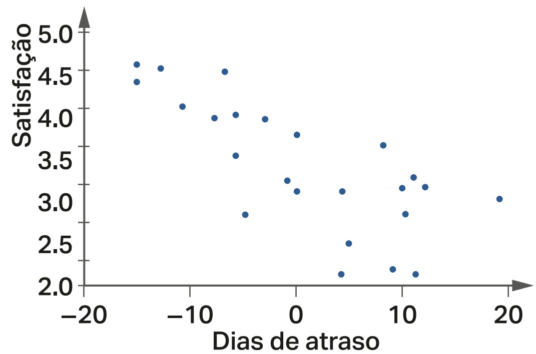
3 **A tabela seguinte relaciona a quantidade de publicidade (x) em milhares de escudos e o número de vendas de um produto (y).**

x (mil escudos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (vendas)	15	20	25	30	35	40	50	45	60	70

3.1. Representa o diagrama de dispersão dos dados bivariados.

3.2. Com base no diagrama de dispersão, interpreta a relação entre a quantidade de publicidade (x) em milhares de escudos e o número de vendas de um produto (y).

4 **O diagrama ao lado apresenta a relação entre o grau de satisfação de clientes e o número de dias de atraso na entrega de um produto.**



4.1. Qual dos seguintes coeficientes de correlação será mais ajustado aos dados do gráfico?

(A) $r = -0{,}70$ **(B)** $r = 0{,}75$

(C) $r = 0{,}1$ **(D)** $r = -0{,}1$

4.2. Justifica a escolha que fizeste na alínea anterior.

5 **A tabela ao lado apresenta dados bivariados para a emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.**

5.1. Representa num gráfico a nuvem de pontos dos dados.

Determina o centro de gravidade desta nuvem.

5.2. Representa graficamente a reta de regressão linear.

5.3. Determina o coeficiente de correlação.

Produção da fábrica (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – ppm)
1	2,04
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03

6 **A tabela seguinte apresenta a relação entre a temperatura diária (x, em °C) e o consumo de gelado (y, em litros).**

x (°C)	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
y (litros)	5	6	7	8	10	12	14	15	16	18

Recorrendo a uma folha de cálculo, representa graficamente o diagrama de dispersão e a reta de regressão, determina e interpreta o coeficiente de correlação.

Teste

1 O que caracteriza uma amostragem aleatória simples?

(A) Todos os elementos têm a mesma probabilidade de serem selecionados.

(B) Escolha baseada na conveniência.

(C) Divisão proporcional em estratos.

(D) Seleção de grupos inteiros.

2 Considera a seguinte tabela de frequências relativas de idades numa turma. Qual é a idade média dos alunos na turma?

Idade	Frequência Relativa (%)
15	10
16	40
17	30
18	17
19	3

(A) 16,5

(B) 16,8

(C) 17,0

(D) 16,7

3 Foi realizada uma pesquisa com 200 alunos acerca do número de irmãos. Qual é a moda desses dados?

N.º de irmãos	Frequência
0	40
1	80
2	50
3	20
4	10

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

4 Qual gráfico é ideal para representar dados contínuos ao longo do tempo?

(A) Gráfico de linhas **(B)** Gráfico de barras

(C) Gráfico circular **(D)** Diagrama de dispersão

5 Qual é o método mais adequado para avaliar a dispersão em torno da média?

(A) Moda **(B)** Amplitude

(C) Desvio-padrão **(D)** Mediana

6 O que mede o coeficiente de correlação?

(A) O valor central de um conjunto de dados.

(B) A relação entre duas variáveis.

(C) A amplitude entre o maior e o menor valor.

(D) A moda dos dados.

7 A tabela seguinte, apresenta dados sobre o consumo de energia em diferentes temperaturas. Qual gráfico seria mais adequado para representar a relação entre as variáveis?

Temperatura (°C)	Consumo (kWh)
20	300
25	350
30	400
35	450
40	500

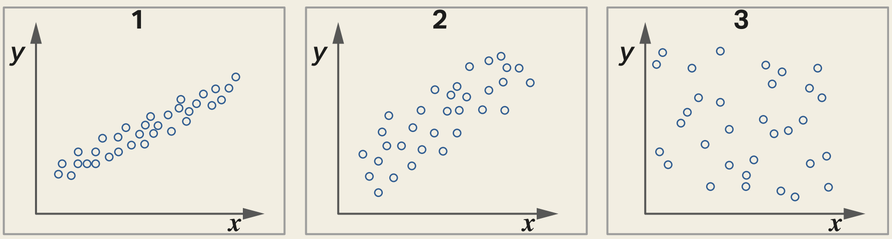
(A) Gráfico de barras

(B) Diagrama de dispersão

(C) Gráfico circular

(D) Histograma

8 Observa os seguintes diagramas de dispersão e identifica a opção correta.



(A) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação positiva e o diagrama 3 correlação nula.

(B) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação positiva e o diagrama 3 correlação negativa.

(C) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação negativa e o diagrama 3 correlação nula.

(D) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação negativa e o diagrama 3 correlação positiva.

9 Um estudo regista o número de horas trabalhadas semanalmente (x) e o salário semanal em escudos (y) de 10 indivíduos. A correlação calculada é $r = 0{,}92$. O que podemos concluir da relação entre x e y?

(A) Não há correlação | **(B)** Correlação moderada positiva

(C) Correlação forte positiva | **(D)** Correlação negativa

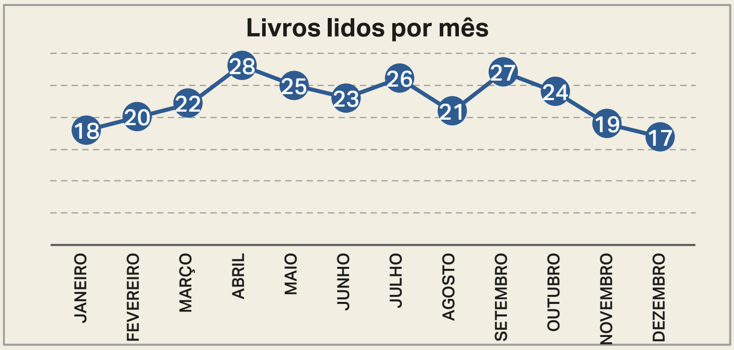
10 A reta de regressão para um conjunto de dados é dada por $y = 3x + 2$. Se $x = 4$, qual será o valor previsto de Y?

(A) 12 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 20

11 Considera três números naturais diferentes dos quais 1 é o menor e a é o maior. Sabe-se que o valor exato da média aritmética desses três números é 11. Qual é o maior valor que a pode tomar?

Teste

12 O Martin e a Mariana registaram o total de livros lidos por todos os alunos de uma escola por mês e elaboraram o seguinte o gráfico.



12.1. Indica o mês em que se leram menos livros.

12.2. Em que mês se leram mais livros e quantos livros se leram?

12.3. Qual foi o número de livros lidos, pelos alunos da escola, no primeiro semestre desse ano?

13 Complete a distribuição abaixo, determinando as frequências simples:

i	x_i	F_i	F_{ac}
1	2	...	2
2	3	...	9
3	4	...	21
4	5	...	29
5	6	...	34
		$\Sigma = 34$	

14 Numa turma do 10.° ano, obtiveram-se os seguintes resultados no teste de Matemática, sendo que as classificações dos alunos foram registadas e agrupadas em intervalos de pontuação.
A tabela ao lado mostra a distribuição de frequência absoluta desses intervalos.

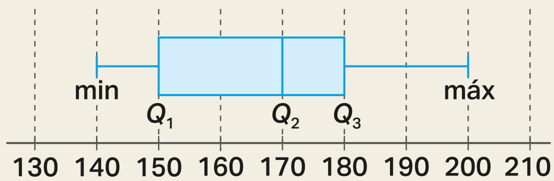
Intervalo da classificação (%)	Frequência absoluta
$[0\,;\ 20[$	2
$[20\,;\ 40[$	5
$[40\,;\ 60[$	15
$[60\,;\ 80[$	12
$[80\,;\ 100]$	6

14.1. Quantos alunos tem a turma?

14.2. Quantos alunos obtiveram 40% ou mais?

14.3. Qual é a percentagem de alunos que obtiveram 60% ou mais?

15 Observa o diagrama de extremos e quartis abaixo, relativo às alturas, em centímetros, de 32 alunos de uma turma.



15.1. Indica possíveis alturas para dez dos alunos da turma.

15.2. Comenta a afirmação: "O aluno mais baixo mede 138 cm".

15.3. Quantos alunos medem 150 cm ou mais?

16 Considera o seguinte conjunto de dados.

20	35	28	40	15	27	50	44	31	26	32	29	42

16.1. Indica a mediana.

16.2. Determina a amplitude dos dados.

16.3. Constrói o diagrama de extremos e quartis.

17 Os dados seguintes apresentam a relação entre o peso de um objeto (x, em kg) e o número de pessoas para levantá-lo (y).

x (kg)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y (n.º de pessoas)	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4

17.1. Representa o diagrama de dispersão dos dados.

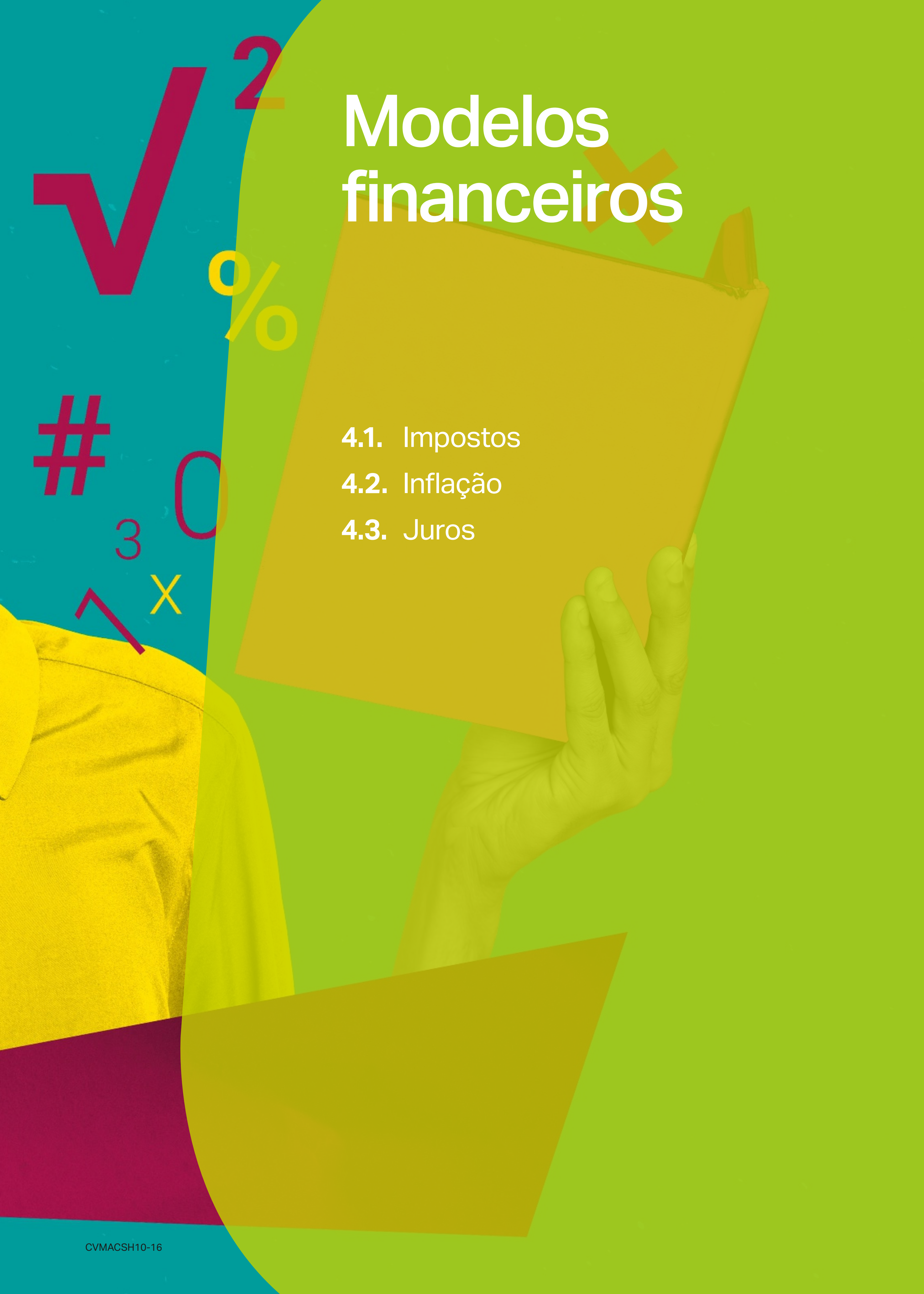
17.2. Determina o coeficiente de correlação dos dados.

18 É esperado que a massa muscular de uma pessoa diminua com a idade. Para estudar essa relação, uma nutricionista selecionou 18 mulheres, com idade entre 40 e 79 anos, e observou em cada uma delas a idade (x) e a massa muscular (y).

Idade (x)	71	64	43	67	56	73	68	56	76	65	45	58	45	53	49	78	73	68
Massa muscular (y)	82	91	100	68	87	73	78	80	65	84	116	76	97	100	105	77	73	78

Estuda a relação e comente a afirmação inicial: "É esperado que a massa muscular de uma pessoa diminua com a idade."

Modelos financeiros



4 Modelos financeiros

4.1. Impostos

Os **impostos** são contribuições obrigatórias cobradas pelos governos para financiar as despesas públicas, como educação, saúde, segurança e infraestruturas. Existem diferentes tipos de impostos, que podem ser classificados em impostos diretos e impostos indiretos:

- **impostos diretos:** incidem diretamente sobre o rendimento ou o património das pessoas, como o Imposto Único sobre os Rendimentos (IUR);
- **impostos indiretos:** aplicam-se ao consumo de bens e serviços, como o Imposto sobre o Valor Acrescentado (IVA).

Em Cabo Verde, quatro dos principais impostos são o IUR, o IVA, o IUP (Imposto Único sobre o Património) e o ICA (Imposto de Circulação de Automóvel). Cada um deles desempenha um papel essencial no sistema tributário:

- **IUR** (Imposto Único sobre os Rendimentos): incide sobre os rendimentos pessoais, tais como rendimentos prediais, rendimentos comerciais e industriais, rendimentos de capitais e rendimento de trabalho e lucro das empresas.
- **IVA** (Imposto sobre o Valor Acrescentado): é um imposto indireto cobrado sobre o consumo de bens e serviços.
- **IUP** (Imposto Único sobre o Património): é um imposto direto que incide sobre o valor dos imóveis.
- **ICA** (Imposto de Circulação de Automóvel): é um imposto anual sobre a posse de veículos.

Atenção: As percentagens aplicadas aos impostos, como o IUR, o IVA, o IUP e o ICA, **não são fixas** e podem variar de acordo com decisões governamentais, condições económicas ou políticas públicas específicas. Essas alterações geralmente ocorrem para atender às necessidades financeiras do Estado, estimular ou controlar o consumo ou para tornar o sistema tributário mais justo e equilibrado. Por exemplo, o IVA pode ser reduzido para produtos essenciais de modo a aliviar o impacto nos consumidores, enquanto o IUP pode ser ajustado para incentivar a construção ou renovação de imóveis em determinadas áreas. Além disso, o ICA pode variar dependendo de critérios como a idade ou a eficiência ambiental do veículo, refletindo as prioridades governamentais em termos de sustentabilidade e mobilidade.

Neste capítulo, vamos dar destaque ao IVA (Imposto sobre o Valor Acrescentado) e ao IUP (Imposto Único sobre o Património).

4.1.1. IVA (Imposto sobre o Valor Acrescentado)

O IVA é aplicado a quase todos os bens e serviços consumidos em Cabo Verde, com uma taxa geral de 15%. Produtos essenciais, como medicamentos, podem estar isentos ou ter uma taxa reduzida.

Exemplo 1

1. Um restaurante cobra $10\ 000$ escudos, sem IVA, por um jantar de grupo.
O preço final com IVA (15%) será:

Fórmula: $\text{Preço com IVA} = \text{Preço sem IVA} \times (1 + \text{taxa do IVA})$

a) $\text{Preço com IVA} = 10\,000 \times (1 + 0{,}15)$

b) $\text{Preço com IVA} = 10\,000 \times 1{,}15$

c) $\text{Preço com IVA} = 11\,500$

O restaurante cobra $11\ 500$ escudos, com IVA.

2. Uma loja vende um computador por $50\ 000$ escudos (incluindo IVA a 15%).

Para calcular o preço sem IVA e o valor do IVA:

Fórmula: $$\text{Preço sem IVA} = \frac{\text{Preço com IVA}}{(1 + \text{taxa do IVA})}$$

$$\text{Preço sem IVA} = \frac{50\,000}{(1 + 0{,}15)}$$

$$\text{Preço sem IVA} = \frac{50\,000}{1{,}15}$$

$$\text{Preço sem IVA} \approx 43\,478$$

Preço do computador sem IVA: $43\ 478$ escudos

Valor do IVA: $50\ 000 - 43\ 478 = 6522$ escudos

Exercícios

1 **Uma bicicleta é vendida numa loja por $12\ 000$ escudos sem IVA. Qual é o valor que o cliente deverá pagar pela bicicleta, sabendo que o IVA tem uma taxa de 15%?**

2 **Um *smartphone* custa $30\ 000$ escudos (incluindo IVA a 20%).**

2.1. Determina o preço sem IVA.

2.2. Indica o valor do IVA.

3 A senhora Zulmira pagou, por um serviço de eletricista, 250 escudos de IVA. Sabendo que a taxa de IVA aplicada ao serviço é de 15%:

3.1. Determina o valor total pago pela senhora Zulmira.

3.2. Indica o valor do serviço sem IVA.

4.1.2. IUP (Imposto Único sobre o Património)

O IUP, Imposto Único sobre o Património, é um imposto municipal que incide sobre:

- o valor patrimonial dos prédios situados no território de cada município, divididos em prédios rústicos, terrenos para construção e prédios urbanos;
- transmissões gratuita ou onerosas de imóveis sujeitos a registo;
- operações societárias sujeitas a escritura pública, tais como alteração de pactos sociais, cessão de quotas ou outros de igual natureza;
- valor de uso ou fruição dos veículos automóveis sujeitos a registo;
- as mais-valias originadas pela valorização dos terrenos para construção, transmissões de edifícios, bens móveis e imóveis.

O IUP é um imposto anual e a taxa varia de acordo com o município, geralmente entre $0{,}1\%$ e $0{,}5\%$. É um imposto pago pelos proprietários dos imóveis.

Exemplo 2

1. Uma casa avaliada em $10\ 000\ 000$ escudos está sujeita a uma taxa de IUP de $0{,}4\%$. O imposto anual será:

   Fórmula: $\text{IUP} = \text{Valor patrimonial} \times \text{taxa de IUP}$

   $$\text{IUP} = 10\ 000\ 000 \times 0{,}004$$

   $$\text{IUP} = 40\ 000 \text{ escudos}$$

2. Um imóvel comercial vale $8\ 000\ 000$ escudos e está sujeito a uma taxa de IUP de $0{,}6\%$. Qual será o imposto a pagar?

   $$\text{IUP} = \text{Valor patrimonial} \times \text{taxa de IUP}$$

   $$\text{IUP} = 8\ 000\ 000 \times 0{,}006$$

   $$\text{IUP} = 48\ 000 \text{ escudos}$$

Exercícios

4 **Um apartamento avaliado em 5 000 000 escudos tem uma taxa de IUP de 0,3%. Qual será o valor do IUP anual?**

5 **A senhora Maria e o seu marido, o senhor António, querem comprar um terreno que custa 2 000 000 escudos e está sujeito a uma taxa de IUP de 0,2%.**

5.1. Qual é o valor do IUP a pagar no primeiro ano?

5.2. A senhora Maria diz que durante quatro anos terão de pagar 16 000 escudos de IUP, o senhor António diz que apenas terão de pagar 10 000 escudos nesse mesmo período. Qual dos dois tem razão?

6 **Um município isentou os jovens, até 35 anos, de pagamento de IUP durante cinco anos na compra da primeira casa para habitação permanente.**

A Andreia, jovem de 28 anos, adquiriu uma casa avaliada em 5 000 000 escudos. Qual será o valor correspondente à poupança que a Andreia terá ao não pagar cinco anos de IUP, sabendo que nesse município a taxa é de 0,3%?

4.2. Inflação

A **inflação** é o aumento geral e contínuo dos preços dos bens e serviços numa economia ao longo do tempo.

Quando ocorre a inflação, o poder de compra do dinheiro diminui, ou seja, a mesma quantidade de dinheiro passa a comprar menos bens ou serviços. A inflação é normalmente expressa como uma taxa percentual anual.

A inflação pode ser causada por diversos fatores, como o aumento da procura (inflação de procura), o aumento nos custos de produção (inflação de custos) ou por expectativas económicas.

Apesar de ser um fenómeno comum nas economias modernas, níveis altos de inflação podem trazer consequências negativas, como perda de poder aquisitivo ou instabilidade económica.

Exemplo 3: Preço do pão ao longo dos anos

Em 2010, um pão custava cerca de 30 escudos, em 2020, um pão já custava cerca de 50 escudos. Isso representa um aumento significativo no preço ao longo do tempo.

Exemplo 4: Educação

Em 2015, a matrícula numa escola privada custava aproximadamente 10 000 escudos, por ano. Em 2023, o valor subiu para próximo de 15 000 escudos, refletindo o impacto da inflação.

Exemplo 5: Combustível

O preço do litro de gasolina era, aproximadamente, 120 escudos, em 2018. Em 2023, subiu para, aproximadamente, 160 escudos, afetando os custos dos transportes e outros setores da economia.

A inflação, em Cabo Verde, está estreitamente ligada aos mercados internacionais devido à alta dependência de importações. Como o país importa grande parte dos bens e serviços consumidos internamente, qualquer alteração nos preços internacionais, nas taxas de câmbio ou nos custos de transporte afeta diretamente os preços locais.

Exemplos de dependência internacional

Exemplo 6: Preço dos combustíveis

Cabo Verde depende do mercado internacional de petróleo. Se os preços globais do petróleo aumentam, o custo dos combustíveis também sobe, o que impacta o transporte, a produção e o custo de bens básicos.

Exemplo 7: Cereais e produtos alimentares

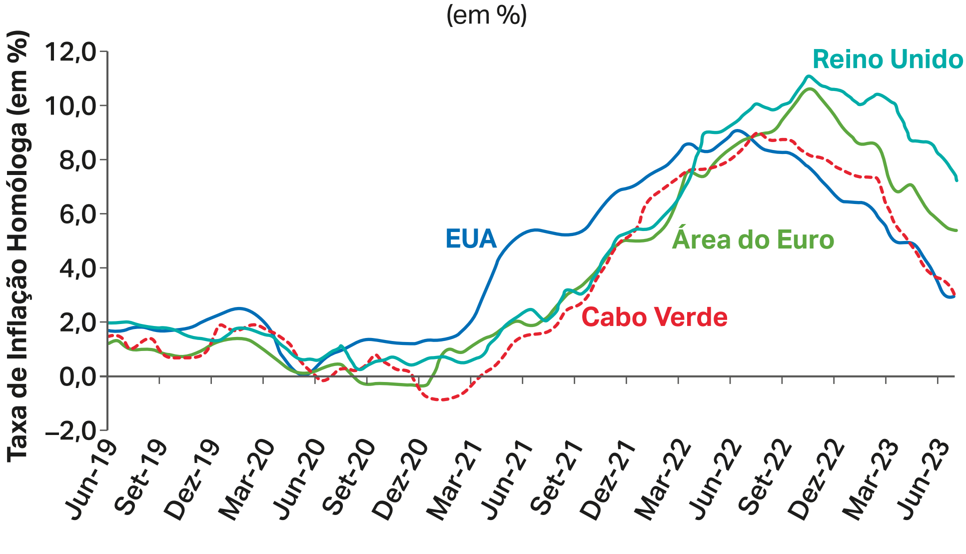
Muitos alimentos básicos, como arroz, trigo e milho, são importados. Se os preços no mercado global de grãos aumentam, o custo desses alimentos em Cabo Verde também sobe.

Exemplo 8: Taxas de câmbio

O escudo cabo-verdiano está indexado ao euro. Se o euro se desvaloriza em relação ao dólar (moeda frequentemente usada em transações internacionais), os custos das importações aumentam, pressionando a inflação no país.

O gráfico seguinte apresenta a variação da taxa de inflação verificada em Cabo Verde, de junho de 2019 a junho de 2023, comparada com as taxas de inflação verificadas nos Estados Unidos da América, no Reino Unido e na área dos países que utilizam o euro (UEM, União Económica e Monetária).

Taxa de Inflação Homóloga da Área do Euro, dos EUA, do Reino Unido e de Cabo Verde (em %)



Fonte: Relatório de Política Monetária, Banco de Cabo Verde, Outubro 2023

Exercício

7 **Indica se as seguintes afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando as falsas.**

(A) A inflação é o aumento esporádico dos preços de alguns bens e serviços numa economia ao longo do tempo.

(B) O aumento nos preços de produtos como combustíveis e alimentos básicos em Cabo Verde é parcialmente causado pela dependência de importações.

(C) Se o euro se valoriza em relação ao dólar, os custos de importação em Cabo Verde tendem a aumentar, pressionando a inflação.

(D) A inflação de procura é causada por uma queda na demanda de bens e serviços.

(E) O preço de um bem alimentar que subiu de 30 escudos, em 2010, para 50 escudos, em 2020, é um exemplo claro do impacto da inflação.

8 **Qual das seguintes opções pode ser uma causa de inflação em Cabo Verde?**

(A) Aumento da produção agrícola local.

(B) Redução nos preços internacionais do petróleo.

(C) Aumento nos custos de transporte devido ao aumento nos preços globais dos combustíveis.

(D) Estabilidade nas taxas de câmbio.

9 **Se o euro desvalorizar em relação ao dólar, qual é o impacto esperado na economia de Cabo Verde?**

(A) Redução nos custos de importação.

(B) Aumento nos custos de importação e maior pressão inflacionária.

(C) Estabilidade nos preços de bens importados.

(D) Nenhuma mudança significativa na inflação.

10 **Qual dos seguintes exemplos reflete melhor o impacto da inflação de custos?**

(A) Aumento no consumo de bens supérfluos.

(B) Aumento nos preços do trigo importado, elevando o custo do pão em Cabo Verde.

(C) Queda no valor da moeda local em relação ao euro.

(D) Redução nos preços globais do petróleo, diminuindo os custos de transporte.

4.2.1. Índice de Preços no Consumidor

O **Índice de Preços no Consumidor (IPC)** é um indicador que tem por finalidade medir a evolução no tempo dos preços de um conjunto de bens e serviços considerados representativos da estrutura de consumo da população residente num país. Assim, o IPC não é, desta forma, um indicador do nível de preços registado entre períodos diferentes, mas antes um indicador da sua variação.

O IPC encontra-se classificado em 12 classes de produtos (Classificação do Consumo Individual por Objetivo) e a sua compilação resulta da agregação de três índices de preços regionais (Santo Antão, São Vicente e Santiago).

	Classes de Classificação do Consumo Individual por Objetivo (CCIO)
C01	Produtos alimentares e bebidas não alcoólicas
C02	Bebidas alcoólicas e tabaco
C03	Vestuário e calçado
C04	Rendas de habitação, água, eletricidade, gás e outros combustíveis
C05	Acessórios, equipamento doméstico e manutenção corrente da habitação
C06	Saúde
C07	Transportes
C08	Comunicações
C09	Lazer, recreação e cultura
C10	Ensino
C11	Hóteis, restaurantes, cafés e similares
C12	Bens e serviços diversos

Fonte: Instituto Nacional de Estatística de Cabo Verde. https://ine.cv/ipc/

Para se calcular o Índice de Preços no Consumidor (IPC):

- define-se um cabaz de bens e serviços representativos (ex.: alimentos, vestuário, habitação, transporte, saúde);
- monitorizam-se os preços desses itens regularmente;
- calcula-se a variação percentual dos preços, comparando com um período-base.

O IPC é usado como indicador da inflação, pois reflete como os preços médios estão a mudar e como isso afeta o custo de vida das pessoas.

Calculo do IPC **num determinado ano X**:

$$\text{IPC}(X) = \frac{\text{preço do cabaz no ano X}}{\text{preço do cabaz no ano-base}} \times 100$$

Exemplo 9: IPC num determinado ano do vestuário e calçado

Suponhamos que em 2018 (ano-base), o preço médio de um tipo de vestuário era de 500 escudos. E que no ano de 2022 o preço médio do mesmo tipo de vestuário era de 600 escudos.

$$\text{IPC}(2022) = \frac{600}{500} \times 100 = 120$$

Exercício

11 **Suponhamos que em 2018 (ano-base), o preço médio de um tipo de bens essenciais era de 1100 escudos. E que no ano de 2021 o preço médio do mesmo tipo de bens essenciais era 1280 escudos.**

11.1. Determina o IPC desses bens essenciais para o ano 2021.

11.2. Sabendo que de 2021 para 2023 o preço médio desse tipo de bens essenciais aumentou 120 escudos, determina o IPC para 2023, considerando 2021 ano-base.

4.2.2. Taxa de inflação

A **taxa de inflação** é a variação percentual do IPC entre dois períodos consecutivos. Deste modo, a taxa de inflação traduz a velocidade com que os preços estão a aumentar.

Cálculo da taxa de inflação para um determinado período (entre o ano X e o ano Y):

$$\text{taxa de inflação}\,(\%) = \frac{\text{IPC}(\text{Y}) - \text{IPC}(\text{X})}{\text{IPC}(\text{X})} \times 100$$

Exemplo 10

Suponhamos que em 2018 (ano-base), o preço médio de um tipo de vestuário era de 500 escudos. E que no ano de 2022, o preço médio do mesmo tipo de vestuário era de 600 escudos.

Vamos determinar a taxa de inflação entre 2018 e 2022.

$$\begin{aligned}\text{Taxa de inflação}\,(\%) &= \frac{\text{IPC}(2022) - \text{IPC}(2018)}{\text{IPC}(2018)} \times 100 \\ &= \frac{120 - 100}{100} \times 100 = 20\%\end{aligned}$$

A taxa de inflação entre 2018 e 2022 foi de 20%.

Exercícios

12 **O preço de uma mochila era de 3000 escudos em 2019. Em 2023, subiu para 4200 escudos. O preço da mochila, para o ano de referência, era de 2800 escudos. Determina:**

12.1. O IPC da mochila em 2023.

12.2. A taxa de inflação verificada entre 2019 e 2023.

12.3. Comenta a afirmação: "O preço médio em 2021 era maior do que 3000 escudos e menor do que 4200 escudos".

13 **A tabela seguinte apresenta os produtos que compõem um cabaz e o respetivo preço, em escudos, no ano-base e em três anos subsequentes, X , Y e Z .**

Cabaz	Preço (ano-base)	Preço (ano X)	Preço (ano Y)	Preço (ano Z)
Produto A	120	125	125	140
Produto B	420	400	440	440
Produto C	200	225	230	260
Produto D	60	70	60	80
Custo total do cabaz				
IPC do cabaz	100			
Taxa de inflação em relação ao ano anterior	—			

13.1. Completa a tabela.

13.2. Em que períodos e para que produtos existiu deflação, ou seja, houve descida generalizada de preços? Justifica a tua resposta.

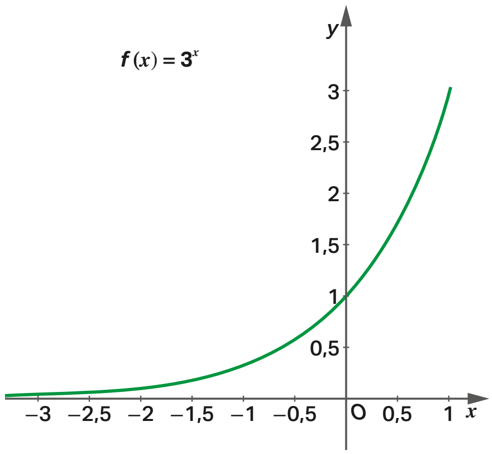
13.3. Comenta a afirmação: Se a taxa de inflação, em relação ao ano anterior, é positiva, então todos os produtos do cabaz sofreram aumento de preço médio.

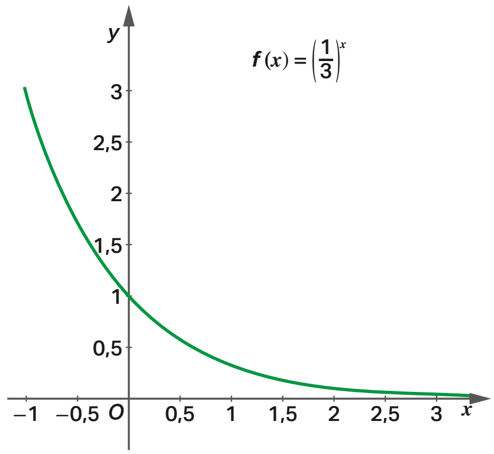
4.2.3. Função exponencial – um modelo matemático

Uma função real de variável real, definida por uma expressão algébrica do tipo $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, diz-se função exponencial.

Exemplo 11

As funções exponenciais têm comportamentos diferentes quando $0 < a < 1$ ou quando $a > 1$, conforme podes analisar nos gráficos seguintes.





Nos dois casos a função, de domínio $\mathbb{R}$, tem contradomínio $\mathbb{R}^+$, não tendo por isso zeros. Mas, no caso em que $a > 1$, a função é crescente em todo o seu domínio e no caso em que $0 < a < 1$, a função é decrescente em todo o seu domínio.

Podemos também considerar funções resultantes de transformações de funções exponenciais.

As funções exponenciais estão na base de muitos modelos matemáticos usados em contexto financeiro. Trata-se de situações de sucessões de valores que se vão obtendo a partir da acumulação de uma percentagem ao termo anterior. Vejamos um exemplo:

Exemplo 12

Um produto está à venda por $50\,000$ escudos. Mensalmente, espera-se uma subida de 2% do seu valor. Qual o custo que terá ao fim de seis meses?

Chamemos $C_0 = 50\,000$ ao custo inicial.

Ao final do 1.º mês, aplicando a taxa de 2%, o novo custo será de:

$$C_1 = C_0 + C_0 \times \frac{2}{100} = C_0\left(1 + \frac{2}{100}\right)$$

Ao final do 2.º mês, com um custo já superior, resultante da inflação do 1.º mês, o preço esperado será de:

$$C_2 = C_1 + C_1 \times \frac{2}{100} = C_0\left(1 + \frac{2}{100}\right) + C_0\left(1 + \frac{2}{100}\right)\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0\left(1 + \frac{2}{100}\right)\left(1 + \frac{2}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{2}{100}\right)^2$$

Continuando este raciocínio, concluímos que ao fim do mês x o custo desse produto será de:

$$C_x = C_0\left(1+\frac{2}{100}\right)^x$$

Então, ao final do 6.º mês, custará:

$$C_6 = C_0\left(1+\frac{2}{100}\right)^6 = 50\,000 \times 1{,}02^6 \cong 56\,308$$

4.2.4. Problemas de inflação com modelos exponenciais

A inflação é o aumento generalizado e contínuo dos preços de bens e serviços numa economia ao longo do tempo. Para entender e analisar os impactos da inflação, usamos ferramentas matemáticas, como os modelos exponenciais, que nos ajudam a prever e calcular variações no valor do dinheiro.

Exemplo 13: Preço de um produto no futuro

1. Se a taxa de inflação anual é de 5% e um produto custa 1000 escudos, hoje, quanto custará em três anos?

Fórmula: $P(t) = P_0 \times (1+r)^t$

Onde: $P_0 = 1000$ (preço inicial)
$r = 0{,}05$ (taxa de inflação)
$t = 3$ (tempo em anos)

$P(3) = 1000 \times (1+0{,}05)^3 = 1157{,}625$

Com uma taxa de inflação anual de 5%, um produto que custa 1000 escudos deverá custar em três anos cerca de 1158 escudos.

2. Um automóvel custava $1\,200\,000$ escudos em 2021. Supondo uma inflação média de 4% ao ano, quanto será o valor estimado do mesmo modelo em 2026?

Fórmula: $P(t) = P_0 \times (1+r)^t$

Onde: $P_0 = 1\,200\,000$ (preço inicial)
$r = 0{,}04$ (taxa de inflação)
$t = 2026 - 2021 = 5$ (tempo em anos)

$P(5) = 1\,200\,000 \times (1+0{,}04)^5 = 1\,459\,983{,}483$

Com uma taxa de inflação anual de 4%, em 2026, o mesmo modelo de automóvel deverá custar cerca de $1\,459\,983$ escudos.

Exercícios

14 Uma família gastava 10 000 escudos por mês em alimentação em 2018. Com uma inflação média de 3% ao ano, qual o gasto esperado para 2023?

15 O aluguer de uma casa em 2020 era de 8000 escudos por mês. Em 2025, devido à inflação média de 6% ao ano, quanto será o valor do aluguer?

16 O preço de uma cesta básica era de 7000 escudos em 2019. Com uma inflação média de 2,5% ao ano, qual será o preço em 2024?

17 Em grupo escolham o preço de um determinado produto essencial num determinado ano. Apliquem uma inflação média de 6% ao ano e, recorrendo a um *software* de folha de cálculo, construam um gráfico que permita visualizar o aumento do custo do produto ao longo de oito anos.

4.3. Juros

O conceito de juros refere-se ao ganho obtido pelo uso do dinheiro. Pode ser entendido como o custo de um empréstimo ou o rendimento de um investimento. Existem dois tipos principais de juros, juros simples e juros compostos, que exploraremos neste capítulo.

As taxas associadas aos juros não são fixas e podem variar conforme as condições dos mercados internacionais e as políticas económicas nacionais. Em Cabo Verde, essas taxas são reguladas pelo Banco de Cabo Verde (BCV) e por instituições financeiras nacionais, que monitorizam e ajustam as taxas de acordo com fatores como inflação, política monetária e condições do mercado global. A dependência de mercados internacionais ocorre porque o país importa produtos e serviços e precisa alinhar-se com as tendências económicas globais, especialmente em relação ao câmbio e à taxa de referência dos bancos centrais internacionais. Essa regulação visa garantir a estabilidade económica e proteger os interesses dos consumidores e investidores no país.

O objetivo deste capítulo é permitir que desenvolvas uma compreensão sólida sobre os juros simples e compostos, explorando possíveis aplicações em cenários como investimentos, poupanças e empréstimos. Através de exemplos e exercícios práticos, poderás aplicar fórmulas matemáticas para resolver problemas financeiros reais.

4.3.1. Juros simples e juros compostos

Os juros podem ser calculados de duas maneiras principais: através de juros simples ou juros compostos.

Os **juros simples** são calculados apenas sobre o capital inicial, sendo diretamente proporcionais ao tempo e à taxa de juros aplicada. No caso de juros simples, não consideramos, ao longo do tempo, o acréscimo de juros sobre juros.

Fórmula de cálculo de juros simples:

$$J = C \times i \times t$$

Onde:

J é o valor dos juros

C é o capital inicial

i é a taxa de juros (expressa em decimal)

t é o tempo (em anos ou conforme especificado)

Montante (valor total): $M = C + J$

Exemplo 14: Juros Simples

Um capital de 5000 escudos foi aplicado com uma taxa de juros simples de 4% ao ano, por três anos.

Qual é o valor dos juros e o montante final?

Dados: $C = 5000$; $i = 0{,}04$; $t = 3$

Cálculo: $J = C \times i \times t = 5000 \times 0{,}04 \times 3 = 600$ escudos

Montante: $M = C + J = 5000 + 600 = 5600$ escudos

Os **juros compostos** são calculados, não apenas sobre o capital inicial, mas também sobre os juros acumulados, o que resulta num crescimento exponencial ao longo do tempo.

Fórmula de cálculo de juros compostos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde:

M é o montante acumulado (capital + juros)

C é o capital inicial

i é a taxa de juros

t é o tempo (em anos ou conforme especificado)

Juros acumulados: $J = M - C$

Exemplo 15: Juros compostos

Um capital de 8000 escudos foi aplicado com uma taxa de juros compostos de 5% ao ano, por quatro anos.

Qual será o montante acumulado?

Dados: $C = 8000$; $i = 0{,}05$; $t = 4$

Cálculo: $M = 8000 \times (1 + 0{,}05)^4$

$M = 8000 \times 1{,}21550625 = 9724{,}05$ escudos

Assim, no final de quatro anos, o montante passou a ser de $9724{,}05$ escudos, sendo que a quantia de juros conseguida com esta aplicação foi de:

$J = 9724{,}05 - 8000 = 1724{,}05$ escudos

Exemplo 16: Comparação entre juros simples e compostos

Um capital de $10\,000$ escudos foi investido com uma taxa de 6% ao ano, por cinco anos.

Vamos comparar os resultados entre juros simples e compostos.

Juros simples:

$J = 10\,000 \times 0{,}06 \times 5 = 3000$ escudos

Montante:

$M = C + J = 10\,000 + 3000 = 13\,000$ escudos

Juros compostos:

$M = 10\,000 \times (1 + 0{,}06)^5 \simeq 10\,000 \times 1{,}3382255776 \simeq 13\,382{,}26$ escudos

Juros compostos:

$J = M - C = 13\,382{,}26 - 10\,000 = 3382{,}26$ escudos

Com este exemplo, podemos verificar que a aplicação do mesmo capital, com a mesma taxa e pelo mesmo período de tempo, obtém mais juros compostos do que juros simples.

Exercícios

18 **Um capital de $20\,000$ escudos é aplicado com juros simples de 4% ao ano por dois anos. Qual será o retorno?**

19 **Uma aplicação inicial de $50\,000$ escudos rende juros compostos de 6% ao ano por cinco anos.**

19.1. Qual será o montante obtido?

19.2. Qual será o valor dos juros obtidos?

20 **Um capital inicial de $30\,000$ escudos é investido a uma taxa de 5% ao mês, em regime de juros compostos. Após um certo período, o montante acumulado é de aproximadamente $38\,288$ escudos.**

Durante quantos meses o dinheiro ficou aplicado?

(A) 3 meses

(B) 4 meses

(C) 5 meses

(D) 6 meses

4.3.2. Investimentos financeiros e empréstimos

No sistema financeiro de Cabo Verde, as **instituições bancárias** desempenham um papel crucial como intermediárias nas operações de **investimentos** e **empréstimos**. Essas instituições, como os bancos comerciais e as instituições financeiras autorizadas, oferecem produtos e serviços que permitem às pessoas e empresas gerir melhor o seu dinheiro, seja aumentando o rendimento através de investimentos ou obtendo recursos financeiros por meio de empréstimos.

Os bancos em Cabo Verde são os principais agentes para realizar essas operações e são supervisionados pelo Banco de Cabo Verde. Eles garantem a segurança das transações, aplicam taxas de juros adequadas e promovem o acesso ao crédito e à poupança. Nos bancos, os clientes podem aderir a diferentes tipos de contas, sendo as mais comuns a conta à ordem ou a conta a prazo.

Uma **conta à ordem** é o tipo de conta bancária mais comum, destinada a movimentações frequentes, como depósitos, levantamentos, transferências e pagamentos. Apesar de oferecerem flexibilidade, essas contas normalmente têm rendimentos baixos ou inexistentes sobre o saldo. Em algumas instituições bancárias a conta à ordem permite o acesso a serviços de pagamento automático, como débito direto para pagamentos de água e luz.

Um funcionário que recebe o salário mensal diretamente numa conta à ordem pode usá-lo para pagar contas, fazer transferências ou levantar dinheiro.

Uma conta a prazo é uma forma de **investimento financeiro** oferecida pelos bancos, em que o cliente deposita uma quantia por um período determinado e recebe juros sobre o valor investido. Normalmente, quanto maior o prazo, maior é a taxa de juros oferecida. As instituições bancárias oferecem produtos de contas a prazo que permitem aplicações de curto e longo prazo, com taxas competitivas.

Exemplo 17

Um cliente depositou $500\,000$ escudos numa conta a prazo, com vencimento a 12 meses e uma taxa de 3% ao ano.

A fórmula que nos permite calcular a quantia que terá no final de cada ano é

$$D_n = D_0 \times (1+0{,}03)^n$$

onde n é o ano em causa, D_n a quantia de dinheiro no final desse ano e D_0 a quantia investida.

No final do terceiro ano, o cliente terá, então:

$$D_3 = 500\,000 \times (1+0{,}03)^3 = 546\,363{,}5 \text{ escudos}$$

Os **empréstimos** são valores concedidos por bancos para que os indivíduos ou as empresas possam financiar necessidades, como compra de casa, carro ou expansão de negócios.

Os empréstimos geralmente estão sujeitos a taxas de juros (fixas ou variáveis) e prazos de pagamento.

Exemplo 18

Uma empresa solicitou um empréstimo de $1\,000\,000$ escudos para investir em equipamentos. Ficou decidido aplicar uma taxa de juro global de 30%, sendo que o pagamento irá ocorrer em prestações ao longo dos próximos 50 meses.

Assim, apesar de o empréstimo ser $1\,000\,000$ escudos, o valor total a pagar será de:

$$1\,000\,000 + 1\,000\,000 \times 0{,}30 = 1\,300\,000 \text{ escudos}$$

A cada mês deverá ser paga uma prestação no valor de

$$1\,300\,000 : 50 = 26\,000 \text{ escudos}$$

Exercícios

21 **Qual a principal função de uma conta à ordem?**

(A) Aplicar dinheiro por um período fixo e ganhar juros.

(B) Realizar movimentações frequentes, como pagamentos e transferências.

(C) Obter crédito com taxas de juros reduzidas.

(D) Guardar dinheiro sem possibilidade de movimentação.

22 **O que é uma conta a prazo?**

(A) Uma conta que permite realizar movimentações frequentes.

(B) Uma conta destinada à aplicação de dinheiro por um período fixo, com juros.

(C) Um tipo de empréstimo concedido pelos bancos.

(D) Uma conta usada exclusivamente para transferências internacionais.

23 **Qual é o papel do Banco de Cabo Verde (BCV)?**

(A) Oferecer empréstimos aos cidadãos diretamente.

(B) Regular as operações bancárias e garantir a estabilidade financeira.

(C) Conceder contas a prazo com taxas mais altas.

(D) Cobrar impostos sobre as transações bancárias.

Investimentos financeiros

Quando se realiza um **investimento financeiro**, o objetivo é obter um retorno sobre o capital aplicado ao longo do tempo. Geralmente, esse retorno é calculado utilizando conceitos semelhantes à aplicação de juros, bastando diferenciar se o cálculo é de um retorno percentual simples ou acumulado ao longo do tempo.

Exemplo 19: Investimento em títulos

Uma pessoa investe $100\,000$ escudos em títulos financeiros com uma taxa de retorno anual de 5% por três anos.

Cálculo do montante final (A): $\text{A} = 100\ 000 \times (1 + 0{,}05)^3 \approx 115\ 763$ escudos

O montante final será, aproximadamente, $115\,763$ escudos.

Exemplo 20: Conta de poupança

Uma conta de poupança oferece uma taxa de juros composta mensal de $0{,}4\%$.

Se um cliente depositar $200\,000$ escudos e deixar a render por 24 meses, o montante acumulado será calculado como:

$A = 200\,000 \times (1 + 0{,}004)^{24} \approx 220\,110$ escudos

O montante final será, aproximadamente, $220\,110$ escudos.

Exercícios

24 Um investidor aplica $1\,000\,000$ escudos em ações de uma empresa com uma taxa de retorno anual de 8% por cinco anos.
Qual será o valor acumulado no fim do período?

25 Uma pessoa deposita $500\,000$ escudos num plano de poupança Educação que oferece uma taxa de retorno anual de 6%, com rendimentos compostos por 10 anos.
Qual será o montante final?

26 Dois investidores aplicam $2\,000\,000$ escudos cada, mas em diferentes investimentos:
– investidor A: taxa de retorno anual de 5% por três anos;
– investidor B: taxa de retorno anual de 4% por quatro anos.

26.1. Qual dos investidores acumulará mais dinheiro no final do período?

26.2. Qual será a diferença entre os montantes acumulados?

Empréstimos

Quando se realiza um **empréstimo**, o pagamento é geralmente feito em parcelas fixas ao longo do tempo. Essas parcelas (ou prestações) incluem uma parte do valor principal e os juros cobrados pelo banco ou instituição financeira.

Na maioria dos casos, a taxa de juro aplicável a um empréstimo não é global, mas sim uma taxa de juro aplicada mensalmente, trimestralmente, semestralmente ou anualmente.

A fórmula para calcular o valor da **parcela mensal fixa (PMT)** é:

$$\mathrm{PMT} = \frac{P \times r \times (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Onde:

PMT é a parcela fixa mensal

P é o valor total do empréstimo (principal)

r é a taxa de juros por período (em decimal, ou seja, taxa percentual dividida por 100)

n é o número total de parcelas (tempo do empréstimo em meses)

A fórmula para calcular o **valor total fixo a pagar** é:

$$\mathrm{VTF} = \mathrm{PMT} \times n$$

Exemplo 21: Empréstimo para compra de uma casa

Uma pessoa contrai um empréstimo de $5\,000\,000$ escudos para comprar uma casa, com uma taxa de juros mensal de $0{,}8\%$, a ser pago em 20 anos (240 meses).

Cálculo da parcela fixa (PMT):

$$\text{PMT} = \frac{5\,000\,000 \times 0{,}008 \times (1+0{,}008)^{240}}{(1+0{,}008)^{240} - 1} \approx 46\,934 \text{ escudos}$$

A prestação fixa a pagar mensalmente será, aproximadamente, $46\,934$ escudos.

Exemplo 22: Empréstimo pessoal

Uma pessoa contrai um empréstimo pessoal de $1\,000\,000$ escudos para ser pago em 36 meses com uma taxa de juros mensal de 1%.

Cálculo da parcela fixa (PMT):

$$\text{PMT} = \frac{1\,000\,000 \times 0{,}01 \times (1+0{,}01)^{36}}{(1+0{,}01)^{36} - 1} \approx 33\,214 \text{ escudos}$$

A parcela fixa mensal será, aproximadamente, $33\,214$ escudos.

O valor fixo total a pagar é: $\text{VTF} = 33\,214 \times 36 = 1\,195\,704$ escudos.

Exercícios

27 **Um cliente contrai um empréstimo de $2\,500\,000$ escudos para comprar um carro, com uma taxa de juros mensal de $0{,}9\%$ e um prazo de 60 meses.**
Qual será a parcela fixa mensal?

28 **Uma pessoa contrai um empréstimo de $3\,000\,000$ escudos, com uma taxa de juros mensal de 1%, para ser pago em 15 anos (180 meses).**

28.1. Determina o valor da parcela fixa.

28.2. Determina o valor total fixo a ser pago.

29 **Dois amigos contraem empréstimos:**
– amigo A: $800\,000$ escudos a $0{,}8\%$ ao mês, por 12 meses;
– amigo B: $800\,000$ escudos a 1% ao mês, por 24 meses.

29.1. Qual dos dois paga uma parcela maior?

29.2. Qual será a diferença no valor total pago entre os dois?

Síntese

Impostos

Os **impostos** são contribuições obrigatórias cobradas pelos governos para financiar as despesas públicas:

- **impostos diretos**: incidem diretamente sobre o rendimento ou o património das pessoas;
- **impostos indiretos**: aplicam-se ao consumo de bens e serviços.

As **taxas percentuais aplicadas aos impostos**, como o IUR, o IVA, o IUP e o ICA, **não são fixas** e podem variar de acordo com decisões governamentais, condições económicas ou políticas públicas específicas.

IVA (Imposto sobre o Valor Acrescentado)

$$\text{Preço com IVA} = \text{Preço sem IVA} \times (1 + \text{taxa do IVA})$$

$$\text{Preço sem IVA} = \frac{\text{Preço com IVA}}{(1 + \text{taxa do IVA})}$$

IUP (Imposto Único sobre o Património)

$$\text{IUP} = \text{Valor patrimonial} \times \text{taxa de IUP}$$

Inflação

A **inflação** é o aumento geral e contínuo dos preços dos bens e serviços numa economia ao longo do tempo.

O **Índice de Preços no Consumidor (IPC)** é um indicador que tem por finalidade medir a evolução no tempo dos preços de um conjunto de bens e serviços considerados representativos da estrutura de consumo da população residente num país.

Cálculo do IPC num determinado ano X:

$$\text{IPC}(X) = \frac{\text{preço do cabaz no ano X}}{\text{preço do cabaz no ano-base}} \times 100$$

A **taxa de inflação** é a variação percentual do IPC entre dois períodos consecutivos. Deste modo, a taxa de inflação traduz a velocidade com que os preços estão a aumentar.

Síntese

Cálculo da taxa de inflação para um determinado período (entre o ano X e o ano Y):

$$\text{Taxa de inflação (\%)} = \frac{\text{IPC (Y)} - \text{IPC (X)}}{\text{IPC (X)}} \times 100$$

Modelo exponencial de aplicação da inflação

Preço de um produto no futuro $P(t) = P_0 \times (1 + r)^t$

Onde: P_0 é o preço inicial; r é a taxa de inflação; t é o tempo em anos.

Juros

Os **juros** são uma forma de remuneração pela utilização de um capital monetário, podendo ser compreendidos como o custo de um empréstimo ou o retorno de um investimento, por exemplo, uma conta-poupança.

Fórmula de cálculo de juros simples:

$$J = C \times i \times t$$

Onde:

- J é o valor dos juros
- C é o capital inicial
- i é a taxa de juros (expressa em decimal)
- t é o tempo (em anos ou conforme especificado)

Montante (valor total): $M = C + J$

Fórmula de cálculo de juros compostos:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde:

- M é o montante acumulado (capital $+$ juros)
- C é o capital inicial
- i é a taxa de juros
- t é o tempo (em anos ou conforme especificado)

Juros acumulados: $J = M - C$

Empréstimos

Parcela mensal fixa (PMT):

$$\text{PMT} = \frac{P \times r \times (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

Valor total fixo:

$$\text{VTF} = \text{PMT} \times n$$

Onde:
PMT é a parcela fixa mensal
P é o valor total do empréstimo (principal)
r é a taxa de juros por período (em decimal, ou seja, taxa percentual dividida por 100)
n é o número total de parcelas (tempo do empréstimo em meses)

Para aplicar

1 **Um computador é vendido por $50\,000$ escudos sem IVA. Sabendo que a taxa de IVA aplicada é de 17%:**

1.1. Determina o valor do IVA.

1.2. Indica qual o preço final do computador, incluindo IVA.

2 **Uma quantia de $25\,000$ escudos foi investida a uma taxa de 4% ao mês, capitalizada mensalmente, durante três meses.**

Qual será o montante no final do período?

(A) $26\,200$ escudos

(B) $28\,122$ escudos

(C) $29\,000$ escudos

(D) $31\,250$ escudos

3 **Uma parcela de terreno avaliada em $6\,500\,000$ escudos está sujeita a uma taxa de IUP de $0{,}45\%$.**

3.1. Determina o valor do IUP anual.

3.2. Quanto seria o IUP se a taxa fosse aumentada para $0{,}5\%$?

4 **O preço de uma viagem de táxi era 1500 escudos, em 2017.**

Sabendo que a inflação média foi de 4% ao ano, qual seria o preço estimado em 2022?

5 **Determina os juros de um investimento de $25\,000$ escudos a juros simples de 7% ao ano por cinco anos.**

6 **Um capital inicial de $35\,000$ escudos é aplicado a juros compostos de 10% ao ano.**

Qual será o montante em oito anos?

7 **Considera as seguintes afirmações relacionadas com o investimento em contas a prazo e indica as verdadeiras.**

(A) O montante final é sempre menor em juros simples comparado aos juros compostos, para a mesma taxa e período.

(B) A taxa de juros composta aumenta exponencialmente o valor ao longo do tempo.

(C) Se o período de cálculo dos juros aumenta, o montante acumulado será menor.

(D) O valor inicial investido não afeta o montante final.

8 **Um cliente investiu 300 000 escudos numa conta a prazo com taxa simples de 2,5% ao mês.**

Quanto tempo será necessário para obter 390 000 escudos?

9 **Num restaurante, um almoço é cobrado a 7000 escudos (valor sem IVA).**

9.1. Calcula o valor do IVA se a taxa aplicada for de 15% .

9.2. Determina o preço final do almoço, já com IVA.

9.3. Se o governo reduzir a taxa de IVA das refeições para 10% , qual será o novo preço final?

10 **Uma casa localizada na cidade de Mindelo tem um valor patrimonial de 12 000 000 escudos e está sujeita a uma taxa de IUP de 0,4% .**

10.1. Calcula o valor anual do IUP.

10.2. Se, posteriormente, a taxa for aumentada para 0,5% , qual será o valor correspondente ao aumento de IUP para essa casa?

11 **Em 2020, o preço médio de um cabaz de bens essenciais era 8000 escudos. Em 2023, esse preço passou a ser 9200 escudos.**

11.1. Considerando 2020 como ano-base (IPC = 100), determina o IPC para 2023.

11.2. Calcula a taxa de inflação acumulada entre 2020 e 2023.

12 **Dois investidores aplicam 200 000 escudos, cada um durante 3 anos:**

- investidor A utiliza juros simples com taxa de 10% ao ano.
- investidor B utiliza juros compostos com a mesma taxa de 10% ao ano.

12.1. Calcula o montante final obtido por cada investidor.

12.2. Determina qual dos dois investimentos oferece um retorno maior e qual a diferença entre os montantes finais.

Teste

1 O custo de uma estadia num hotel é de 8000 escudos (sem IVA).
Qual é o custo total com IVA de 15% ?

(A) 9000 escudos
(B) 9150 escudos
(C) 9200 escudos
(D) 9250 escudos

2 Uma loja avaliada em 8 000 000 escudos tem uma taxa de IUP de 0,6% .
Qual é o valor do IUP anual?

(A) 40 000 escudos
(B) 42 000 escudos
(C) 46 000 escudos
(D) 48 000 escudos

3 Um imóvel residencial vale 12 000 000 escudos e está sujeito ao pagamento anual de imposto de IUP de 36 000 escudos.
Qual é a taxa de IUP a que está sujeito o imóvel?

(A) 0,3%
(B) 0,4%
(C) 0,5%
(D) 0,6%

4 O IPC mede:

(A) A quantidade de bens exportados por um país.
(B) A variação nos preços de uma cesta de bens e serviços representativos.
(C) O poder de compra médio de um trabalhador.
(D) O nível de produção industrial de um país.

5 Qual é o valor acumulado de um investimento de 40 000 escudos a juros simples de 3% ao ano por 10 anos?

(A) 6000 escudos
(B) 12 000 escudos
(C) 16 000 escudos
(D) 24 000 escudos

6 Se o IPC de janeiro é 150 e o de dezembro é 165 , qual é a taxa de inflação anual?

(A) 10%
(B) 5%
(C) 15%
(D) 20%

7 A Rafaela efetuou um depósito poupança com juros compostos de 2% ao ano durante três anos. Obteve de juros 1224 escudos.
Qual foi o capital inicial? Considera o valor mais próximo.

(A) 24 000 escudos
(B) 22 000 escudos
(C) 20 000 escudos
(D) 18 000 escudos

8. **Para cada uma das seguintes afirmações, indica as verdadeiras e as falsas.**

(A) As contas à ordem são destinadas exclusivamente para aplicações financeiras de longo prazo.

(B) O Banco de Cabo Verde (BCV) tem como função regular as operações bancárias no país.

(C) As contas a prazo são uma forma de investimento financeiro.

(D) Os bancos comerciais em Cabo Verde oferecem tanto poupança como crédito aos clientes.

9. **A inflação anual de um país é de 8%. Uma televisão custa hoje 3000 escudos.**
Qual será o preço dessa televisão ao final de dois anos?

(A) $3259{,}20$ escudos **(B)** $3240{,}00$ escudos

(C) $3499{,}20$ escudos **(D)** $3340{,}00$ escudos

10. **Uma aplicação gerou 500 escudos de juros simples ao longo de cinco meses, com um capital inicial de $10\,000$ escudos.**
Qual foi a taxa de juros mensal?

(A) $0{,}5\%$ **(B)** 1% **(C)** $1{,}5\%$ **(D)** 2%

11. **Um cliente contrai um empréstimo de $4\,000\,000$ escudos na sua agência bancária, para ajudar na compra da sua nova casa. O empréstimo será pago em 48 meses a uma taxa mensal de $0{,}7\%$.**
Qual será a parcela fixa mensal?

(A) $96\,560$ escudos **(B)** $98\,404$ escudos

(C) $97\,450$ escudos **(D)** $95\,800$ escudos

12. **Uma farmácia vende um tipo de medicamento por 520 escudos (com IVA de 5% já incluído).**

12.1. Determina o valor do IVA.

12.2. Indica o valor do medicamento sem IVA.

12.3. Calcula o valor total do medicamento se o IVA fosse de 15%.

13. **Uma propriedade avaliada em $3\,600\,000$ escudos paga IUP com uma taxa de $0{,}3\%$.**

13.1. Determina o valor do imposto a pagar anualmente.

13.2. Ao fim de quantos anos o valor acumulado do imposto ultrapassará os $50\,000$ escudos?

Teste

14 O senhor André pretende vender a sua loja comercial pelo valor correspondente ao seu valor patrimonial que é de 12 000 000 escudos.

O senhor Martin pretende adquirir a loja e pede ao senhor André um desconto correspondente a 10 anos de pagamento de IUP. No município onde está localizada a loja a taxa anual de IUP é de 0,5% para imóveis comerciais.

14.1. Qual é o valor correspondente ao desconto pedido pelo senhor Martin?

14.2. Se o senhor André aceitar a proposta, por que valor vende a loja?

15 Dois imóveis são avaliados da seguinte forma:

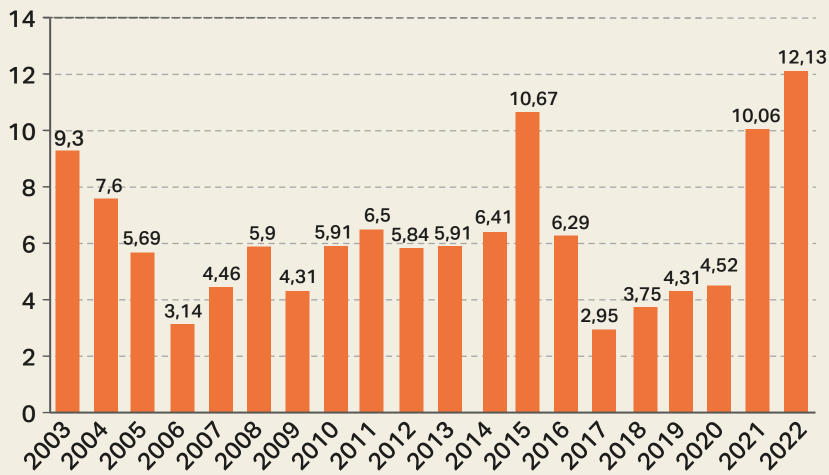
Casa A: avaliada em 10 000 000 escudos, com uma taxa de IUP de 0,35%;

Casa B: avaliada em 12 000 000 escudos, com uma taxa de IUP de 0,3%.

15.1. Qual dos imóveis gera um imposto maior?

15.2. Qual é a diferença entre os valores dos impostos?

16 O gráfico seguinte apresenta os dados da inflação, em relação aos anos anteriores, de um país.



16.1. Em que ano se verificou o maior aumento de inflação?

16.2. O que aconteceu no ano de 2016? Explica recorrendo ao conceito de IPC.

16.3. Com os dados do gráfico podemos afirmar que o preço dos bens alimentares verificados em 2017 foram superiores aos preços dos mesmos bens em 2016?

17 Um terreno foi comprado por 2 500 000 escudos, em 2019. Se a inflação média for de 3% ao ano, qual será o valor estimado do terreno em 2030? E em 2035?

18 A Joana investiu 50 000 escudos numa aplicação de juros simples com taxa de 1,5% ao mês e retirou 57 500 escudos no final do período.

18.1. Durante quantos meses ficou aplicado o dinheiro?

18.2. Quantos meses seriam necessários para obter de juros 15 000 escudos?

19 Determina os juros de um investimento de 25 000 escudos a juros simples de 7% ao ano por cinco anos.

20 Um capital inicial de 35 000 escudos é aplicado a juros compostos de 10% ao ano.

20.1. Qual será o montante em oito anos?

20.2. Quantos anos são necessários para se obter de juros 35 000 escudos?

21 O Martin pretende aplicar 40 000 escudos por um período de três anos. A instituição financeira a que recorreu dispõe dos seguintes planos de investimento:

	Taxa de juro (ao ano)	Tipo de juro	Custo fixo de aplicação
Plano A	4%	Simples	400 escudos
Plano B	3,5%	Composto	350 escudos
Plano C	5%	Simples	1500 escudos

21.1. Ajuda o Martin a escolher o plano que lhe garanta um melhor retorno.

21.2. Se o Martin optasse por um período de seis anos, o melhor plano seria o mesmo? Justifica a tua resposta.

22 Para realizar obras de melhoria na sua casa a senhora Zulmira contraiu um empréstimo de 1 000 000 escudos, com uma taxa de juros mensal de 1% , para ser pago em cinco anos (60 meses).

22.1. Determina o valor da parcela fixa que a senhora Zulmira pagará mensalmente.

22.2. Determina o valor total fixo que a senhora Zulmira pagará no final dos cinco anos.

Página 10

1. **(A)** e **(F)**; **(B)** e **(D)**; **(C)** e **(E)**.

Página 12

2.1. Proposição.
2.2. Proposição.
2.3. Proposição.
2.4. Não é proposição.
2.5. Proposição.
2.6. Proposição.

3.1. Falso.
3.2. Verdade.
3.3. Verdade.
3.4. Verdade.
3.5. Falso.

4. Resposta aberta.

Página 15

5.1. Falso.
5.2. Verdade.
5.3. Falso.
5.4. Verdade.
5.5. Falso.
5.6. Verdade.
5.7. Verdade.
5.8. Falso.

Página 16

6.1. $3 \notin \mathbb{N}$. Falso.
6.2. Santiago não é a maior ilha de Cabo Verde. Falso.
6.3. 135 não é um quadrado perfeito. Verdade.
6.4. O avião não é o único meio de transporte para visitar outro país. Verdade.
6.5. $\frac{156}{3}$ não é divisível por 3. Verdade.
6.6. Há pelo menos um múltiplo de 5 que é ímpar. Verdade.

7.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo não é $180°$. Falso.
7.2. Timor-Leste não fica no continente asiático. Falso.
7.3. $-5 \notin [-5; +\infty[$. Falso.
7.4. Timor-Leste fica no continente asiático. Verdade.
7.5. $-5 \in [-5; +\infty[$. Verdade.
7.6. $-5 \notin [-5; +\infty[$. Falso.

Página 17

8.1. $r \wedge s$
8.2. $r \wedge \sim t$
8.3. $\sim u \wedge s \wedge r$

Página 18

9.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F
F	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	F	F	V	F

Tarefa 1

p	$\sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Tarefa 2

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
F	V	F	F
V	F	F	F
F	F	F	F

Página 19

Tarefa 3

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

10. Falso.

11.1. p: Verdade; q: Falso; r: Falso; s: Verdade.
11.2. **a)** Há números pares que não são múltiplos de 2.
b) Todos os números primos são ímpares e 7 é um número primo.
c) Há números primos que não são ímpares e há números pares que não são compostos.
11.3. **a)** Falso; **b)** Falso; **c)** Verdade.

Página 20

12. Falso.

Página 21

13.

p	q	$p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	V	F	V
F	V	V	V	F
V	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Tarefa 4

p	V	F	$p \vee p$	$p \vee F$	$p \vee V$
V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V

Página 22

14. Exercício de demonstração.

Tarefa 5

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Página 23

Tarefa 6

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	F

Tarefa 7

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Página 24

15.1. Verdade.
15.2. Verdade.
15.3. Verdade.

16.1. Verdade.
16.2. Falso.
16.3. Verdade.
16.4. Verdade.

17. *a* é verdadeira e *b* é verdadeira.

Tarefa 8

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Página 25

Tarefa 9

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Página 26

18.1. Verdade.
18.2. Falso.
18.3. Verdade.
18.4. Verdade.
18.5. Verdade.

19.1. Falso.
19.2. Verdade.
19.3. Verdade.
19.4. Falso.
19.5. Verdade.

Tarefa 10

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	F	V
F	F	V	V

A implicação lógica não é comutativa.

20. Verdade.

Página 27

21.

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

22.1. Se a Manuela estuda, então a Manuela obtém boas classificações.
22.2. Se a Manuela obtém boas classificações, então a Manuela consegue entrar num bom curso superior.
22.3. Se a Manuela estuda, então a Manuela obtém boas classificações e se a Manuela obtém boas classificações, então a Manuela consegue entrar num bom curso superior.
22.4. Pela transitividade da implicação.

Página 28

23.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Como as duas últimas colunas da tabela são iguais, para quaisquer p e q temos que:
$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

24.

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
	F	V	V	V	V

25.1. Verdade. **25.2.** Verdade.
25.3. Verdade.

Página 30

26.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

27. $q \wedge p$

28. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$

Página 32

29.1. p
29.2. $p \Leftrightarrow q$

30.1. $p = V$; $q = F$; $r = F$
30.2. $p = V$; $q = F$; $r = V$ ou F

31. a

32. p

33. $x \vee y$

34. m

35. p

Página 36 – Para aplicar

1. Designações: A, F, G, I;
Proposições: B, C, D, E, H.

2.1. $a = V$; $b = F$; $c = F$; $d = V$
2.2. V **2.3.** F
2.4. V **2.5.** V

3.1. **a)** $p \Rightarrow r$
b) $q \Rightarrow s$
c) $(\sim q \wedge \sim p) \Rightarrow r$
3.2. **a)** Se está a chover e não está sol, então não vou passear.
b) Se não está a chover e está sol, então não está sol.

4.

a	b	c	$a \vee b$	$\sim c$	$(a \vee b) \Rightarrow \sim c$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Página 37

5.1.

p	q	r	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \Rightarrow r$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

5.2. O valor lógico de q não influencia a solução. O valor lógico de q apenas influencia o valor lógico de $p \wedge q$. O valor lógico de $\sim p \Rightarrow r$ é que influencia a solução.

6. $a = V$ e $b = F$

7.1.

r	s	$\sim s$	$r \wedge \sim s$	$r \vee s$	$(r \wedge \sim s) \Rightarrow (r \vee s)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

7.2. $r \vee \sim s$

8. p

9. Exercício de demonstração.

10.1. Se r for verdadeiro, não existem restrições para os valores lógicos de p e de q. Se r for falso, então p deve ser falso ou q deve ser verdadeiro.

10.2. r tem de ser verdadeiro e $p \Rightarrow q$ também tem de ser verdadeiro, o que significa que p deve ser falso ou q deve ser verdadeiro.

Página 39

36. **(C)**; **(D)**; **(G)**.

37. **(A)**; **(D)**.

Página 40

38.1. Condição possível não universal.
38.2. Condição possível não universal.
38.3. Condição possível não universal.
38.4. Condição possível não universal.
38.5. Condição impossível.
38.6. Condição possível não universal.

Página 41

39.1. Verdade.
39.2. Verdade.
39.3. Falsa.
39.4. Verdade.
39.5. Falsa.
39.6. Verdade.

40.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$, Verdade.
40.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 \geqslant 0$, Falso.
40.3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Q}$, Verdade.
40.4. $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x > \frac{x}{2}$, Falso.

Página 42

41.1. Verdade.
41.2. Verdade.
41.3. Verdade.
41.4. Verdade.
41.5. Falso.
41.6. Verdade.

42.1. $\exists^1 x \in \mathbb{N}:\ x^2 = 16$, Verdade.
42.2. $\exists^1 x \in \mathbb{R}:\ x^2 = 16$, Falso.
42.3. $\nexists x \in \mathbb{R}:\ \sqrt{x} = -2$, Verdade.
42.4. $\exists x \in \mathbb{R}:\ 3x > 4x$, Verdade.

Página 43

43.1. $p(x)$ Condição possível.
$q(x)$ Condição impossível.
$r(x)$ Condição universal.
$s(x)$ Condição possível.
43.2. Condição universal.
43.3. Condição possível.
43.4. Condição impossível.
43.5. Condição impossível.
43.6. Condição possível.

Página 44

44.1. Existe pelo menos um estrangeiro que não gosta de comer ananás da ilha do Sal.
44.2. Existe pelo menos um desportista que não é rico.
44.3. Nenhum professor da escola é jovem.
44.4. Nenhuma aluna na turma nasceu nos Estados Unidos da América.
44.5. Existe pelo menos um aluno que é fraco.

Página 45

45.1. $\exists x:\ x \geqslant 10$
45.2. $\forall x,\ x + 2 \neq x^2$
45.3. $\exists x:\ x^4 < 0$
45.4. $\forall x,\ \sqrt{x-7} \geqslant \frac{1}{7}$
45.5. $\forall x,\ x \geqslant -3 \wedge x \leqslant 3$

Página 46

46.1. Falso., por exemplo -2.
46.2. Falso., por exemplo -1.
46.3. Verdade.
46.4. Falso., o número 2 é primo e não é ímpar.

Página 47

47.1. $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
47.2. $B = \{1, 2, 3, 4\}$
47.3. $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

48.1. $A = \{n^2 :\ n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leqslant n \leqslant 4\}$
48.2. Sim. $B = C$.
48.3. Exercício de demonstração.
48.4. $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Página 48

49.1. $A\cap B=\{0,1,4\}$
49.2. $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,9,16,25\}$
49.3. $A\cap C=[0,4]$
49.4. $B\cap D=\{3,4,5\}$
49.5. $A\cup E=\{0,1,4,5,6,7,8,9,16,25\}$
49.6. $D\cap E=\{4,5,6,7\}$

Página 49

50.1. Por exemplo, $A=]4,10[$.
50.2. Por exemplo, $C=[3,12]$.

Página 50

51.1. $A\setminus B=\{9,16,25\}$ **51.2.** $B\setminus A=\{2,3,5\}$
51.3. $B\setminus C=\{0,5\}$ **51.4.** $C\setminus D=]0,3[$
51.5. $B\setminus(C\cup E)=\{0\}$ **51.6.** $C\setminus\bar{E}=\{4\}$
51.7. $A\cap B=\{0,1,4\}$ **51.8.** $B\cap E=\{4,5\}$
51.9. $A\cup B\cup E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,16,25\}$
51.10. $A\cap\bar{C}=\{0,9,16,25\}$

52.1. $A=\{0,1,6,7,8,9\}$
52.2. $B=\{0,1,3,4,5,6,7\}$
52.3. É falsa.

Página 52

53. Exercício de demonstração.

54.1. $\bar{A}=\{x\in\mathbb{N}:\ x<5\}$
54.2. $\bar{A}\cup\bar{B}=\{x\in\mathbb{N}:\ x<5\vee x\geqslant 3\}=\mathbb{N}$
54.3. $\overline{A\cup B}=\{x\in\mathbb{N}:\ 3\leqslant x<5\}$
54.4. $\overline{A\cup B}=\{3,4\}$

Página 53

55.1. São equivalentes.
55.2. Não são equivalentes.
55.3. Não são equivalentes.

56. Exercício de demonstração.

Página 55

57.1. Se um número não é divisível por 3, então não é divisível por 6.
57.2. Se a amplitude de cada um dos ângulos internos não for $60°$, então o triângulo não é equilátero.
57.3. Num plano, se duas retas s e t não são paralelas entre si, então não há uma reta r que é simultaneamente paralela a s e a t.

Página 56

58. Exercício de demonstração.

Página 57

59.1. C.S. $=\{-2,7\}$ **59.2.** C.S. $=\{-9,-3,3\}$
59.3. C.S. $=\{-6,-3,3\}$

60.1. $]-2,4[$ **60.2.** $]-\infty,-4[$
60.3. 2. $]8,+\infty[$

Página 62 – Para aplicar

1.1. Verdade.
1.2. Falso., por exemplo -1.
1.3. Falso., por exemplo $\sqrt{2}$.
1.4. Verdade.
1.5. Verdade.
1.6. Falso., por exemplo -2.

2.1. «$x=x$» condição universal.
«$x\neq x$» condição impossível.
«$x\in\mathbb{R}$» condição universal.
«$0\leqslant x$» condição possível.
2.2. **a)** Condição universal. **b)** Condição possível.
c) Condição impossível. **d)** Condição universal.

3.
- $\forall x,\ x$ é cabo-verdiano $\wedge\ x$ gosta de cachupa.
- $\exists x:\ x$ é turista $\wedge\ x$ visita o Parque Natural da Serra da Malagueta.
- Todas as bicicletas têm rodas.
- Existem retângulos que também são quadrados.
- $\exists x:\ x$ é cabo-verdiano $\wedge\ x$ participou nos Jogos Olímpicos.
- $\exists x\in\mathbb{Q}^{+}:\ x$ é par.
- Todos os números naturais menores do que 3 e primos são números pares.
- $\exists x:\ x$ é triângulo $\wedge\ x$ é isósceles.

Página 63

4.1. Por exemplo, 21 é múltiplo de 7, mas não é múltiplo de 14.
4.2. Por exemplo, -2 é um número inteiro e $(-2)^3=-8$, $(-2)^2=4$ e $-8<4$.
4.3. O losango é um quadrilátero, tem todos os lados iguais e pode não ser um quadrado se não tiver os ângulos internos todos retos.

5.1. Falso.
5.2. Verdade.
5.3. $\exists x\in D:\ \sim p(x)$.
5.4. Nenhum elemento do conjunto D é múltiplo de 2.

6.1. Verdade., pois $p(x)$ é uma proposição verdadeira quando $x=2$ ou $x=-1$ e $q(x)$ é uma proposição verdadeira quando $x=2$. Logo, existe um x nas condições referidas.
6.2. **a)** $A\cap B=\{2\}$ **b)** $A\cup B=[-1,\pi]$
c) $7\ \overline{A\cap B}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

7. Exercício de demonstração.

8.1. $A\cup B=]-\infty;\pi[\cup[6;+\infty[$
8.2. $A\cap B=\varnothing$.
8.3. $B\cap C=\left]\dfrac{20}{7},\pi\right[$

8.4. $\overline{A \cup B} = [\pi\,,\, 6[$
8.5. $\bar{C} \cup \bar{B} = \left]-\infty\,,\, \frac{20}{7}\right] \cup [\pi\,,\, +\infty[$
8.6. $A \setminus B \cup C = \varnothing$
8.7. $(\bar{A} \cup B) \cap \bar{C} = \left]-\infty\,,\, \frac{20}{7}\right]$

Página 64 – Teste

1.	C	**2.**	C	**3.**	D
4.	B	**5.**	B	**6.**	A

Página 65

7.1. O Martim não tem 8 anos ou não é estudante.
7.2. A Margarida tem 7 anos e não é estudante.
7.3. A Luana não é brasileira e não nasceu no Brasil.

8. $a \vee b$

9.1. Verdade. **9.2.** Verdade.

10.1. Verdade. **10.2.** Falso.
10.3. Verdade. **10.4.** Verdade.
10.5. Falso. **10.6.** Verdade.

11.1. $B = \{-1\,,\, 0\}$
11.2. $C = \{-3\,,\, -1\,,\, 0\}$
11.3. $A \cup B = \{-3\,,\, -1\,,\, 0\,,\, 2\}$
11.4. $B \cap C = \{-1\,,\, 0\}$
11.5. $\bar{A} \cap C = \varnothing$
11.6. $\bar{A} \cup B = \{-3\,,\, 2\}$

12. $x \in]-\infty\,,\, -3[\cup]3\,,\, +\infty[$

13.1. $[4\,,\, 7[$
13.2. Exercício de demonstração.
13.3. $\{4\,,\, 5\,,\, 6\}$

14. Exercício de demonstração.

Página 70 – Antes de começar

1.1. Não, porque nenhuma cor obteve maioria absoluta.
1.2. Verde e azul.
1.3. 492 alunos. Aproximadamente, 34%.
1.4. Resposta aberta.

2.1. Equipa X. **2.2.** Equipa Y.
2.3. Resposta aberta.

Página 73

1. Resposta aberta.

Página 74

2. **a)** Falsa, também deve estar registado como eleitor.
b) Falsa, qualquer cidadão cabo-verdiano com mais de 18 anos, independentemente de ser homem ou mulher, tem direito a votar.
c) Verdadeira.
d) Falsa, para além disso também deve ter pleno gozo dos direitos civis e políticos, residir em Cabo Verde por pelo menos três anos consecutivos imediatamente antes da data da eleição e não pode estar em situação de inelegibilidade.
e) Verdadeira.
f) Falsa, o mandato tem duração de cinco anos e só pode ser reeleito por mais um mandato, perfazendo 10 anos.
g) Verdadeira.

3. Aristides Pereira, que foi presidente durante 16 anos, desde 8 de julho de 1975 a 22 de março de 1991.

4.1. José Maria Pereira Neves.
4.2. Não, pois um candidato obteve maioria absoluta.
4.3. $169\ 194$ **4.4.** $15\ 078$
4.5. **a)** $189\ 932$
b) $52{,}4\%$, ou seja, mais de metade da população registada não votou.

Página 76

5. Dois deputados.

6. São Nicolau, Boa Vista, Maio, Fogo, Brava, África, Américas e Europa e Resto do Mundo.

7. Sim, pois elegem 44 deputados que é mais de metade dos 72 deputados que compõem a Assembleia Nacional.

Página 79

8. **a)** Falsa, realizam-se de quatro em quatro anos.
b) Falsa, os eleitores devem ter mais de 18 anos.
c) Verdadeira.
d) Falsa, o número de membros da assembleia depende do número de habitantes do município.
e) Verdadeira.
f) Falsa, só é utilizado o método de Hondt se não houver maioria absoluta.

Página 80

9.1. $33{,}7\%$
9.2. Sim, nenhum partido teve maioria absoluta.

Página 82

10.1. *Hip-Hop*.
10.2. *Rock* – $5{,}8\%$; *Rap* – $21{,}4\%$; *Pop* – $12{,}5\%$; Kizomba – $16{,}1\%$; *Jazz* – $4{,}2\%$; *Hip-Hop* – $26{,}2\%$; Funaná – $13{,}8\%$.
10.3. Resposta aberta.

Página 83

11.1. 30 alunos.
11.2. Futebol, pois é o mais votado.
11.3. Teria de haver uma segunda votação.
11.4. Resposta aberta.

Página 84

12.1. Candidato A – 40% ; Candidato B – 25% ; Candidato C – 35% .
12.2. Sistema de maioria simples.

Página 86

13.1. Não, pois os candidatos II e IV obtiveram mais de 50% dos votos, logo nenhum dos outros pode ter maioria absoluta, sendo necessário realizar uma segunda volta.
13.2. Sim. Por exemplo, o candidato 1 tinha 72 votos, o candidato 2 obtinha 70 votos, o candidato 3 430 votos, e o candidato 4 429 votos. Nenhum obteve maioria absoluta, logo haveria segunda volta e o candidato com 70 votos seria eliminado.
13.3. Não, pois caso fosse eliminado com 251 votos, os outros três candidatos teriam de ter mais de 251 votos, o que fariam um total de mais de 1000 eleitores, o que não é o caso.

Página 90

14.1. 80 pessoas.
14.2. Candidato A .
14.3. Candidato D .
14.4. Sim, o candidato B .
14.5. 8 votos.

15. 120 maneiras diferentes.

Página 91

16. Carlos.

Página 95

17. José.

Página 96

18.1. 175 pessoas.
18.2. Passam à segunda contagem o David, a Eva e o Frank e é eliminada a Grace.
18.3. A vencedora será a Eva, porque os votos do Frank e da Grace serão atribuídos à Eva, numa segunda e terceira voltas, que ficará com maioria.

Página 98

19. José.

20.1. 200 pessoas.
20.2. João, Margarida e Martin passam à segunda volta. Ana é eliminada.
20.3. 3 voltas.

21. Bruna e Denilson.

Página 101

22. Espécie B (Tamareira-do-Saara).

Página 102

23.1. 24 pontos.
23.2. A Praia seria eleita, mas depois a ilha do Sal e o Mindelo teriam os mesmos pontos, sendo necessário realizar nova escolha.

Página 105

24. O método de Condorcet não permite encontrar um vencedor.

25. Não. Nenhum candidato vence todos os outros.

26. O vencedor é o José.

Página 107

27.1. Teatro.
27.2. Dança.

Página 108

28.1. 38 alunos.
28.2. Carlos.

Página 110

29. Partido A – 3 assentos; Partido B – 3 assentos; Partido C – 2 assentos; Partido D – 1 assento; Partido E – 1 assento.

30. Lista A – 3 assentos; Lista B – 2 assentos; Lista C – 1 assento; Lista D – 0 assentos.

Página 112

31. Partido A – 3 assentos; Partido B – 3 assentos; Partido C – 2 assentos; Partido D – 1 assento; Partido E – 1 assento.

Página 113

32. Partido A – 3 assentos; Partido B – 3 assentos; Partido C – 2 assentos; Partido D – 1 assento.

33.1. **a)** Partido A – 3 assentos;
Partido B – 2 assentos; Partido C – 2 assentos;
Partido D – 0 assentos; Partido E – 0 assentos;
Partido F – 0 assentos.
b) Partido A – 2 assentos;
Partido B – 2 assentos; Partido C – 1 assento;
Partido D – 1 assento; Partido E – 1 assento;
Partido F – 0 assentos.
c) Partido A – 2 assentos;
Partido B – 2 assentos; Partido C – 1 assento;
Partido D – 1 assento; Partido E – 1 assento;
Partido F – 0 assentos.
33.2. Resposta aberta.

Página 118 – Para Aplicar

1. Análise das frases:
(A) V.
(B) F. A eleição para Presidente da República exige maioria absoluta, mas o sistema não é sempre realizado em duas voltas.
(C) V.
(D) F. Os sistemas preferenciais permitem que os eleitores indiquem a ordem de preferência, não apenas um candidato.
(E) F. No método *Run-off Standard*, o candidato com o menor número de votos é eliminado, mas as eliminações continuam até que um candidato alcance a maioria absoluta.
(F) F. Se um candidato vence todos os confrontos diretos, é um vencedor de Condorcet, não de Borda.

2.1. Total de associados: 150.
2.2. Percentagem de primeiras preferências: L: $16{,}7\%$, T: $33{,}3\%$, M: $20{,}0\%$, G: $30{,}0\%$.
2.3. A maioria absoluta pode ser obtida com um mínimo de 76 votos.
2.4. Vencedor pelo método *Run-off Standard*: Tavares (T).
2.5. Vencedor pelo método de Borda: Mendes (M).

Página 119

3.1. Percentagens: Francisco (66,7%), Filomena (83,3%), Nélson (50,0%).
3.2. A Filomena venceu pelo sistema de aprovação.

4.1. Pluralidade: Branco.
4.2. *Run-off*: Branco.
4.3. **a)** Branco vence Amarelo.
b) Amarelo vence Azul.

5.1. Percentagens: A: 35%, B: 28%, C: 20%, D: 12%, E: 5%.
5.2. Método de Hondt: A: 4, B: 4, C: 3, D: 1, E: 0.
5.3. Método de Hamilton: A: 4, B: 3, C: 2, D: 2, E: 1.

Página 126

34. O Carlos recebe o carro e a casa. O Manuel recebe o terreno e uma compensação financeira equivalente a 22 pontos.

35. O País A recebe: recurso energético, tecnologia e recurso mineral. O País B recebe: recurso hídrico e produto agrícola, bem como compensação financeira referente a 5 pontos.

Página 127

36. Simulação com colegas de turma.

Página 129

37.1. O herdeiro $H3$ fica com a casa na praia porque fez a maior licitação (30 200 000 escudos), superando $H1$ (30 000 000) e $H2$ (20 800 000).
37.2. Sim, o herdeiro $H1$ não recebeu nenhum item, pois suas licitações foram sempre inferiores às de $H2$ e $H3$.
37.3. O herdeiro $H2$ recebe o carro de luxo, a coleção de obras de arte e o terreno agrícola, pois foram os itens em que ele fez as maiores licitações.

Página 130

38.1. Arlindo: Não recebeu nada.
Benvindo: Frota de veículos, equipamentos de TI.
Celestina: Escritório central, marca registada.
38.2. O Arlindo recebe o maior valor monetário no final da partilha.

39. Vantagem: O método das licitações secretas garante que cada pessoa receba itens conforme as suas preferências, pois quem valoriza mais um item tende a arrematá-lo.
Desvantagem: Pode haver desigualdade se um participante não receber nenhum item e precisar de ser compensado financeiramente, o que pode ser desvantajoso para os demais participantes.

Página 132

40. **(A)** Falsa; **(B)** Verdadeira; **(C)** Verdadeira; **(D)** Falsa; **(E)** Verdadeira; **(F)** Falsa.

41. Sugestão de divisão mais equitativa: O divisor deve dividir o bolo exatamente ao meio, garantindo que ambas as partes tenham metade chocolate e metade chá verde. Assim, o selecionador pode escolher qualquer parte sem desvantagem, pois ambas terão os dois sabores.

Página 135

42.1. A Maya recebe a Parte 1; A Mariana recebe a Parte 2; A Margarida recebe a Parte 3.
42.2. A divisão pode ser considerada justa porque cada participante atribuiu valores às partes e recebeu a que considerou mais valiosa. Também nenhuma das amigas ficou em desvantagem, pois cada uma recebeu uma parte que valorizava mais que as outras.
42.3. Não houve necessidade de um critério de desempate porque nenhuma das partes teve empate na maior licitação, cada parte teve uma única amiga que a avaliou mais alto, facilitando a atribuição.

43. (Realizar em turma.)

Página 140 – Para aplicar

1.1. Distribuição inicial: A Iara recebe X e Y; a Joana recebe Z.

1.2. Distribuição final: A Iara fica com X e Y, pagando um ajuste financeiro para a Joana. A Joana fica com Z e recebe um ajuste financeiro.

2.1. António: 47 700 000 escudos;
Rodrigo: 52 000 000 escudos;
Henrique: 48 200 000 escudos.

2.2. Henrique: terreno urbano; Rodrigo: terreno rural, apartamento e automóvel; António: casa.

2.3. A afirmação está errada. O Henrique recebe somente o terreno urbano e recebe compensação financeira dos outros herdeiros para equilibrar a partilha.

2.4. Ajuste financeiro: O António paga 1 766 667 ao Henrique. O Rodrigo paga 12 066 667 ao Henrique. Distribuição final: O Henrique recebe o terreno urbano e compensação financeira (13 833 333); O Rodrigo fica com o terreno rural, o apartamento e o automóvel, paga o ajuste.
O António fica com a casa, paga o ajuste.

Página 141

3.1. O método das licitações secretas é mais adequado para a divisão de bens divisíveis cujo valor pode ser ajustado com compensações financeiras. No caso da piza: A piza é um bem consumível, não pode ser trocada por dinheiro após a divisão. A ideia não é pagar para comer uma parte da piza, mas sim garantir uma divisão justa. O método divisor único é mais adequado porque permite que cada primo receba uma parte que considera justa.

3.2. **a)** A Rita fica com $P1$; A Cristina fica com $P2$; O Mário fica com $P3$.
b) Como o Mário é o divisor, ele não escolhe a sua parte, ele fica com a que sobrar. Se ele não dividir a piza de forma justa, pode acabar com a parte menos valiosa para ele. Portanto, ele deve garantir que todas as partes tenham valor equilibrado, para que qualquer uma que sobre ainda seja vantajosa.

4.1. Distribuição final: O Diego recebe $P1$; o Gabriel recebe $P3$; o Rafael fica com $P2$.

4.2. Sim, a divisão pode ser considerada justa porque cada primo recebeu uma parte que considerava valiosa. O Rafael, como divisor, teve que dividir de maneira equilibrada, pois sabia que ficaria com a parte que sobrasse.

Página 142 – Teste

1.1. **(B)**
1.2. **(D)**
2. **(B)**
3. **(A)**

Página 143

4.1. **(B)** **4.2.** **(B)**
5. **(C)** **6.** **(C)** **7.** **(D)**

Página 144

8.1. O procedimento não está correto, pois a regra dos 25% pode fazer com que mais de dois candidatos passem para a segunda volta, ou até mesmo que nenhum candidato não passe à segunda volta, o que não é comum nos sistemas de maioria absoluta.

8.2. Não é garantido que apenas dois candidatos avancem para a segunda volta, pois a regra dos 25% pode permitir mais concorrentes, por exemplo: candidato $A - 30\%$, candidato $B - 35\%$, candidato $C - 29\%$ e candidato $D - 6\%$, passariam os candidatos A, B e C.

9.1. Ordem final pelo método de Borda: 1.° Amadeu, 2.ª Bianca, 3.ª Naira e 4.ª Milene.

9.2. Sim, o método da pluralidade daria o mesmo vencedor (Amadeu), mas poderia não refletir as preferências completas dos eleitores. O método de Borda fornece um *ranking* mais detalhado.

10.1. O prato vencedor pelo método de aprovação é a Feijoada de polvo, com 26 votos.

10.2. O vencedor poderia ser diferente, pois no método de pluralidade a Cachupa teria mais votos, mas no método de aprovação a Feijoada de polvo vence.

Página 145

11.1. A Beatriz não ficou com nenhum bem porque os outros ofereceram licitações mais elevadas. A Beatriz recebeu a compensação financeira equivalente à sua parte na herança.

11.2. O Tiago pagou 13 500 000 escudos.

11.3. A Daniela ofereceu a maior licitação pelo cavalo.

12.1. Qualquer hipótese de preenchimento, desde que a soma de cada modalidade seja 100% e a modalidade voleibol obtenha maior percentagem em $H2$.

12.2. Como estratégia, a professora Inês deverá atribuir o mínimo de pontuação possível ao horário $H1$.

Página 152 – Antes de começar

1.1. "n.° de horas que os alunos se dedicam a atividades extracurriculares"

1.2. Quantitativa, porque é quantificável.

1.3. 22 alunos.

1.4.

Horas	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
0	2	9
1	2	9
2	5	23
3	6	27
4	4	18
5	3	14
Total	22	100

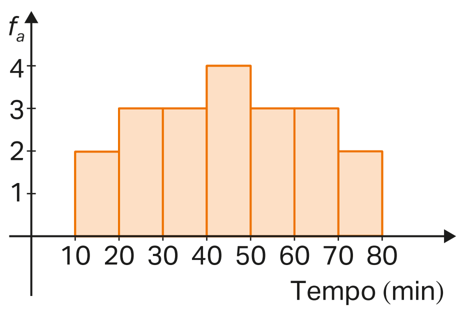
2.1. 20 alunos.

2.2.

Classes	Frequência Absoluta
[10, 20[	2
[20, 30[	3
[30, 40[	3
[40, 50[	4
[50, 60[	3
[60, 70[	3
[70, 80[	2
Total	20

2.3.

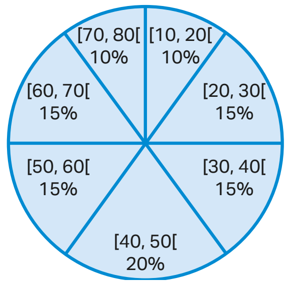
Tempo semanal de leitura



2.4.

Classes	Frequência Relativa (%)
[10, 20[	10
[20, 30[	15
[30, 40[	15
[40, 50[	20
[50, 60[	15
[60, 70[	15
[70, 80[	10
Total	100

Tempo de estudo semanal



3.1. A média do número de livros lidos é aproximadamente 1,9 .
3.2. A mediana do número de livros lidos é 2 .
3.3. A moda do número de livros lidos é 1 .
3.4. A amplitude dos dados é 4 .

4.1. $Q_1 = 18$, $Q_2 = 21{,}5$. (mediana), $Q_1 = 26$.
4.2. A amplitude interquartil é 8 .
4.3. Não, porque o valor máximo é 32 e o que o diagrama assinala apresenta-se mais próximo de 35 do que de 30 .

Página 153

5.1. A média da exportação como percentagem do PIB é 22,38% .
5.2. O ano com menor exportação foi 2020 (16,4%) e o ano com maior exportação foi 2018 (28,0%). A amplitude dos dados de exportação é 11,60% .
5.3. Por exemplo: em 2020, as exportações diminuíram devido à pandemia Covid-19.

Página 159

1.

Situação	Questão estatística
Uma escola quer avaliar o desempenho dos seus alunos no exame nacional de Matemática.	Quantos turistas visitaram cada ilha de Cabo Verde no último ano?
Uma empresa de transportes marítimos em Cabo Verde deseja saber a satisfação dos passageiros com os serviços oferecidos.	Qual é a média das notas dos alunos no exame nacional de Matemática?
Uma operadora turística quer avaliar a distribuição de turistas entre as diferentes ilhas do arquipélago.	Qual é a proporção da população vacinada contra a doença em cada ilha?
O Ministério da Saúde de Cabo Verde quer estudar a taxa de vacinação completa contra uma doença específica em diferentes ilhas.	Qual é a percentagem de passageiros que classificam o serviço como “muito bom” ou “excelente”?
Uma organização ambiental quer analisar a quantidade de resíduos reciclados em diferentes municípios ao longo dos últimos cinco anos.	Qual é a tendência na quantidade de resíduos reciclados nos últimos cinco anos em cada município?

Página 160

2. Situação 1: População: Todos os dispositivos fabricados na linha de produção da fábrica.
Indivíduo: Cada dispositivo fabricado.
Amostragem: Não, pois são recolhidos dados dos defeitos encontrados em todos os dispositivos fabricados.
Situação 2: População: Todas as residências do bairro.
Indivíduo: Cada residência no bairro.
Amostragem: Não, pois os dados são coletados de todas as residências do bairro.
Situação 3: População: Todas as faculdades da universidade.
Indivíduo: Cada faculdade da universidade.
Amostragem: Não, pois o estudo abrange todas as faculdades da universidade.
Situação 4: População: Todas as lojas de uma cidade que vendem o produto específico.
Indivíduo: Cada loja que vende o produto.
Amostragem: Sim, pois os dados são recolhidos de diferentes pontos de venda, mas não de todas as lojas da cidade.
Situação 5: População: Todas as mangas produzidas na safra da empresa.
Indivíduo: Cada manga produzida.
Amostragem: Não, pois os dados são recolhidos de todas as mangas colhidas na safra.

Página 162

3.1. **a)** A população estatística é o conjunto completo de todos os trabalhadores da empresa.
b) O indivíduo é cada trabalhador da empresa.
3.2. Sondagem.
3.3. Por exemplo, de todos os 500 funcionários sortear aleatoriamente 100 deles para a pesquisa.

Página 164

4.1. Barlavento: 400 clientes.
Sotavento: 200 clientes.
4.2. A amostragem estratificada proporcional é uma boa escolha porque: garante que cada região esteja devidamente representada na amostra de acordo com seu peso na população total; reduz o risco de enviesamento, assegurando que os resultados reflitam com maior precisão a diversidade das opiniões em todas as regiões; é especialmente útil quando diferentes estratos (no caso, as regiões) têm tamanhos muito desiguais, como neste exercício.
4.3. O total seria 400 clientes entrevistados.
4.4. Alterar o tamanho da amostra de apenas uma região pode gerar os seguintes riscos: Perda de representatividade; enviesamento nos resultados; conclusões incorretas.

Página 165

5.1. Intervalo de amostragem: 20.
5.2. Os primeiros cinco clientes selecionados são: 8, 28, 48, 68, 88.
5.3. É simples de aplicar, exigindo apenas a definição do intervalo e um ponto de partida aleatório. Garante uma distribuição uniforme da amostra ao longo da lista, evitando concentração de entrevistados em uma parte específica. É eficiente para populações grandes, como neste caso, reduzindo o custo e o tempo em comparação com outros métodos.
5.4. Padrões ocultos na lista; Ordem não aleatória; Representatividade reduzida.

Página 167

6.1. Três conglomerados.
6.2. $150\,000$ turistas.
6.3. Viabilidade prática; Logística simplificada; Representação de características locais.
6.4. Risco de falta de representatividade; Variação entre conglomerados; Dependência do tamanho dos conglomerados; Generalização indevida.

Página 168

7.1. Todos os turistas que visitam Cabo Verde.
7.2. Pode não ser.
7.3. Rapidez; Baixo custo; Facilidade de acesso aos respondentes.
7.4. Enviesamento de localização; Enviesamento de seleção; Generalização inadequada.
7.5. Para melhorar a representatividade, o pesquisador deve incluir turistas de outras ilhas, diversificar os locais e horários de coleta e adotar métodos de amostragem mais amplos, como estratificação ou aleatoriedade.

Página 169

8.1. Conglomerados (três ilhas).
8.2. Estratificada proporcional (faculdades).
8.3. Conveniência (passageiros de *ferries*).
8.4. Aleatória simples (clientes de energia).
8.5. Conglomerados (bairros).

Página 170

9.1. A amostra é enviesada porque considera apenas os simpatizantes de um único partido político, que têm maior probabilidade de apoiar o candidato desse partido. Isso não representa a opinião geral da população, composta por eleitores com diferentes preferências políticas. Para resultados mais adequados, a amostra deveria incluir eleitores de todos os partidos e independentes, escolhidos de forma aleatória ou estratificada.

9.2. Acender todos os fósforos fabricados num dia é ineficiente e desnecessário, pois compromete o produto e os custos de produção sem uma real necessidade estatística. Uma amostragem aleatória de fósforos seria suficiente para avaliar a qualidade de forma representativa, garantindo que a inspeção seja prática e mantenha a maior parte dos produtos intactos.

9.3. Questionar pessoas que saem de um concerto de música *rock* gera uma tendência de seleção, pois elas já têm uma predisposição positiva em relação ao género musical.
A opinião desse grupo não reflete a perceção da população geral, que inclui pessoas com gostos musicais variados. Para resultados mais representativos, a amostra deveria incluir indivíduos de diferentes contextos e com variados interesses musicais.

Página 174

10.

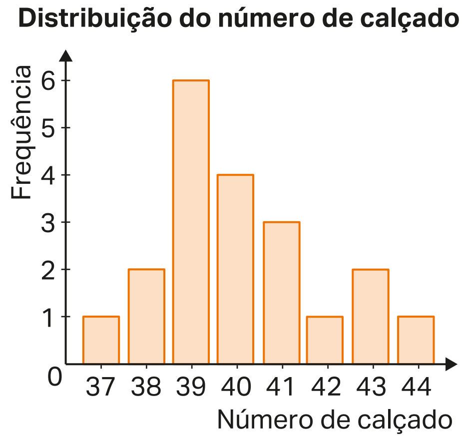
N.º de crias	f_a	F_a	f_r	F_r
1	3	3	0,075	0,075
2	7	10	0,175	0,25
3	8	18	0,2	0,45
4	12	30	0,3	0,75
5	10	40	0,25	1
Total	40		1	

Página 176

11.1.

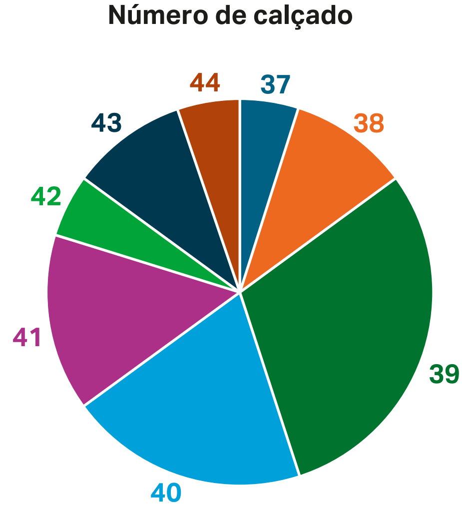
N.º de calçado	f_a	f_r
37	1	0,05
38	2	0,1
39	6	0,3
40	4	0,2
41	3	0,15
42	1	0,05
43	2	0,1
44	1	0,05
Total	20	1

11.2.



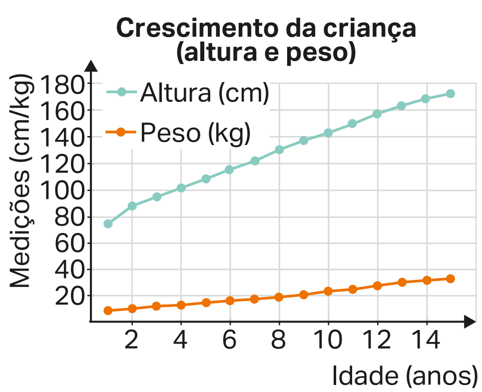
Página 178

12.



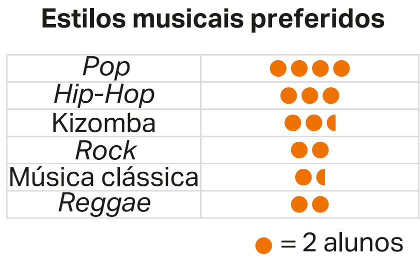
Página 179

13.



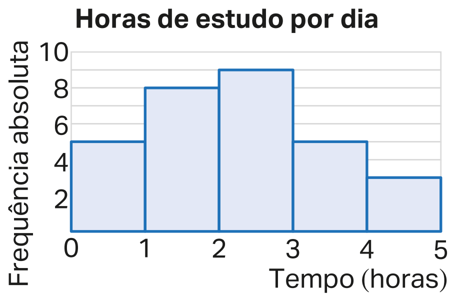
Página 180

14.



Página 182

15.



Página 188

16.1. A proporção total da população pobre é 35,2%.

16.2. **a)** As mulheres têm uma maior incidência de pobreza.
b) 1,4%

16.3. O grupo etário 0-4 anos tem a maior proporção de população pobre. O grupo etário 65 anos ou mais tem a menor proporção de população pobre.

16.4. **a)** Homens empregados: 27,1%; mulheres empregadas: 27,4%.
b) Diferença: 0,3%, que é pequena e, portanto, não significativa.

Página 189

17.1. 62,80%

17.2. 76,11%

17.3. 13,31%

17.4. O aumento de 2015 a 2022 foi mais significativo.

17.5. 2022

17.6. 1,46%

17.7. 44,90%

17.8. Por exemplo: aumentar a educação.

17.9. Sim, há uma clara tendência de crescimento, com a taxa de alfabetização aumentando consistentemente de 62,80% em 1990 para 91,00% em 2022.

17.10. Com base apenas nos dados do gráfico, não é possível determinar que ações devem ser implementadas no futuro.

Página 190

18.1. Temperatura máxima média (°C); Temperatura mínima média (°C) e Precipitação média (mm).

18.2. 28 °C

18.3. setembro.

18.4. 19 °C

18.5. A temperatura máxima média varia entre 25 °C (janeiro, fevereiro, dezembro) e 28-29 °C (agosto e setembro). Há um aumento gradual da temperatura máxima média de janeiro a setembro e uma diminuição a partir de outubro.

18.6. A precipitação aumenta significativamente entre julho (cerca de 20 mm) e setembro (90 mm). Agosto também apresenta um aumento moderado, com cerca de 60 mm.

18.7. A explicação provável é a ocorrência da época das chuvas, em Cabo Verde, influenciada pelas chuvas tropicais típicas dessa época do ano.

18.8. Sim. Durante os meses de maior precipitação (agosto e setembro), as temperaturas máxima e mínima médias estão mais altas (28-29 °C e 24 °C, respetivamente). Isso sugere que o aumento da temperatura contribui para a formação de condições climáticas favoráveis à precipitação.

18.9. 3 °C

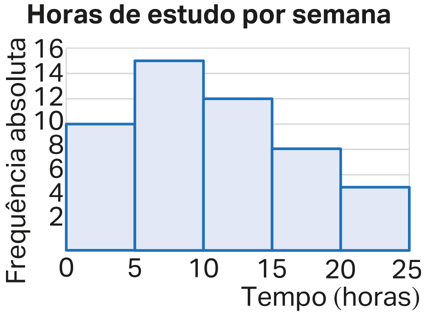
18.10. Temperatura máxima média: cerca de 27 °C (levemente inferior a setembro); Temperatura mínima média: cerca de 24 °C (semelhante a setembro); Precipitação: deve diminuir, mas ainda significativa, com níveis moderados (provavelmente inferiores a setembro, cerca de 60-70 mm). Fatores considerados: tendência de queda da precipitação após setembro. Declínio gradual das temperaturas máximas após o pico em setembro. Dados históricos apresentados no gráfico, que mostram transições sazonais consistentes.

Página 191

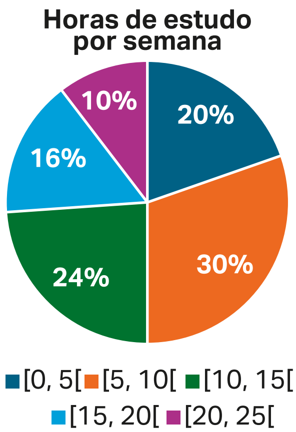
19.1. e **19.2.**

Horas de estudo por semana	f_r	f_r (%)
[0, 5[	0,2	20
[5, 10[	0,3	30
[10, 15[	0,24	24
[15, 20[	0,16	16
[20, 25[	0,1	10
Total	1	100

19.3.



19.4.



19.5. A maioria dos estudantes dedica entre 5 e 10 horas por semana ao estudo. Um número considerável estuda entre 10 e 15 horas por semana, mostrando um esforço maior; apenas uma pequena fração (10%) estuda quase 25 horas por semana, indicando que poucos alunos dedicam muito tempo ao estudo. Cerca de 20% dos estudantes dedicam menos de 5 horas por semana, o que pode sugerir falta de envolvimento ou planeamento nos estudos.

20.1. Tempo de entrega (em minutos).
20.2. Histograma.
20.3. O histograma é ideal para variáveis contínuas, como o tempo de entrega. Também permite visualizar rapidamente a frequência das entregas em cada período específico.
As alturas das barras tornam evidente quais tempos de entrega são mais comuns, ajudando na análise da eficiência do serviço.
20.4. Entre 7 e 9 minutos.

Página 195

21. 29,03 °C

22. 28,4 anos

23. 2,4 irmãos

Página 196

24. 3,7 minutos

Página 198

25. 28 anos

26. 2 irmãos

Página 199

27. [2 , 4[

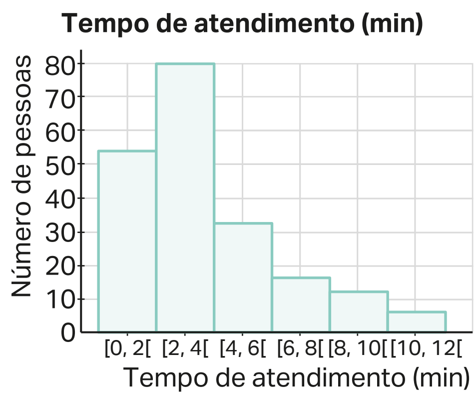
Página 200

28. 28 anos

29. 2 irmãos

Página 201

30.1. [2, 4[
30.2.



30.3. A moda, calculada geometricamente, é aproximadamente 2,70 minutos.

Página 204

31.1.

"Peso"	f_a	f_r	F_r
55	2	0,10	0,10
57	1	0,05	0,15
60	3	0,15	0,30
62	2	0,10	0,40
65	4	0,20	0,60
68	2	0,10	0,70
70	3	0,15	0,85
72	1	0,05	0,90
75	1	0,05	0,95
78	1	0,05	1
Total	20	1	

31.2. 65 kg
31.3. $Q_1 = 60$ kg ; $Q_3 = 70$ kg

Página 206

32. Terão de fazer a prova prática os alunos com nota igual ou inferior a 13 (ou seja, os primeiros 389).

Página 207

33. A criança situa-se no percentil 25, o que significa que 25% das crianças com 12 meses têm 70 cm ou menos de altura.

Página 208

34. 10

Página 210

35.1. 10,05 cm

35.2. $\sigma^2 = 0{,}0475$
Este valor da variância indica que os dados estão próximos da média. Assim, não há grande variabilidade nos comprimentos dos fios, pois os valores são consistentes.

Página 211

36.1.

Comprimento dos peixes	f_a
[12,6 ; 16,8[	4
[16,8 ; 21,0[	11
[21,0 ; 25,2[	4
[25,2 ; 29,4[	1
[29,4 ; 33,6[	8
[33,6 ; 37,8[	5
[37,8 ; 42,0[	7
Total	40

36.2. $\sigma \cong 8{,}8$

36.3. O desvio-padrão de $8{,}8$ cm é significativo em relação à média (27,4 cm), indicando alta variabilidade nos comprimentos dos peixes.

Página 216 – Para aplicar

1.1. Amostragem aleatória simples: A universidade deve numerar todos os $10\,000$ alunos e usar um *software* ou sorteio aleatório para selecionar 500 alunos, garantindo que todos tenham a mesma probabilidade de serem escolhidos.

1.2. Amostragem estratificada: Devem dividir os alunos por faculdade (estratos) e selecionar proporcionalmente cada faculdade com base no número de alunos matriculados em cada uma. Dentro de cada estrato, usar amostragem aleatória simples para selecionar os alunos.

1.3. Amostragem sistemática: Escolha um número inicial aleatório entre 1 e 20 e selecione cada 21.º aluno a partir desse ponto na lista.

1.4. Amostragem por conglomerados: Escolha aleatoriamente algumas faculdades ou turmas (conglomerados). Todos os alunos dentro dos conglomerados selecionados farão parte da amostra.

1.5. Amostragem por conveniência: Selecione alunos em locais de fácil acesso, como bibliotecas, refeitórios ou corredores da universidade, dependendo de quem estiver disponível no momento.

2.1. Média: $31{,}5\%$
Mediana: 30%
Moda: 25%

2.2. Variância: $262{,}8$
Desvio-padrão: $16{,}2$

Página 217

3.1. Aproximadamente, $1{,}2$ livros.

3.2. Amplitude interquartil: 2.

3.3. Aproximadamente, $1{,}12$.

4.1. **Dados em ordem crescente:** 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 40

4.2. Mediana: 29; Q_1: 23; Q_3: 33

4.3. Variância: $31{,}8$
Desvio-padrão: $5{,}5$

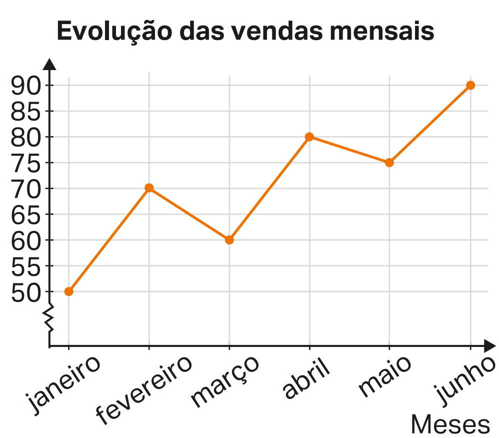
5.1. Grupo A teve médias de 14 no Exame 1 e 16 no Exame 2 (melhora de $+2$).
Grupo B teve médias de 12 no Exame 1 e 15 no Exame 2 (melhora de $+3$).
Conclusão: o Grupo A obteve melhores médias em ambos os exames, mas o Grupo B apresentou maior progresso.

5.2. Grupo A – Desvio-padrão: 1
Grupo B – Desvio-padrão: $1{,}5$

5.3. O Grupo A foi mais consistente, com menor variabilidade.

Página 218

6.1.



6.2. Aproximadamente, $70{,}8$ vendas.

6.3. O maior aumento foi de 20 vendas, ocorrido nos meses de fevereiro e abril.

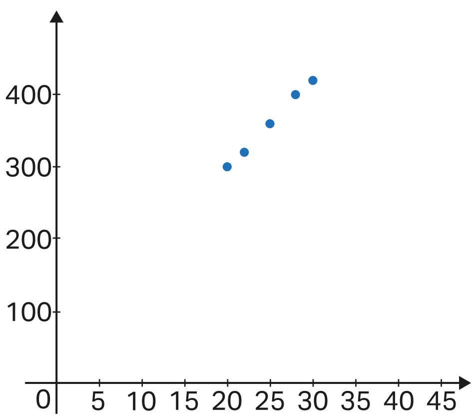
7. **(A)** V
(B) V
(C) V
(D) V
(E) F
(F) V

Página 222

37. A : positiva; B : sem correlação; C : sem correlação; D : negativa.

Página 223

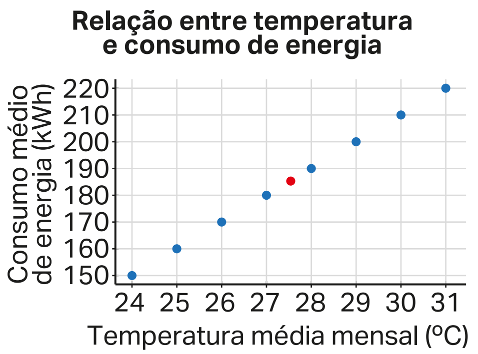
38.



38.1. (25,360)

38.2. Há uma relação positiva entre temperatura e consumo de energia elétrica. À medida que a temperatura aumenta, o consumo de energia também aumenta.

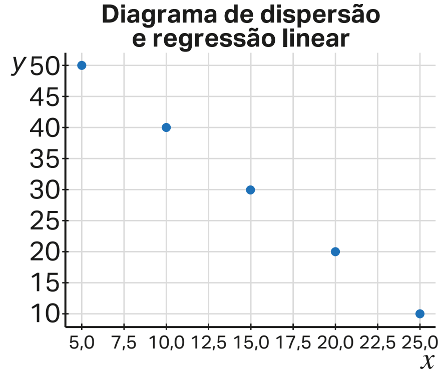
39.



Existe uma relação positiva linear entre temperatura e consumo de energia elétrica. À medida que a temperatura aumenta, o consumo de energia também aumenta.

Página 226

40.1.

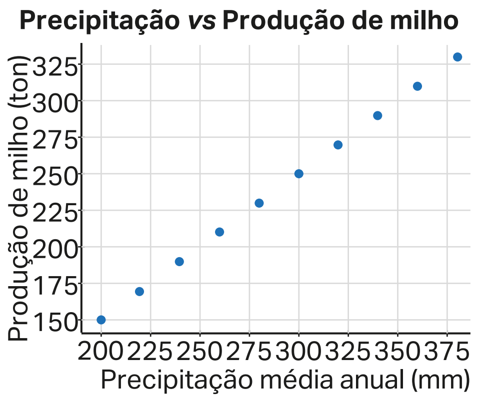


40.2. $y = -2x + 60$

40.3. $y = 36$

40.4. A questão correta deve ser: "Qual o valor de x se $y = 25$?".
$x = 17{,}5$

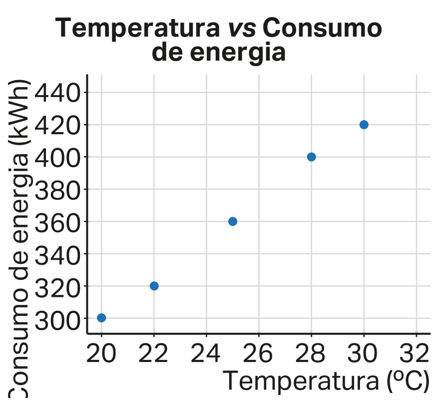
41.1.



41.2. Sim. Existe uma forte correlação positiva entre a precipitação média anual e a produção de milho. Isso é evidente pela tendência linear crescente, em que o aumento na precipitação resulta num aumento na produção de milho.

41.3. Reta: $y = x - 51$. A previsão de produção é 200 toneladas.

42.1.



A equação da reta de regressão é:
$y = 12{,}35x + 51{,}18$

42.2. O consumo estimado é, aproximadamente, 446,47 kWh .

42.3. A relação entre temperatura média e consumo de energia elétrica é fortemente positiva e linear. O aumento na temperatura média resulta num aumento consistente no consumo de energia, como evidenciado pela tendência ascendente no gráfico. Portanto, a afirmação é falsa.

Página 229

43.1. O coeficiente de correlação é $r = -1$. Existe uma correlação negativa perfeita.

43.2. O coeficiente de correlação é $r = -1$. Existe uma correlação negativa perfeita.

44.1. O coeficiente de correlação $r = 1$ indica uma correlação positiva perfeita. Isso significa que o número de escolas aumenta linearmente com o aumento da população.

44.2. 28 escolas.

44.3. 5000 habitantes.

Página 233

45.1. Exercício a realizar com *software.*

45.2. Exercício a realizar com *software.*

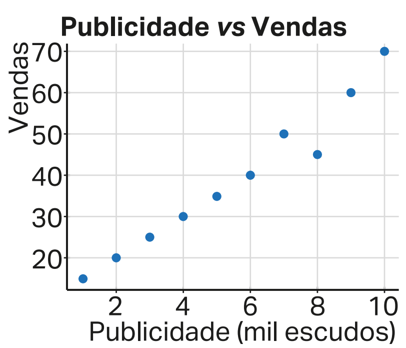
Página 234 – Para aplicar

1. **(A)** F **(B)** V **(C)** F **(D)** F
(E) V **(F)** V **(G)** V **(H)** V

2.1. Diagrama I (Correlação Positiva). Por exemplo – Horas de estudo (x) e classificação de uma prova (y). Diagrama II (Correlação Negativa). Por exemplo – Distância percorrida (x) e combustível restante no depósito (y).

2.2. Diagrama I: Este diagrama apresenta uma correlação positiva entre as variáveis. Isso significa que à medida que uma variável aumenta, a outra também aumenta.
Diagrama II: Este diagrama apresenta uma correlação negativa entre as variáveis.
À medida que uma variável aumenta, a outra diminui.

3.1.



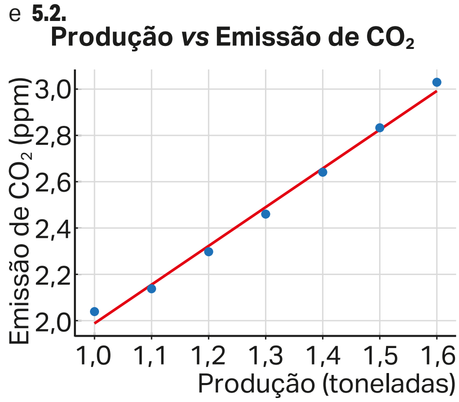
3.2. Existe uma tendência geral positiva, indicando que, em geral, o aumento na quantidade de publicidade provoca um aumento no número de vendas.

Página 235

4.1. **(A)**

4.2. O coeficiente $r = -0,70$ é o mais ajustado porque o gráfico mostra uma correlação negativa moderada a forte, com a satisfação a diminuir com mais dias de atraso.

5.1. e **5.2.**



Centro de gravidade $= (1,30\,;\,2,49)$

5.3. $r = 0,996$

6. O coeficiente de correlação $r = 1,9946$. Esse valor está muito próximo de 1 , o que indica uma forte correlação positiva entre a temperatura e o consumo de gelado. Isso significa que à medida que a temperatura aumenta, o consumo de gelado também tende a aumentar de forma consistente.

Página 236 – Teste

1. **(A)** **2.** **(D)**
3. **(B)** **4.** **(A)**
5. **(C)** **6.** **(B)**

Página 237

7. **(B)** **8.** **(A)**
9. **(C)** **10.** **(B)**
11. 30

Página 238

12.1. Dezembro, 17 livros.

12.2. Abril, 28 livros.

12.3. 136 livros.

13.

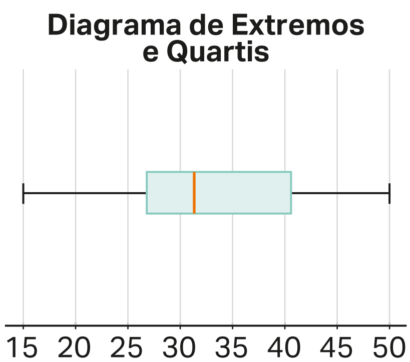
i	x_i	F_i	Fac_i
1	2	2	2
2	3	7	9
3	4	12	21
4	5	8	29
5	6	5	34

14.1. 40 alunos.
14.2. 33 alunos.
14.3. 45%

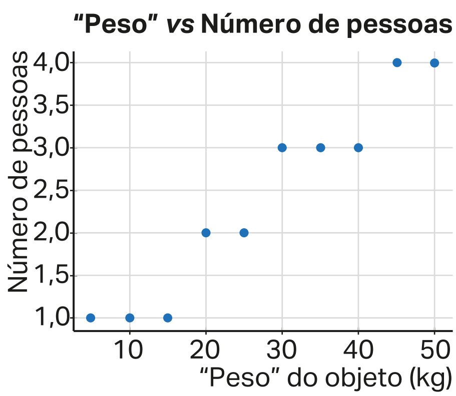
Página 239

15.1. Valores entre 150 cm e 180 cm .
15.2. A afirmação é verdadeira.
15.3. 24 alunos.

16.1. Mediana: 31 .
16.2. Amplitude: 35 .
16.3.



17.1.



17.2. $r = 0{,}969$

18. $r = -0{,}837$ indica uma correlação negativa forte. Isso significa que à medida que a idade aumenta, a massa muscular tende a diminuir. Afirmação verdadeira.

Página 243

1. 13 800 escudos.

2.1. 25 000 escudos.
2.2. 5000 escudos.

Página 244

3.1. Aproximadamente, 1917 escudos.
3.2. Aproximadamente, 1667 escudos.

Página 245

4. 15 000 escudos.

5.1. 4000 escudos.
5.2. A senhora Maria.

6. 75 000 escudos.

Página 248

7. **(A)** V **(B)** V **(C)** F
(D) F **(E)** V

8. **(C)** **9.** **(B)** **10.** **(B)**

Página 250

11.1. Aproximadamente, 116 .
11.2. 109,375

Página 251

12.1. 150
12.2. Aproximadamente, 40% .
12.3. No caso de a inflação ter sido de um aumento gradual, a afirmação poderá ser verdadeira. Mas tal pode não ter ocorrido, pelo que não se pode concluir nada quanto ao preço em 2021.

13.1.

120	125	125	140
420	400	440	440
200	225	230	260
60	70	60	80
800	820	855	920
100	102,5	106,875	115
---	2,5	4,3	7,6

13.2. Para o produto B , entre os anos-base e X , porque o preço do produto baixou. Para o produto D , entre os anos X e Y , porque o preço do produto baixou.
13.3. A afirmação é falsa, porque o cálculo da taxa de inflação usa o custo total do cabaz, podendo esse ser superior de um ano para o outro, mesmo que um produto tenha sofrido um decréscimo do seu preço.

Página 254

14. Aproximadamente, $11\,593$ escudos.

15. Aproximadamente, $10\,706$ escudos.

16. Aproximadamente, 7920 escudos.

17. Exercício a realizar com *software.*

Página 256

18. 1600 escudos.

19.1. $66\,911$ escudos.
19.2. $16\,911$ escudos.

Página 257

20. **(C)**

Página 259

21. **(B)** **22.** **(B)** **23.** **(B)**

Página 260

24. Aproximadamente, $1\,469\,328$ escudos.

25. Aproximadamente, $895\,424$ escudos.

26.1. O investidor B.
26.2. Aproximadamente, $24\,467$ escudos.

Página 261

27. Aproximadamente, $54\,107$ escudos.

28.1. Aproximadamente, $36\,005$ escudos.
28.2. Aproximadamente, $6\,480\,900$ escudos.

29.1. O Amigo A.
29.2. Aproximadamente, $61\,608$ escudos.

Página 264 – Para aplicar

1.1. 8500 escudos.
1.2. $58\,500$ escudos.

2. **(B)**

3.1. $29\,250$ escudos.
3.2. $32\,500$ escudos.

4. Aproximadamente, 1825 escudos.

5. Aproximadamente, 8750 escudos.

6. Aproximadamente, $75\,026$ escudos.

7. **(B)**

Página 265

8. 12 meses.

9.1. Valor do IVA (15%): 1050 escudos.
9.2. Preço final com IVA (15%): 8050 escudos.
9.3. Preço final com IVA reduzido (10%): 7700 escudos.

10.1. Valor anual do IUP $(0{,}4\%)$: $48\,000$ escudos.
10.2. Aumento de $12\,000$ escudos.

11.1. IPC para 2023: 115.
11.2. Taxa de inflação acumulada (2020-2023): 15%.

12.1. Montante final do Investidor B (juros compostos): $266\,200$ escudos.
12.2. O Investidor B tem um retorno maior com diferença de 6200 escudos.

Página 266 – Teste

1. **(C)** **2.** **(D)** **3.** **(A)** **4.** **(B)**

5. **(B)** **6.** **(A)** **7.** **(C)**

Página 267

8. **(A)** F **(B)** V **(C)** V **(D)** V

9. **(C)** **10.** **(B)** **11.** **(B)**

12.1. $24{,}8$ escudos.
12.2. $495{,}20$ escudos.
12.3. Aproximadamente, $569{,}48$ escudos.

13.1. $10\,800$ escudos.
13.2. Ao fim de cinco anos.

Página 268

14.1. $600\,000$ escudos.
14.2. $11\,400\,000$ escudos.

15.1. A casa B.
15.2. 1000 escudos.

16.1. Em 2022.
16.2. Considerando 2015 como ano-base, podemos afirmar que os preços dos produtos subiram $6{,}29\%$ em média em 2016.
16.3. Não.

Página 269

17. Aproximadamente, $3\,460\,585$ escudos em 2030 e $4\,011\,766$ escudos em 2035.

18.1. 10 meses.
18.2. 20 meses.

19. 8750 escudos.

20.1. Aproximadamente, $75\,026$ escudos.
20.2. Oito anos.

21.1. Plano C.
21.2. Sim.

22.1. Aproximadamente, $22\,244$ escudos.
22.2. Aproximadamente, $1\,334\,640$ escudos.

Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Humanas 10.º ano

Criação intelectual
Filipe José Alves do Couto

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
Shutterstock.com
Porto Editora
© Pedro Moita

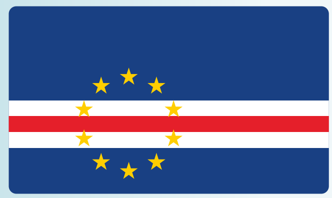
Edição
2025

Este manual segue
o programa experimental
da disciplina, publicado pelo
Ministério da Educação.

Cabo Verde

Brasão

Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!

Este livro foi aprovado pelo Ministério da Educação para utilização obrigatória nas escolas