Matemática

Aplicada às Artes

10.º ano

Ministério da Educação

Matemática

Aplicada às Artes

10.º ano

Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado pela Universidade de Cabo Verde.

Ministério da Educação

Explora o teu manual digital

https://escolavirtual.cv

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

DISPONÍVEL NO Google Play

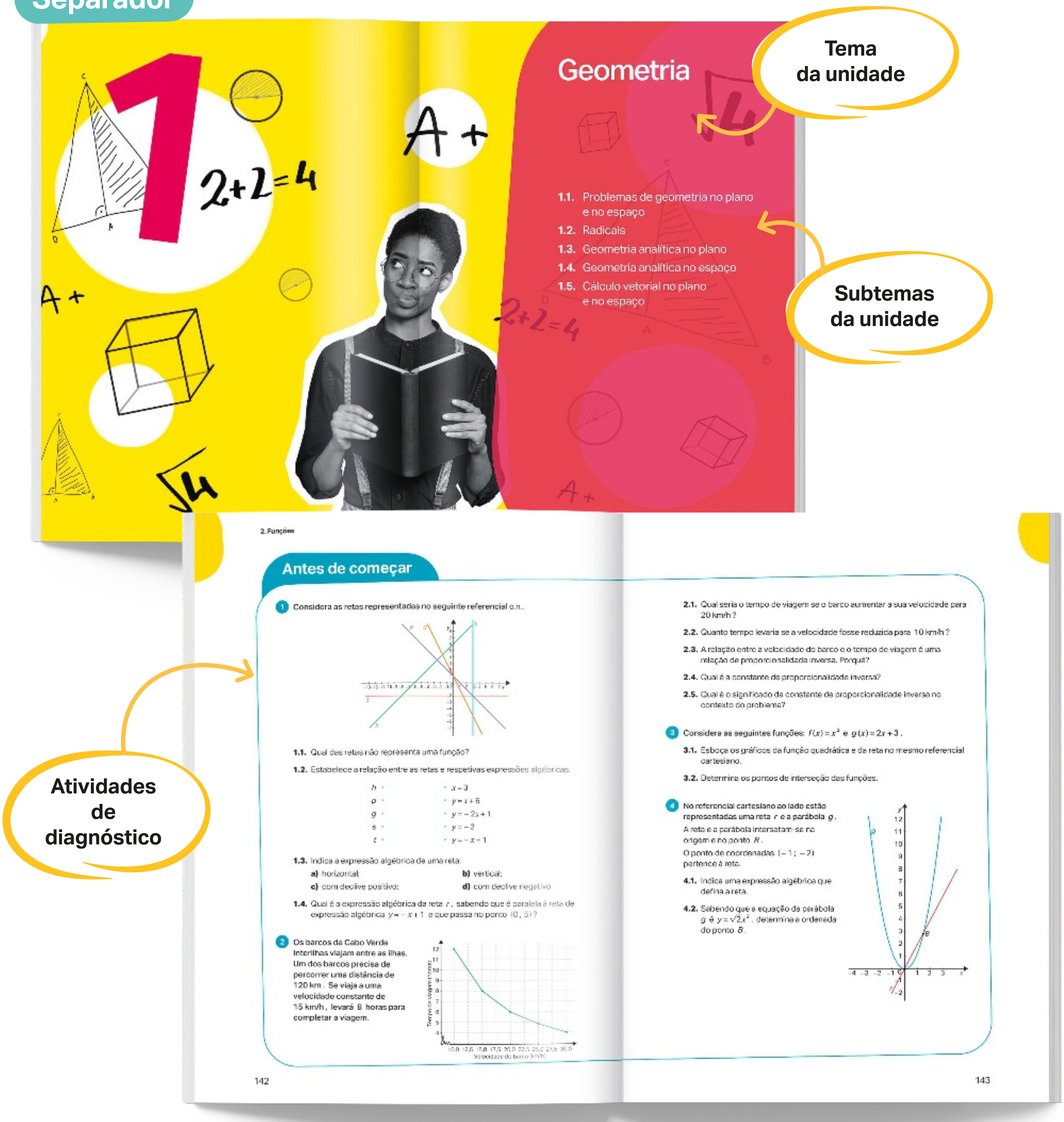
Descarregar na App Store

Conhece o teu manual

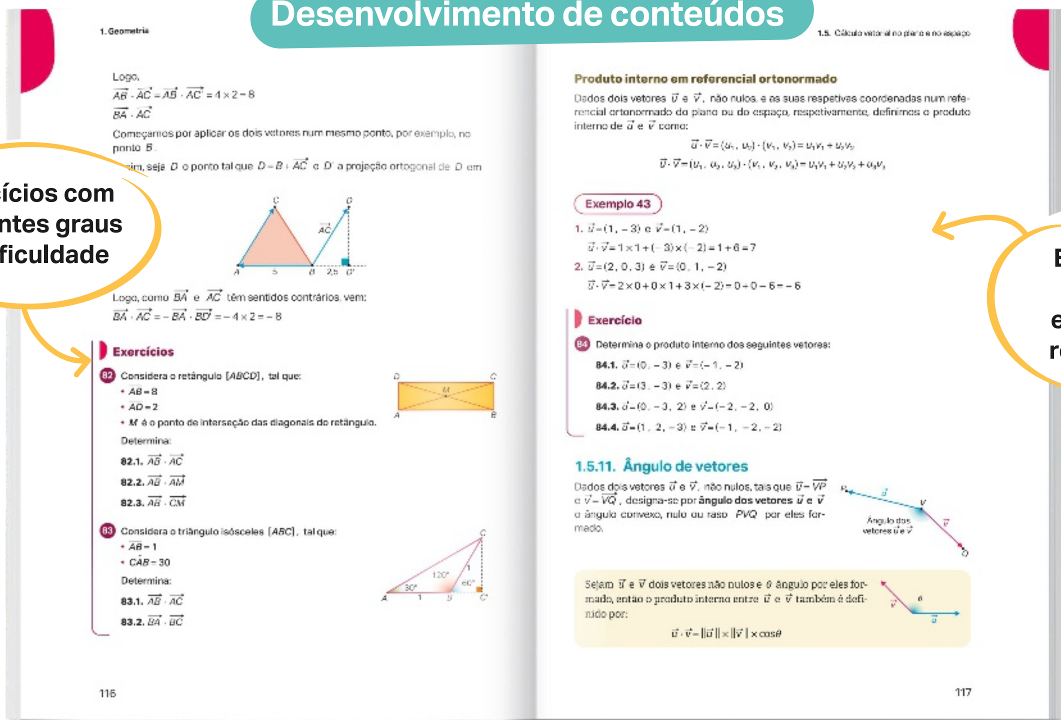
Este manual tem como objetivo ajudar-te neste Novo percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em três temas, de acordo com o plano curricular do ensino secundário. Os temas (Geometria, Funções e Estatística) dividem-se, por sua vez, em subtemas.

Cada tema e subtema são compostos por…

Separador



Desenvolvimento de conteúdos

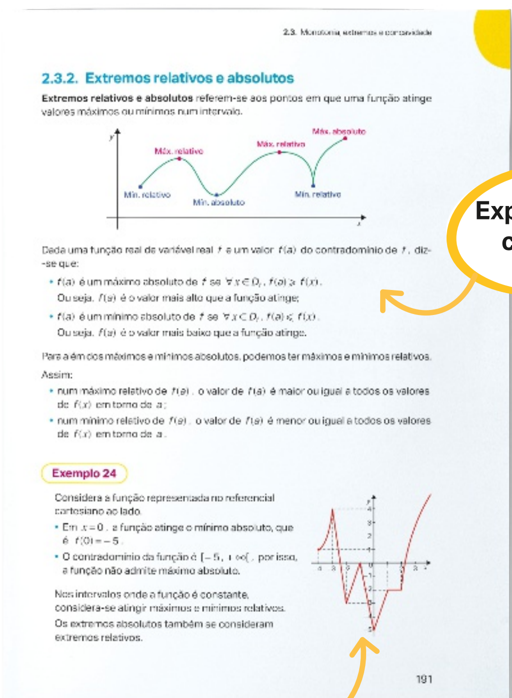


Exercícios com diferentes graus de dificuldade

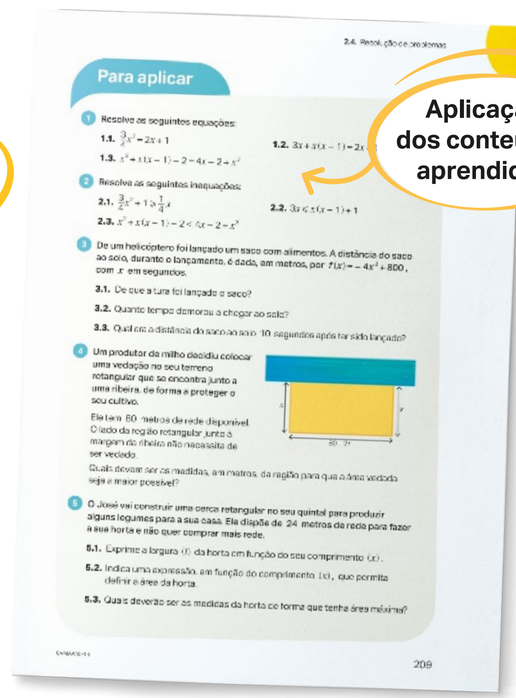
Exemplos de exercícios resolvidos

Ao longo do teu manual...

Para aplicar



Explicação dos conteúdos



Aplicação dos conteúdos aprendidos

Imagens ilustrativas

Índice

1

Índice


1
2+2=4
A+
√4

Geometria

1.1. Problemas de geometria no plano e no espaço

1.2. Radicais

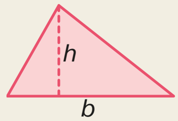
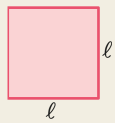
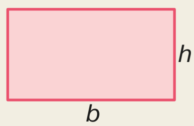
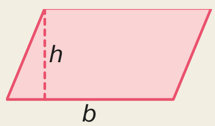
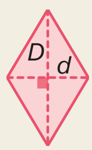
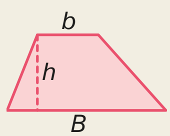
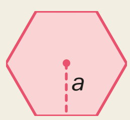
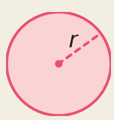
1.3. Geometria analítica no plano

1.4. Geometria analítica no espaço

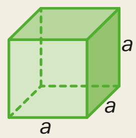
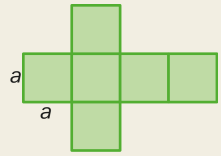
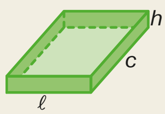
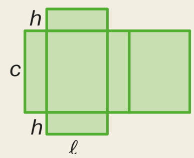
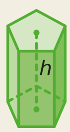
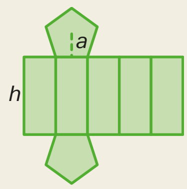
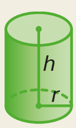
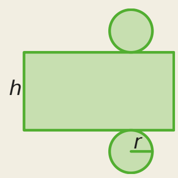
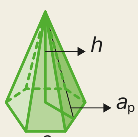
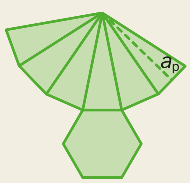
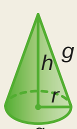
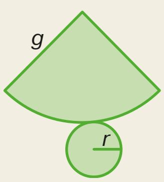
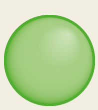
1.5. Cálculo vetorial no plano e no espaço

Recorda

Áreas de figuras planas

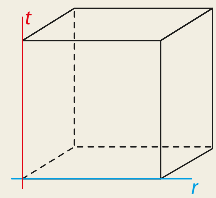
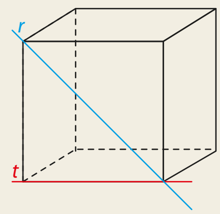
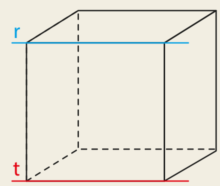
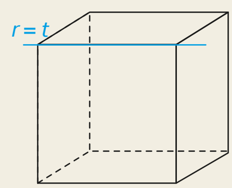
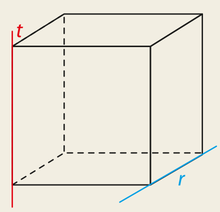
Triângulo		$A = \frac{b \times h}{2}$	b – base h – altura
Quadrado		$A = \ell^2$	ℓ – lado
Retângulo		$A = b \times h$	b – base h – altura
Paralelogramo		$A = b \times h$	b – base h – altura
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$	D – diagonal maior d – diagonal menor
Trapézio		$A = \frac{B + b}{2} \times h$	B – base maior b – base menor h – altura
Polígono regular		$A = \frac{P}{2} \times a$	P – perímetro a – apótema
Círculo		$A = \pi r^2$ $(P = 2\pi r)$	r – raio

Áreas e volumes de sólidos geométricos

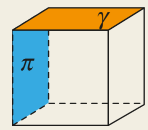
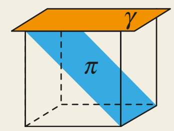
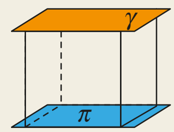
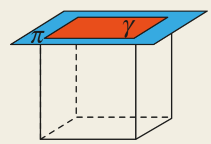
Sólido	Planificação	Área lateral	Área total	Volume
Cubo 		$A_l = 4a^2$	$A_t = 6a^2$	$V = A_b \times h$ $V = a^3$ A_b – área da base
Paralelepípedo retângulo 		$A_l = P_b \times h$ P_b – perímetro da base	$A_t = A_l + 2A_b$	$V = A_b \times h$ $V = c \times \ell \times h$
Prisma regular 		$A_l = P_b \times h$	$A_t = A_l + 2A_b$	$V = A_b \times h$
Cilindro de revolução 		$A_l = P_b \times h$ $= 2\pi r \times h$	$A_t = A_l + 2A_b$ $= 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = A_b \times h$ $V = \pi r^2 \times h$
Pirâmide  a_p apótema da pirâmide		$A_l = \frac{P_b}{2} \times a_p$	$A_t = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h$
Cone  g geratriz do cone		$A_l = \frac{P_b}{2} \times g$ $= \pi r \times g$	$A_t = A_l + A_b$ $= \pi rg + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h$
Esfera 	—	—	$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Recorda

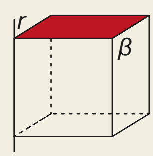
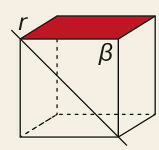
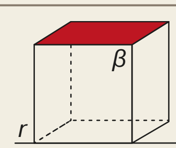
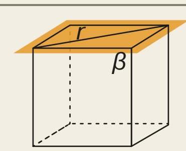
Posição relativa de duas retas no espaço

<table>
<tr><th colspan="3">Posição relativa de duas retas complanares</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Duas retas são concorrentes se tiverem um único ponto em comum.</td><td>Duas retas concorrentes são perpendiculares quando os ângulos por elas formados têm amplitudes de $90°$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Duas retas concorrentes são oblíquas quando os ângulos por elas formados não têm amplitudes de $90°$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Duas retas são paralelas se não forem concorrentes.</td><td>Duas retas complanares são estritamente paralelas se não têm nenhum ponto em comum.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Duas retas são coincidentes se têm todos os pontos em comum.</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="3">Posição relativa de duas retas não complanares</th></tr>
<tr><td>Retas não complanares</td><td>Duas retas são não complanares se não existe nenhum plano que contenha simultaneamente as duas retas.</td><td>
</td></tr>
</table>

Posição relativa de dois planos no espaço

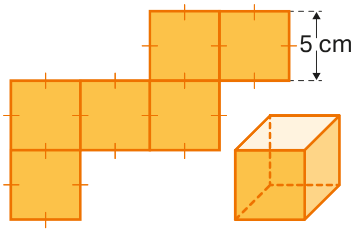
Posição relativa de dois planos		
Dois planos são **concorrentes** se tiverem uma única reta em comum.	Dois planos concorrentes são **perpendiculares** quando os ângulos por eles formados têm amplitudes de $90°$.	
	Dois planos concorrentes são **oblíquos** quando os ângulos por eles formados não têm amplitudes de $90°$.	
Dois planos são **paralelos** se não forem concorrentes.	Dois planos são **estritamente paralelos** se não têm nenhuma reta em comum.	
	Dois planos são **coincidentes** se têm todas as retas em comum.	

Posição relativa de uma reta relativamente a um plano no espaço

Posição relativa de uma reta relativamente a um plano		
Uma reta é **secante** a um plano se a reta e o plano tiverem um, e um só, ponto em comum.	Uma reta é **perpendicular** a um plano quando o ângulo por eles formado tem amplitude de $90°$.	
	Uma reta é **oblíqua** a um plano quando o ângulo por eles formado não tem amplitude de $90°$.	
Uma reta é **paralela** a um plano se a reta não é secante ao plano.	Uma reta é **estritamente paralela** a um plano se a reta e o plano não têm nenhum ponto em comum.	
	Uma reta está **contida** num plano se todos os pontos da reta fazem parte do plano.	

Antes de começar

1 **Considera o cubo de aresta 5 cm representado na figura e a sua planificação.**



1.1. Determina o volume do cubo.

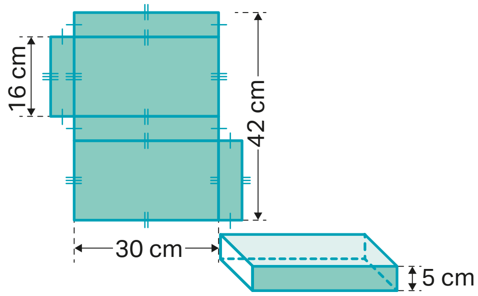
1.2. Determina a área da planificação do cubo.

1.3. Determina, com aproximação às décimas, o comprimento da diagonal de uma face do cubo.

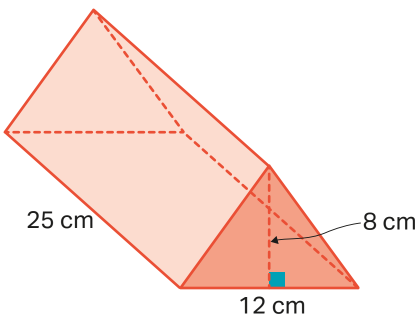
2 **Para o prisma retangular ao lado, determina:**

2.1. a área total da superfície;

2.2. o volume.



3 **Observa o prisma triangular apresentado na figura e determina o seu volume.**

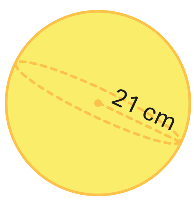


4 **Considera a esfera de raio igual a 21 cm .**

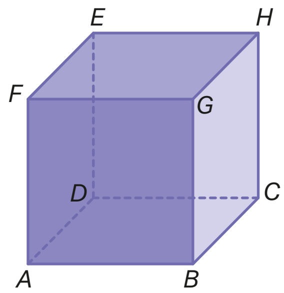
4.1. Determina o volume da esfera e apresenta o resultado em centímetros cúbicos.

4.2. Comenta a afirmação:

Existe um segmento de reta com 40 cm que passa no centro da esfera cujos extremos estão fora da esfera.



5 **Na figura ao lado está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.**



Recorrendo às letras da figura, indica:

5.1. duas retas paralelas;

5.2. duas retas concorrentes;

5.3. duas retas não complanares;

5.4. dois planos oblíquos;

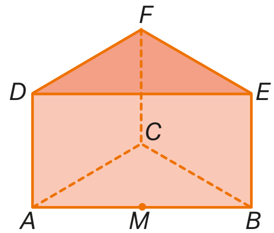
5.5. dois planos paralelos;

5.6. uma reta paralela ao plano $FEHG$;

5.7. uma reta perpendicular ao plano $FEHG$;

5.8. uma reta oblíqua ao plano $ABCD$.

6 **Considera o prisma triangular $ABCDEF$ representado na figura.**



O ponto M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

6.1. Indica a posição relativa:

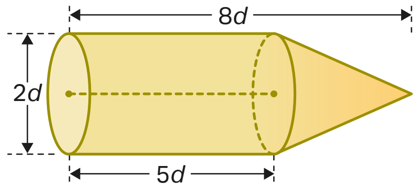
a) da reta FC com a reta BC;
b) da reta DC com a reta EB;
c) da reta DE com o plano $FEBC$;
d) da reta MC com o plano ABC;
e) do plano $FEBC$ com o plano DEF.

6.2. Comenta a afirmação:

O segmento de reta $[MC]$ é perpendicular ao segmento de reta $[AB]$.

Antes de começar

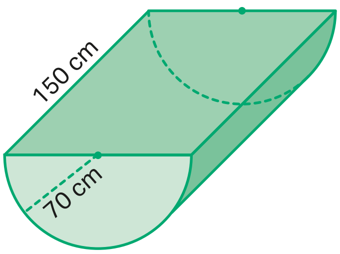
7 **Considera o sólido representado na figura, composto por um cilindro e um cone.**



7.1. Escreve uma expressão algébrica que represente o volume do sólido.

7.2. Para $d = 4$ cm, determina, com aproximação às centésimas, o volume do sólido.

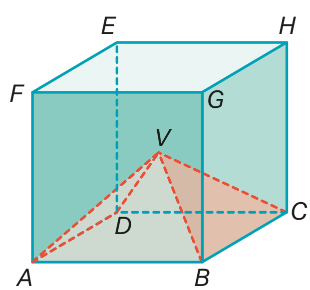
8 **O Vicente e o seu pai querem aproveitar um barril metálico, de forma cilíndrica, para construírem um grelhador. Cortaram o barril ao meio, conforme apresentado na figura.**



8.1. Determina o volume do barril antes de ser cortado.

8.2. Determina a área da superfície lateral do grelhador que resulta do corte do barril ao meio.

9 **Na figura ao lado, estão representados o cubo [*ABCDEFGH*] e a pirâmide [*ABCDV*]. Sabemos que o vértice *V* da pirâmide coincide com o centro do cubo e que volume do cubo é igual a 1728 cm^3.**



9.1. Determina o volume da pirâmide [*ABCDV*].

9.2. Determina o volume do cubo [*ABCDEFGH*] não ocupado pela pirâmide [*ABCDV*].

1 Geometria

Manual Interativo

Vídeo
História da Geometria

1.1. Problemas de geometria no plano e no espaço

1.1.1. História da geometria

A palavra “geometria” tem origem grega, derivando da aglutinação de “geo”, que significa “terra”, com “metron” que significa “medida”. Originalmente, a geometria surgiu da necessidade de medir e descrever a Terra, especialmente para fins de agricultura e construção. A geometria é uma das mais antigas e fundamentais áreas da matemática, com raízes que remontam às civilizações antigas. Os antigos egípcios e babilónios usavam conceitos geométricos para construir pirâmides e resolver problemas práticos relacionados com a Terra. No entanto, a geometria só começou a ser formalizada e sistematizada com os gregos antigos.

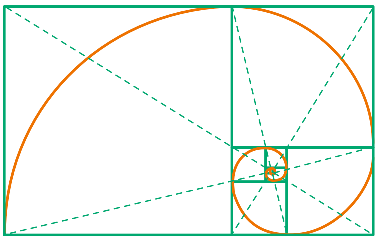
Euclides (cerca de 300 a. C.) é frequentemente chamado o ”pai da geometria”. O seu trabalho mais famoso, os *Elementos*, é uma coleção de livros que sistematizam o conhecimento geométrico da época. Os *Elementos* são uma obra que reúne a geometria num conjunto de axiomas e teoremas. A geometria euclidiana, baseada neste trabalho, tornou-se a base do ensino de geometria ao longo dos séculos.

Arquimedes (cerca de 287-212 a. C.) deixou também importantes contribuições para a geometria, especialmente no cálculo de áreas e volumes. Os seus trabalhos sobre a área do círculo e o volume da esfera, bem como a invenção de métodos para calcular a área de superfícies delimitadas por curvas, são marcos fundamentais na história da matemática.

Conhecido pelos seus trabalhos sobre cónicas, **Apolónio de Perga** (cerca de 262-190 a. C.), matemático e astrónomo grego, estudou secções cónicas (elipses, parábolas e hipérboles), um campo da geometria que tem aplicações em várias áreas da matemática e da física.

Durante a Idade Média, a geometria europeia foi amplamente influenciada pelo trabalho dos matemáticos árabes e persas, que preservaram e expandiram o conhecimento grego. **Omar Khayyam** (1048-1131) foi um matemático persa que contribuiu significativamente para a teoria das equações e para a geometria ao efetuar a resolução de equações cúbicas a partir de argumentos geométricos.

Outro matemático que se destacou neste período foi **Leonardo de Pisa** (Fibonacci) (1170-1250). Embora tenha ficado célebre por introduzir a sequência de Fibonacci na matemática ocidental, Fibonacci também estudou e aplicou conceitos geométricos. A espiral de Fibonacci, apresentada na figura ao lado, é uma curva que se aproxima de uma espiral logarítmica e é formada por uma sequência de arcos que conetam os cantos opostos de quadrados adjacentes dispostos de acordo com a sequência de Fibonacci. Essa espiral é uma representação visual da sequência de Fibonacci na geometria.



René Descartes (1596-1650), um dos filósofos e matemáticos mais influentes da História, contribuiu fundamentalmente para a geometria, especialmente através da introdução da geometria analítica.

Descartes é amplamente reconhecido como o fundador da geometria analítica, que é o estudo da geometria com o recurso a um sistema de coordenadas e métodos algébricos, tendo estas ideias sido apresentadas na sua obra *La Géométrie* (1637), que fazia parte do seu famoso trabalho *Discurso do Método*.

A geometria analítica permite representar curvas e superfícies recorrendo a equações e coordenadas, estabelecendo uma ponte entre a álgebra e a geometria.

O sistema de coordenadas cartesianas, assim nomeado em sua homenagem, é uma das contribuições mais significativas de Descartes. Ele introduziu o conceito que recorre a um par de eixos perpendiculares (eixo x e eixo y) para definir a posição de pontos no plano. Este sistema revolucionou a matemática, pois permitiu a representação gráfica de equações e a análise geométrica de figuras algébricas.

Ao longo dos tempos, a geometria continuou a evoluir com o surgimento de novas teorias, tornando-se uma disciplina rica e diversificada que continuamente evolui e influencia muitas outras áreas da matemática e da ciência. Cada matemático trouxe uma nova perspetiva, expandindo o campo de atuação da geometria e as suas aplicações.

A história da geometria é um testemunho do engenho humano e da busca pelo entendimento do espaço e das formas.

George Pólya (1887-1985) um matemático húngaro, é conhecido pelas suas contribuições à heurística e à metodologia de resolução de problemas. No seu livro clássico *How to Solve It* (1945), Pólya propôs um **processo em quatro fases para a resolução de problemas**. As fases propostas são um guia geral para abordar problemas matemáticos (e de outra natureza) de maneira estruturada e sistemática. Segue-se uma descrição dessas quatro fases.

Processo em quatro fases para a resolução de problemas

1. Compreender o problema

Interpretar o enunciado do problema e entender o que é pretendido.

Lê o problema cuidadosamente para captar todos os detalhes, mesmo que seja necessário fazê-lo mais do que uma vez.

Identifica os dados e as condições, de modo a determinar que informações são fornecidas e quais são as condições ou restrições do problema.

Determina o objetivo e define claramente o que é preciso determinar ou provar.

Tenta expressar o problema com as tuas próprias palavras para garantir que compreendeste corretamente.

Desenha um diagrama ou figura, se aplicável. Muitas vezes, uma representação visual pode ajudar a entender melhor o problema.

2. Planear uma estratégia

Desenvolver um plano ou estratégia para resolver o problema.

Refletir sobre problemas semelhantes. Pensa em problemas que resolveste anteriormente e que são semelhantes ao problema atual.

Escolhe uma estratégia ou combinação de estratégias. Algumas estratégias comuns incluem:

- começar do que se pretende provar e retroceder até aos dados fornecidos;
- dividir o problema em partes menores e resolver cada parte;
- usar uma equação ou fórmula conhecidas;
- fazer uma tabela ou lista;
- procurar padrões;
- considerar casos especiais ou simplificados do problema.

Escreve uma lista dos passos que pretendes seguir para resolver o problema.

3. Executar o plano

Seguir a estratégia planeada para encontrar a solução do problema.

Segue o plano de forma sistemática, garantindo que cada etapa é realizada corretamente.

À medida que avanças, verifica se cada passo é lógico e se está correto.

Escreve de forma clara e organizada para facilitar a verificação posterior.

4. Refletir e avaliar o resultado obtido

Verificar se a solução está correta e refletir sobre o processo utilizado.

Verifica a solução obtida para garantir que realmente responde ao problema proposto. Confirma se todas as condições foram atendidas.

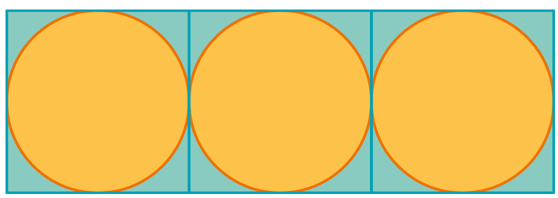
Avalia se o plano foi eficaz ou se poderia ser melhorado.

Analisa se a solução pode ser aplicada a problemas semelhantes ou se pode ser generalizada para casos mais amplos.

O método de Pólya para a resolução de problemas promove uma abordagem estruturada e reflexiva. Através das quatro fases, podes desenvolver competências de resolução de problemas mais eficazes e aplicar estas técnicas a uma ampla variedade de situações.

Exemplo 1

Na figura ao lado está representado um painel composto por três azulejos de forma quadrada com $10\ \text{cm}$ de lado e uma circunferência inscrita em cada azulejo.



Qual é o valor da área da região azul do painel?

1. **Compreender o problema**

   Entender completamente o enunciado do problema.

   O problema fala da existência de três azulejos iguais e quadrados, onde estão inscritos círculos. A área interior aos círculos está pintada a cor de laranja. A área exterior aos círculos está pintada a azul.

   O problema pretende a determinação do valor da área pintada a azul.

   É dado o comprimento do lado de cada azulejo quadrado: $10\ \text{cm}$.

2. **Planear uma estratégia**

Como o lado de cada quadrado mede 10 cm, então o raio de cada circunferência inscrita mede 5 cm.

Se se determinar a área da superfície a azul de um quadrado, ao multiplicar por 3 obtém-se a área da região azul do painel.

Determinar a área de um quadrado: $A_{\text{quadradro}} = l \times l$

Determinar a área de um círculo: $A_{\text{círculo}} = \pi \times r^2$

Determinar a área da região azul de um quadrado: $A_{\text{azul quadrado}} = A_{\text{quadradro}} - A_{\text{círculo}}$

Determinar a área da região azul do painel: $A_{\text{região azul do painel}} = 3 \times A_{\text{azul quadrado}}$

Utilizar como valor aproximado de π o número $3{,}14$.

3. Executar o plano

$A_{\text{quadradro}} = l \times l = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$

$A_{\text{círculo}} = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{azul quadrado}} = 100 - 25\pi \approx 100 - 25 \times 3{,}14 = 21{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{região azul do painel}} \approx 3 \times 21{,}5 = 64{,}5 \text{ cm}^2$

4. Refletir e avaliar o resultado obtido

O resultado obtido traduz o valor aproximado da região azul do painel.

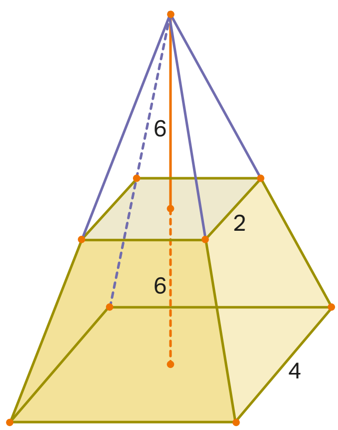
A estratégia aplicada pode ser utilizada noutras situações em que se determina a parte total (neste caso, a área do quadrado) e se retira a parte não necessária (neste caso, a área do círculo).

Outra possível estratégia para a resolução deste problema seria determinar a área total do retângulo formado pelos três quadrados e retirar a área dos três círculos.

Exercícios

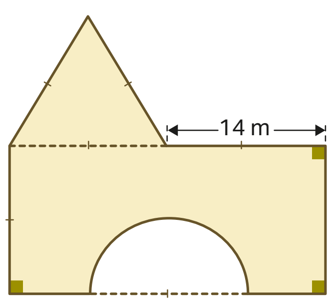
1 **A figura ao lado representa um tronco de pirâmide quadrangular de altura 6 cm e de lados das bases 4 cm e 2 cm, respetivamente, conforme indicado na mesma.**

Determina o volume do tronco de pirâmide.



2 **Observa a figura ao lado.**

Utilizando $3{,}14$ como valor aproximado de π, determina o perímetro da figura.



Manual Interativo

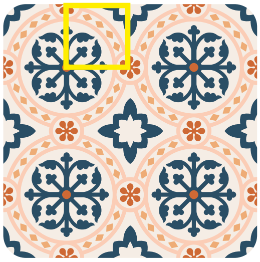
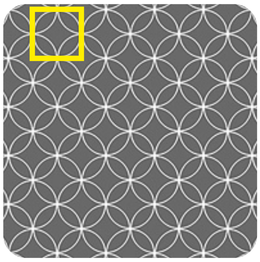
Vídeo
Frisos

1.1.2. Alguns padrões geométricos planos (frisos)

Olhando à nossa volta, podemos encontrar representações geométricas planas que resultam da repetição de um motivo. São estruturas visuais esteticamente agradáveis a que se dá o nome de **padrões geométricos**. Poderás encontrá-los em pavimentos, tecidos, revestimentos de paredes, gradeamentos, azulejos,…

O **motivo do padrão** é o elemento básico que, sendo repetido, por meio de transformações geométricas, origina a construção do padrão. Poderás construir um padrão apenas com translações ou associando também reflexões ou rotações.



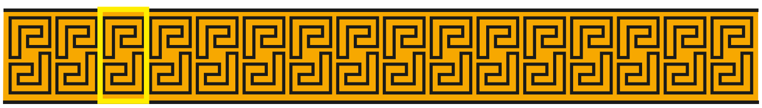



Matematicamente, o conceito de padrão está ligado à ideia de repetição infinita. Claro que, na vida real, os padrões que observas são construídos a partir de um número finito de repetições do seu motivo.

Podemos encontrar dois tipos particulares de padrões: as **rosáceas**, que são padrões que resultam da rotação de um motivo centrada num ponto fixo, e os **frisos**, que resultam da translação de um motivo.

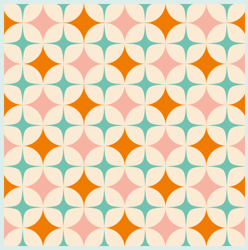
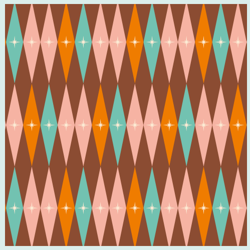
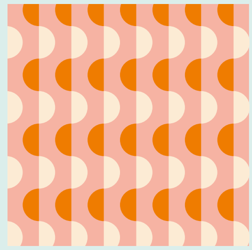
Rosáceas


Frisos

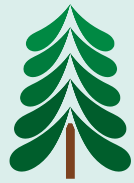


Tarefa

1 Determina o motivo de cada imagem dos seguintes padrões.

2 Usando por base o motivo de padrão ao lado, representa uma parte de um padrão possível.

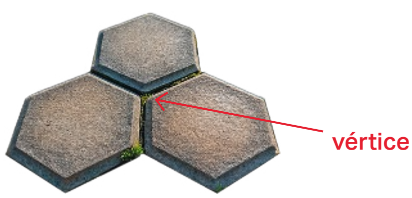


Em soalhos, vitrais ou mosaicos encontramos com frequência pavimentações. A construção de uma pavimentação é um exercício desafiante, envolve a cobertura de uma superfície recorrendo a figuras geométricas que se encaixam perfeitamente, sem deixar espaços entre elas nem sem as sobrepor.




A cada uma das peças que compõem a pavimentação chama-se **mosaico** ou **ladrilho**.

Um **vértice** de pavimentação é um ponto onde se encontram três ou mais ladrilhos numa pavimentação. O estudo dos vértices é importante para classificar e analisar os diferentes tipos de pavimentações. Repara que, quando analisamos um vértice de pavimentação, observamos os ângulos internos dos polígonos que se encontram nesse ponto. A soma dos ângulos ao redor de um vértice em qualquer pavimentação plana deve ser sempre igual a $360°$ para que os ladrilhos se encaixem sem sobreposição ou espaços.

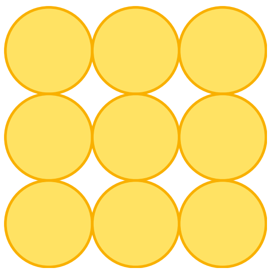


Pavimentação regular

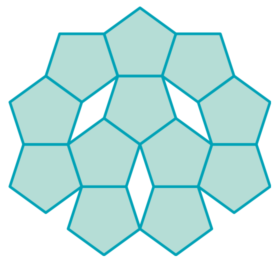
Uma **pavimentação regular** é uma pavimentação do plano feita recorrendo apenas a um tipo de polígono regular, ou seja, é uma figura geométrica em que todos os lados e ângulos são congruentes.

Para que uma pavimentação regular seja possível, o polígono usado deve ser capaz de cobrir o plano sem deixar espaços.

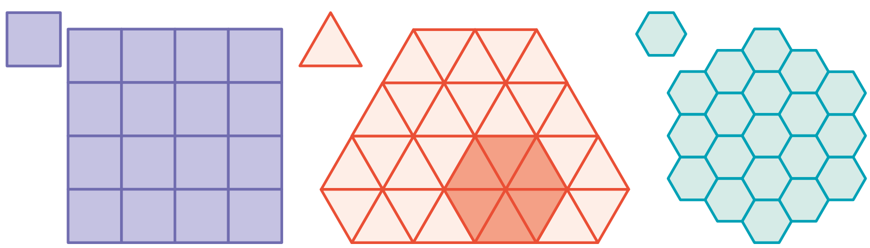
Com círculos não consegues pavimentar um plano, porque há espaços vazios.



Com pentágonos regulares também não consegues pavimentar um plano, porque há sobreposição de figuras ou sobram com espaços vazios.



Existem apenas três pavimentações regulares do plano, que utilizam triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

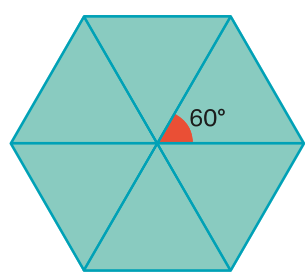


Cada uma destas figuras regular pode repetir-se infinitamente num padrão regular para pavimentar o plano. Isso ocorre porque os ângulos internos dessas figuras permitem que, ao redor de um vértice, a soma dos ângulos seja exatamente 360^{o}.

Em cada vértice de pavimentação encontram-se os vértices dos polígonos regulares usados. Uma vez que não pode existir espaços vazios, nem sobreposições, a soma dos ângulos internos de cada polígono terá de ser 360.°.

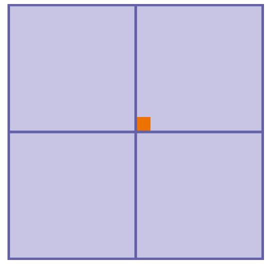
Se o polígono regular usado for um triângulo equilátero, em cada vértice de pavimentação teremos o encontro de seis mosaicos.

$$6 \times 60^{\circ} = 360^{\circ}$$



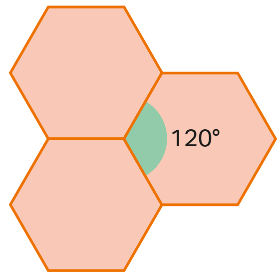
Se o polígono usado for um quadrado, em cada vértice de pavimentação teremos o encontro de 4 mosaicos.

$$4 \times 90^\circ = 360^\circ$$



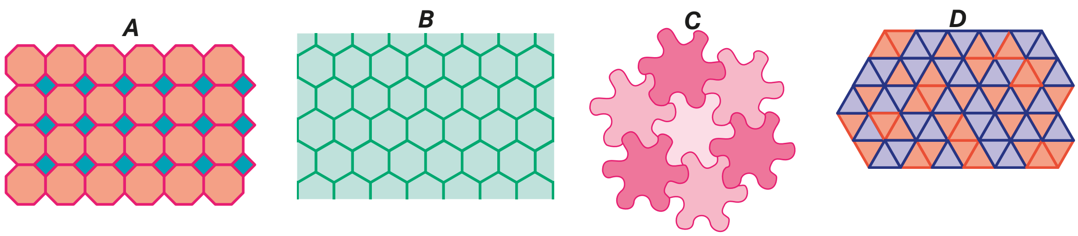
Se o polígono regular usado for um hexágono equilátero, em cada vértice de pavimentação teremos o encontro de três mosaicos.

$$3 \times 120^\circ = 360^\circ$$



Exercícios

3 Observa as seguintes pavimentações e identifica, justificando, as que são regulares.



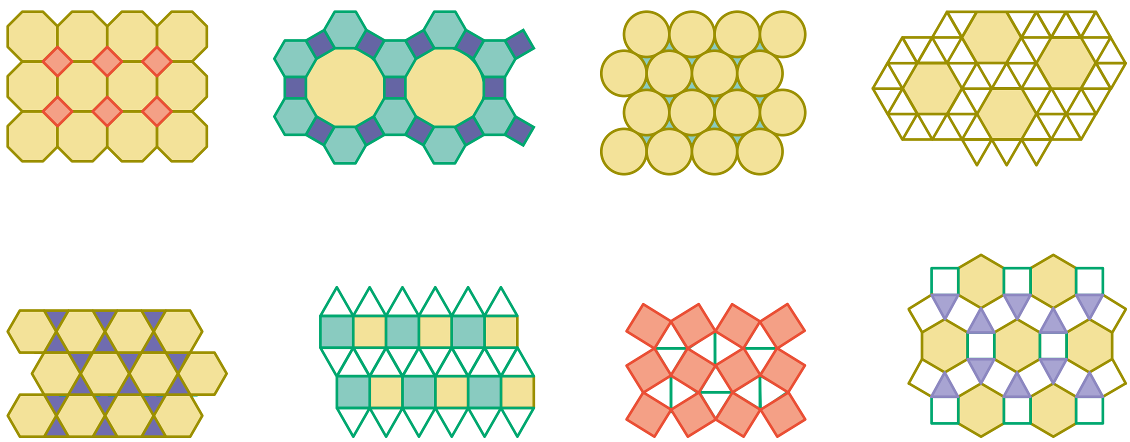
4 Completa a seguinte tabela.

Polígonos regulares	Amplitude de cada ângulo interno de um mosaico	Número de polígonos que se encontram num vértice de pavimentação	Pode pavimentar um plano?
Triângulo	60°	$360^\circ : 60^\circ = 6$	Sim
Quadrado			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Eneágono			

5 É possível efetuar uma pavimentação regular com decágonos? Justifica a tua resposta.

Uma **pavimentação semirregular** (ou arquimediana) é formada por dois ou mais tipos de polígonos regulares. Esses polígonos repetem-se em padrões específicos, de modo que todos os vértices têm o mesmo arranjo de polígonos ao redor. Isso significa que, embora sejam usados diferentes polígonos, o padrão ao redor de cada vértice é idêntico.

Existem apenas oito pavimentações semirregulares diferentes. As oito pavimentações semirregulares são particularmente interessantes porque permitem uma maior diversidade de formas em comparação com as pavimentações regulares.

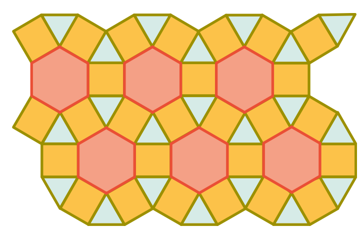


Exercício

6 Considera a pavimentação semirregular na figura ao lado.

Descreve o arranjo de polígonos ao redor de um vértice. Que polígonos regulares estão envolvidos?

Verifica se a soma dos ângulos ao redor de cada vértice é igual a 360°.



1.1.3. Estudo de problemas de empacotamento

Os problemas de empacotamento surgem em diversas situações do nosso dia a dia, desde a arrumação de objetos em caixas até à organização de cargas em veículos. A essência desses problemas está em determinar a melhor forma de dispor objetos dentro de um espaço limitado para otimizar a utilização do espaço disponível. Este tipo de problemas é fundamental em áreas como a logística, a arquitetura, a informática e outras.

O empacotamento eficiente é um desafio matemático que se relaciona com várias áreas, como a geometria, a combinatória e a teoria da otimização. Ao abordar este tema, exploraremos como formas geométricas podem ser dispostas de maneira eficiente em diferentes contextos e dimensões.

Existem vários tipos de problemas de empacotamento, incluindo:

Empacotamento a uma dimensão: em que objetos como intervalos ou segmentos devem ser dispostos numa linha.

Empacotamento a duas dimensões: em que formas planas como círculos ou retângulos, devem ser dispostas num plano.

Empacotamento a três dimensões: em que objetos tridimensionais como cubos ou esferas devem ser dispostos num espaço tridimensional.

A seguir, vamos explorar três exemplos distintos de problemas de empacotamento.

Exemplo 2

Empacotamento a uma dimensão

Imagina que tens uma linha reta com um comprimento fixo, por exemplo, 10 metros, e que precisas de dispor segmentos de comprimentos diferentes ao longo dessa linha sem sobreposição. O objetivo é maximizar o uso do comprimento total da linha.

Os segmentos de que dispões têm de comprimento 2 metros e 3 metros.

Neste caso, a linha representa um "espaço" unidimensional e os segmentos representam os objetos a serem empacotados. O desafio está em escolher a melhor combinação de segmentos para utilizar a maior parte da linha, evitando desperdício de espaço.

Para utilizarmos o comprimento máximo da linha (10 metros), podemos dispor os segmentos das seguintes formas:

- $2\text{ m}+2\text{ m}+2\text{ m}+2\text{ m}+2\text{ m}=10\text{ m}$
- $2\text{ m}+2\text{ m}+3\text{ m}+3\text{ m}=10\text{ m}$

Exemplo 3

Empacotamento de caixas num contentor

Imagina que precisas de carregar caixas cúbicas num contentor com 3 m de altura, 4 m de largura e 5 m de comprimento.
As caixas são todas cúbicas com $1{,}5\text{ m}$ de aresta e o objetivo é dispor o maior número possível de caixas dentro do contentor.

Procedimentos

Cálculo do volume do contentor. O volume do contentor pode ser encontrado multiplicando as suas dimensões:

$$V_{\text{contentor}} = \text{altura} \times \text{largura} \times \text{comprimento} = 3 \times 4 \times 5 = 60\ \text{m}^3$$

Cálculo do volume de uma caixa cúbica.

O volume de cada caixa cúbica é dado por:

$$V_{\text{caixa cúbica}} = \text{aresta}^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375\ \text{m}^3$$

Para sabermos o número máximo de caixas que cabem no contentor, dividimos o volume total do contentor pelo volume de uma caixa:

$$\frac{V_{\text{contentor}}}{V_{\text{caixa cúbica}}} = \frac{60}{3{,}375} = 17{,}8$$

Portanto, o contentor pode acomodar no máximo 17 caixas cúbicas.

Arranjo das caixas:

Cada caixa tem $1{,}5\text{ m}$ de lado, então podemos pensar em como as organizar no espaço tridimensional do contentor:

- Na altura de 3 m, cabem duas caixas (uma em cima da outra).
- Na largura de 4 m, cabem duas caixas (lado a lado ficando a sobrar espaço).
- No comprimento de 5 m, cabem três caixas (uma atrás da outra ficando a sobrar espaço).

Portanto, apesar de, em termos de volume, parecer que cabem 17 caixas, na verdade, ao proceder ao empacotamento só caberão no máximo:

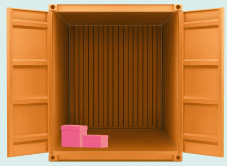
- total de caixas: $2 \times 2 \times 3 = 12$ caixas.

Conclusão:

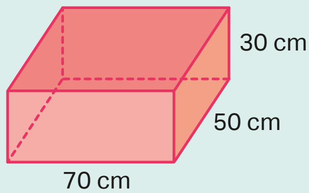
O número máximo de caixas cúbicas de $1{,}5$ m de aresta que podem ser acomodadas dentro de um contentor com dimensões de 3 metros de altura, 4 metros de largura e 5 metros de comprimento é 12 caixas. Este arranjo não utiliza todo o espaço disponível do contentor, mas é a forma mais eficiente de fazer a acomodação.

Tarefa

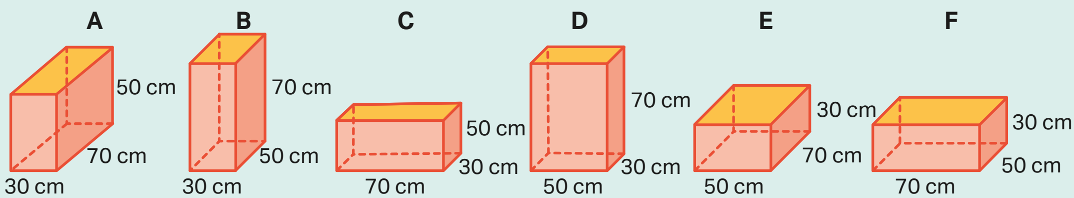
3 **Considera um contentor com dimensões de 2 m de largura, 4 m de comprimento e $2,5$ m de altura, utilizado para o transporte de mercadorias embaladas em caixas. As caixas têm a forma de paralelepípedos com 70 cm de comprimento, 50 cm de largura e 30 cm de altura.**



3.1. Investiga a capacidade máxima de caixas que podem ser colocadas no contentor, se a posição adotada for a que se indica na figura.



3.2. Supõe, agora, que as caixas podem ir em qualquer posição. Mas todas elas têm de ir na mesma posição. Averigua qual das diferentes posições permite transportar o maior número de caixas, justificando a tua escolha.



3.3. Realiza um estudo sobre a melhor forma de otimizar o espaço de transporte, explicando qual seria, na tua opinião, a disposição mais eficiente para as caixas. Indica as orientações que escolherias para garantir o melhor aproveitamento do espaço disponível no contentor.

Exercícios

7 **Num retângulo de 20 cm por 30 cm e retângulos menores de 5 cm por 6 cm:**

7.1. Qual é o número máximo de retângulos menores que consegues dispor dentro do retângulo maior sem sobreposição?

7.2. Apresenta um esquema que represente a solução da alínea anterior.

8 **Um quadrado tem de lado 10 unidades e precisas de empacotar círculos de raio 1 unidade dentro desse quadrado. Qual é o número máximo de círculos que podes colocar no interior do quadrado sem sobreposição?**

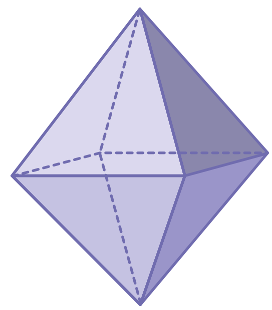
9 **Uma caixa cúbica tem 2 m de aresta. Quantos cubos de aresta 50 cm podem ser empacotados dentro da caixa, aproveitando todo o espaço disponível?**

1.1.4. Composição e decomposição de figuras tridimensionais

A **composição de figuras tridimensionais** é o processo de combinar formas geométricas para formar figuras mais complexas. **A decomposição de figuras tridimensionais** é a operação inversa, dividindo uma figura tridimensional em partes menores e mais simples. Esses processos são essenciais para o desenvolvimento da perceção espacial, compreensão do volume e da área de superfícies, e aplicam-se em diversas áreas, como arquitetura, *design* e engenharia.

Ao longo da História, o estudo das formas tridimensionais e das suas relações levou a descobertas importantes, como o valor aproximado de π, essencial para o cálculo de volumes de sólidos esféricos, e o número de ouro, uma proporção que aparece em várias estruturas naturais e artificiais.

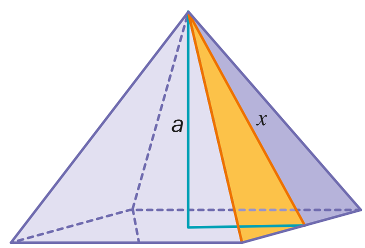
Exemplo 4



Na figura está representado um octaedro regular de aresta 2 cm.

Para determinarmos o volume do octaedro, podemos decompô-lo em duas pirâmides e determinar os seus volumes.

Comecemos por reparar que as duas pirâmides têm base quadrada de lado igual a 2 cm.



A altura de cada pirâmide pode ser determinada recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

altura da face lateral: $x=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

altura da pirâmide: $a=\sqrt{\sqrt{3}^2-1^2}=\sqrt{2}$

$$V_{\text{pirâmide}}=\frac{\text{Área da base}\times\text{altura}}{3}=\frac{2\times2\times\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{2}\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{octaedro}}=2\times V_{\text{pirâmide}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}\text{ cm}^3$$

Exercício

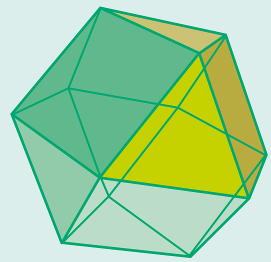
10 **Decompôs-se um cubo de 5 m de aresta em pirâmides, em que cada uma tem a base numa das faces do cubo e o vértice no centro do cubo.**

10.1. Qual é o volume de cada pirâmide?

10.2. Qual é a soma dos volumes dessas pirâmides?

Tarefa

4 **Na figura ao lado está representado um cuboctaedro.**
O cuboctaedro pode ser obtido truncando (cortando) um cubo por planos definidos pelos pontos médios das suas arestas, extraindo-lhe assim oito pequenas pirâmides, uma em cada um dos seus vértices.



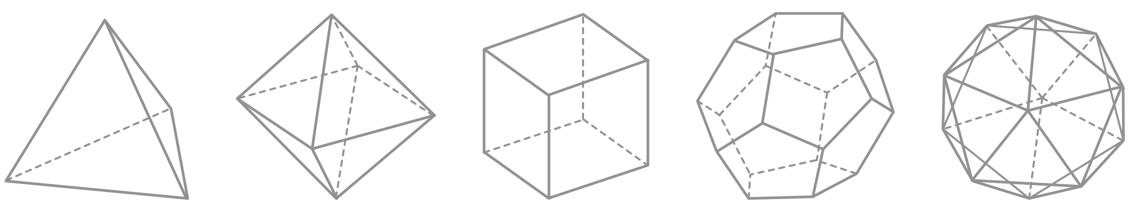
4.1. Qual é a relação entre a aresta do cuboctaedro e a aresta do cubo que lhe deu origem?

4.2. Sabendo que o cubo original tem de volume $125\ \text{cm}^3$, determina o volume do cuboctaedro.

Sólidos platónicos

Os **sólidos platónicos**, também conhecidos como sólidos de Platão, são exemplos notáveis de poliedros. Platão, ao procurar compreender a origem e a estrutura do Universo, utilizou a geometria para estabelecer uma ligação entre estes sólidos e os elementos da Natureza.

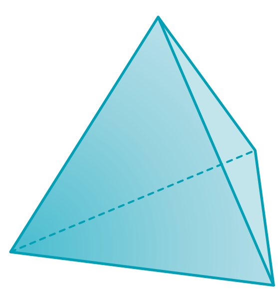
Os sólidos classificados como platónicos são o **tetraedro**, o **hexaedro**, o **octaedro**, o **dodecaedro** e o **icosaedro**. Estes cinco sólidos distinguem-se por serem poliedros regulares, caracterizados por possuírem arestas e faces congruentes, conferindo-lhes uma simetria única e perfeita.



Tetraedro **Octaedro** **Cubo** **Dodecaedro** **Icosaedro**

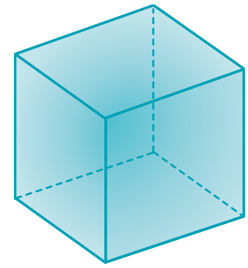
Tetraedro

O tetraedro é o mais simples dos sólidos platónicos, sendo o poliedro regular com o menor número de faces possível. Platão associava-o ao elemento fogo. Este sólido é composto por quatro faces triangulares equiláteras, quatro vértices e seis arestas. É também conhecido como pirâmide regular.



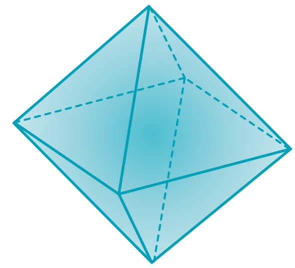
Cubo (hexaedro regular)

O cubo, um dos mais conhecidos sólidos regulares, possui seis faces quadradas, 12 arestas e oito vértices. Platão relacionava este sólido ao elemento terra. O cubo é frequentemente referido como hexaedro regular.



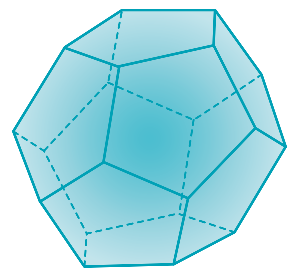
Octaedro

O octaedro, associado por Platão ao elemento ar, é um sólido regular com oito faces triangulares equiláteras, 12 arestas e seis vértices.



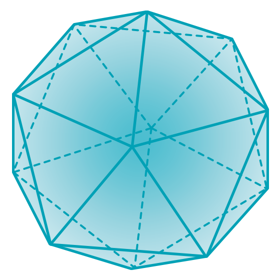
Icosaedro

O icosaedro representa o elemento água na concepção platónica, é um poliedro regular formado por 20 faces triangulares equiláteras, 30 arestas e 12 vértices.



Dodecaedro

O dodecaedro era considerado por Platão como o mais harmonioso dos sólidos e simbolizava o Universo ou o cosmos. Este poliedro possui 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices.



Exercícios

11 Divide o tetraedro em dois sólidos menores através de um plano que passa por uma aresta e o ponto médio da aresta oposta. Quantas faces, arestas e vértices terá cada parte? Justifica a tua resposta.

12 Um plano corta o cubo de modo a passar pelo centro de duas faces opostas. Qual é o formato da secção obtida? Quantas arestas resultam deste corte e quais são os novos polígonos formados?

13 Considera um octaedro e divide-o ao longo de um plano que passa pelos seus dois vértices opostos. Qual é a forma geométrica da secção obtida? Identifica o número de faces, arestas e vértices resultantes.

Síntese

Processo em quatro fases para a resolução de problemas

1. Compreender o problema

Entender completamente o enunciado do problema.

2. Planear uma estratégia

Desenvolver um plano ou estratégia para resolver o problema.

3. Executar o plano

Seguir a estratégia planeada para encontrar a solução do problema.

4. Refletir e avaliar o resultado obtido

Verificar se a solução está correta e refletir sobre o processo utilizado.

Padrões geométricos planos

Padrões planos

Os **padrões planos** são construídos pela repetição de uma forma ou desenho, por recurso a translações, rotações ou reflexões.

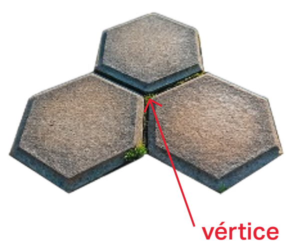
O **motivo do padrão** é o bloco fundamental que, quando repetido, cria o padrão completo.

Os **frisos** são um tipo específico de padrão que se repete linearmente ao longo de uma direção.

As rosáceas são um tipo de padrão que surgem da rotação de motivos.

Pavimentações

Uma **pavimentação do plano** é uma cobertura completa de uma superfície plana que utiliza figuras geométricas, chamadas mosaicos ou ladrilhos, de forma que essas figuras não se sobreponham e não deixem espaços entre si. As figuras que compõem a pavimentação podem ser polígonos ou não e a pavimentação pode ter diferentes padrões e simetrias.



Um **vértice de pavimentação** é o ponto onde se encontram três ou mais ladrilhos numa pavimentação.

Uma **pavimentação regular** é uma pavimentação do plano feita apenas com um tipo de polígono regular.

Uma **pavimentação semirregular** (ou arquimediana) é formada por dois ou mais tipos de polígonos regulares.

Composição e decomposição de figuras tridimensionais

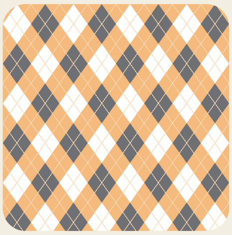
A **composição de figuras tridimensionais** refere-se ao processo de combinar formas geométricas para formar figuras mais complexas.

A decomposição de figuras tridimensionais é a operação inversa, dividindo uma figura tridimensional em partes menores e mais simples.

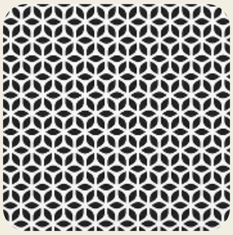
Para aplicar

1 Identifica, em cada um dos padrões, o motivo do padrão.

1.1.



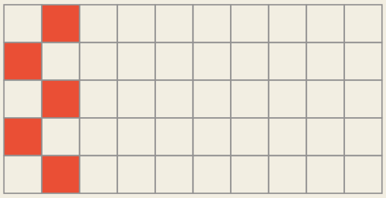
1.2.



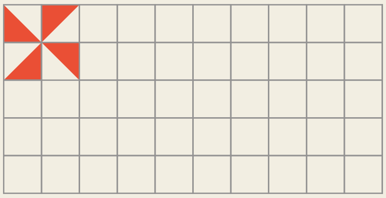
1.3.

2 Completa cada um dos padrões, recorrendo à utilização do motivo que foi escolhido.

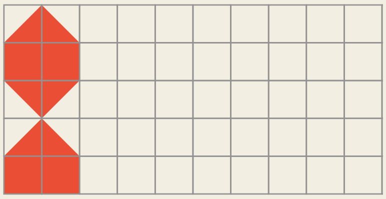
2.1.



2.2.



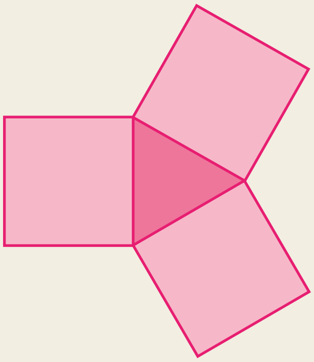
2.3.



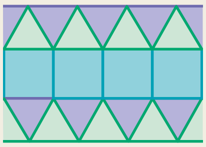
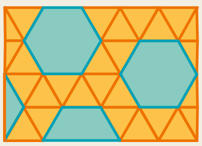
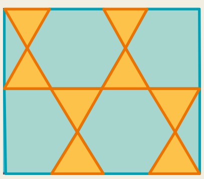
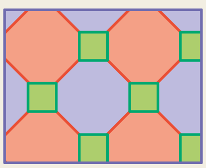
3 Utilizando régua e compasso (ou ferramentas digitais), cria uma pavimentação regular com quadrados e uma pavimentação semirregular utilizando hexágonos e triângulos equiláteros. Verifica se a soma dos ângulos em torno de cada vértice é $360°$.

4 Considera uma pavimentação formada por quadrados e triângulos equiláteros.

Estuda uma forma de continuar a pavimentação sem usar outras formas.



5 **Considera as pavimentações semirregulares. Observa o vértice assinalado em cada uma delas. Identifica os polígonos aos quais pertence esse vértice e estuda a soma das amplitudes dos seus ângulos internos que convergem nele.**

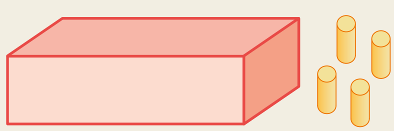
Pavimentação	Polígonos	Soma das amplitudes
	3 triângulos equiláteros 2 quadrados	$3 \times 60^\circ + 2 \times 90^\circ = 360^\circ$
		
		
		

6 **Um camião tem um contentor de dimensões $2{,}45$ m por $2{,}5$ m por de $8{,}9$ m. Pretende-se transportar caixas de dimensões de 50 cm por 60 cm por 80 m.**

Determina o maior número de caixas que o camião consegue transportar e explica como as mesmas devem ser organizadas.

7 **Pretende-se colocar o máximo possível de latas dentro de uma caixa.**

As latas têm formato cilíndrico, cujo raio da base é $3{,}5$ cm e altura $8{,}57$ cm.



A caixa é um paralelepípedo de dimensões 85 cm por 43 cm por 18 cm.

Determina o número máximo de latas que podemos colocar dentro da caixa.

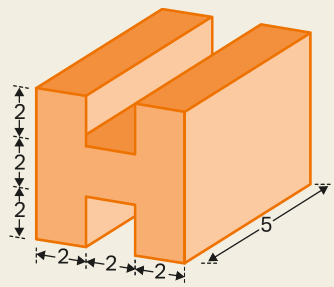
Para aplicar

8 **A Luana fez um bolo para comer com as suas amigas durante o fim de semana. O bolo, de forma cilíndrica, com diâmetro 30 cm e $3,75$ cm de altura, foi cortado em oito fatias iguais.**

Qual é o volume de cada fatia?

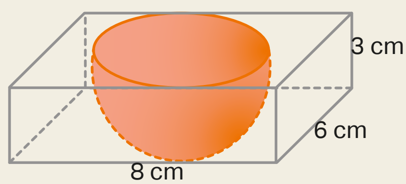
Apresenta o resultado em cm^3 e utiliza para valor aproximado de π $3,14$.

9 **Determina o volume da estrutura feita para comemorar o aniversário do Hugo. As medidas encontram-se em metros.**



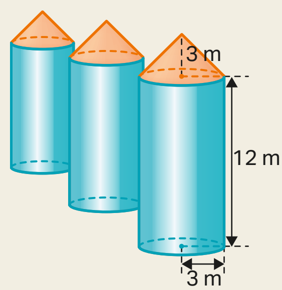
10 **Um sabonete tem a forma de um paralelepípedo com um buraco, na forma de semicírculo, conforme se ilustra na figura.**

Determina o seu volume.



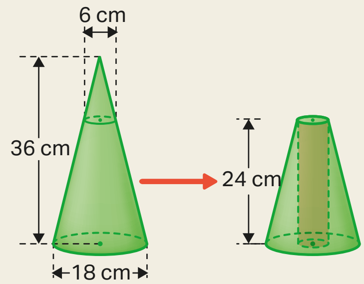
11 **Na quinta do Sr. Matias há três depósitos para guardar cereais que têm a forma de um cilindro com um cone no topo.**

Atendendo às dimensões indicadas na figura, determina o volume total de cereais que o Sr. Matias pode armazenar.



12 **Um candeeiro é projetado a partir de uma peça plástica maciça na forma de cone truncado, no qual se faz um buraco cilíndrico com igual altura, conforme ilustra a figura.**

Recorrendo às dimensões indicadas na figura, determina o volume de plástico com que o candeeiro vai ficar.



1.2. Radicais

Noção de potência

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e n um número natural:

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n \text{ vezes}}$ é o produto de n fatores iguais a a.

expoente

a^n

base

Nota:
Para adicionarmos ou subtrairmos potências não existem regras que facilitem os cálculos.

Regras de operações com potências

		Regra	Exemplo
Produto de potências	**Com a mesma base**	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^5 \times 2^3 = 2^8$
	Com o mesmo expoente	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	$10^5 \times 2^5 = (10 \times 2)^5 = 20^5$
Quociente de potências	**Com a mesma base**	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$2^5 : 2^3 = 2^2$
	Com o mesmo expoente	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$10^5 : 2^5 = (10 : 2)^5 = 5^5$
Potência de uma potência		$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^3)^2 = 2^6$
Potência de expoente nulo		$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$	$(-2)^0 = 1$
Potência de expoente inteiro negativo		$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a \neq 0)$	$(-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$
Potência de expoente racional		$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $(a \geqslant 0 \text{ e } q \neq 0)$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$

Manual Interativo

Vídeo
Propriedades da potenciação no conjunto de números reais

Propriedades da relação de ordem em IR

	Regra	Exemplo
Monotonia da adição	Dados três números reais, a, b e c, se $a<b$, então $a+c<b+c$	$5<12 \Leftrightarrow 5+\sqrt{2}<12+\sqrt{2}$
Monotonia parcial da multiplicação	Dados três números reais, a, b e c, com $c>0$, se $a<b$, então $a\times c<b\times c$.	$\frac{7}{4}<\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4}\times\frac{2}{3}<\frac{9}{4}\times\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{14}{12}<\frac{18}{12}$
Monotonia parcial da multiplicação	Dados três números reais, a, b e c, com $c<0$, se $a<b$, então $a\times c>b\times c$.	$\sqrt{2}<7 \Leftrightarrow \sqrt{2}\times(-3)>7\times(-3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3\sqrt{2}>-21$
Adição de inequações membro a membro	Dados quatro números reais, a, b, c e d, se $a<b$ e $c<d$, então $a+c<b+d$.	Como $5<12$ e $-7<-4$, então $5+(-7)<12+(-4) \Leftrightarrow -2<8$
Multiplicação de inequações membro a membro	Dados quatro números reais positivos, a, b, c e d, se $a<b$ e $c<d$, então $a\times c<b\times d$.	Como $\sqrt{5}<3$ e $\sqrt{2}<2$, então $\sqrt{5}\times\sqrt{2}<3\times 2 \Leftrightarrow \sqrt{10}<6$
Monotonia do quadrado	Dados dois números reais positivos, a e b, se $a<b$ então $a^2<b^2$.	Como $\frac{2}{3}<\frac{4}{3}$, então $\left(\frac{2}{3}\right)^2<\left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9}<\frac{16}{9}$
Monotonia do cubo	Dados dois números reais, a e b, se $a<b$ então $a^3<b^3$.	Como $\frac{2}{3}<\frac{4}{3}$, então $\left(\frac{2}{3}\right)^3<\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{8}{27}<\frac{64}{27}$
Monotonia dos inversos	Dados dois números reais positivos, a e b, se $a<b$ então $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.	Como $\frac{2}{3}<\frac{4}{3}$, então $\frac{3}{2}>\frac{3}{4}$.

Antes de começar

1 Simplifica as seguintes expressões numéricas, aplicando, sempre que possível, as regras operatórias de potências e calcula os seus valores.

1.1. $4^3 \times 4^{-2} + 5^0$

1.2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : 3^2 + 1^{534}$

1.3. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\right]^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} : 8^2$

1.4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$

1.5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{1} . 4^{-\frac{1}{2}}$

2 Aplicando, sempre que possível, as regras operatórias de potências, apresenta a seguinte expressão numérica como uma potência de base 4.

$$\frac{\left(2^4\right)^5 . \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{2.\left(2^5\right)^2}$$

3 Sejam a e b dois números reais, tais que $a > 0$ e $b < 0$.

Completa com o sinal $<$ (menor) ou $>$ (maior) para obteres proposições verdadeiras.

3.1. $a \ldots b$

3.2. $a - 3 \ldots b - 3$

3.3. $4a \ldots 5a$

3.4. $4b \ldots 5a$

3.5. $a + 5 \ldots b + 5$

3.6. $-2b \ldots -2a$

3.7. $ab \ldots 0$

3.8. $5 \ldots ab$

3.9. $-2ab \ldots 2ab$

3.10. $\frac{1}{b} \ldots \frac{1}{a}$

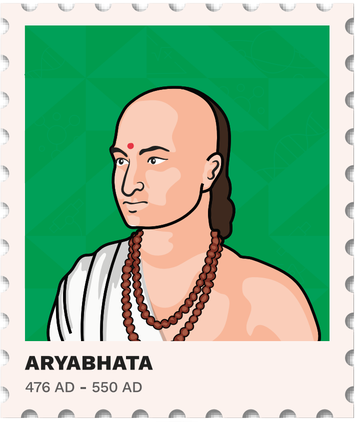
3.11. $a^2 \ldots b$

3.12. $2a^2 \ldots 3b$

3.13. $a \ldots b^3$

3.14. $a \ldots b^3 - 3$

Na aritmética, um dos ramos elementares da matemática, estudam-se operações numéricas como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, consideradas as quatro operações elementares. Mas, num sentido mais amplo, também inclui a exponenciação e a radiciação, bem como a logaritmação, que não irás estudar neste ano letivo.



As primeiras referências às operações de potenciação e radiciação surgem na Índia medieval. Aryabhata I, matemático indiano nascido em 476 d. C., na sua obra *Aryabhatiya,* faz referência à elevação ao quadrado como o produto de duas quantidades iguais, e à elevação ao cubo, de forma análoga, como o produto de três quantidades iguais, bem como às operações inversas, ou seja, a raiz quadrada e a raiz cúbica.

Muito mais tarde, a introdução dos radicais no Ocidente teve o grande contributo de Leonardo de Pisa (1170--1240), também conhecido por Fibonacci. Fibonacci era filho de um comerciante de Pisa e nas suas frequentes viagens pelo Norte de África, através do contacto com a cultura árabe, foi adquirindo muitos conhecimentos matemáticos. Assim, em 1202, escreveu o *Liber Abaci,* onde abordou, entre outros, os cálculos com radicais quadráticos e cúbicos.

Contudo, só a partir do século XVI é que surge a utilização do símbolo $\sqrt{\ }$. Muitos historiadores consideram que este símbolo surge como evolução da letra r da palavra latina *radix* ou *radicis*, de onde deriva a palavra radical.

Neste subtema vais alargar os teus conhecimentos sobre radicais, aprendendo a realizar operações com eles e utilizando-os na resolução de problemas.

1.2.1. Monotonia da potenciação

Recorda que:

Se $0<a<b$ e $0<c<d$, então $ac<bd$.

Portanto:

Se $0<a<b$, então $aa<bb$, ou seja $a^2<b^2$.

E, também:

Se $0<a<b$, então $aaa<bbb$, ou seja $a^3<b^3$.

Vamos, então, verificar que se $0<a<b$ e $n\in\mathbb{N}$, então $a^n<b^n$.

Demonstração:

Repara que $a^n < b^n \Leftrightarrow \underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ vezes}} < \underbrace{bbb \dots b}_{n \text{ vezes}}$.

Por indução matemática:

- Para $n = 1$ e $0 < a < b$, então $a^1 < b^1 \Leftrightarrow a < b$.
- Agora, suponhamos por hipótese de indução que se $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$, então $a^n < b^n$.
  Será que $a^{n+1} < b^{n+1}$?
  Sabemos que:
  $$a^n < b^n \Leftrightarrow \underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ vezes}} < \underbrace{bbb \dots b}_{n \text{ vezes}}$$
  Como $0 < a < b$, temos que:
  $$\underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ vezes}} . a < \underbrace{bbb \dots b}_{n \text{ vezes}} . b \Leftrightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$
  Logo, $a^{n+1} < b^{n+1}$.

Nota:
Indução matemática
Método que permite demonstrar que uma afirmação é verdadeira para todos os números naturais $\mathbb{N}$.
1.° Verificar que a afirmação é verdadeira para um valor inicial (geralmente $n = 1$).
2.° Assumir que a afirmação é verdadeira para $n = k$ (hipótese de indução) e demonstrar que também válida para $n = k + 1$.

Manual Interativo
Atividade
Monotonia da potenciação

Se $0 < a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, então $a^n < b^n$.

Exemplo 5

1. Como $2 < 4$, temos que $2^4 < 4^4 \Leftrightarrow 16 < 256$
2. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, temos que $\left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} < \frac{1}{8}$

Exercício

14 Dados os números reais a, b, c e d, tais que:

$$0 < a < b < c < d$$

Prova que:

14.1. $a^2 < bc$ **14.2.** $a^4 < d^4$ **14.3.** $\frac{a}{d} < 1$

Repara que, se a e b não forem positivos, a desigualdade $a^n < b^n$ pode não se verificar.

Exemplo 6

$-2 < -1$, mas $(-2)^4 > (-1)^4$

$-6 < 3$, mas $(-6)^2 > 3^2$

Exercícios

15 Estuda a relação entre a^n e b^n quando $a < b$, mas não são necessariamente positivos.

15.1. Completa os espaços.

a) $-3 < -2$ e $(-3)^2$ ________ $(-2)^2$

b) $-3 < -2$ e $(-3)^3$ ________ $(-2)^3$

c) $0 < 2$ e 0^2 ________ 2^2

d) $0 < 2$ e 0^3 ________ 2^3

e) $-3 < 0$ e $(-3)^2$ ________ 0^2

f) $-3 < 0$ e $(-3)^3$ ________ 0^3

g) $-3 < 1$ e $(-3)^2$ ________ 1^2

h) $-3 < 1$ e $(-3)^3$ ________ 1^3

15.2. Completa os espaços.

a) Se $0 \leqslant a < b$ e n é um número par, então a^n ________ b^n.

b) Se $0 \leqslant a < b$ e n é um número ímpar, então a^n ________ b^n.

c) Se $a < b < 0$ e n é um número par, então a^n ________ b^n.

d) Se $a < b < 0$ e n é um número ímpar, então a^n ________ b^n.

e) Se $a < 0$, $b = 0$ e n é um número par, então a^n ________ b^n.

f) Se $a < 0$, $b = 0$ e n é um número ímpar, então a^n ________ b^n.

16 Indica dois números reais a e b, tais que:

16.1. $a < b$ e $a^2 < b^2$

16.2. $a < b$ e $a^2 > b^2$

16.3. $a < b$ e $a^2 < b^3$

16.4. $a < b$ e $a^4 > b^4$

16.5. $a < b$ e $a^3 < b^2$

Raízes de índice n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

Analisemos a seguinte questão:

Dado um número real a e um número natural n, existe um número real b, tal que $b^n = a$?

Exemplo 6

1. Seja $a=9$ e $n=2$.
$\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^2=9$? Sim, por exemplo, $b=\sqrt{9}=3$, pois $\left(\sqrt{9}\right)^2=3^2=9$.

2. Seja $a=8$ e $n=3$.
$\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^3=8$? Sim, $b=\sqrt[3]{8}=2$, pois $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3=2^3=8$.

3. Seja $a=8$ e $n=2$.
$\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^2=8$? Sim, por exemplo, $b=\sqrt{8}$, pois $\left(\sqrt{8}\right)^2=8$.

4. Seja $a=-8$ e $n=2$.
$\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^2=-8$? Não, pois $\forall\, b \in \mathbb{R},\ b^2 \geqslant 0$.

5. Seja $a=-8$ e $n=3$.
$\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^3=-8$? Sim, $b=-2$, pois $(-2)^3=-8$.

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, com n ímpar, $\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^n=a$.
Este número real **b é único** e dá-se o nome **de raiz de índice n de a** e representa-se por $\sqrt[n]{a}$.

Demonstração da unicidade de b

Dizer que b é único é dizer que $\forall\, b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, com n ímpar

$$b_1{}^n=b_2{}^n \implies b_1=b_2$$

Efetuaremos a demonstração por contrarrecíproco, ou seja, procuraremos provar que:

$$b_1 \neq b_2 \implies b_1{}^n \neq b_2{}^n$$

Hipótese: $b_1 \neq b_2$ e n ímpar

Tese: $b_1{}^n \neq b_2{}^n$

Se $b_1 \neq b_2$, então $b_1 < b_2$ ou $b_1 > b_2$.
Se $b_1 < b_2$, como n é ímpar, então $b_1{}^n < b_2{}^n$, ou seja $b_1{}^n \neq b_2{}^n$.
Se $b_1 > b_2$, como n é ímpar, então $b_1{}^n > b_2{}^n$, ou seja $b_1{}^n \neq b_2{}^n$.

Assim, temos que $b_1 \neq b_2 \implies b_1{}^n \neq b_2{}^n$ (c.q.d).

Portanto, b é único.

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, com n par, $\exists\, b \in \mathbb{R}:\ b^n=a$.
Este número real **b não é único**, pode tomar o valor positivo $\sqrt[n]{a}$ ou o valor negativo $-\sqrt[n]{a}$.

Manual Interativo

Atividade
Raízes de índice natural de zero

Repara que nestas condições temos também que: $(-b)^n = a$.

Repara que $(-b)^n = (-1)^n \times b^n$. Como n é par, $(-1)^n = 1$. Logo, $(-b)^n = b^n = a$.

Desta forma, concluímos que:

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, com n par, $\exists b \in \mathbb{R}^+ : b^n = a$.
Os números reais **b e $-b$ são as únicas soluções da equação $x^n = a$.**

Demonstração:

Suponhamos que existem outras soluções diferentes de b e de $-b$, ou seja, zero, um número real positivo $c \neq b$ e o seu simétrico $(-c)$.

Verifiquemos cada situação:

- O número 0 não é solução da equação $x^n = a$, pois $0^n = 0$ e a é positivo.
- Como $c \in \mathbb{R}^+$ e $c \neq b$.
  Então, $c < b$ ou $c > b$.
  Mas n é par, logo $c^n < b^n$ ou $c^n > b^n$.
  Portanto, $c^n \neq b^n$ e c não é solução da equação $x^n = a$.
- Para o **simétrico de c**, como n é par, temos que $(-c)^n = c^n$.
  Já demonstrámos que neste caso c não é solução da equação, portanto, $-c$ também não é solução da equação $x^n = a$.

Logo, a equação $x^n = a$ tem apenas duas soluções, b e $-b$.

Raiz índice *n*

$\sqrt[n]{a}$ lê-se "**raiz índice n de a**" e toma o valor b tal que $b^n = a$.

Quando $n = 2$, escreve-se $\sqrt{a}$ e lê-se "raiz índice 2 de a" ou "**raiz quadrada de a**".

Quando $n = 3$, escreve-se $\sqrt[3]{a}$ e lê-se "raiz índice 3 de a" ou "**raiz cúbica de a**".

Repara que:

- Para n ímpar, $\sqrt[n]{a}$ existe $\forall a \in \mathbb{R}$.
- Para n par, $\sqrt[n]{a}$ existe $\forall a \in \mathbb{R}_0^+$.

Exemplo 7

$\sqrt{-9}$ não existe, em $\mathbb{R}$, porque, $\nexists b \in \mathbb{R} : b^2 = -9$.

1.2.2. Propriedades algébricas dos radicais

Relembra que uma raiz de índice n é uma potência de expoente $\frac{1}{n}$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Portanto, decorrem das propriedades das operações com potências as propriedades que encontras a seguir.

Seja $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, tais que $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ estão bem definidos:

	Regra	Exemplos
Produto de radicais com o mesmo índice	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6}$ $\sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-8} = -2$
Quociente de radicais com o mesmo índice	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, com $b \neq 0$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ $\frac{\sqrt[3]{-4}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-4}{2}} = \sqrt[3]{-2}$
Potência de um radical	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ Nota: se $n = m$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a\text{, se } n \text{ ímpar} \\ \lvert a \rvert\text{, se } n \text{ par} \end{cases}$	$\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$ $\left(\sqrt[2]{-3}\right)^2 = \sqrt[2]{(-3)^2} = 3$ $\left(\sqrt[3]{-4}\right)^3 = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

Manual Interativo

Vídeo
Propriedades das operações com raízes quadradas

Atividade
Raízes de índice ímpar

Exercício

17 **Efetua as seguintes operações com radicais, apresentando o resultado na forma de um único radical.**

17.1. $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

17.2. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{-2}$

17.3. $\sqrt[5]{\frac{1}{10}} \times \sqrt[5]{10}$

17.4. $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{10}$

17.5. $\sqrt{2} : \sqrt{5}$

17.6. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{-2}}$

17.7. $\sqrt[5]{\frac{1}{10}} : \sqrt[5]{10}$

17.8. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}} \times \left(\sqrt[3]{3}\right)^{-1}$

17.9. $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$

17.10. $\frac{\left(\sqrt[5]{2^3}\right)^2}{\sqrt[5]{2^{-1}}}$

Manual Interativo

Atividade
Raízes de índice par

A aplicação destas propriedades e a decomposição do radicando em fatores primos permite-nos simplificar radicais.

Exemplo 8

1. $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

2. $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3^3}=3\sqrt[3]{2}$

3. $\sqrt{80}=\sqrt{2^4\times 5}=\sqrt{2^2\times 2^2\times 5}=2\times 2\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

Exercícios

18 Representa, na forma $a\sqrt[n]{b}$, com a e $b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ e $a\neq 1$.

18.1. $\sqrt{50}$ **18.2.** $\sqrt[4]{243}$ **18.3.** $\sqrt[3]{81}$

18.4. $\sqrt[5]{96}$ **18.5.** $\sqrt{512}$

19 Considera o número $a=\left(2\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$.
Calcula e verifica se o número a é um número inteiro.

1.2.3. Racionalização de denominadores

Resolve a seguinte equação: $\sqrt{2}\,x=4$.

$$\sqrt{2}\,x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

Repara que esta fração surge com um radical no denominador. Vamos escrever uma fração equivalente a esta, mas de modo que o denominador não tenha radicais.

Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$:

$$x=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

A esta transformação dá-se o nome de **racionalização do denominador**.

Exemplo 9

1. $\dfrac{9}{3\sqrt{2}}=\dfrac{9\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{3\times 2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2. $\dfrac{9+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{(9+\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}+2}{3\times 2}=\dfrac{9\sqrt{2}+2}{6}=\dfrac{9}{6}\sqrt{2}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{3}$

Ao número irracional que multiplicado por outro irracional transforma o produto num número racional chama-se **conjugado**.

Repara que $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$.

Então, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é o conjugado de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ e vice-versa.

Exemplo 10

Recorda:
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2-1}=2\sqrt{2}+2$

2. $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\dfrac{7}{2}\sqrt{5}+\dfrac{7}{2}\sqrt{3}$

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{1(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4\times 3-2}=$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}=\dfrac{1}{5}\sqrt{3}-\dfrac{1}{10}\sqrt{2}$

Manual Interativo

Vídeos
Propriedades das operações com raízes quadradas: multiplicação

Propriedades das operações com raízes quadradas: divisão

Exercícios

20 A seguinte fração representa um número inteiro? Justifica.

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

21 Escreve as seguintes frações com denominador racional.

21.1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **21.2.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ **21.3.** $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$

21.4. $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$ **21.5.** $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **21.6.** $\dfrac{3}{2\sqrt{3}-3}$

1.2.4. Potências de expoente racional

Recorda que um radical é uma potência de expoente racional, $\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$, com $a\geqslant 0$ e $q\neq 0$.

Radicais equivalentes

Seja $a\in\mathbb{R}_0^+$, m, n, m' e $n'\in\mathbb{Z}$, tais que m e $m'\in\mathbb{Z}_0^+$ e n e $n'\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, sendo que $\dfrac{m}{n}=\dfrac{m'}{n'}$, então:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$$

Exemplo 11

1. $\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[6]{5^4}$, pois $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

2. $\sqrt[2]{4^5}=\sqrt[6]{4^{15}}$, pois $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$.

3. $\sqrt{2^{10}}=\sqrt[4]{2^{20}}$, pois $\frac{10}{2}=\frac{20}{4}$.

Tarefa

5 Observa os exemplos anteriores e compara os valores de m, n, m' e n', completando a tabela.

	n	m	n'	m'	$n'=kn$	$m'=km$	k
$\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[6]{5^4}$	3	2	6	4	$6=2\times 3$	$4=2\times 2$	2
$\sqrt[2]{4^5}=\sqrt[6]{4^{15}}$							
$\sqrt{2^{10}}=\sqrt[4]{2^{20}}$							

Podes, então, concluir que:

Seja $a \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Q}$, m, n, m' e $n' \in \mathbb{Z}$, tais que m e $m' \in \mathbb{Z}_0^+$ e n e $n' \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, tais que $n'=kn$ e $m'=km$, então:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}$$

$\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[kn]{a^{km}}$ dizem-se radicais equivalentes.

Exercício

22 Representa cada um dos seguintes radicais por um radical equivalente, de índice 6.

22.1. $\sqrt[3]{10^2}$ **22.2.** $\sqrt[12]{2^8}$ **22.3.** $\sqrt{3}$ **22.4.** $\sqrt[9]{2^3}$

Potências de base positiva e expoente racional

Seja $a \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$ e $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ e $r \in \mathbb{Q}_0^+$, tal que $r=\frac{m}{n}$.

Pretendemos definir a^r para estender a expoentes racionais a seguinte propriedade das potências inteiras:

$$\left(a^b\right)^c=a^{bc}$$

Portanto, pretende-se que $(a^r)^n = a^{r \times n}$.

Começamos por definir que $r = \frac{m}{n}$, logo, $m = r\,n$. Assim, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$.

De onde resulta que a única forma possível de definir $a^{\frac{m}{n}}$, mantendo a propriedade, é assumindo que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Seja $a \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, então $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Manual Interativo

Atividade
Potência de base real não negativa e expoente racional não negativo

Exercício

23 Completa os espaços vazios para obteres afirmações verdadeiras.

23.1. $\sqrt[4]{3^5} = \sqrt[8]{3^{\square}}$
23.2. $\sqrt[\square]{5^2} = \sqrt[8]{5^4}$
23.3. $\sqrt{6} = \sqrt[\square]{216}$
23.4. $\sqrt[5]{4^3} = \sqrt{\square}$
23.5. $\sqrt[6]{4^5} = 4^{\frac{\square}{\square}}$
23.6. $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[\square]{4^{\square}}$
23.7. $3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{15}{\square}}$
23.8. $4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[\square]{4^2}$
23.9. $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[6]{3^{\square}}$

Composição de radicais

Analisando novamente a escrita de um radical como uma potência de base racional, repara que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$$

Exemplo 12

1. $\sqrt[4]{\sqrt{6}} = \sqrt[8]{6}$

2. $\sqrt[3]{3\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times \sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{9 \times 7}} = \sqrt[6]{63}$

Exercícios

24 Representa na forma de potência de expoente racional.

24.1. $\sqrt[3]{4^7}$
24.2. $\sqrt[6]{4^5} \times \sqrt[6]{4}$
24.3. $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$
24.4. $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$

25 Representa na forma de radical.

25.1. $6^{\frac{3}{2}}$
25.2. $5^{\frac{2}{5}}$
25.3. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$
25.4. $6^{-\frac{1}{3}}$
25.5. $4^{-\frac{2}{3}}$
25.6. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$

1.2.5. Propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional

Manual Interativo

Atividade
Potência de base real não negativa e expoente racional negativo

As propriedades algébricas das potências de expoente inteiro já estudadas continuam válidas para potências de expoente racional.

Assim, seja $a \in \mathbb{R}^+$, m e $n \in \mathbb{Q}$:

		Regra	Exemplo
Produto de potências	**Com a mesma base**	$a^n \times a^m = a^{n+m}$ **Nota:** Se $a = 0$, só se considera caso $m \neq 0$ e $n \neq 0$.	$2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{7}{3}}$
	Com o mesmo expoente	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ **Nota:** Se $a = 0$ ou $b = 0$, só se considera caso $n \neq 0$.	$10^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = (10 \times 2)^{\frac{5}{3}} = 20^{\frac{5}{3}}$
Quociente de potências	**Com a mesma base**	$a^n : a^m = a^{n-m}$ **Nota:** Se $a = 0$, só se considera caso $m \neq 0$ e $n \neq 0$.	$2^{\frac{5}{3}} : 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$
	Com o mesmo expoente	$a^n : b^n = (a : b)^n$ **Nota:** Se $a = 0$ ou $b = 0$, só se considera caso $n \neq 0$.	$10^{\frac{5}{3}} : 2^{\frac{5}{3}} = (10 : 2)^{\frac{5}{3}} = 5^{\frac{5}{3}}$
Potência de uma potência		$(a^m)^n = a^{m \times n}$ **Nota:** Se $a = 0$, só se considera caso $m \neq 0$ e $n \neq 0$.	$\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^2 = 2^{\frac{10}{3}}$
Potência de expoente negativo		$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$(-2)^{-\frac{5}{3}} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$

Exercícios

26 Simplifica as seguintes expressões, apresentando o resultado na forma de uma potência de expoente racional positivo.

26.1. $2^{\frac{3}{5}} \times 5^{\frac{3}{5}}$

26.2. $2^{\frac{3}{5}} \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$

26.3. $2^{-\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$

26.4. $\left(5^{\frac{3}{5}}\right)^2$

26.5. $\left(5^{-\frac{3}{5}}\right)^3$

26.6. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

26.7. $2^2 : 2^{-\frac{3}{2}}$

26.8. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$

27 Escreve o resultado das expressões do exercício anterior na forma de um radical.

Tarefa

6 **Considera a seguinte expressão: $\sqrt[4]{3} \times \sqrt{2}$.**
Segue os seguintes passos para escrever a expressão na forma $a\sqrt[n]{b}$.

6.1. Escreve $\sqrt[4]{3}$ na forma de uma potência de expoente racional.
Qual é o expoente da potência?

6.2. Escreve $\sqrt{2}$ na forma de uma potência de expoente racional.
Qual é o expoente da potência?

6.3. Escreve os dois expoentes, que correspondem a frações, como frações com o mesmo denominador.

6.4. Escreve as duas potências como radicais com o mesmo índice (que será o denominador comum das duas frações).

6.5. Agora escreve a expressão na forma $a\sqrt[n]{b}$.

Manual Interativo

Atividade
Propriedades das potências

A estratégia que aplicaste na tarefa anterior permite-te operar com radicais de índices diferentes.

Exemplo 13

1. $\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}}$

Como $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, vem:

$2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{4}} = (2 \times 9)^{\frac{1}{4}} = 18^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{18}$

2. $\dfrac{\sqrt{3^3}}{\sqrt[4]{9}} = \dfrac{3^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{3}{2}} : 9^{\frac{1}{4}}$

Como $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, vem:

$3^{\frac{6}{4}} : 9^{\frac{1}{4}} = (3^6)^{\frac{1}{4}} : 9^{\frac{1}{4}} = 729^{\frac{1}{4}} : 9^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{729}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

Exercícios

28 Simplifica as expressões, apresentando o resultado na forma de um radical.

28.1. $2^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{3}$ **28.2.** $6^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[2]{2^3}$ **28.3.** $\dfrac{6^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[2]{2^3}}$ **28.4.** $6^{-\frac{1}{6}} \times \sqrt[2]{2^3}$

29 Prova que:

29.1. $\dfrac{\sqrt{2} \times 3^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt[3]{3}\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$ **29.2.** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \div \dfrac{\sqrt{8}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{8}$

1.2.6. Resolução de problemas envolvendo operações com radicais e potências

A dona Ana, artesã, recebeu uma encomenda de um pano de terra, mas só lhe deram duas indicações.

O pano de terra deve ter:

- forma quadrada;
- área de 150 dm^2.

A dona Ana ficou com muitas dúvidas sobre quais as dimensões que o pano deveria ter.

Consegues ajudá-la?

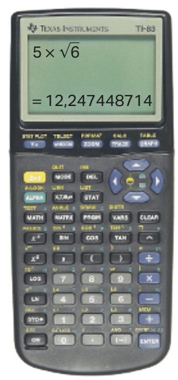
Resolução:

O pano deve ter a forma quadrada, logo, todos os lados deverão ter a mesma medida.

Como $\text{área}_{\text{quadrado}} = l^2$, temos que:

$$
\begin{array}{r|l}
150 & 2 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
150 = l^2 \implies & l = \sqrt{150} \\
\Leftrightarrow & l = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2} \\
\Leftrightarrow & l = 5\sqrt{2 \times 3} \\
\Leftrightarrow & l = 5\sqrt{6}
\end{aligned}
$$



Muitas vezes, na resolução de situações do dia a dia, temos que recorrer a radicais para as resolver.

Repara que, nesta situação, concluímos que o lado do pano de terra deverá ter $5\sqrt{6}$ dm.

Mas como medir $5\sqrt{6}$ dm?

$5\sqrt{6}$ é um número exato, mas no nosso dia a dia não temos necessidade de considerar este valor na medição, podemos utilizar uma aproximação, uma vez que os nossos olhos só conseguem visualizar medições até ao milímetro.

Assim, podes recorrer a uma calculadora para determinar o valor aproximado de $5\sqrt{6}$ dm.

$$5\sqrt{6} \text{ dm} \cong 12{,}2 \text{ dm} = 1{,}22 \text{ m}$$

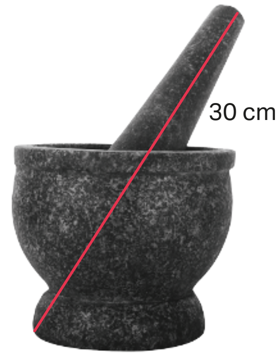
Portanto, a dona Ana tem de fazer um pano de terra com forma quadrada de $1{,}22$ m de comprimento.

Considera agora o seguinte problema:

A iniciativa Mãos de Cabo Verde encomendou caixas de cartão para empacotar as últimas peças que produziu.

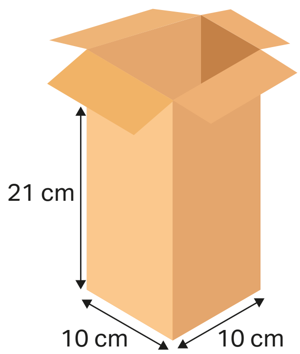
Na nota de encomenda apenas deu indicação do comprimento da diagonal da peça.

A caixa de cartão abaixo servirá para empacotar a peça?



Manual Interativo

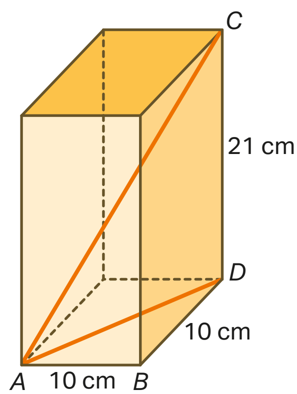
Vídeo
Operações com radicais e potências



A caixa tem a forma de um prisma quadrangular reto e a medida que temos da peça corresponde à sua diagonal.

Vamos então calcular a diagonal do prisma, $\overline{AC}$.

Primeiro, aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo da base ABD para determinar $\overline{AD}$.



$$\overline{AD}^2 = 10^2 + 10^2 \implies \overline{AD}^2 = 100 + 100$$
$$\iff \overline{AD}^2 = 200$$
$$\iff \overline{AD} = \sqrt{200}$$

De seguida, aplicamos novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo ADC.

$$\overline{AC}^2 = 21^2 + \sqrt{200}^2 \implies \overline{AD}^2 = 441 + 200$$
$$\iff \overline{AD}^2 = 641$$
$$\iff \overline{AD} = \sqrt{641} \cong 25{,}32 \text{ cm}$$

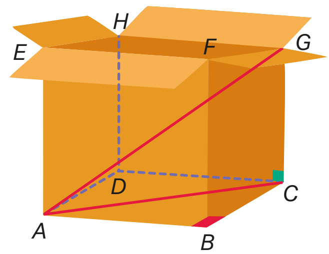
Como a diagonal da caixa é $25{,}32$ cm e a diagonal da peça é 30 cm, esta caixa não é indicada.

Exercícios

> **Recorda:**
> $1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$

30 A CVTransportes necessita de caixas de cartão para transportar um determinado produto. A empresa chegou à conclusão de que o melhor formato da caixa seria o de um cubo, conforme a imagem ao lado, com capacidade para $20\ \ell$.

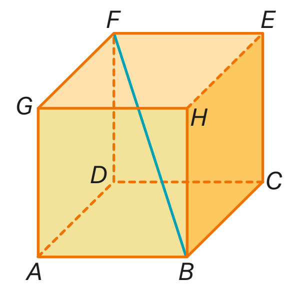
Para isso, vai solicitar a uma empresa parceira da especialidade a produção dessas caixas, indicando as dimensões (comprimento, largura e altura) das mesmas.



30.1. Quais deverão ser as medidas das caixas?

30.2. Qual é o valor exato do comprimento da diagonal das caixas?

31 Considera o seguinte cubo, com volume $3\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

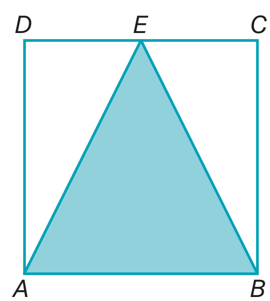


31.1. Determina a medida exata da aresta do cubo em cm. (Apresenta o resultado na forma de um único radical.)

31.2. Prova que a diagonal espacial do cubo mede 3 cm.

32 Considera o retângulo $[ABCD]$ e o triângulo equilátero $[ABE]$, representados na imagem ao lado.

O perímetro do triângulo equilátero é $\sqrt{63}$ cm.



32.1. Determina a medida da base do triângulo equilátero, apresentando o resultado na forma $a\sqrt{7}$, com $a \in \mathbb{Q}$.

32.2. Determina a medida da altura do triângulo equilátero.

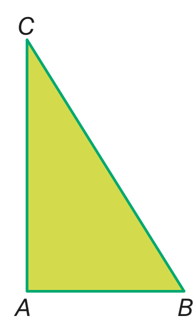
32.3. Qual é a área do retângulo $[ABCD]$?

32.4. Apresenta o resultado na forma $a + b\sqrt{3}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

33 Considera o triângulo retângulo $[ABC]$ representado na figura ao lado.

Sabemos que:

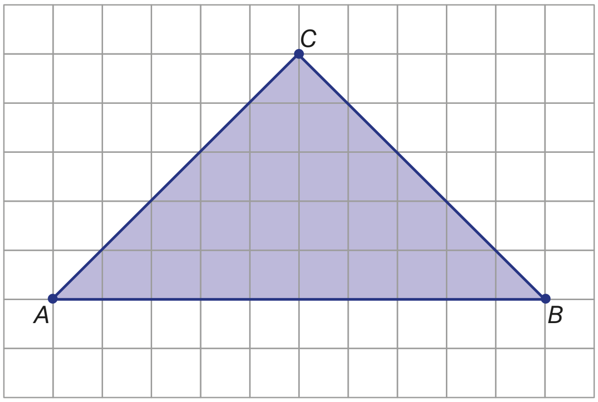
$$\overline{BC} = \sqrt[3]{48} \text{ e } \overline{AB} = \sqrt[3]{36}$$



33.1. Mostra que $\overline{BC} = 2\,\overline{AB}$.

33.2. Determina $\overline{AC}$.

34 **Considera o triângulo representado na malha quadriculada. Cada quadrícula tem de lado 1 unidade.**



34.1. Determina:

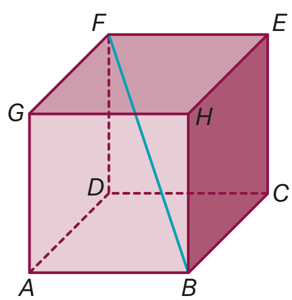
a) $\overline{AB}$ **b)** $\overline{AC}$ **c)** $\overline{BC}$

34.2. Verifica se o triângulo é retângulo em C.

(Nota: Se o Teorema de Pitágoras não for válido no triângulo, então o triângulo não é retângulo – Recíproco do Teorema de Pitágoras.)

34.3. Mostra que o perímetro do triângulo é $10 + 10\sqrt{2}$.

35 **Sabe-se que a medida da diagonal espacial do cubo é de 3.**



35.1. Mostra que a medida da aresta do cubo é $3^{\frac{1}{2}}$.

35.2. Determina o volume do cubo.

36 **Considera o retângulo $[ABCD]$.**

Sabe-se que $\overline{AB} = \sqrt{60}$ e que $\overline{BC} = \sqrt{48}$.

Determina:

36.1. a área do retângulo, apresentando o resultado na forma $a\sqrt{5}$.

36.2. o perímetro do retângulo.

Síntese

Monotonia da potenciação

Se $0 < a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, então $a^n < b^n$.

Raiz índice *n*

$\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$, lê-se "**raiz índice *n* de *a***" e toma o valor b tal que $b^n = a$.

- Se n é par, então $\sqrt[n]{a}$ só se define se $a \in \mathbb{R}_0^+$.
- Se n é par, então $\sqrt[n]{a}$ define-se $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sejam $a \in \mathbb{R}_0^+$; $n \in \mathbb{N}$; $b \in \mathbb{R}$

- Se n é um número ímpar, então: $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$.
- Se n é um número par, então: $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} \vee b = -\sqrt[n]{a}$.

Nota: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Radical como potência de expoente racional

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\forall a \in \mathbb{R}_0^+$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$

Propriedades algébricas dos radicais

Seja $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, tais que $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ estão definidos:

	Regra
Produto de radicais com o mesmo índice	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
Quociente de radicais com o mesmo índice	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, com $b \neq 0$
Potência de um radical	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ Nota: se $n = m$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ se } n \text{ ímpar} \\ \lvert a \rvert, \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$
Composição de radicais	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$

Síntese

Radicais equivalentes

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$ com $a \in \mathbb{R}_0^+$; $k \neq 0$; $m, n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[kn]{a^{km}}$ dizem-se radicais equivalentes.

Potências de base positiva e expoente racional

Seja $a \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$ e $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, então $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $n, m \in \mathbb{Z}$

		Regra
Produto de potências	**Com a mesma base**	$a^n \times a^m = a^{n+m}$
	Com o mesmo expoente	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$
Quociente de potências	**Com a mesma base**	$a^n : a^m = a^{n-m}$
	Com o mesmo expoente	$a^n : b^n = (a : b)^n$
Potência de uma potência		$(a^m)^n = a^{m \times n}$
Potência de expoente negativo		$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Para aplicar

1 Escreve na forma $a\sqrt{b}$, com $a \neq 1$, cada um dos seguintes radicais.

1.1. $\sqrt{27}$

1.2. $\sqrt{125}$

1.3. $\sqrt{48}$

1.4. $\sqrt{63}$

1.5. $\sqrt{200}$

1.6. $\sqrt{284}$

2 Simplifica cada uma das seguintes expressões e apresenta a resposta na forma $a\sqrt{b}$, com $a \neq 1$.

2.1. $\sqrt{8}+\sqrt{2}$

2.2. $\sqrt{5}+\sqrt{125}$

2.3. $\sqrt{216}-\sqrt{6}$

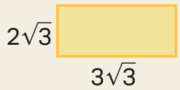
2.4. $\sqrt{27}+2\sqrt{3}$

2.5. $\sqrt{243}-\sqrt{12}$

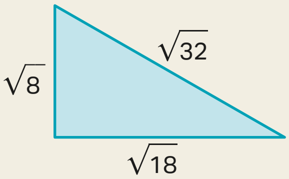
2.6. $\sqrt{63}-\sqrt{112}$

3 Determina o perímetro e a área das figuras, cujas medidas dos lados são dadas numa mesma unidade de medida de comprimento.

3.1.



3.2.



4 Efetua as seguintes operações com radicais e apresenta os resultados de modo simplificado.

4.1. $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$

4.2. $2\times(2+\sqrt{14})$

4.3. $\sqrt{5}\times(2+\sqrt{5})$

4.4. $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{4}$

4.5. $\sqrt{20} : \sqrt{5}$

4.6. $\sqrt{81} : \sqrt{36}$

4.7. $\dfrac{15\sqrt{40}}{5\sqrt{10}}$

4.8. $\dfrac{12\sqrt[3]{81}}{4\sqrt[3]{3}}$

5 Escreve cada uma das frações com denominador racional.

5.1. $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

5.2. $\dfrac{20}{\sqrt{5}}$

5.3. $\dfrac{1}{3\sqrt{4}}$

5.4. $\dfrac{6}{\sqrt[4]{2}}$

5.5. $\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}$

5.6. $\dfrac{2}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

6 Considera o retângulo $[ABCD]$ representado na figura, de área $10\ \text{cm}^2$.
Sabendo que $\overline{DC} = \left(2 + \sqrt{3}\right)$ cm :

6.1. determina $\overline{AD}$;

6.2. determina $\overline{AC}$.

7 Determina o valor da expressão $B = x^4 + x^2$, para:

7.1. $x = \sqrt{5}$

7.2. $x = 2\sqrt{6}$

7.3. $x = \sqrt[4]{16}$

8 Simplifica a seguinte expressão e apresenta-a numa única fração com denominador inteiro.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} + 5}$$

9 Reduz a um único radical e, se possível, simplifica.

9.1. $\sqrt[6]{\sqrt{5^3}}$

9.2. $\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}}$

9.3. $\sqrt{\sqrt{15^4}}$

9.4. $\sqrt[4]{3\sqrt{5}}$

10 Seja a um número real positivo. Através das propriedades mostra que:

$$\frac{\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = a^{\frac{8}{15}}$$

1.3. Geometria analítica no plano

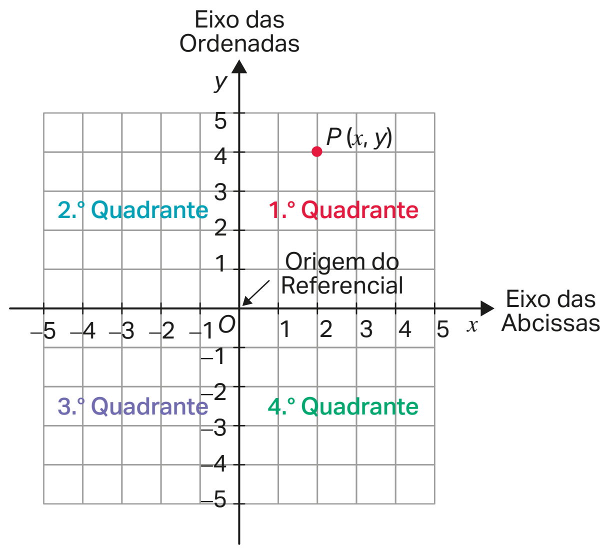
Manual Interativo

Vídeo
Referencial cartesiano

1.3.1. Referenciais ortonormados no plano

Quando representas um ponto no plano é possível recorrer a um **referencial cartesiano** para indicar a posição desse ponto.

Um referencial cartesiano é formado por dois eixos orientados perpendiculares. Ao ponto de encontro dos dois eixos dá-se o nome de **origem do referencial.**



O eixo horizontal é o eixo do xx ou das abcissas.

O eixo vertical é o eixo dos yy ou das ordenadas.

A cada ponto P do plano é possível associar um par ordenado.

Por definição, o ponto P tem as seguintes coordenadas: $P(x, y)$, em que:

x é o valor da abcissa;

y é o valor da ordenada.

Repara que um referencial cartesiano divide o plano em quatro partes.

1.º quadrante	Abcissa e ordenada positivas.	$x > 0 \wedge y > 0$
2.º quadrante	Abcissa negativa e ordenada positiva.	$x < 0 \wedge y > 0$
3.º quadrante	Abcissa e ordenada negativas.	$x < 0 \wedge y < 0$
4.º quadrante	Abcissa positiva e ordenada negativa.	$x > 0 \wedge y < 0$

Por norma, em geometria analítica utilizam-se referenciais cujos eixos são perpendiculares – diz-se que o **referencial é ortogonal** e as unidades de medida são iguais nos dois eixos – diz-se que o **referencial é monométrico**.

Assim, o referencial é um referencial ortonormado ou simplesmente referencial o.n..

Se nada for dito em contrário, os referenciais utilizados neste tema serão sempre **referenciais ortonormados**.

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais designa-se por $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$$

Estabelece-se, assim, uma correspondência entre o conjunto de pontos do plano e $\mathbb{R}^2$.

Manual Interativo

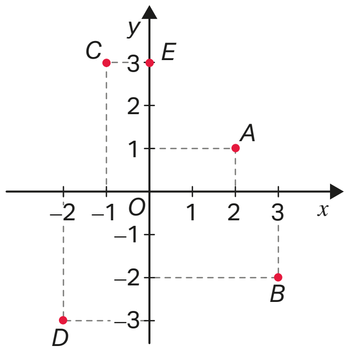
Exercícios
Identificar um referencial ortonormado do plano

Identificar coordenadas de pontos num referencial ortonormado do plano

Exemplo 14

Os pontos representados no referencial ao lado têm as seguintes coordenadas:

$A(2, 1)$ $B(3, -2)$
$C(-1, 3)$ $D(-2, -3)$
$E(0, 3)$



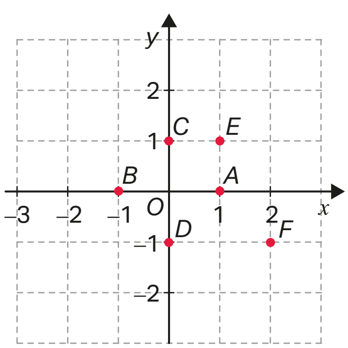
Exemplo 15

No referencial anterior:

$A \in$ 1.° quadrante $B \in$ 4.° quadrante
$C \in$ 2.° quadrante $D \in$ 3.° quadrante
$E \in$ Eixo das ordenadas

Exercícios

37 **Indica as coordenadas de cada um dos pontos representados no referencial.**



38 **Relativamente aos pontos representados no referencial do exercício 37, indica a que quadrante ou eixo pertencem.**

39 Considera o ponto $P(2-k\ ,\ k+1)$, com $k \in \mathbb{R}$.
Indica um valor de k, tal que:

39.1. $P \in$ 1.º Quadrante

39.2. $P \in$ 2.º Quadrante

39.3. $P \in$ 3.º Quadrante

39.4. $P \in$ 4.º Quadrante

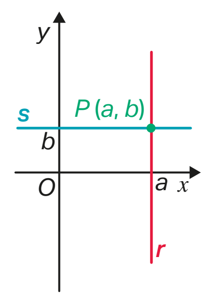
39.5. $P \in$ Eixo das ordenadas

39.6. $P \in$ Eixo das abcissas

- O **eixo das abcissas** corresponde ao conjunto de pontos cuja ordenada é zero. Assim, $P(x\ ,\ y)$ pertence ao eixo das abcissas se e só $y=0$.
- O **eixo das ordenadas** corresponde ao conjunto de pontos cuja abcissa é zero. Assim, $P(x\ ,\ y)$ pertence ao eixo das abcissas se e só $x=0$.

Vamos ver, de seguida, como definir alguns tipos de retas no referencial cartesiano.

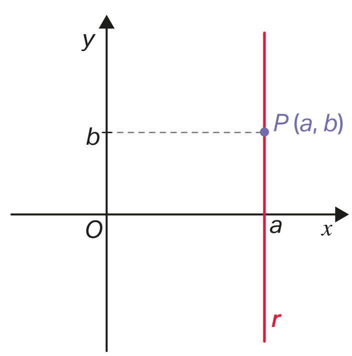
Equações das retas



Considera um referencial cartesiano $\boldsymbol{Oxy}$.

Dado um ponto $P(x, y)$, consideremos as retas r e s que passam em P e são paralelas, respetivamente, aos eixos Oy e Ox.

Retas paralelas ao eixo das ordenadas – Retas verticais



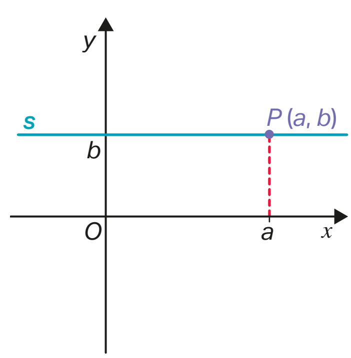
Todos os pontos da reta r têm abcissa a e qualquer ponto do plano com abcissa a pertence à reta r.

Então, a reta r é definida pela equação cartesiana $x=a$:

$$r=\left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x=a\right\}$$

Assim, o eixo dos yy corresponde à reta de equação $x=0$.

Retas paralelas ao eixo das abcissas – Retas horizontais



De forma análoga, todos os pontos da reta s têm ordenada b e qualquer ponto do plano com abcissa b pertence à reta s.

Então, a reta s é definida pela equação cartesiana $y=b$:

$$s=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y=b\right\}$$

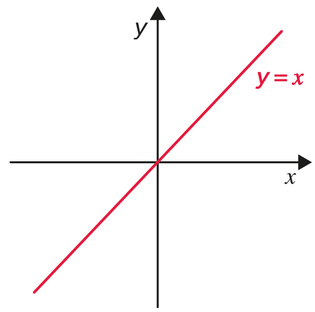
Assim, o eixo dos xx corresponde à reta de equação $y=0$.

Bissetriz dos quadrantes ímpares

Por definição, a bissetriz dos quadrantes ímpares é uma reta que divide os 1.° e 3.° quadrantes em ângulos geometricamente iguais. Todos os pontos dessa reta têm abcissa e ordenada iguais.

Assim, a bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela equação cartesiana $y = x$.

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\right\}$$

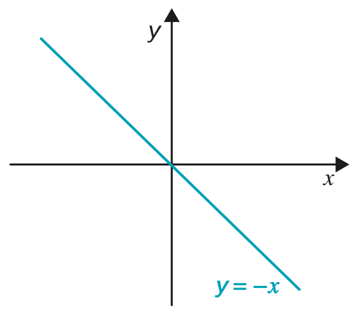


Bissetriz dos quadrantes pares

De forma análoga, a bissetriz dos quadrantes pares é uma reta que divide o 2.° e 4.° quadrantes em ângulos geometricamente iguais. Neste caso, e conforme a imagem ao lado, todos os pontos dessa reta têm abcissa simétrica da ordenada.

Assim, a bissetriz dos quadrantes pares é definida pela equação cartesiana $y = -x$:

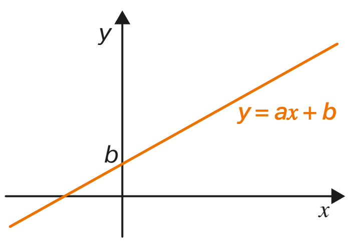
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\right\}$$



De uma forma geral, e recordando o que aprendeste no 9.° ano, uma reta tem equação cartesiana dada por:

$y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$

Em que b é a ordenada na origem e a o declive.



Exemplo 16

Considerando os pontos $A(2, 1)$ e $B(3, -2)$, a equação da reta que passa pelos dois pontos é dada por:

- Determinação de a

$$a = \frac{1-(-2)}{2-3} = \frac{1+2}{-1} = -3$$

- Determinação de b

$$y = -3x + b \longrightarrow 1 = -3 \times 2 + b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = -6 + b \Leftrightarrow b = 7$$

Logo,

$$y = -3x + 7$$

Recorda:
Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a equação da reta AB é dada por $y = ax + b$, onde

- $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ é o declive
- b é a ordenada na origem.

Manual Interativo

Vídeo
Distância entre 2 pontos no plano

Exercícios

40 Considera um referencial Oxy e o ponto $A(-3, 2)$.
Escreve a equação cartesiana da reta que passa por A e é:

40.1. paralela ao eixo dos xx;

40.2. paralela ao eixo dos yy.

41 Num referencial o.n., considera os seguintes pontos:

$$A(2, 1);\ B(3, -2);\ C(-1, 3);\ D(2, -3) \text{ e } E(0,3)$$

41.1. Indica, justificando, dois pontos que:

a) pertençam a uma reta paralela a Ox;

b) pertençam a uma reta perpendicular a Ox.

41.2. Considera o ponto $P(1+2k, k+4)$, com $k \in \mathbb{R}$.
Determina os valores de k, tais que:

a) P corresponda ao ponto C;

b) P pertença à bissetriz dos quadrantes pares;

c) P pertença ao 4.° quadrante;

d) P pertença à reta que passa por A e seja paralela ao eixo das ordenadas.

41.3. Determina a equação da reta que passa pelos pontos:

a) B e C

b) C e D

c) E e A

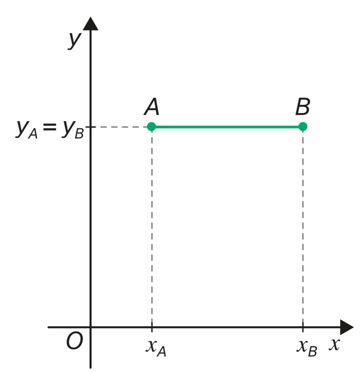
1.3.2. Distância entre dois pontos no plano

Num plano, considera um referencial o.n. Oxy e dois pontos A e B, cujas coordenadas são, respetivamente, (x_A, y_A) e (x_B, y_B).

Como poderemos calcular a distância entre os pontos A e B?

- No caso de os pontos se encontrarem numa reta horizontal, percebemos facilmente que:

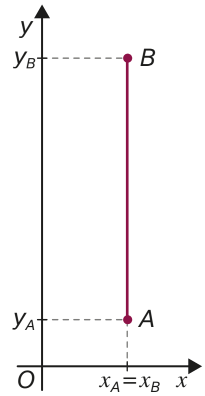
$$d(A, B) = \overline{AB} = |x_B - x_A|$$



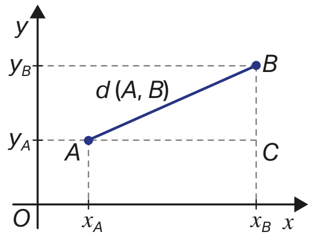
- No caso de os pontos se encontrarem numa reta vertical, de forma análoga:

$$d(A, B) = \overline{AB} = |y_B - y_A|$$

Repara que:
$|a - b| = |b - a|$
$|b - a|^2 = (b - a)^2$



- Nos restantes casos, repara que os pontos A e B podem ser considerados como vértices do triângulo retângulo $[ABC]$, sendo AB a hipotenusa desse triângulo.



Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

De onde se conclui que:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Distância entre dois pontos no plano

Dado um referencial o.n. Oxy, a distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Exemplo 17

Dados os pontos $A(3, -2)$ e $B(-4, 2)$, temos que:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{(3 + 4)^2 + (-4)^2} =$$

$$= \sqrt{7^2 + (-4)^2} =$$

$$= \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

Manual Interativo

Vídeo
Ponto médio de um segmento de reta

Exercícios

42 Para cada um dos seguintes pares de pontos, determina a distância entre eles. Apresenta, sempre que possível, o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a \neq 1$.

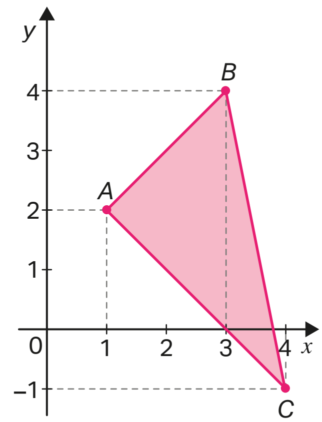
42.1. $A(-3, -2)$ e $B(1, 4)$

42.2. $C(7, 1)$ e $D(0, 2)$

42.3. $E(3, -2)$ e $F(1, 2)$

42.4. $G(0, 0)$ e $H(-2, -4)$

43 No referencial o.n. Oxy ao lado, considera os pontos A, B e C, vértices de um triângulo.



43.1. Indica as coordenadas dos três vértices do triângulo.

43.2. Determina:

a) $d(A, B)$

b) $d(B, C)$

c) $d(A, C)$

43.3. O triângulo $[ABC]$ é retângulo? Justifica a tua resposta.

1.3.3. Ponto médio de um segmento de reta

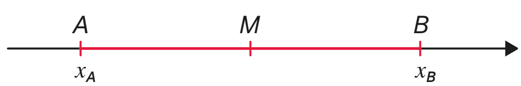
O ponto médio, ponto M, de um segmento de reta $[AB]$ corresponde ao ponto que divide esse segmento de reta em dois segmentos de igual comprimento.

Numa reta numérica, considera dois pontos distintos A e B, com abcissas, respetivamente, x_A e x_B.

Qual é a abcissa, m, do ponto médio M do segmento de reta $[AB]$?

Temos de considerar duas situações.

1.° caso: se $x_A < x_B$



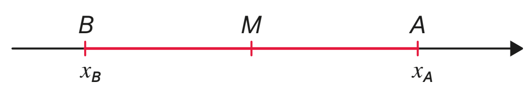
Por definição, $\overline{MA} = \overline{MB}$.
Logo,

$m - x_A = x_B - m \iff 2m = x_B + x_A$

$\iff 2m = x_A + x_A$

$\iff m = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

2.° caso: se $x_A > x_B$



Por definição, $\overline{MB} = \overline{MA}$.
Logo,

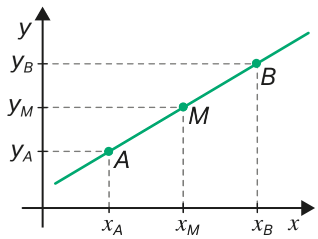
$m - x_B = x_A - m \iff 2m = x_A + x_B$

$\iff m = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

Numa reta numérica, dados dois pontos A e B de abcissas x_A e x_B, respetivamente, a abcissa do ponto M, ponto médio de $[AB]$, é igual a:

$$m = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Agora, considera um referencial o.n. Oxy.



Sejam A e B dois pontos de coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respetivamente, e M o ponto médio de $[AB]$.

De modo semelhante podes concluir que as coordenadas do ponto M são dadas em função das coordenadas de A e de B por $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, como sugere a figura.

Num referencial o.n. Oxy, dados dois pontos $A\,(x_A, y_A)$ e $B\,(x_B, y_B)$, as coordenadas do ponto médio M são dadas por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exercícios

44 **Determina as coordenadas do ponto médio dos seguintes pares de pontos.**

44.1. $A(-3, -2)$ e $B(1, 4)$

44.2. $C(7, 1)$ e $D(0, 2)$

44.3. $E(3, -2)$ e $F(1, 2)$

44.4. $G(0, 0)$ e $H(-2, -4)$

45 **Considera os pontos $A(-3, -2)$ e $B(1, 4)$.**
Quais deverão ser as coordenadas de um ponto C tal que B seja o ponto médio de $[AC]$?

Manual Interativo

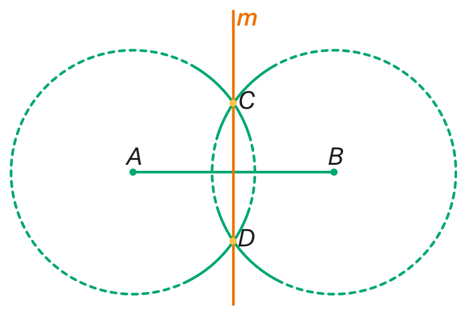
Vídeo
Equação cartesiana da mediatriz

1.3.4. Conjunto de pontos do plano definidos por condições

Mediatriz de um segmento de reta

A mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos equidistantes (à mesma distância) de A e B.

Também podemos definir a mediatriz de um segmento de reta como a reta que passa no ponto médio do segmento e lhe é perpendicular.



Vejamos como aplicando a definição podemos definir através de uma equação cartesiana todos os pontos que pertencem à mediatriz do segmento de reta, ou seja, a **equação cartesiana da mediatriz.**

Num referencial o.n. Oxy, sejam $A(-2, 3)$ e $B(2, -1)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz.

Assim, por definição:

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2}$$

Portanto,

$(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-(-1))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow 4x - 6y + 13 = -4x + 2y + 5$

$\Leftrightarrow -6y - 2y = -4x - 4x - 13 + 5$

$\Leftrightarrow -8y = -8x - 8$

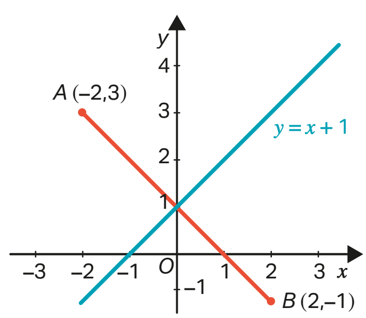
$\Leftrightarrow y = -\dfrac{-8x-8}{8}$

$\Leftrightarrow y = x + 1$

Provou-se que qualquer ponto $P(x, y)$ pertence à mediatriz se e só se $y = x + 1$.

Assim, diz-se que a mediatriz de $[AB]$ é definida pela equação cartesiana:

$$y = x + 1$$



Equação cartesiana da mediatriz

Sejam A e B dois pontos e $[AB]$ o segmento de reta por eles formado.

Seja $P(x, y)$ um ponto que pertence à mediatriz de $[AB]$.

A equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é definida por $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Manual Interativo

Vídeo
Mediatriz de um segmento de reta: propriedades

Exercício

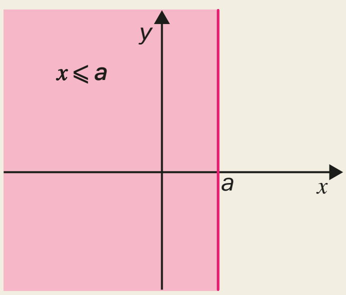
46 **Num referencial o.n. Oxy, sejam $A(-3, 1)$ e $B(0, -1)$.**
Determina a equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Semiplanos

Num plano, consideremos um referencial o.n. Oxy.

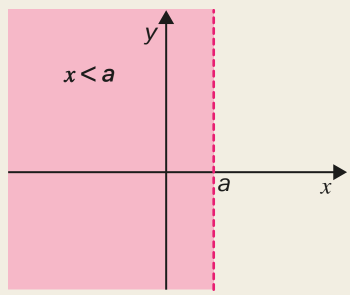
- Seja r uma reta vertical, de equação $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.
  A reta divide o plano em dois semiplanos, que podem considerar-se abertos ou fechados dependendo da inclusão ou não da reta r.

Semiplano fechado à esquerda da reta r



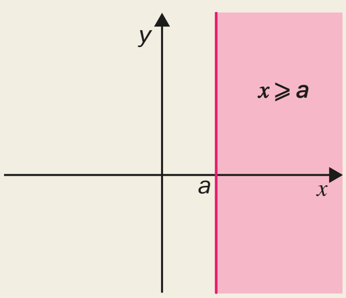
O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant a\right\}$

Semiplano aberto à esquerda da reta r



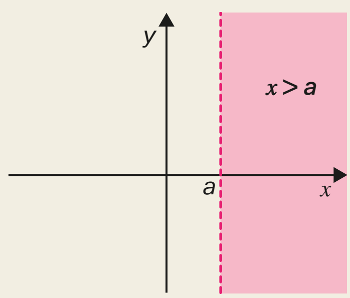
O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < a\right\}$

Semiplano fechado à direita da reta r



O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant a\right\}$

Semiplano aberto à direita da reta r



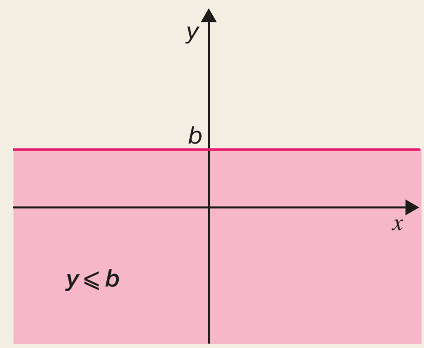
O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > a\right\}$

Manual Interativo

Vídeo
Semiplanos

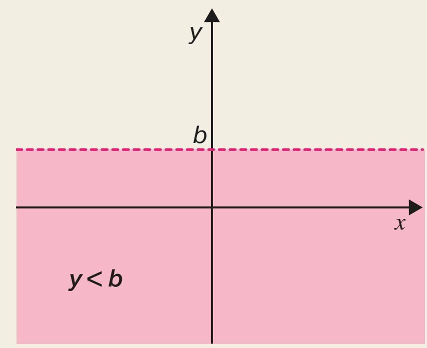
- Seja s uma reta horizontal, de equação $y=b$, $b\in\mathbb{R}$.
  A reta divide o plano em dois semiplanos, que podem considerar-se abertos ou fechados, dependendo da inclusão ou não da reta s.

Semiplano fechado inferior da reta s



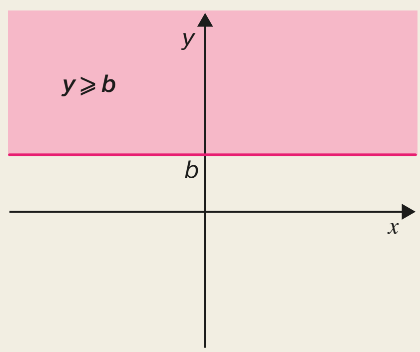
O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ y\leqslant b\right\}$

Semiplano aberto inferior da reta s



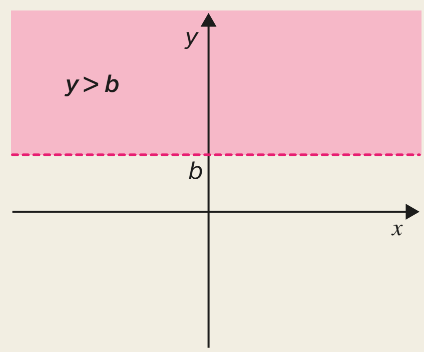
O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ y< b\right\}$

Semiplano fechado superior da reta s



O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geqslant b\right\}$

Semiplano aberto superior da reta s



O semiplano corresponde ao conjunto de pontos: $A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ y> b\right\}$

Exemplo 18

Considera os semiplanos definidos por:

$A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ x\leqslant 3\right\}$

$B=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ y> -1\right\}$

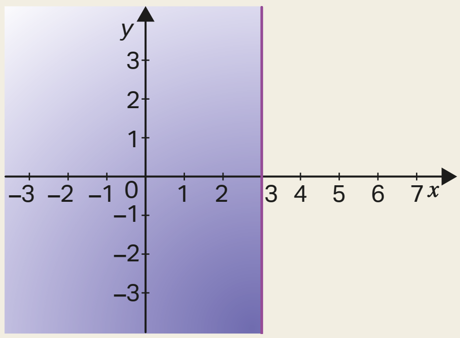
RECORDA

Interseção:
$A\cap B$ – este conjunto tem todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e a B.

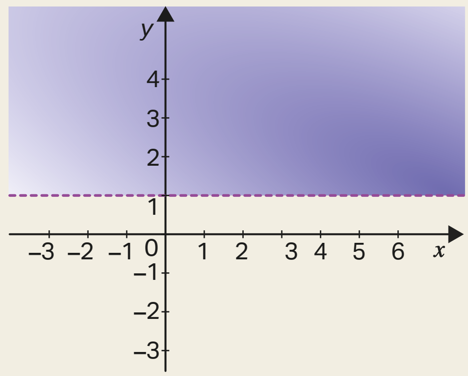
Reunião:
$A\cup B$ – este conjunto tem todos os elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos.

Vamos representar no plano os conjuntos A, B, $A \cap B$ e $A \cup B$.

A



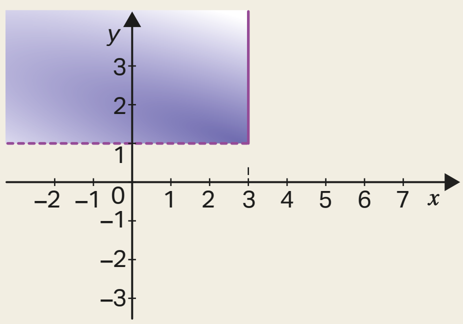
B



$\boldsymbol{A \cap B}$

A interseção de conjuntos está associada à conjunção de condições

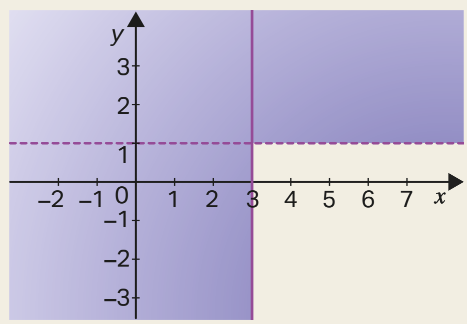
$A \cap B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 3 \wedge y > -1\right\}$



$\boldsymbol{A \cup B}$

A reunião de conjuntos está associada à disjunção de condições

$A \cup B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 3 \vee y > -1\right\}$



Manual Interativo

Exercício Representar semiplanos usando condições

Exercícios

47 Considera os conjuntos:

$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 1\right\}$ $\quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -2\right\}$

$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 2\right\}$ $\quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -3\right\}$

Representa geometricamente os seguintes conjuntos:

47.1. A

47.2. D

47.3. $A \cap C$

47.4. $B \cup D$

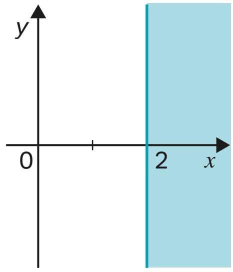
47.5. $A \cap C \cap B \cap D$

Manual Interativo

Exercício
Identificar inequações de semiplanos

48 Em cada situação, seleciona a condição que corresponde ao conjunto de pontos representado a sombreado na figura.

I



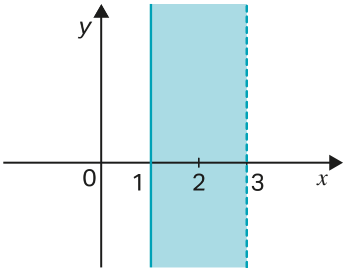
(A) $x \leqslant 2$

(B) $x < 2$

(C) $y \geqslant 2$

(D) $x \geqslant 2$

II



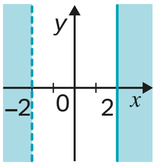
(A) $x \leqslant 1 \wedge x \leqslant 3$

(B) $x \geqslant 1 \wedge x < 3$

(C) $x > 1 \wedge x > 3$

(D) $y \geqslant 1 \wedge y < 3$

III



(A) $x < -2 \vee x > 2$

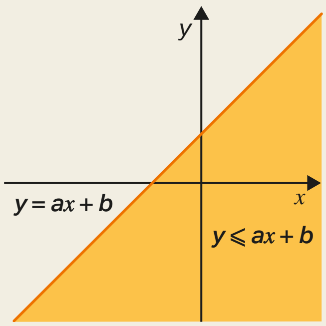
(B) $x < -2 \vee x \geqslant 2$

(C) $x < -2 \wedge x \geqslant 2$

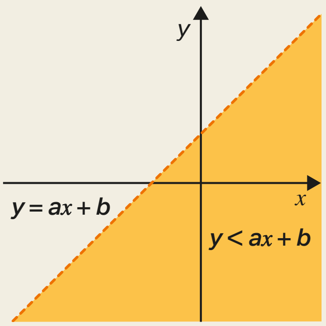
(D) $y < -2 \wedge y > 2$

- Seja t uma reta de equação $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
  A reta divide o plano em dois semiplanos, que podem considerar-se abertos ou fechados dependendo da inclusão ou não da reta t.

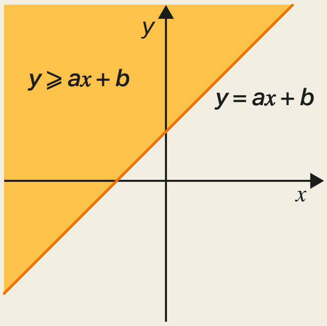
Semiplano fechado inferior à reta *t*



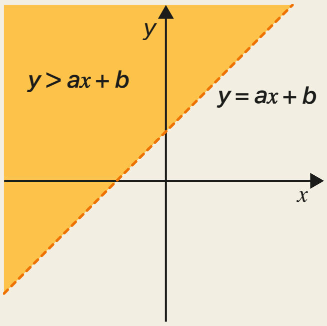
Semiplano aberto inferior à reta *t*



Semiplano fechado superior à reta *t*

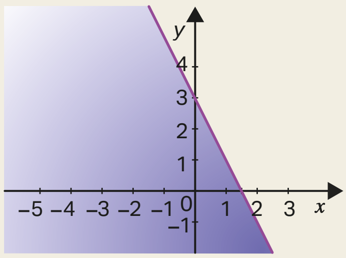


Semiplano aberto superior à reta *t*

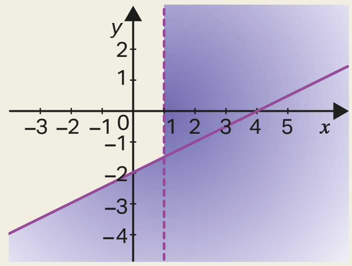


Exemplo 19

Conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ definidos pela condição $y \leqslant -2x + 3$.

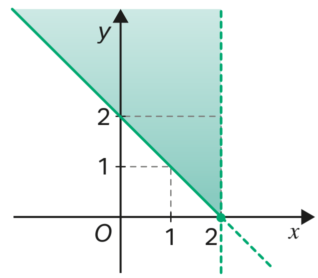


Conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ definidos pela condição $y \leqslant \frac{1}{2}x - 2 \vee x > 1$.



Exercício

49 **Define por uma condição o conjunto de pontos (região colorida) representado no referencial o.n. ao lado.**

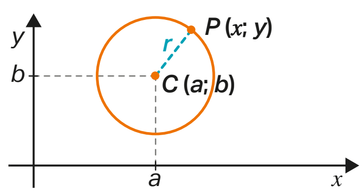


1.3.5. Circunferência e círculo

Uma **circunferência** corresponde ao conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo, no mesmo plano, ao qual designamos por **centro da circunferência**.

Numa circunferência, todos os pontos se encontram à mesma distância (medida do raio) do seu centro. Portanto, para definir uma circunferência basta conhecer o seu raio e o seu centro.

Num referencial o.n. Oxy, consideremos a circunferência de raio r e centro $C(a, b)$.



Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência.

Assim, por definição:

$$\overline{PC} = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
$$\implies (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Manual Interativo

Vídeo
Lugares geométricos: circunferência e círculo

A circunferência de raio r e centro $C(a\,,\,b)$ é definida pela equação cartesiana:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

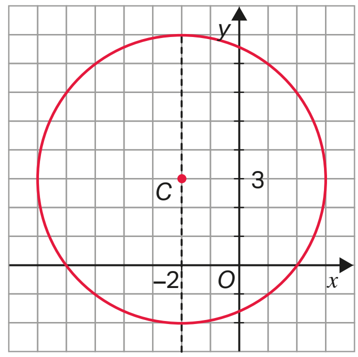
Exemplo 20

Consideremos a circunferência de raio 5 e centro $C(-2\,,\,3)$.

A equação cartesiana da circunferência é dada por:

$(x-(-2))^2+(y-3)^2=5^2 \iff$

$\iff (x+2)^2+(y-3)^2=25$



Exercícios

50 **Considera uma circunferência de raio 1 e centro $C(1,-1)$.**
Indica a equação cartesiana da circunferência.

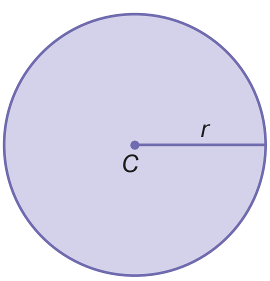
51 **Considera os pontos $A(-3\,,\,1)$ e $B(0\,,\,-1)$.**
Determina a equação cartesiana da circunferência:

51.1. se A é o centro da circunferência e B é um dos pontos da circunferência;

51.2. se $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

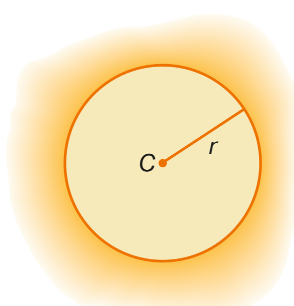
Num referencial o.n. Oxy, consideremos a circunferência de raio r e centro $C(a\,,\,b)$, que divide o plano em dois conjuntos de pontos:

- os pontos $P(x\,,\,y)$, tais que $d(P\,,\,C)\leqslant r$ – **círculo de centro C e raio r;**
- os pontos $P(x\,,\,y)$, tais que $d(P\,,\,C)>r$ – **"exterior" da circunferência de centro C e raio r.**



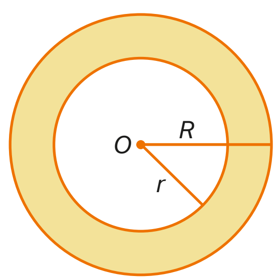
Círculo

$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$



Exterior do círculo

$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$

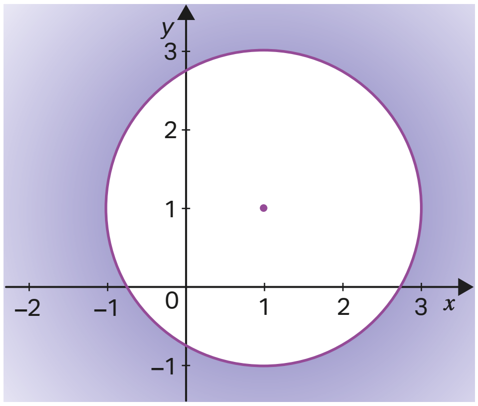


Coroa circular

$r^2\leqslant(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$

Exercício

52 Observa os referenciais onde se representam superfícies planas. Para cada caso, identifica a condição dos pontos $P(x\,,\,y)$ que os define.

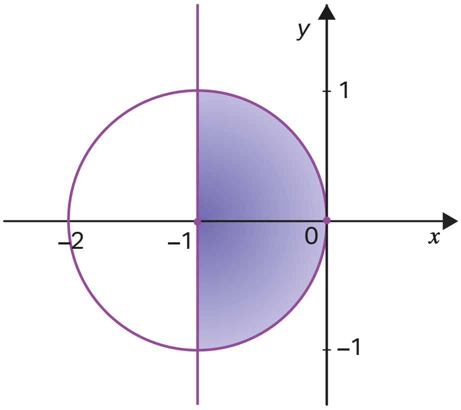


(A) $(x-1)^2+(y-1)^2>4$

(B) $(x-1)^2+(y-1)^2\geqslant 2$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2\geqslant 4$

(D) $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 16$

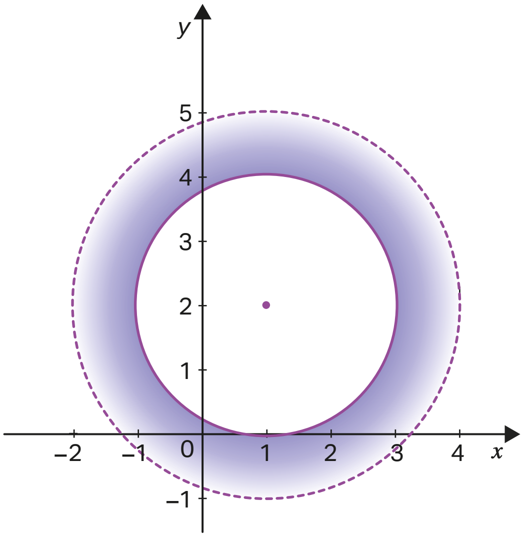


(A) $(x-1)^2+y^2\leqslant 1\wedge x\geqslant -1$

(B) $x^2+(y+1)^2\leqslant 1\wedge x\geqslant -1$

(C) $(x+1)^2+y^2\leqslant 1\wedge x\geqslant -1$

(D) $(x+1)^2+y^2\leqslant 1\wedge y\geqslant -1$



(A) $(x-1)^2+(y-2)^2\geqslant 4\wedge(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 3$

(B) $(x-1)^2+(y-2)^2\geqslant 4\wedge(x-1)^2+(y-2)^2<9$

(C) $(x-1)^2+(y-2)^2\geqslant 2\wedge(x-1)^2+(y-2)^2<3$

(D) $(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 4\wedge(x-1)^2+(y-2)^2>9$

1.3.6. Resolução de problemas

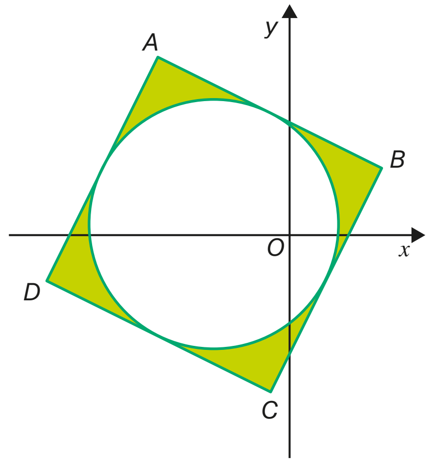
Exemplo 21

O jardineiro da Câmara Municipal do Sal vai preparar um canteiro no Jardim Botânico Viveiro.

Ele tem de construir um canteiro com forma quadrangular, com uma circunferência inscrita, conforme a imagem ao lado.

Teve acesso a um referencial o.n. onde estava representado o canteiro. A unidade usada no referencial corresponde ao metro.
Deram-lhe a indicação das coordenadas dos pontos $A(-6, 8)$ e $C(-1, -3)$.

O jardineiro necessita de algumas informações para construir o canteiro:



1. Qual é o comprimento do lado do quadrado?
2. Qual é o centro da circunferência?

Resolução

1. O segmento de reta $[AC]$ corresponde à diagonal do quadrado e forma com os lados $[AB]$ e $[BC]$ um triângulo retângulo, onde $\overline{AB} = \overline{BC}$.

   Determinemos $\overline{AC} = d(A, C)$.

   $$d(A, C) = \sqrt{(-6-(-1))^2 + (8-(-3))^2} = \sqrt{(-6+1)^2 + (8+3)^2} =$$
   $$= \sqrt{(-5)^2 + (11)^2} = \sqrt{25+121} = \sqrt{146}$$

   $[AC]$ é a hipotenusa do triângulo $[ABC]$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = x$.

   Aplicando o Teorema de Pitágoras, vem:

   $$(\sqrt{146})^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 146 = 2x^2 \Leftrightarrow 73 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{73} \cong 8{,}54$$

   Então, o lado do quadrado será aproximadamente de $8{,}54$ m.

2. Como a circunferência se encontra inscrita no quadrado, então o centro da circunferência coincide com o ponto médio da diagonal do quadrado, neste caso, $[AC]$.

   $$\left(\frac{-6+(-1)}{2}, \frac{8+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{-7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

   O centro da circunferência tem de coordenadas $C\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

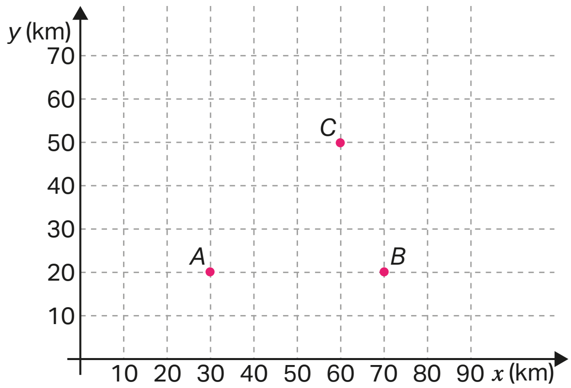
Exemplo 22

A televisão tem passado por uma verdadeira revolução em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Muita dessa transformação aconteceu devido à conversão do sinal analógico para o sinal digital.

No entanto, ainda há localidades que não têm acesso a essa nova tecnologia.

Uma emissora de televisão pretende instalar uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, que já existem em três localidades.

As localizações das antenas estão representadas num plano cartesiano:



De forma a maximizar a transmissão, a torre deve estar situada num local equidistante das três antenas.

Quais deverão ser as coordenadas do local ideal para a construção da torre?

Resolução

As coordenadas das antenas são: $A(30, 20)$; $B(70, 20)$; $C(60, 50)$.

A torre deve ficar equidistante das três antenas, logo, tem de ficar localizada:

- na mediatriz do segmento de reta $[AB]$;
- na mediatriz do segmento de reta $[AC]$;
- na mediatriz do segmento de reta $[BC]$.

Estudemos as equações das mediatrizes de cada segmento de reta.

- Mediatriz do segmento de reta $[AB]$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2}$$

$$\Rightarrow (x-30)^2 + (y-20)^2 = (x-70)^2 + (y-20)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 60x + 900 + y^2 - 40y + 400 = x^2 - 140x + 4900 + y^2 - 40y + 400$$

$$\Leftrightarrow 80x = 4000$$

$$\Leftrightarrow x = 50$$

- Mediatriz do segmento de reta $[AC]$

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-60)^2 + (y-50)^2}$$

$$\Rightarrow (x-70)^2 + (y-20)^2 = (x-60)^2 + (y-50)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 140x + 4900 + y^2 - 40y + 400 = x^2 - 120x + 3600 + y^2 - 100y + 2500$$

$$\Leftrightarrow 60y = 20x + 800$$

$$\Leftrightarrow 3y = x + 40$$

Como o ponto terá de pertencer à mediatriz de $[AB]$, dada por $x = 50$, e à mediatriz de $[AC]$, dada por $3y = x + 40$, o ponto corresponde ao ponto de interseção das duas mediatrizes.

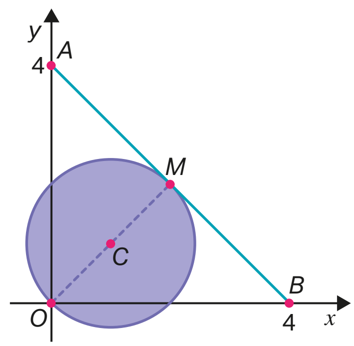
Logo, para $x = 50$, temos: $3y = 50 + 40 \Leftrightarrow 3y = 90 \Leftrightarrow y = 30$.

Portanto, a torre deverá ficar localizada no ponto de coordenadas $(50, 30)$.

Exercícios

53 **No referencial o.n. Oxy estão representados uma circunferência de centro C, que passa na origem do referencial, e um segmento de reta $[AB]$, com $A(0, 4)$ e $B(4, 0)$.**

Os pontos M e C são pontos médios de $[AB]$ e $[OM]$, respetivamente.



53.1. Determina as coordenadas do ponto M.

53.2. Determina a equação da mediatriz de $[AB]$.

53.3. Determina a equação da circunferência.

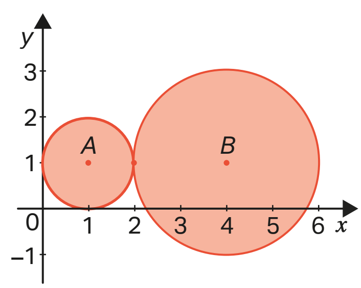
53.4. O ponto C pertence à mediatriz $[AB]$? Justifica.

53.5. Quais as coordenadas de interseção da circunferência com os eixos coordenados?

54 **No referencial o.n. Oxy, estão representados dois círculos tangentes entre si.**

Um dos círculos, com centro $A(1, 1)$, é também tangente ao eixo das ordenadas. O outro círculo, de centro em B, tem o dobro do raio do primeiro.

Os centros dos círculos pertencem a uma reta paralela ao eixo Ox.

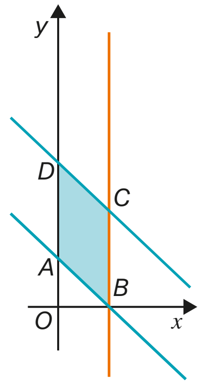


54.1. Determina a equação da circunferência de centro em A.

54.2. Escreve uma condição que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira.

55 No referencial o.n. Oxy, considera o paralelogramo $[ABCD]$. Sabemos que:

- o ponto D tem coordenadas $(0, 6)$;
- a reta AB é definida pela equação $y = -x + 2$;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta AB com o eixo Ox.

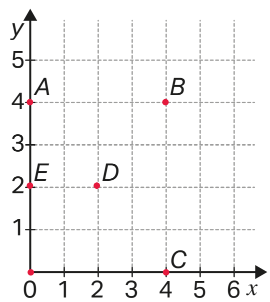


55.1. Define o paralelograma por uma condição.

55.2. Determina a área do paralelogramo.

55.3. Determina o perímetro do paralelogramo.

56 Um jogo pedagógico utiliza uma interface algébrico-matemática. O jogador deve eliminar os pontos do plano cartesiano, clicando sobre eles, mas seguindo trajetórias, previamente programadas, que passem pelos pontos escolhidos.



A interface permite definir as trajetórias recorrendo à equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência.

Caso o ponto seja eliminado por meio da equação de uma circunferência, cada ponto, diferente da origem, eliminado vale 2 pontos.

Caso o ponto seja eliminado por meio da equação de uma reta, cada ponto, diferente da origem, eliminado vale 1 ponto.

56.1. Pretende-se eliminar o ponto A. Estuda cada uma das trajetórias para verificar se elimina o ponto A e quantos pontos se obtém.

a) $x = 0$

b) $y = 0$

c) $x^2 + y^2 = 16$

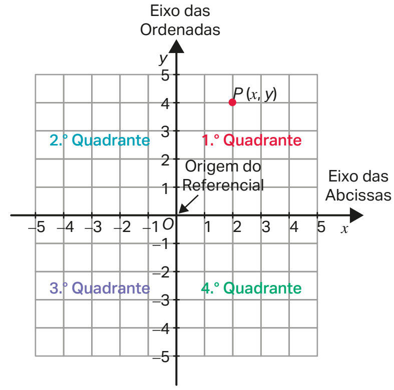
d) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

56.2. Indica uma equação que te permita eliminar o ponto E.

Síntese

Referencial ortonormado



- Tem eixos perpendiculares – ortogonal .
- Tem eixos com unidade de medida igual – monométrico.

  No **eixo das abcissas** todos os pontos têm ordenada zero: $\boldsymbol{y = 0}$.

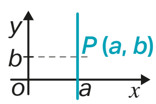
  No **eixo das ordenadas** todos os pontos têm abcissa zero: $\boldsymbol{x = 0}$.

1.° quadrante	Abcissa e ordenada positivas.	$x > 0 \land y > 0$
2.° quadrante	Abcissa negativa e ordenada positiva.	$x < 0 \land y > 0$
3.° quadrante	Abcissa e ordenada negativas.	$x < 0 \land y < 0$
4.° quadrante	Abcissa positiva e ordenada negativa.	$x > 0 \land y < 0$

Equações de retas

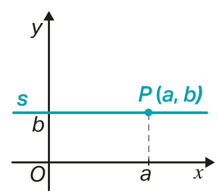
- Retas paralelas ao eixo das ordenadas – Retas verticais

  $x = a$



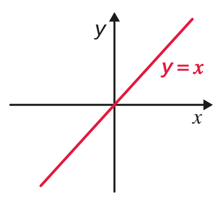
- Retas paralelas ao eixo das abcissas – Retas horizontais

  $y = b$



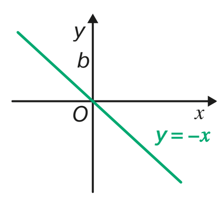
- Bissetriz dos quadrantes ímpares

  $y = x$



- Bissetriz dos quadrantes pares

  $y = -x$



Equação cartesiana da reta: $y = ax + b$, com $a , b \in \mathbb{R}$.

Em que b é a ordenada na origem e a o declive.

Sejam $A\left(x_A , y_A\right)$ e $B\left(x_B , y_B\right)$ dois pontos do plano.

Distância entre dois pontos no plano: $d(A , B) = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2}$

Coordenadas do ponto médio: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2} , \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

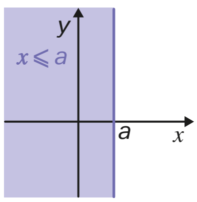
Equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ **:**

$\left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2 = \left(x - x_B\right)^2 + \left(y - y_B\right)^2$

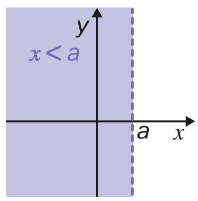
Síntese

Inequações de semiplanos

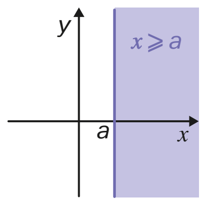
Semiplano fechado à esquerda



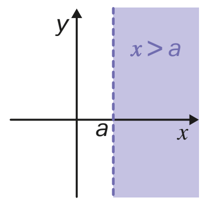
Semiplano aberto à esquerda



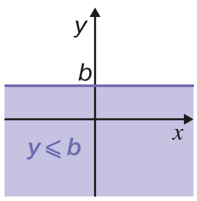
Semiplano fechado à direita



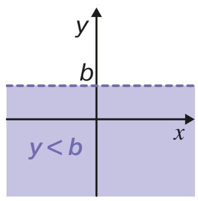
Semiplano aberto à direita



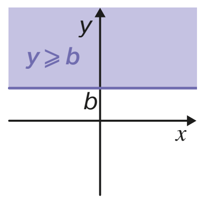
Semiplano fechado inferior



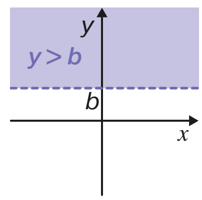
Semiplano aberto inferior



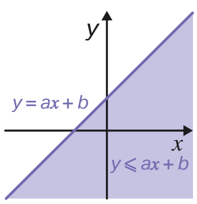
Semiplano fechado superior



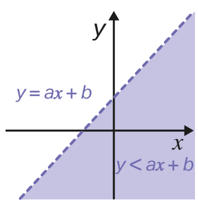
Semiplano aberto superior



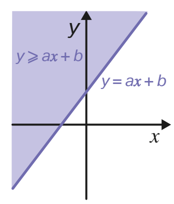
Semiplano fechado inferior



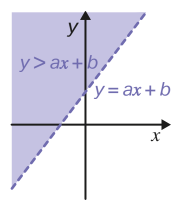
Semiplano aberto inferior



Semiplano fechado superior

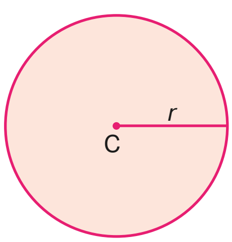


Semiplano aberto superior



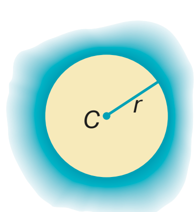
A equação cartesiana da circunferência de centro (a, b) e raio r é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



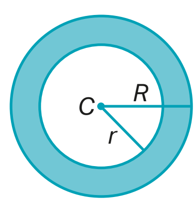
Círculo

$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$



Exterior do círculo

$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$

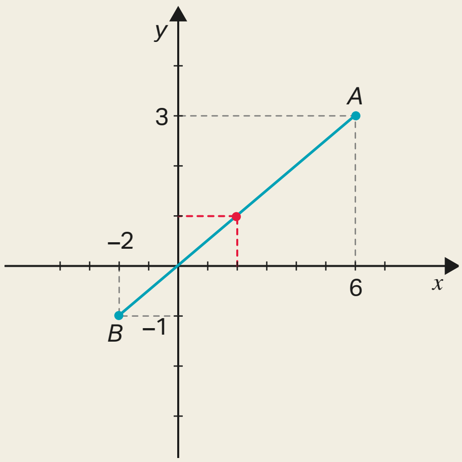


Coroa circular

$r^2 \leqslant (x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2$

Para aplicar

1 **Num referencial o.n. Oxy, considera os pontos A e B.**



1.1. Indica as coordenadas dos pontos A e B.

1.2. Determina o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

1.3. O segmento de reta $[AB]$ é o lado de um triângulo isósceles, em que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Determina as coordenadas do ponto C, sabendo que C tem abcissa -2.

2 **Para um certo valor de w real, o ponto de coordenadas $(-2, w-4)$ pertence à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares.**

Indica, justificando, o valor de w.

3 **Representa em referenciais o. n. o conjunto dos pontos do plano que satisfazem cada uma das seguintes condições:**

3.1. $x = -2$

3.2. $x < 2$

3.3. $y = 0$

3.4. $1 < x \leqslant 5$

3.5. $0 < y < 7$

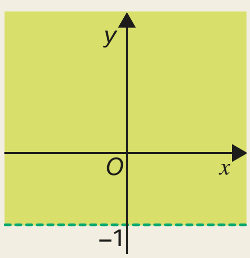
3.6. $x > 5 \vee y > 3$

3.7. $x \geqslant 5 \wedge y > 3$

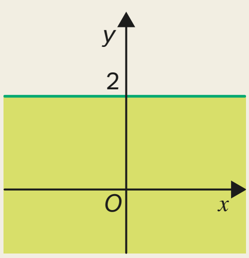
3.8. $x + y > 0$

4 **Representa por uma condição a região sombreada nas figuras seguintes.**

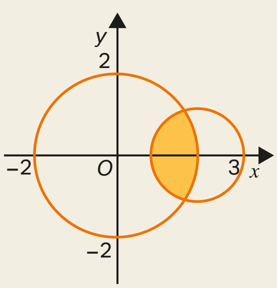
4.1.



4.2.



4.3.



5 **Determina as coordenadas, no plano, do ponto médio dos pontos $A(1, 5)$ e $B(0, -2)$.**

6 **Considera, num referencial o.n. Oxy, os pontos $C(2, -1)$ e $D(4, 6)$.**

6.1. Determina a distância entre C e D.

6.2. Determina a equação reduzida da mediatriz de $[CD]$.

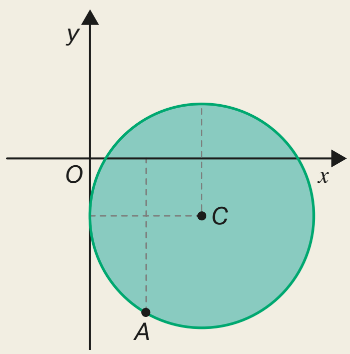
7 **Determina o raio e as coordenadas do centro da circunferência definida, num referencial o.n. Oxy, por:**

$$2y^2 + 16y + 2x^2 - 12x = -46$$

8 **No referencial o.n. Oxy da figura está representada uma circunferência de centro em $C(2, -1)$, tangente ao eixo Oy.**

8.1. Escreve uma equação da circunferência.

8.2. Determina a ordenada do ponto A, de abcissa 1, pertencente à circunferência.



1.4. Geometria analítica no espaço

Manual Interativo

Vídeo
Referencial cartesiano no espaço

1.4.1. Referenciais cartesianos ortonormados do espaço

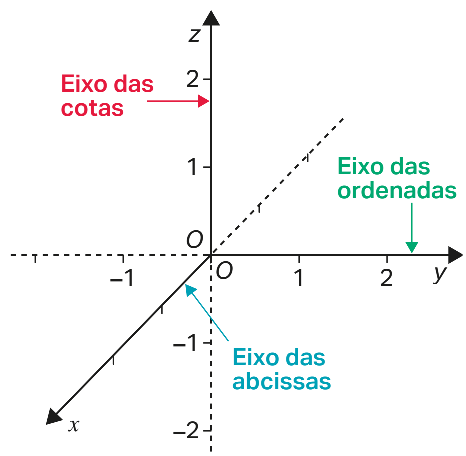
A posição de um ponto no plano fica definida por um par ordenado de números reais (x, y) – as coordenadas do ponto.

Contudo, no espaço, essa informação não é suficiente para indicar a posição de um ponto nele situado. O espaço tem três dimensões, pelo que é necessário introduzir um terceiro eixo ao referencial cartesiano. Será o eixo Oz, o eixo das cotas.

Assim, num referencial cartesiano no espaço, temos:

- Ox como eixo das abcissas;
- Oy como eixo das ordenadas;
- Oz como eixo das cotas;
- Ox, Oy e Oz como eixos coordenados.

Os três eixos são também perpendiculares entre si (referencial ortogonal) e considera-se a mesma unidade de comprimento nos três eixos (referencial monométrico).



A cada ponto do plano corresponde um terno ordenado de números reais.

Um ponto P no espaço representa-se pelas coordenadas: $P(x, y, z)$.

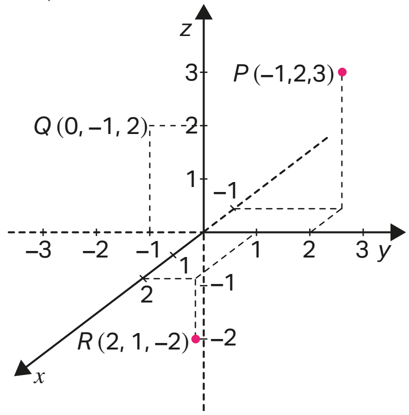
Ao espaço, conjunto de todos os ternos ordenados de números reais, designa-se por $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Estabelece-se, assim, uma correspondência entre o conjunto de pontos do espaço e $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 23

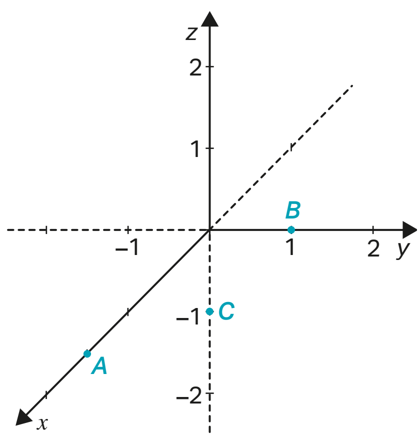
No referencial o.n. abaixo, encontras marcados os pontos $P(-1, 2, 3)$, $Q(0, -1, 2)$ e $R(2, 1, -2)$.



Pontos dos eixos coordenados

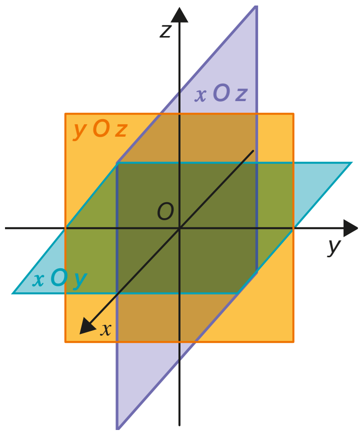
Observa o referencial na figura abaixo.

- O ponto A encontra-se no eixo das abcissas, logo $A(3, 0, 0)$.
  Todos os pontos do eixo das abcissas têm ordenada e cota iguais a zero: $(x, 0, 0)$.
- O ponto B encontra-se no eixo das ordenadas, logo $B(0, 1, 0)$.
  Todos os pontos do eixo das ordenadas têm abcissa e cota iguais a zero: $(0, y, 0)$.
- O ponto C encontra-se no eixo das cotas, logo $C(0, 0, -1)$.
  Todos os pontos do eixo das cotas têm abcissa e ordenada iguais a zero: $(0, 0, z)$.



- Se considerarmos todos os pontos que têm cota zero, estamos a referir-nos ao plano que contém os eixos coordenados Ox e Oy, ou seja, o plano coordenado xOy.

- Se considerarmos todos os pontos que têm ordenada zero, estamos a referir--nos ao plano que contém os eixos coordenados Ox e Oz, ou seja, o plano coordenado xOz.
- Se considerarmos todos os pontos que têm abcissa zero, estamos a referir-nos ao plano que contém os eixos coordenados Oy e Oz, ou seja, o plano coordenado yOz.



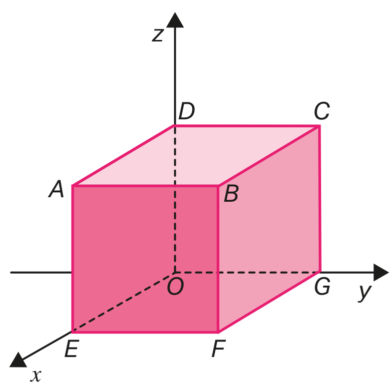
Repara que os planos coordenados dividem o espaço em oito partes que se designam por octantes.

A cada ponto P do espaço corresponde um, e um só, terno ordenado de números reais.

Exercícios

57 **Considera o prisma representado no referencial o.n. abaixo e os seguintes ternos ordenados.**
Associa cada vértice do prisma ao terno ordenado que representa as suas coordenadas.

(3 , 0 , 3)	***A***
(0 , 0 , 0)	
(3 , 0 , 0)	
(0 , 2 , 3)	
(3 , 2 , 3)	
(0 , 0 , 3)	
(0 , 2 , 0)	
(3 , 2 , 0)	



58 **A que eixo ou plano coordenado pertence cada um dos seguintes pontos:**

58.1. $A(0, 0, 3)$

58.2. $B(0, -2, 0)$

58.3. $C(-3, 0, 0)$

58.4. $D(-1, 0, 3)$

58.5. $E(0, -5, 3)$

58.6. $F(-1, -3, 0)$

58.7. $O(0, 0, 0)$

59 **Considera um referencial o.n. $Oxyz$ e o ponto $P(a+1\,,\ a-1\,,\ a^2-1)$.**
Determina o valor de a, tal que:

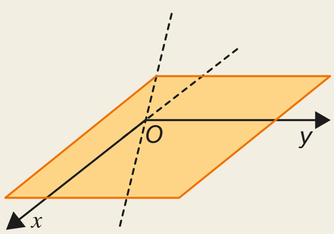
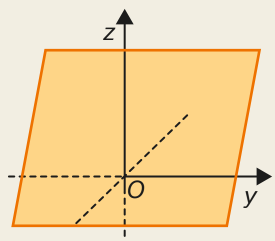
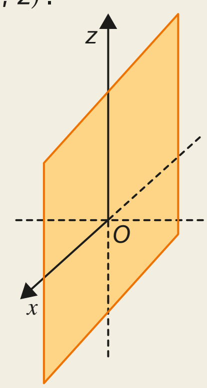
59.1. P pertence ao eixo Oy;

59.2. P pertence ao plano xOz.

1.4.2. Equação de um plano

Planos coordenados

Num referencial o.n. $Oxyz$, conforme já vimos, podemos encontrar três planos coordenados. Cada um deles pode definir-se pela condição que é comum a todos os seus pontos.

Plano horizontal xOy	Plano vertical yOz	Plano vertical xOz
Todos os pontos têm cota nula, da forma $(x\,,\ y\,,\ 0)$.	Todos os pontos têm abcissa nula, da forma $(0\,,\ y\,,\ z)$.	Todos os pontos têm ordenada nula, da forma $(x\,,\ 0\,,\ z)$.
		
$\{(x\,,\ y\,,\ z)\in \mathbb{R}^3 :\ z=0\}$	$\{(x\,,\ y\,,\ z)\in \mathbb{R}^3 :\ x=0\}$	$\{(x\,,\ y\,,\ z)\in \mathbb{R}^3 :\ y=0\}$
Este plano é definido pela condição $z=0$.	Este plano é definido pela condição $x=0$.	Este plano é definido pela condição $y=0$.

Também os eixos coordenados podem ser definidos por meio de condições. Bastará, para tal, pensar que cada um dos eixos é a interseção de dois planos coordenados.

O eixo Ox é a interseção dos planos coordenados xOy e xOz:

$$\{(x\,,\ y\,,\ z)\in \mathbb{R}^3 :\ y=0 \wedge z=0\}$$

O eixo Oy é a interseção dos planos coordenados xOy e yOz:

$$\{(x\,,\ y\,,\ z)\in \mathbb{R}^3 :\ x=0 \wedge z=0\}$$

O eixo Oz é a interseção dos planos coordenados yOz e xOz:

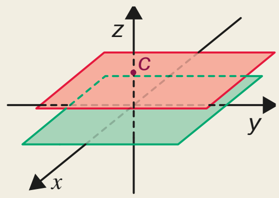
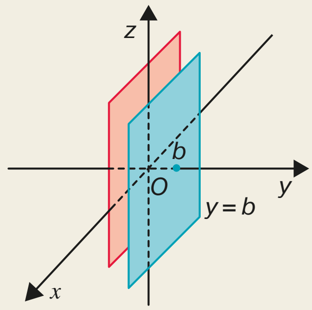
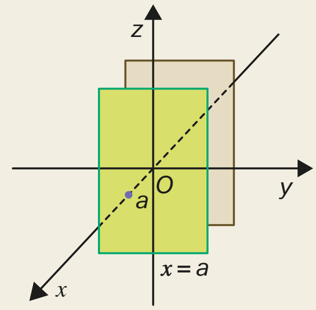
$$\{(x\,,\ y\,,\ z)\in \mathbb{R}^3 :\ x=0 \wedge y=0\}$$

Manual Interativo

Vídeo
Equações de planos paralelos aos planos coordenados

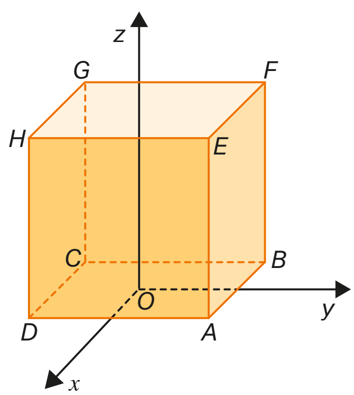
Planos paralelos aos planos coordenados

Seja $Oxyz$ um referencial o.n..

Um plano é paralelo a xOy	Um plano é paralelo a xOz	Um plano é paralelo a yOz
Todos os pontos do plano têm a mesma cota c, com $c \in \mathbb{R}$.	Todos os pontos do plano têm a mesma ordenada b, com $b \in \mathbb{R}$.	Todos os pontos do plano têm a mesma abcissa a, com $a \in \mathbb{R}$.
		
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = c\}$	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = b\}$	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a\}$

Exercício

60 Num referencial ortonormado $Oxyz$, considera o cubo $[ABCDEFGH]$ de faces paralelas aos planos coordenados, em que a origem do referencial coincide com o centro da base do cubo $[ABCD]$. A medida da aresta do cubo é 4.



60.1. Indica as coordenadas dos vértices do cubo.

60.2. Escreve uma condição que represente o plano que contém a face do sólido:

a) $[ABCD]$ **b)** $[ABFE]$

c) $[EFGH]$ **d)** $[ADHE]$

e) $[BCGF]$ **f)** $[CDHG]$

1.4.3. Equações de retas paralelas aos eixos

Seja $Oxyz$ um referencial o.n..

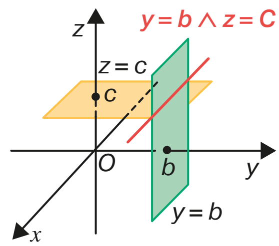
Dados três números reais a, b e $c \in \mathbb{R}$, consideremos três planos α, β e γ, definidos, respetivamente, pelas equações $z = c$, $y = b$ e $x = a$.

Manual Interativo

Vídeo
Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos

Reta paralela a Ox

Seja r a reta resultante da interação dos planos α e β.



Repara que a reta r é paralela a Ox e constituída pelo conjunto de pontos definidos por:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = b \wedge z = c\}$$

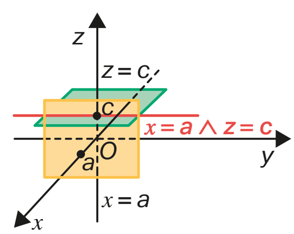
A reta r interseta o plano yOz no ponto $(0, b, c)$.

A reta r fica definida pelo seguinte sistema de equações cartesianas:

$$y = b \wedge z = c$$

Reta paralela a Oy

Seja s a reta resultante da interação dos planos α e γ.



Repara que a reta s é paralela a Oy e constituída pelo conjunto de pontos definidos por:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a \wedge z = c\}$$

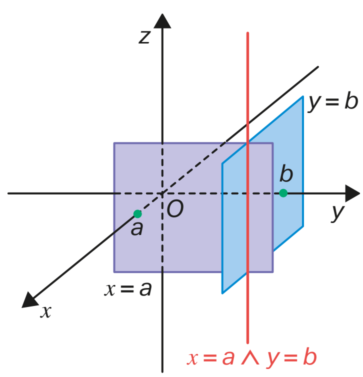
A reta s interseta o plano xOz no ponto $(a, 0, c)$.

A reta s fica definida pelo seguinte sistema de equações cartesianas:

$$x = a \wedge z = c$$

Reta paralela a Oz

Seja t a reta resultante da interação dos planos β e γ.



Repara que a reta t é paralela a Oz e constituída pelo conjunto de pontos definidos por:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a \wedge y = b\}$$

A reta t interseta o plano xOy no ponto $(a, b, 0)$.

A reta t fica definida pelo seguinte sistema de equações cartesianas:

$$x = a \wedge y = b$$

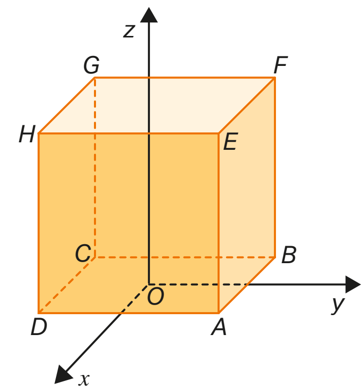
Manual Interativo

Vídeo
Distância entre dois pontos no espaço

Exercício

61 Num referencial ortonormado $Oxyz$, considera o cubo $[ABCDEFGH]$ de faces paralelas aos planos coordenados, em que a origem do referencial coincide com o centro da base do cubo.

A medida da aresta do cubo é 9.



61.1. Indica as coordenadas dos vértices do cubo.

61.2. Escreve uma condição que represente a reta:

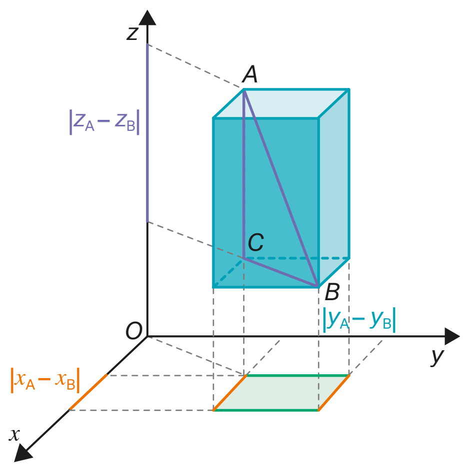
a) AB **b)** CD **c)** FB

61.3. Escreve uma condição que represente o segmento de reta:

a) $[AB]$ **b)** $[EF]$ **c)** $[AD]$ **d)** $[EA]$

1.4.4. Distância entre dois pontos no espaço

De forma análoga ao plano, é possível determinar a distância entre dois pontos no espaço.



No espaço, considera um referencial o.n. $Oxyz$ e dois pontos A e B, cujas coordenadas são, respetivamente, (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B).

Estudemos $d(A, B)$.

Observa o esquema ao lado. Comecemos por determinar $d(A, C)$.

Por observação da imagem, verificamos que os pontos A e C têm abcissa e ordenada iguais, sendo que as suas coordenadas só diferenciam no valor da cota.

Assim, $d(A, C) = |z_A - z_B|$.

Pensemos, agora, em $d(C, B)$.

Os pontos B e C encontram-se num mesmo plano paralelo a xOy, com, $c = z_B$.

A distância entre C e B pode ser calculada no plano xOy.

$$d(C, B) = \sqrt{|c - x_B|^2 + |c - y_B|^2}$$

Uma vez que os pontos A e C têm a mesma abcissa e a mesma ordenada, vem que:

$$d(C, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Por fim, aplicando o Teorema de Pitágoras $[ABC]$, temos que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}^2 + (z_A - z_B)^2$$

$$\overline{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$$

Logo,

$$d(A\,,\,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Manual Interativo

Exercício
Determinar a distância entre dois pontos no espaço

Distância entre dois pontos no espaço

Dado um referencial o.n. $Oxyz$, a distância entre dois pontos $A\,(x_A\,,\,y_A\,,\,z_A)$ e $B\,(x_B\,,\,y_B\,,\,z_B)$ é dada por:

$$\boldsymbol{d(A\,,\,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}}$$

Exemplo 24

Dados os pontos $A\,(3\,,\,-2\,,\,2)$ e $B\,(-4\,,\,2\,,\,0)$, temos que:

$$d(A\,,\,B) = \sqrt{(3-(-4))^2 + (-2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (-4)^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{7^2 + 16 + 4} = \sqrt{49 + 16 + 4} = \sqrt{69}$$

Exercício

62 Num referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $A\,(-2\,,\,0\,,\,3)$, $B\,(1\,,\,2\,,\,-3)$ e $C\,(-1\,,\,-2\,,\,2)$.

Determina:

62.1. $\overline{AC}$ **62.2.** $\overline{BC}$ **62.3.** $\overline{AB}$

1.4.5. Ponto médio de um segmento de reta

A determinação das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no plano pode estender-se, também, ao espaço.

Num referencial o.n. $Oxyz$, dados dois pontos $A\,(x_A\,,\,y_A\,,\,z_A)$ e $B\,(x_B\,,\,y_B\,,\,z_B)$, as coordenadas do ponto médio M são dadas por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,,\,\frac{y_A + y_B}{2}\,,\,\frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Exemplo 25

Sejam $A(1, 3, 0)$ e $B(0, -3, -2)$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são dadas por:

$$\left(\frac{1+0}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3-3}{2}, \frac{-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$$

Manual Interativo

Vídeo
Ponto médio entre dois pontos no espaço

Exercício

63 Num referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos:

$$A(-2, 0, 3), \ B(1, 2, -3) \text{ e } C(-1, -2, 2).$$

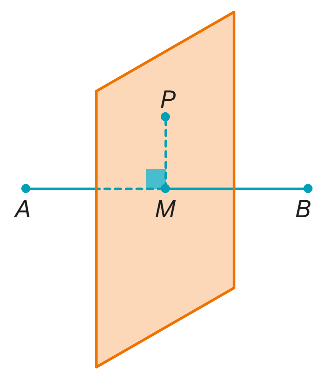
Determina o ponto médio de:

63.1. $[AB]$ **63.2.** $[AC]$ **63.3.** $[BC]$

1.4.6. Conjunto de pontos do espaço definidos por condições

Plano mediador

Dados dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, considera o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ que se encontram à mesma distância de A e B, ou seja, equidistantes a A e B.



Estes pontos encontram-se num plano perpendicular ao segmento de reta $[AB]$, passando pelo ponto médio de $[AB]$.

Diz-se que é o **plano mediador** de $[AB]$.

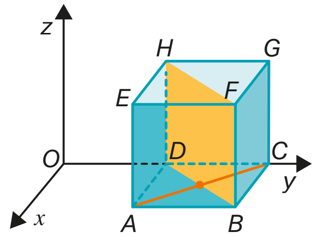
Qual será a equação cartesiana desse plano mediador?

Dissemos que os pontos P se encontram à mesma distância de A e B, logo, a seguinte condição permite-nos determinar a equação do plano mediador:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Exemplo 26

No cubo ao lado, sabendo que $A(2\,,\,2\,,\,0)$ e $C(0\,,\,4\,,\,0)$, o plano mediador, BDH, de $[AC]$ é dado por:



$$\overline{PA}=\overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2+(z-0)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-4)^2+z^2}$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-4)^2+z^2$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2=x^2+y^2-8y+16+z^2$$
$$\Rightarrow -4x+4y=8$$
$$\Rightarrow y-x=2$$ **– Equação cartesiana do plano mediador de $[AC]$**

Conclui-se que todos os pontos do plano mediador pertencem ao conjunto:

$$\left\{(x\,,\,y\,,\,z)\in\mathbb{R}^3:\ -x+y=2\right\}$$

Assim, para $x\,,\,y\,,\,z\in\mathbb{R}$, um ponto que pertença ao plano mediador tem de satisfazer a condição $y-x=2$.

- Relativamente à cota, sabemos apenas que $z\in\mathbb{R}$, logo, neste caso, z pode assumir qualquer valor real.
- x e y têm de satisfazer a condição $y-x=2$.

Assim, caso $x=1$, temos que:

$$y-1=2 \Leftrightarrow y=3$$

Portanto, por exemplo, o ponto $(1\,,\,3\,,\,-1)$ pertence ao plano mediador de $[AC]$.

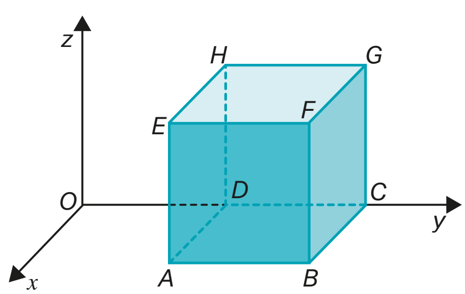
Manual Interativo

Vídeos
Plano mediador

Equação do plano mediador de um segmento de reta

Exercício

64 **Num referencial o.n. $Oxyz$, considera o cubo de aresta 2, representado ao lado.**



64.1. Indica as coordenadas dos vértices do cubo, sabendo que $D(0\,,\,3\,,\,0)$.

64.2. Determina o plano mediador de:

a) $[AB]$

b) $[AC]$

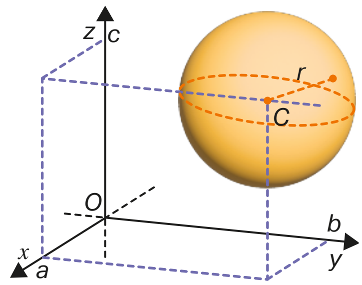
c) $[HF]$

64.3. Indica um ponto que pertença ao plano mediador de $[AB]$.

Manual Interativo

Vídeo
Superfície esférica e esfera

Superfície esférica e esfera



Seja $Oxyz$ um referencial o.n.. Consideremos uma esfera de centro $C(a\,,\,b\,,\,c)$, de raio r.

Repara que, por definição, a superfície esférica corresponde ao conjunto de pontos que se encontram à mesma distância do centro da esfera. Essa distância corresponde ao raio da esfera.

Assim, qualquer ponto $P(x\,,\,y\,,\,z)$ da superfície esférica encontra-se a uma distância r (raio) do centro da esfera. Logo,

$$d(P\,,\,C)=r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Portanto, diz-se que a **superfície esférica** de raio r e centro $C(a\,,\,b\,,\,c)$ é definida pela equação cartesiana:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Já a esfera de raio r e centro $C(a\,,\,b\,,\,c)$ corresponde a todos os pontos que se encontram na superfície esférica e no seu interior, ou seja, a distância desses pontos é menor ou igual a r.

Assim, diz-se que a **esfera** de raio r e centro $C(a\,,\,b\,,\,c)$ é definida pela inequação cartesiana:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant r^2$$

Exemplo 27

Considera a esfera de raio 3 e centro $C(2\,,\,-1\,,\,0)$.

A superfície esférica dessa esfera é definida pela seguinte equação cartesiana:

$$(x-2)^2+(y-(-1))^2+(z-0)^2=3^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=9$$

O ponto $(2\,,\,2\,,\,0)$ **pertence** à superfície esférica, pois:

$$(2-2)^2+(2+1)^2+0^2=9$$

O ponto $(2\,,\,-1\,,\,1)$ **não pertence** à superfície esférica, pois:

$$(2-2)^2+(-1+1)^2+1^2=0+0+1=1\neq 9$$

Por sua vez, a esfera é definida pela seguinte inequação cartesiana:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2\leqslant 9$$

O ponto $(2\,,\,-1\,,\,1)$ **pertence** à esfera, pois:

$$(2-2)^2+(-1+1)^2+1^2=0+0+1=1\leqslant 9$$

O ponto $(2\,,\,2\,,\,2)$ **não pertence** à esfera, pois:

$$(2-2)^2+(2+1)^2+2^2=0+9+4=13\geqslant 9$$

Exercícios

65 **Escreve a equação reduzida das superfícies esféricas:**

65.1. de centro $C(2\,,-1\,,-3)$ e raio 2;

65.2. de centro $C(2\,,-1\,,3)$ e que passa pelo ponto $P(0\,,1\,,-1)$.

66 **Considera a seguinte superfície esférica definida pela equação:**

$$(x-5)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$$

66.1. Indica o centro e o raio da superfície esférica.

66.2. O ponto $(5\,,4\,,2)$ pertence à superfície esférica? Justifica.

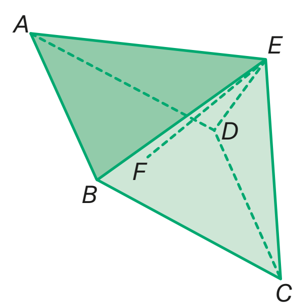
1.4.7. Resolução de problemas

Exemplo 28

Considera uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$, em que F é o centro da sua base $[ABCD]$.

Sabemos que, num referencial ortonormado $Oxyz$:

- $D(-6, 0, -2)$
- $E(-3, 3, 1)$
- $F(-2, 1, -1)$



1. Determina o volume da pirâmide.

2. Determina a equação do plano mediador de $[EF]$, apresentando a resposta na forma $ax+by+cz+d=0$, em que a, b, c e $d\in\mathbb{R}$.

Resolução

1. Para determinar o volume da pirâmide quadrangular, necessitamos de conhecer:

• A altura $\overline{FE}$

Dado que $E(-3\,,3\,,1)$ e $F(-2\,,1\,,-1)$, vem:

$$\begin{aligned}\overline{FE}&=\sqrt{(-3-(-2))^2+(3-1)^2+(1-(-1))^2}\\&=\sqrt{(-3+2)^2+2^2+(1+1)^2}\\&=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\\&=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\end{aligned}$$

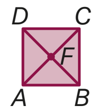
• As medidas da base

A base é um quadrado, logo $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\overline{DF}&=\sqrt{(-6-(-2))^2+(0-1)^2+(-2-(-1))^2}\\&=\sqrt{(-6+2)^2+(-1)^2+(-2+1)^2}\\&=\sqrt{(-4)^2+1+(-1)^2}\\&=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Analisando a base da pirâmide, a base é um quadrado e



$$\overline{BD}=2\overline{DF}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

Agora, para determinar a medida da base, consideramos o triângulo retângulo $[DAB]$ e aplicamos o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2 &\Leftrightarrow (6\sqrt{2})^2=x^2+x^2\\&\Leftrightarrow 72=2x^2 \Leftrightarrow x^2=36\end{aligned}$$

Então: $x=\sqrt{36}=6$

Por fim,

$$V_{\text{pirâmide}}=\frac{1}{3}A_{\text{base}}\times h=\frac{1}{3}\times(6\times 6)\times 3=36$$

2. O plano mediador de $[EF]$ é dado por:

$$\begin{aligned}\overline{PE}=\overline{PF} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-(-3))^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-(-2))^2+(y-1)^2+(z-(-1))^2}\\&\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}\\&\Longrightarrow (x+3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2\\&\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-6y+9+z^2-2z+1=x^2+4x+4+y^2-2y+1+z^2+2z+1\\&\Leftrightarrow 6x-4x-6y+2y-2z-2z=4+1+1-9-9-1\\&\Leftrightarrow 2x-4y-4z=-13\end{aligned}$$

Exemplo 29

Num referencial o.n. $Oxyz$, determina as coordenadas dos pontos de interseção da superfície esférica, de centro $C(-3,2,0)$ e raio 5, com o eixo Oy.

Resolução

Comecemos por definir a equação cartesiana da superfície esférica:

$$(x-(-3))^2+(y-2)^2+(z-0)^2=5^2$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=25$$

O eixo Oy é dado pelas condições: $x = 0 \wedge z = 0$.

Logo, os pontos $P(x, y, z)$ resultantes da interseção da superfície esférica com o eixo são dados por:

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge z = 0 \wedge (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25\}$

Então, como $x = 0 \wedge z = 0$, vem:

$(0+3)^2 + (y-2)^2 + 0 = 25$

$9 + (y-2)^2 = 25$

$(y-2)^2 = 16$

$y - 2 = \pm\sqrt{16}$

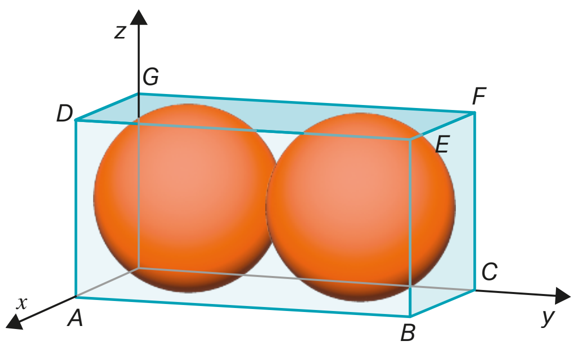
$y - 2 = -4 \vee y - 2 = 4$

$y = -2 \vee y = 6$

Os pontos de interseção são $(0, -2, 0)$ e $(0, 6, 0)$.

Exercício

67 **Num referencial o.n. com origem O, considera um prisma e duas esferas geometricamente iguais tangentes entre si e tangentes às faces do prisma.**



Sabe-se que:

- **a face [*AOGD*] está contida em xOz;**
- **a face [*ABCO*] está em xOy;**
- **a face [*BCEF*] está contida no plano de equação $y = 20$.**

67.1. Escreve as inequações que definem cada uma das esferas.

67.2. A reta definida pelo sistema $y = 15 \wedge x = 10$ interseta uma das superfícies esféricas num ponto.

Determina as coordenadas desse ponto.

Síntese

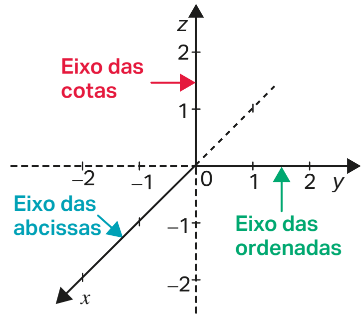
Referencial cartesiano

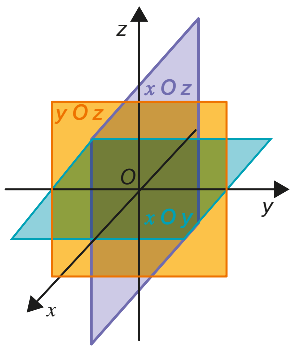
Qualquer ponto do espaço é dado por $P(x, y, z)$, em que:

x é o valor da abcissa;

y é o valor da ordenada;

z é o valor da cota.

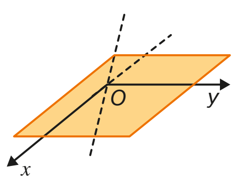
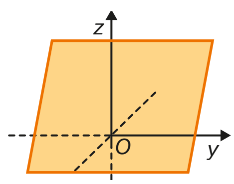
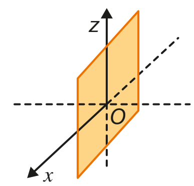
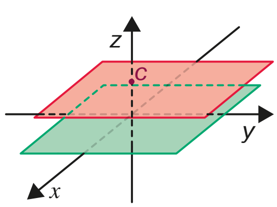
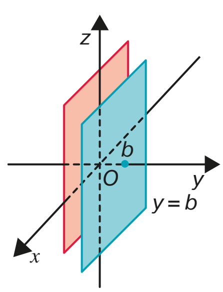
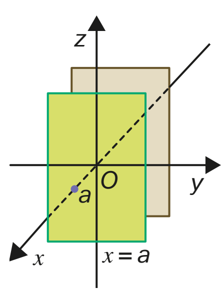




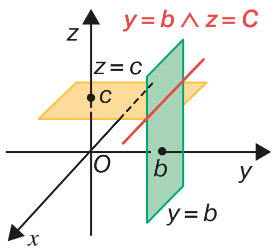
O conjunto de todos os ternos ordenados de números reais designa-se por $\mathbb{R}^3$:

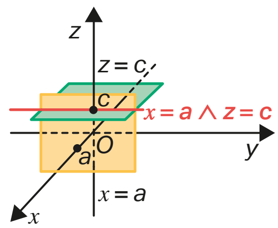
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

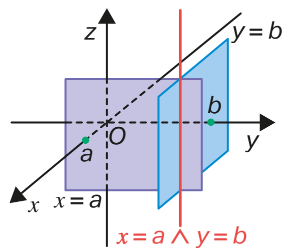
Os planos coordenados dividem o espaço em oito partes, que se designam por octantes.

Plano horizontal xOy	**Plano vertical yOz**	**Plano vertical xOz**
Todos os pontos têm cota nula.  Este plano é definido pela condição $z = 0$.	Todos os pontos têm abcissa nula.  Este plano é definido pela condição $x = 0$.	Todos os pontos têm ordenada nula.  Este plano é definido pela condição $y = 0$.
Um plano paralelo a xOy	**Um plano paralelo a xOz**	**Um plano paralelo a yOz**
Todos os pontos do plano têm a mesma cota c.  Este plano é definido pela equação cartesiana $z = c$.	Todos os pontos do plano têm a mesma ordenada b.  Este plano é definido pela equação cartesiana $y = b$.	Todos os pontos do plano têm a mesma abcissa a.  Este plano é definido pela equação cartesiana $x = a$.

Síntese

<table>
<tr><th>Reta paralela a Ox</th><th>Reta paralela a Oy</th><th>Reta paralela a Oz</th></tr>
<tr>
<td>Interseta o plano yOz no ponto $(0, b, c)$.

Reta definida por
$y = b \wedge z = c$

Nota:
$y = 0 \wedge z = 0$ define o eixo Ox.</td>
<td>Interseta o plano xOz no ponto $(a, 0, c)$.

Reta definida por
$x = a \wedge z = c$

Nota:
$x = 0 \wedge z = 0$ define o eixo Oy.</td>
<td>Interseta o plano xOy no ponto $(a, b, 0)$.

Reta definida por
$x = a \wedge y = b$

Nota:
$x = 0 \wedge y = 0$ define o eixo Oz.</td>
</tr>
</table>

Num referencial o.n. $Oxyz$, dados dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$:

Distância entre dois pontos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Ponto médio M de $[AB]$:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

A equação do plano mediador $[AB]$ é definida por:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Equação cartesiana da superfície esférica de raio r e centro $C(a, b, c)$:

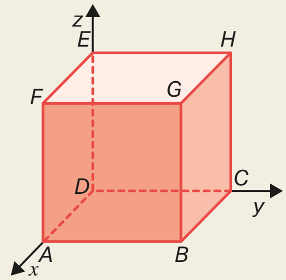
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Inequação cartesiana da esfera de raio r e centro $C(a, b, c)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant r^2$$

Para aplicar

1 **Considera o cubo $[ABCDEFGH]$, representado no referencial o.n. do espaço de origem D.**
As coordenadas do vértice A são $(1, 0, 0)$ e do vértice G são $(1, 1, 1)$.



1.1. Indica as coordenadas dos vértices C, D, E e F.

1.2. Define por uma condição cartesiana a reta HG.

1.3. Indica uma equação que defina o plano que contém a face $[BCHG]$.

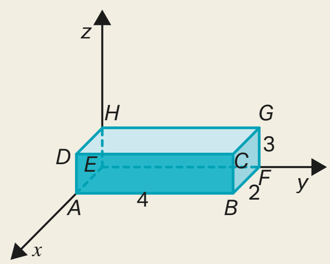
2 **Num referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $A(3, 2, 1)$, $B(2, -1, 3)$ e $C(3, -4, 2k)$, para $k \in \mathbb{R}$.**

2.1. Determina o valor de k, tal que a distância de A a C seja 10.

2.2. Escreve a equação da superfície esférica de centro B e que contém A.

2.3. Determina as coordenadas do ponto do semieixo positivo Ox cuja distância a B é igual ao raio da superfície esférica determinada.

3 **Considera o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ num referencial o.n. $Oxyz$, de dimensões 4, 3 e 2, como representado na figura.**



3.1. Indica as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.

3.2. Escreve uma condição que defina a reta DC.

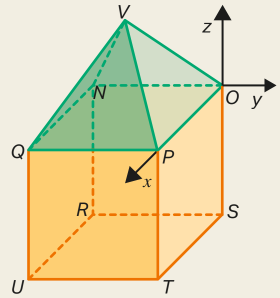
3.3. Escreve uma condição que defina o segmento de reta $[DC]$.

3.4. Escreve uma condição que defina o plano CBF.

3.5. Escreve as coordenadas do ponto C' simétrico de C relativamente ao plano yOz.

3.6. Determina a equação que define o plano mediador do segmento de reta $[AG]$.

4 **Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQURST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.**



Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy;
- o ponto P pertence ao eixo Ox;
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$.

4.1. Indica os pontos do poliedro que têm cota negativa.

4.2. Indica os pontos do poliedro que têm ordenada não positiva.

4.3. Determina a distância entre os pontos Q e S.

5 **Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera definida por:**

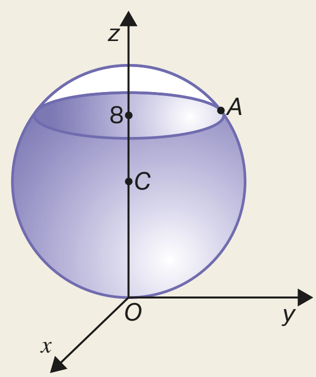
$$(x-2)^2+y^2+(z+1)^2 \leqslant 25$$

5.1. Indica as coordenadas do centro da circunferência.

5.2. Determina o diâmetro da esfera.

5.3. Escreve uma equação de um plano tangente à esfera e paralelo a xOy.

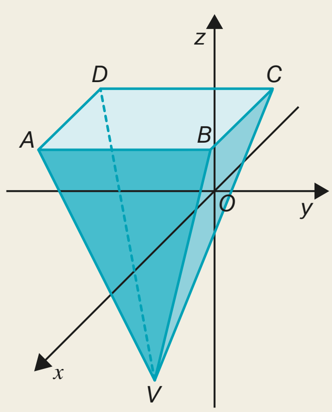
6 **No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, encontra-se representado um reservatório esférico de raio 5 e tangente ao plano coordenado xOy.**
A cota da superfície superior do líquido é 8.



6.1. Determina as coordenadas do ponto A do reservatório, sabendo que este pertence ao plano yOz e está ao nível da superfície superior do líquido.

6.2. Define a superfície superior do líquido através de uma condição.

7 **Na figura está representada num referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, onde $[BC]$ é paralelo a Ox.**



Sabendo que:

- $A(3, -3, 2)$
- $C(-1, 1, 2)$
- o volume da pirâmide é 32.

7.1. Escreve uma equação que defina o plano ABC.

7.2. Indica, justificando, se o ponto $F(3, 0, 3)$ pertence ao plano mediador do segmento de reta $[BC]$.

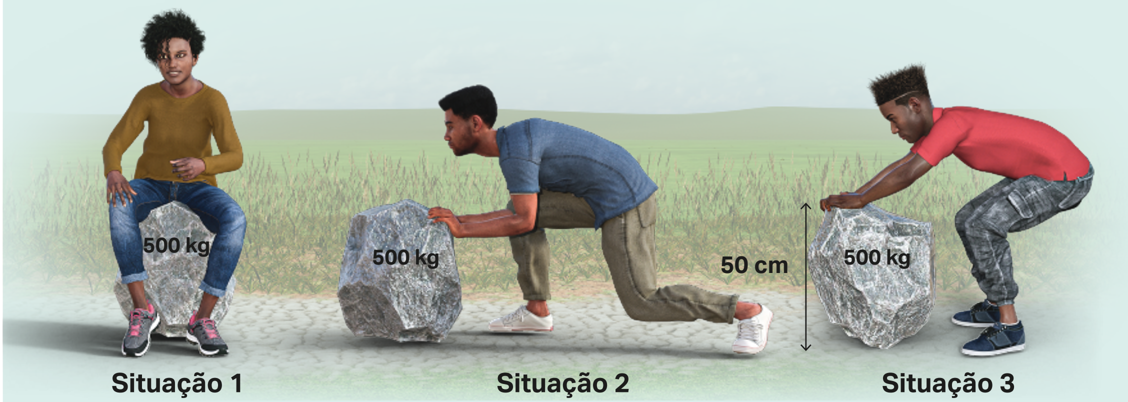
7.3. Qual é o conjunto de pontos definido pelo seguinte sistema de equações cartesianas $y=-3 \wedge z=2$?

1.5. Cálculo vetorial no plano e no espaço

1.5.1. Vetores

Tarefa

7 Observa as seguintes situações.



7.1. Qual é a altura da pedra?

7.2. Qual é a massa da pedra?

7.3. Na situação 1, a pedra vai movimentar-se?

7.4. E nas situações 2 e 3, a pedra desloca-se? No mesmo sentido e direção?

Em matemática e em outras áreas disciplinares, por exemplo, física, trabalhamos com grandezas, mas as grandezas não são todas do mesmo tipo. Existem grandezas escalares e grandezas vetoriais.

Grandeza escalar é uma quantidade que pode ser descrita apenas com um número, como a temperatura, a massa, o tempo e a altura.

Exemplo 30

A temperatura é $28\ °C$.

A pedra tem $500\ kg$ de massa.

A altura da pedra é $0{,}5\ m$.

Grandeza vetorial corresponde a uma quantidade que, para além de um valor numérico (magnitude), para ficar definida necessitamos de indicar a sua **direção** e **sentido**.

Manual Interativo

Vídeo
Vetores

Exemplo 31

O vento sopra a 20 km/h para norte.

A pedra deslocou-se 2 m da esquerda para a direita.

Repara que, por exemplo, relativamente ao movimento de um carro, a sua velocidade não pode ser descrita apenas pelo valor numérico (50 km/h), precisamos saber em que direção ele se move (norte, sul, etc.); em física, se empurrarmos um objeto, a força que aplicamos não depende apenas da intensidade, mas também da direção e do sentido em que ela é aplicada.

Exercício

68 Em qual das opções todas as grandezas são vetoriais?

(A) Força, velocidade e aceleração.

(B) Tempo, deslocamento e força.

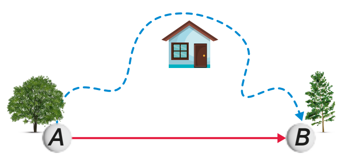
(C) Tempo, temperatura e volume.

(D) Temperatura, velocidade e volume.

(E) Nenhuma das anteriores.

As grandezas vetoriais são representadas por um **vetor**.

Assim, um vetor corresponde a um segmento de reta orientado $[AB]$, representado por $\overrightarrow{AB}$, onde A é a origem ou ponto de aplicação e B é a extremidade.



Um **vetor** $\overrightarrow{AB}$ **é caracterizado** por:

- uma **direção**: a da reta AB;
- um **sentido**: de A para B;
- um **comprimento**: $\overline{AB}$;
- a **origem** A e a **extremidade** B.

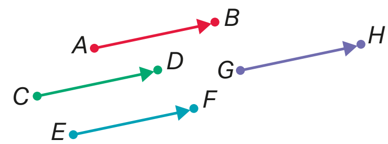
O conjunto de todos os segmentos de reta que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento correspondem ao mesmo vetor (livre) ou apenas vetor. Esses segmentos de reta dizem-se equipolentes, uma vez que têm a mesma direção (paralelos), o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Manual Interativo

Documento
Norma de um vetor do plano

Exemplo 32

Os segmentos de reta orientados representados ao lado são equipolentes, pois têm a mesma direção, sentido e comprimento e representam um mesmo **vetor** (livre). Para o representar pode usar-se só uma letra, por exemplo, chamemos-lhe vetor $\vec{v}$.



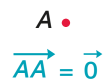
Também pode ser representado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, …

Assim, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

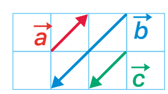
Nota:

1. Os vetores podem ser representados pelos dois pontos que definem um dos segmentos de reta orientados que o caracteriza ou por uma letra minúscula. No exemplo, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

2. O vetor nulo representa-se por $\vec{O}$ e resulta de um segmento de reta do tipo $[AA]$, que terá comprimento zero e sentido e direção indeterminados, coincidindo com o ponto A.



Os **vetores** $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ dizem-se **colineares, uma vez que têm a mesma direção.**



Dois **vetores**, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, dizem-se **simétricos** se tiverem a mesma direção e o mesmo comprimento, mas sentidos opostos.

Pode escrever-se $\vec{a} = -\vec{b}$ ou $\vec{b} = -\vec{a}$.

Ao comprimento de um vetor $\vec{v}$ dá-se o nome de **norma do vetor** $\vec{v}$ e representamos por $\|\vec{v}\|$.

Exemplo 33

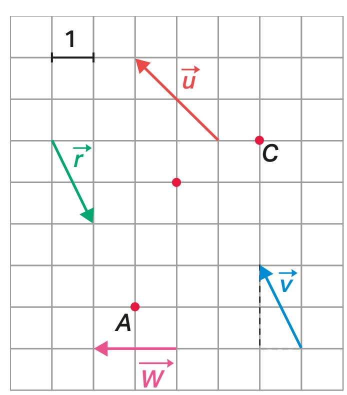
Considerando a unidade de medida indicada na figura, repara que:

$$\|\vec{w}\| = 2$$

Mas, para determinar o comprimento do segmento de reta orientado que representa o vetor $\vec{v}$, teremos de considerar o triângulo retângulo e aplicar o Teorema de Pitágoras:

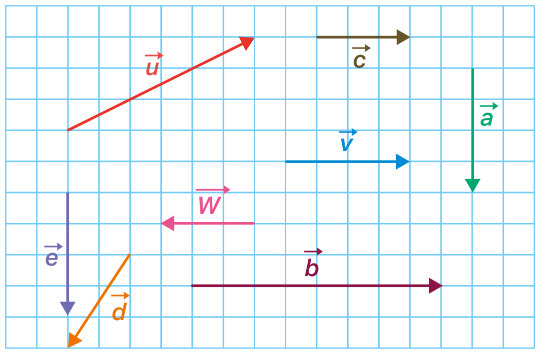
$$x^2 = 2^2 + 1^2 \iff x^2 = 5 \implies x = \sqrt{5}$$

Logo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.



Exercícios

69 **Considera os vetores representados abaixo.**



69.1. Determina a norma de todos os vetores.

69.2. Indica:

a) dois vetores com igual norma;

b) dois vetores colineares;

c) dois vetores simétricos;

d) dois vetores equipolentes;

e) dois vetores com o mesmo comprimento, mas direções diferentes;

f) dois vetores com sentidos opostos, mas que não sejam simétricos.

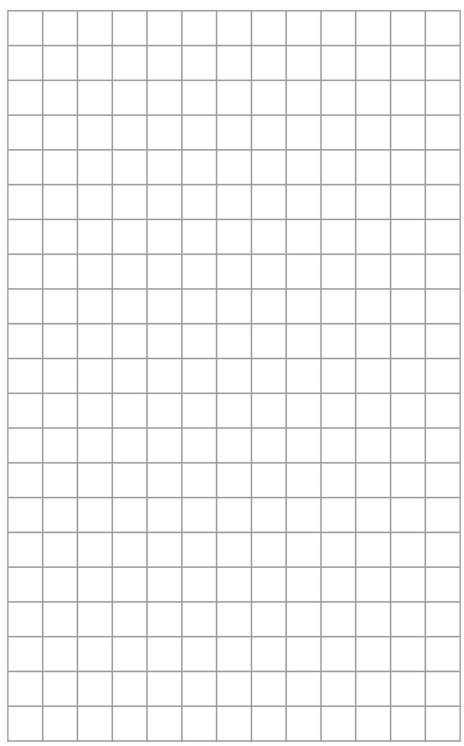
70 **No referencial o.n. ao lado, representa:**

70.1. Um vetor $\vec{a}$, com comprimento 3, na horizontal e sentido de esquerda para a direita.

70.2. Um vetor $\vec{b}$, com comprimento 1, na vertical e sentido de baixo para cima.

70.3. Um vetor $\vec{c}$, colinear a $\vec{a}$, com comprimento 2 e sentido contrário.

70.4. Um vetor $\vec{d}$ simétrico a $\vec{b}$.



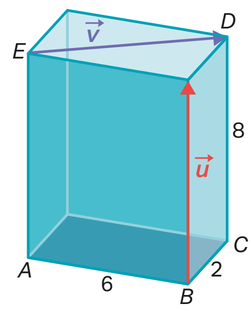
Manual Interativo

Jogo
Norma de um vetor do plano

Exercício
Determinar a norma de vetores do plano

Os vetores também podem estar definidos no espaço.

Na figura ao lado está representado um prisma retangular.



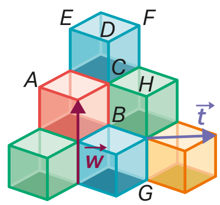
Nota que:

- os segmentos de reta orientados $[ED]$ e $[AC]$ representam um mesmo vetor $\vec{v}$;
- o vetor $\vec{u}$ é representado pelos segmentos de reta orientados $[AE]$ e $[CD]$.

Exercício

71 **Considera a figura, ao lado, constituída por cubos geometricamente iguais, e os vetores $\vec{t}$ e $\vec{w}$.**

Utilizando os pontos representados na figura, indica:



71.1. um vetor equipolente ao vetor $\vec{t}$;

71.2. colinear ao vetor $\vec{w}$;

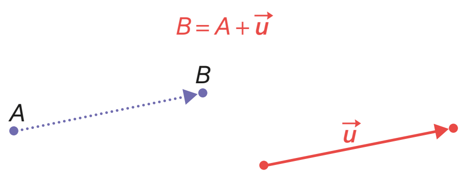
71.3. simétrico ao vetor $\vec{w}$;

71.4. um vetor que não seja colinear a nenhum dos vetores $\vec{w}$ e $\vec{t}$.

1.5.2. Operações com vetores

Soma de um ponto com um vetor

No plano ou no espaço, dados dois pontos A e um vetor $\vec{u}$, quando se aplica no ponto A um representante do vetor $\vec{u}$, obtém-se, na extremidade, um ponto B.



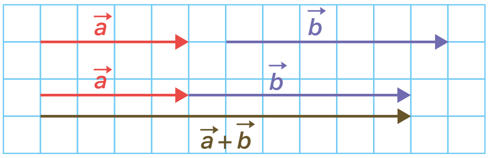
Dizemos que B resulta da soma de A com $\vec{u}$ e temos que:

$A + \vec{u} = B$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = B - A$

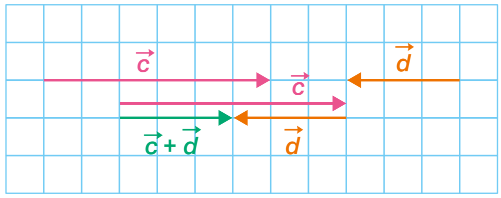
Adição e subtração de vetores

Considera as seguintes situações, em que os vetores são colineares.

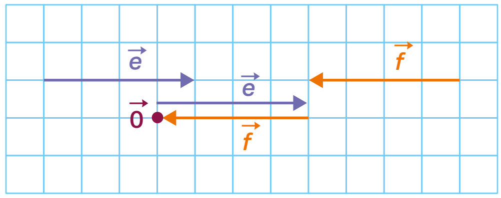
- Vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com a mesma direção e sentido.
  A soma dos dois vetores resulta num vetor, designado por vetor soma, com a mesma direção e sentido de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e comprimento igual à soma desses dois vetores.



- Vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ com a mesma direção, mas sentidos opostos.
  O vetor soma tem o mesmo sentido do vetor com maior comprimento e o comprimento é igual ao valor absoluto da diferença entre os dois vetores.



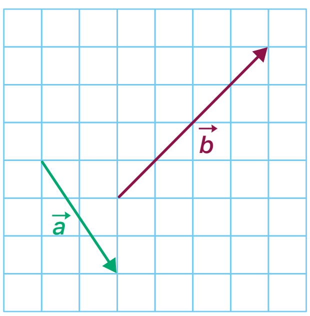
Repara que se os vetores forem simétricos, por exemplo, os vetores $\vec{e}$ e $\vec{f}$, então $\vec{e}=-\vec{f}$ e $\vec{f}=-\vec{e}$. Assim, a sua soma é o vetor nulo, $\vec{0}$.



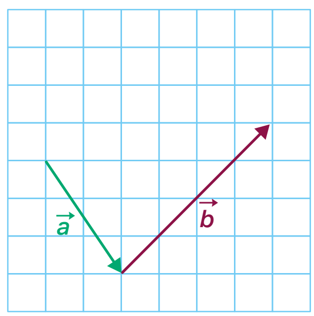
Considera agora a seguinte situação, em que os vetores não são colineares, $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Vamos aplicar um processo, a **regra do triângulo**, que nos permite determinar o vetor soma $\vec{a}+\vec{b}$.

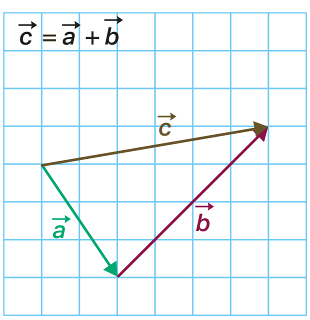
1. Considera os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



2. Na extremidade de $\vec{a}$, desenha o segmento de reta orientado representante de $\vec{b}$.

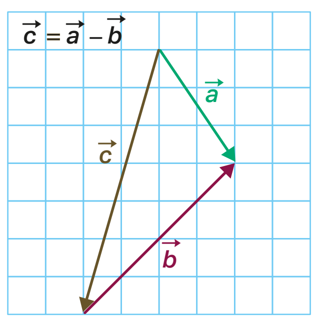


3. Une a origem do segmento orientado que representa $\vec{a}$ à extremidade do segmento orientado que representa $\vec{b}$, obtendo-se o vetor $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, que corresponde ao vetor soma.



No caso da diferença, repara que:

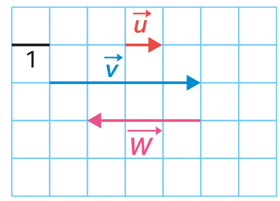
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$



Manual Interativo

Vídeo
Multiplicação de um número real por um vetor

Produto de um escalar por um vetor



Na figura, considera os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, todos com a mesma direção.

Repara que:

- o vetor $\vec{v}$ tem a mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e comprimento quatro vezes maior que o comprimento de $\vec{u}$. Assim, dizemos que:

$$\vec{v} = 4\vec{u}$$

- o vetor $\vec{w}$ tem a mesma direção de $\vec{u}$, mas sentido oposto, e comprimento três vezes o comprimento de $\vec{u}$. Assim, dizemos que:

$$\vec{w} = -3\vec{u}$$

Assim, seja $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $k \neq 0$, designa-se por $k\vec{v}$ o vetor que:

- tem a mesma direção de $\vec{v}$;
- tem o mesmo sentido de $\vec{v}$, se $k > 0$, e sentido oposto, se $k < 0$;
- tem norma igual $|k| \times \|\vec{v}\|$.

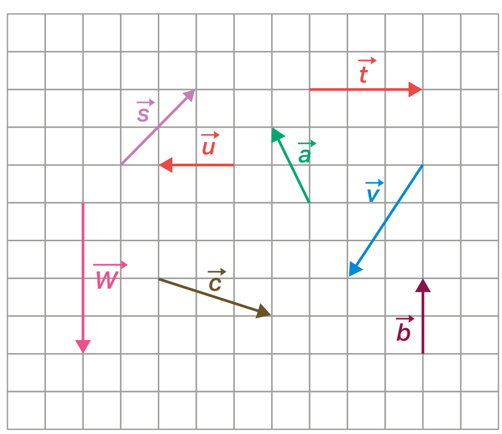
Nota:

- se $\vec{v} = 0$ ou $k = 0$, temos que $k\vec{v} = \vec{0}$;
- repara que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares** se e só se $\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{u} = k\vec{v}$, com $\vec{v} \neq 0$.

Exercício

72 Prova que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares** se e só se $\vec{u} = k\vec{v}$, com $\vec{v} \neq 0$.

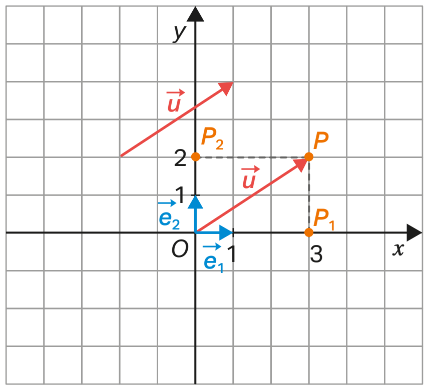


72.1. Indica os pares de vetores colineares, escrevendo-os na forma $\vec{m} = k\vec{n}$.

72.2. Representa um vetor $\vec{p}$, tal que $\vec{p} = -3\vec{a}$.

1.5.3. Coordenadas de um vetor

Num referencial o.n. de origem O, onde é fixada uma unidade de comprimento, dados os pontos $X(1, 0)$ e $Y(0, 1)$, consideremos os vetores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$.



Para cada vetor $\vec{u}$ do plano, existe um único ponto P tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.

Considera o exemplo da figura, onde P tem de coordenadas $(3, 2)$. Considera, ainda os pontos $P_1(3, 0)$ e $P_2(0, 2)$.

Repara que:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$$

$$\vec{u} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$$

Assim, designamos por $(3, 2)$ as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e representamos por $\vec{u}(3, 2)$ o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(3, 2)$.

Generalizando, num referencial o.n. Oxy, de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, existe para cada vetor $\vec{v}$ um e um só par ordenado (v_1, v_2) de números reais, tais que:

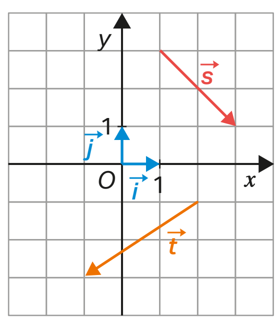
$$\vec{v} = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2$$

As coordenadas do vetor $\vec{v}$ são (v_1, v_2).

Exemplo 34

As coordenadas dos vetores representados no referencial o.n Oxy são:

$\vec{s}(2, -2)$ e $\vec{t}(-3, -2)$.

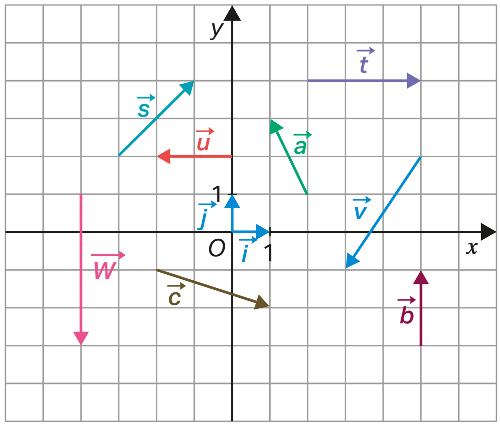


Nota:

- vetores paralelos ao eixo Ox têm ordenada zero;
- vetores paralelos ao eixo Oy têm abcissa zero.

Exercício

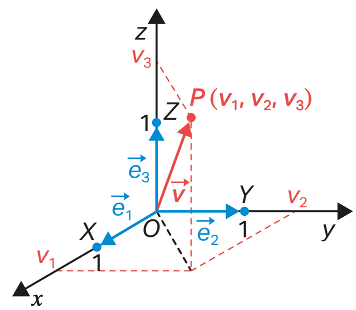
73 Indica as coordenadas de cada um dos vetores representados no referencial o.n. Oxy.



De forma análoga, num referencial o.n. $Oxyz$, de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, existe para cada vetor $\vec{v}$ um e um só terno ordenado (v_1, v_2, v_3) de números reais, tais que:

$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$

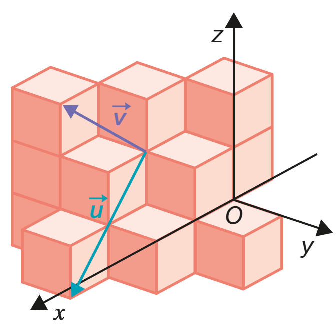
As coordenadas do vetor $\vec{v}$ são (v_1, v_2, v_3).



Exemplo 35

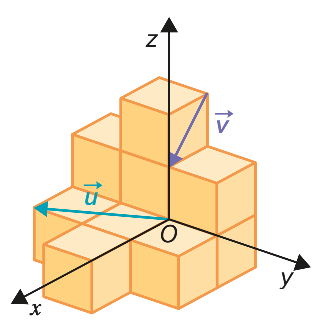
As coordenadas dos vetores representados no referencial o.n $Oxyz$ são:

$\vec{u}(2, -1, -2)$ e $\vec{v}(1, -1, 1)$



Exercício

74 Indica as coordenadas de cada um dos vetores representados no referencial o.n. $Oxyz$.



1.5.4. Norma de um vetor

Considerando que um vetor corresponde a um segmento de reta orientado $[AB]$, representado por $\overrightarrow{AB}$, onde A é a origem ou ponto de aplicação e B é a extremidade, podemos determinar o comprimento desse segmento de reta, o qual designamos por **norma do vetor** $\vec{v}$, e representamos por $\|\vec{v}\|$.

Então, $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ decorre que se $\|\vec{v}\| = (x_v, y_v)$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$.

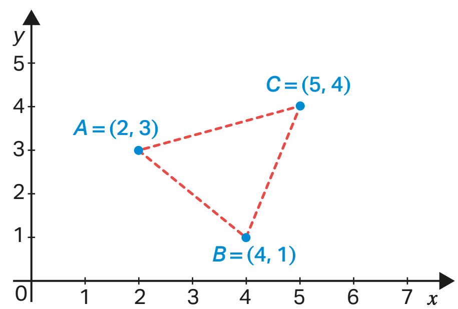
De forma análoga, se pode determinar a norma de vetores definidos no espaço.

Exemplo 36

- Sendo $\vec{a} = (2, -3)$ um vetor no plano, $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
- Sendo $\vec{b} = (4, -1, 5)$ um vetor no espaço,
  $\|\vec{b}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{16+1+25} = \sqrt{42}$.

Exercícios

75 Considera o referencial o.n. ao lado e determina:



75.1. $\|\overrightarrow{AB}\|$

75.2. $\|\overrightarrow{AC}\|$

75.3. $\|\overrightarrow{BC}\|$

76 Considera os pontos:

$$A(2, 3, 0) \text{ e } B(0, -3, -1).$$

Determina a norma do vetor definido pelo segmento de reta AB.

1.5.5. Vetor como diferença entre dois pontos

Conforme já viste na secção **1.5.2.**, um vetor decorre da diferença entre dois pontos.

Quando os vetores estão inseridos em referenciais cartesianos, as suas coordenadas também se podem determinar a partir da diferença das coordenadas de dois pontos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Este resultado também é válido no espaço.

Manual Interativo

Vídeo
Soma de um ponto com um vetor

Se $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ são dois pontos do plano e $C(c_1, c_2, c_3)$ e $D(d_1, d_2, d_3)$ dois pontos no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

e

$$\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2, d_3 - c_3)$$

Exemplo 37

Sendo $A(1, 2)$ e $B(0, -1)$, temos que:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1) - (1, 2) = (0 - 1, -1 - 2) = (-1, -3)$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2) - (0, -1) = (1 - 0, 2 - (-1)) = (1, 3)$

$\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB} = (1, 3) - 2(-1, -3) = (1, 3) - (-2, -6) = (3, 9)$

Exercício

77 No espaço, em relação a um referencial o.n., considera os pontos:

$A(1, 3, -4)$ $B(1, -3, 0)$ $C(-1, -3, -1)$

Determina as coordenadas dos seguintes vetores:

77.1. $\overrightarrow{AB}$

77.2. $\overrightarrow{CB}$

77.3. $\vec{u} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1.5.6. Operações com vetores e suas propriedades algébricas

Agora que já sabemos como referenciar um vetor com recurso às suas coordenadas, recordemos as operações com vetores referidas anteriormente, fazendo uma abordagem algébrica.

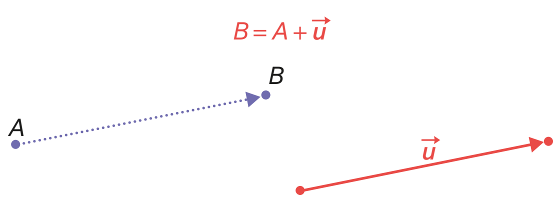
Soma de um ponto com um vetor

Considera o referencial o.n Oxy, de base (e_1, e_2), o vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ e o ponto $A(a_1, a_2)$.

Considera o ponto $B = A + \vec{u}$.

Assim, $B - A = \vec{u}$.

Isto é: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



Adição e subtração de vetores

Considera o referencial o.n Oxy, de base (e_1, e_2), e os vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$.
Assim, $\vec{u} = u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2$ e $\vec{v} = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2$
e, $\vec{u} + \vec{v} = u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2\ + v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2 = (u_1 + v_1)\,\vec{e}_1 + (u_2 + v_2)\,\vec{e}_2$.
Logo, as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ são $(u_1 + v_1\,,\ u_2 + v_2)$.

Também no espaço as coordenadas da soma de dois vetores resultam da soma das coordenadas de cada um deles.

Propriedades da adição

Comutativa	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
Associativa	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
Existência de elemento neutro	$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (vetor nulo, $\vec{0}$, é o elemento neutro da adição de vetores)
Existência de elemento simétrico	$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$. (para qualquer vetor nulo, $\vec{u}$, existe o seu simétrico, $-\vec{u}$)

Produto de um escalar por um vetor

Considera o referencial o.n Oxy, de base (e_1, e_2), o vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ e um número real k.
Como $\vec{u} = u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2$, temos que $k\vec{u} = k\,(u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2) = k\,u_1\,\vec{e}_1 + k\,u_2\,\vec{e}_2$.
Logo, as coordenadas de $k\vec{u}$ são $(k\,u_1\,,\ k\,u_2)$.
Conclui-se algo análogo em relação ao produto de um escalar por um vetor no espaço.

Propriedades do produto de um escalar por um vetor

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e a e b números reais:

$(a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$ $\qquad$ $b\,(a\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$ $\qquad$ $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$

Exercício

78 Considera, no plano, os vetores $\vec{u}(3, 6)$ e $\vec{v}(0, -2)$ e, no espaço, $\vec{r}(2, 1, 0)$ e $\vec{s}(10, 0, -5)$.

Determina as coordenadas de:

78.1. $\vec{u} + \vec{v}$ **78.2.** $\frac{1}{3}\vec{u} - \vec{v}$ **78.3.** $\vec{u} - 5\vec{v}$

78.4. $\vec{r} + \frac{1}{5}\vec{s}$ **78.5.** $2\,(\vec{r} - \vec{s})$ **78.6.** $-\left(\frac{1}{2}\vec{s} + 3\vec{r}\right)$

Manual Interativo

Vídeos
Propriedades da adição de vetores

Produto escalar de vetores

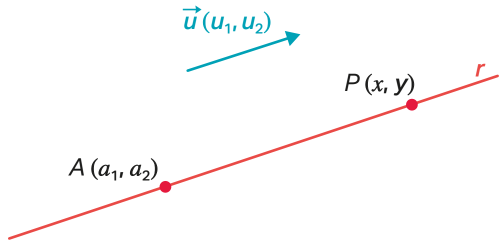
Exercício
Determinar a soma de dois vetores

Manual Interativo

Vídeo
Equação vetorial da reta no plano

1.5.7. Equação vetorial de uma reta

Considera o referencial o.n Oxy, de base (e_1, e_2), o vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ e o ponto $A(a_1, a_2)$.



Seja r a reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

Para cada ponto $P(x, y)$ da reta r, existe um número real k, tal que:

$$P = A + k\vec{u}$$

Assim, diz-se que **a equação vetorial da reta** que passa no ponto $A(a_1, a_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ é dada por:

$$P = A + k\vec{u},\ k \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + k(u_1, u_2)$$

De forma análoga, no espaço vem:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(u_1, u_2, u_3)$$

Ao vetor $\vec{u}$ dá-se o nome de **vetor diretor** da reta.

Nota: A escolha de um ponto da reta e de um vetor com igual direção não é única.

Um ponto e um vetor diferente podem definir a mesma reta.

Exemplo 38

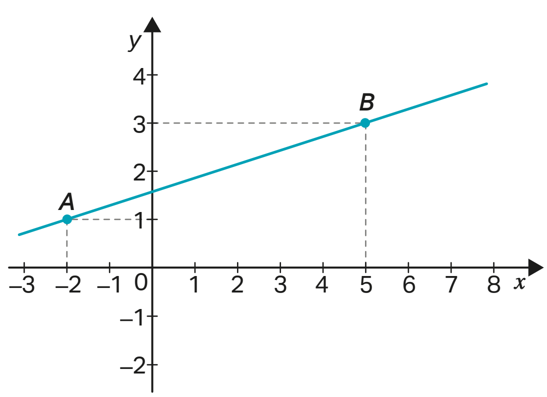
Dados os pontos $A(-2, 1)$ e $B(5, 3)$, temos que:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 3) - (-2, 1) = (7, 2)$

Logo, uma equação vetorial da reta é dada por:

$P = A + k\overrightarrow{AB}$

$(x, y) = (-2, 1) + k(7, 2)$, para $k \in \mathbb{R}$.



Manual Interativo

Atividade
Relação entre as coordenadas do vetor diretor e o declive de uma reta

Exercício
Relacionar as coordenadas do vetor diretor de uma reta com o seu declive

Exercício

79 No referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $A(2, 1, 2)$ e $B(0, 5, 3)$ e o vetor $\vec{u}(0, 4, 4)$. Determina:

79.1. uma equação vetorial da reta que passa por A e tem a direção de $\vec{u}$;

79.2. uma equação vetorial da reta AB;

79.3. verifica se o ponto $C(6, -7, 0)$ pertence à reta AB.

1.5.8. Relação entre o declive de uma reta e as coordenadas de um vetor diretor no plano

Exemplo 39

Dada a equação vetorial da reta s: $(x, y) = (-2, 1) + k(7, 2)$, temos que o vetor diretor da reta é $(7, 2)$.

Logo, $m = \frac{2}{7}$. Repara que $(14, 4)$ também será vetor diretor de s.

A equação reduzida da reta é do tipo $y = \frac{2}{7}x + b$ e a reta passa no ponto $(-2, 1)$, temos que:

$$1 = \frac{2}{7} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 = -\frac{4}{7} + b \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{7} = +b \Leftrightarrow b = \frac{11}{7}$$

Equação reduzida da reta s: $y = \frac{2}{7}x + \frac{11}{7}$.

Exercício

80 Determina a equação reduzida da reta que passa no ponto $P(-5, -1)$ e tem vetor diretor $\vec{u}(-2, 1)$.

1.5.9. Paralelismo de retas no plano

No plano, duas retas r e s não verticais são paralelas se e só se têm o mesmo declive.

Se r é a reta de equação $y = mx + b$ e s é a reta de equação $y = m'x + b'$, então:

$$r \,//\, s \Leftrightarrow m = m'$$

Exemplo 40

No plano, dado um referencial o.n. Oxy e dada uma reta r definida pela equação reduzida $y = -x + 2$ e o ponto $C(-2, 1)$, vamos determinar a equação vetorial de uma reta s paralela a r, que passa por C.

Seja m o declive de r, logo $m_r = -1$.

Como s é paralela a r, temos que $m_s = -1$.

Assim, a equação reduzida de s é dada por $y = -x + b$ para um certo número real b.

Como $C(-2, 1)$ pertence à reta s, vem $1 = -(-2) + b \Leftrightarrow b = -1$.

Logo, a reta s define-se por $y = -x - 1$.

Exercício

81 **Quais dos seguintes pares de retas são paralelas?**

(A) $r: y = 3x - 5$
$s: y = 3x + \frac{1}{2}$

(B) $r: y - 2x = 3$
$s: y = 2x - 3$

(C) $r: (x, y) = (1, -2) + k(1, 2)$
$s: (x, y) = (0, 5) + k(-2, -4)$

(D) $r: (x, y) = (1, -2) + k(1, 2)$
$s: y = 2x - 3$

1.5.10. Produto interno de vetores

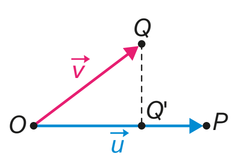
Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, e um ponto qualquer O.

Considera os pontos P, Q e Q', tais que:

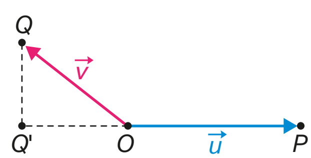
- $P = O + \vec{u}$
- $Q = O + \vec{v}$
- Q' é a projeção ortogonal de Q na reta OP.

O número representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ designa-se por produto interno (ou produto escalar) e é definido por:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP} \times \overline{OQ'}$, se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ'}$ tiverem o mesmo sentido;



- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overline{OP} \times \overline{OQ'}$, se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ'}$ não tiverem o mesmo sentido.

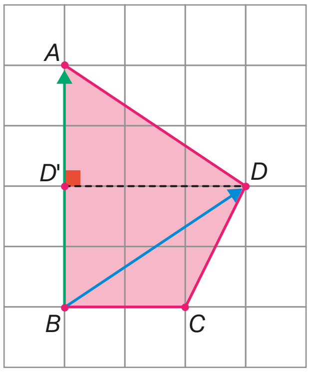


Repara que, por definição, se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for nulo, o respetivo produto interno também será nulo.

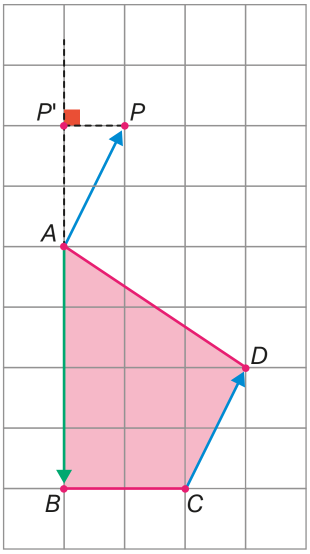
Exemplo 41

Considera o lado de cada quadrícula como unidade de medida, assim, no quadrilátero $[ABCD]$, temos que:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} = 4 \times 2 = 8$



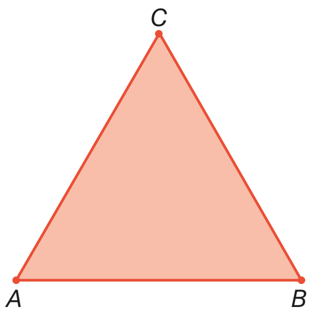
$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP'} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 4 = -8$



$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP'}$ têm sentidos opostos.

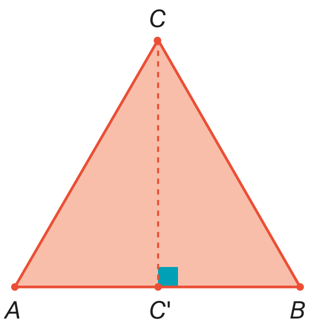
Exemplo 42

No triângulo equilátero $[ABC]$, cujos lados medem 4 unidades, podemos calcular:



- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Seja C' a projeção ortogonal de C sobre AB, logo $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'}$



Como o triângulo é equilátero, todos os ângulos internos têm amplitude $60°$, temos que:

$\cos 60° = \frac{\overline{AC'}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AC'}}{4} \Leftrightarrow \overline{AC'} = \frac{4}{2} = 2$

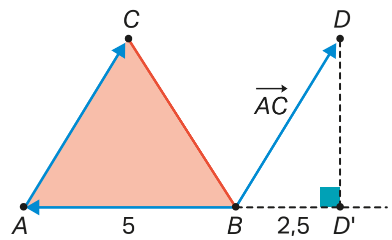
Logo,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = 4 \times 2 = 8$

- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

Começamos por aplicar os dois vetores num mesmo ponto, por exemplo, no ponto B.

Assim, seja D o ponto tal que $D = B + \overrightarrow{AC}$ e D' a projeção ortogonal de D em AB.



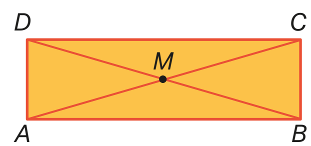
Logo, como $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm sentidos contrários, vem:

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overline{BA} \cdot \overline{BD'} = -4 \times 2 = -8$

Exercícios

82 Considera o retângulo $[ABCD]$, tal que:

- $\overline{AB} = 8$
- $\overline{AD} = 2$
- M é o ponto de interseção das diagonais do retângulo.



Determina:

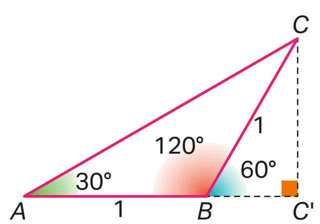
82.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

82.2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$

82.3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}$

83 Considera o triângulo isósceles $[ABC]$, tal que:

- $\overline{AB} = 1$
- $C\hat{A}B = 30°$



Determina:

83.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

83.2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Produto interno em referencial ortonormado

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, e as suas respetivas coordenadas num referencial ortonormado do plano ou do espaço, respetivamente, definimos o produto interno de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\,,\, u_2) \cdot (v_1\,,\, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\,,\, u_2\,,\, u_3) \cdot (v_1\,,\, v_2\,,\, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Manual Interativo

Vídeo
Ângulo de vetores

Exemplo 43

1. $\vec{u} = (1\,,\,-3)$ e $\vec{v} = (1\,,\,-2)$

   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-3) \times (-2) = 1 + 6 = 7$

2. $\vec{u} = (2\,,\,0\,,\,3)$ e $\vec{v} = (0\,,\,1\,,\,-2)$

   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times (-2) = 0 + 0 - 6 = -6$

Exercício

84 **Determina o produto interno dos seguintes vetores:**

84.1. $\vec{u} = (0\,,\,-3)$ e $\vec{v} = (-1\,,\,-2)$

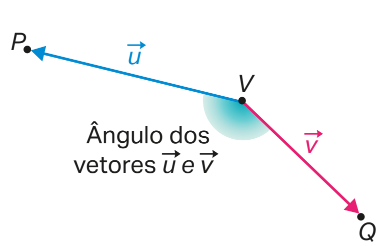
84.2. $\vec{u} = (3\,,\,-3)$ e $\vec{v} = (2\,,\,2)$

84.3. $\vec{u} = (0\,,\,-3\,,\,2)$ e $\vec{v} = (-2\,,\,-2\,,\,0)$

84.4. $\vec{u} = (1\,,\,2\,,\,-3)$ e $\vec{v} = (-1\,,\,-2\,,\,-2)$

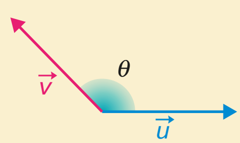
1.5.11. Ângulo de vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, tais que $\vec{u} = \overrightarrow{VP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{VQ}$, designa-se por **ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$** o ângulo convexo, nulo ou raso PVQ por eles formado.



Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos e θ ângulo por eles formado, então o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ também é definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

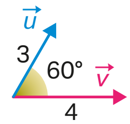


Manual Interativo

Vídeo
Ângulo de vetores no espaço

Exemplo 44

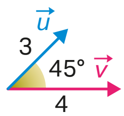
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos 60 = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$



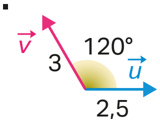
Exercício

85 Determina o produto interno dos seguintes vetores:

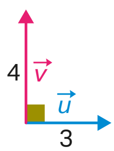
85.1.



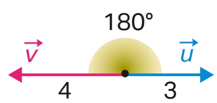
85.2.



85.3.



85.4.

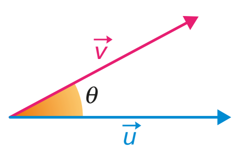


Repara que

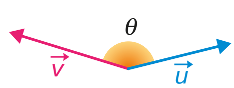
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores, não nulos, e θ o ângulo por eles formado,
Então $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

Assim, seja θ o ângulo formado por dois vetores, não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

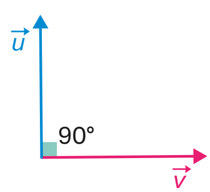
- se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então θ é um ângulo agudo ou nulo;



- se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então θ é um ângulo obtuso ou raso;



- se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então θ é um ângulo reto.



Exemplo 45

Dados os vetores $\vec{u}=(2, 1, 0)$ e $\vec{v}=(1, -3, 2)$, temos que:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times1+1\times(-3)+0\times2=2-3+0=-1$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

Logo,

$\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{14}}=-\dfrac{1}{\sqrt{70}}\approx-0{,}5$

Como $\cos 120° = 0{,}5$, temos que $\theta\approx120°$, isto é, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um ângulo obtuso.

Manual Interativo

Exercício
Determinar a amplitude do ângulo de vetores no espaço

Exercício

86 **Indica que tipo de ângulo formam os vetores e, sempre que possível, indica a amplitude do ângulo formado.**

86.1. $\vec{u}=(3, 1)$ e $\vec{v}=(2, 4)$

86.2. $\vec{u}=(-1, -2)$ e $\vec{v}=(1, 2)$

86.3. $\vec{u}=(1, 1, 0)$ e $\vec{v}=\left(2, \sqrt{3}, 0\right)$

86.4. $\vec{u}=(1, 0, 0)$ e $\vec{v}=(-1, 2, 1)$

1.5.12. Perpendicularidade

Decorre do resultado anterior que:

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, eles são perpendiculares se e só se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Exemplo 46

Dado o vetor $\vec{v}=(3, -4)$, um vetor $\vec{u}=(x, y)$ tal que $\vec{v}\perp\vec{u}$ é dado por:

$\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

$(3, -4)\cdot(x, y)=0$

$3x-4y=0$

$x=\dfrac{4y}{3}$

Portanto, todos os vetores do tipo $\vec{u}=\left(\dfrac{4y}{3}, y\right)$ são perpendiculares a $\vec{v}$, por exemplo, $\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$.

No caso de pretendermos, por exemplo, que a $\|\vec{u}\|=3$, teremos que:

$$\|\vec{u}\|=3 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{4y}{3}\right)^2+y^2}=3 \Leftrightarrow \frac{16}{9}y^2+y^2=9 \Leftrightarrow \frac{25}{9}y^2=9 \Leftrightarrow 25y^2=81$$
$$\Leftrightarrow y^2=\frac{81}{25} \Leftrightarrow y=\pm\frac{9}{5}$$

Assim, nestas condições teríamos:

- para $y=\frac{9}{5}$,

  $\vec{u}=\left(\frac{4}{3}\times\frac{9}{5}, \frac{9}{5}\right)=\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$;

- para $y=-\frac{9}{5}$,

  $\vec{u}=\left(\frac{4}{3}\times\left(-\frac{9}{5}\right), \frac{9}{5}\right)=\left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Manual Interativo

Vídeo
Sistema de equações paramétricas de um plano

Exercícios

87 Sejam os vetores $\vec{v}=(2, 5, -1)$ e $\vec{u}=(1, a, b)$.
Determina as condições para que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sejam perpendiculares.

88 Sejam os vetores $\vec{v}=(3, 4)$ e $\vec{u}=(x, y)$.
Determina os valores x e y, tais que:
- $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sejam perpendiculares;
- $\|\vec{u}\|=2$

1.5.13. Sistema de equações paramétricas de uma reta

Considera o referencial o.n. Oxy, onde se define a reta que passa pelo ponto $A(a_1, a_2)$ e com vetor diretor $\vec{u}(u_1, u_2)$.

A equação vetorial da reta r é dada por:

$P=A+k\vec{u}, \ k\in\mathbb{R}$

em que $P(x, y)$ é um ponto genérico da reta.

Assim,

$(x, y)=(a_1, a_2)+k(u_1, u_2), \ k\in\mathbb{R}$

De onde resulta que:

$$(x, y)=(a_1+ku_1, a_2+ku_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=a_1+ku_1 \\ y=a_2+ku_2 \end{cases}, \ k\in\mathbb{R}$$

Assim, no plano, dada uma reta não vertical que passa pelo ponto $A(a_1, a_2)$ e com vetor diretor $\vec{u}(u_1\,,\,u_2)$, um ponto $P(x\,,\,y)$ pertence à reta se e só se:

$$\begin{cases} x = a_1 + ku_1 \\ y = a_2 + ku_2 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

Diz-se que é o **sistema de equações paramétricas** de r no plano.

Manual Interativo

Vídeo
Equação vetorial de uma reta no espaço

Exercício
Determinar as equações paramétricas de uma reta no plano

Exemplo 40

Dada uma reta não vertical que passa pelo ponto $A(-4\,,\,1)$ e com vetor diretor $\vec{u}(2\,,\,-1)$, o sistema de equações paramétricas de r é dado por:

$$(x\,,\,y) = (-4\,,\,1) + k(2\,,\,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 2k \\ y = 1 - k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

$P(2\,,\,4)$ pertence à reta se e só se existir um número real tal que:

$$\begin{cases} 2 = -4 + 2k \\ 4 = 1 - k \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -6 \\ k = 1 - 4 \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

Logo $P(2\,,\,4)$ pertence à reta.

$Q(5\,,\,0)$ pertence à reta se e só se existir um número real tal que:

$$\begin{cases} 5 = -4 + 2k \\ 0 = 1 - k \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 9 \\ k = 1 \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{9}{2} \\ k = 1 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

Como $\frac{9}{2} \neq 1$, $Q(5\,,\,0)$ não pertence à reta.

De forma análoga, no espaço, dada uma reta não vertical que passa pelo ponto $A(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$ e com vetor diretor $\vec{u}(u_1\,,\,u_2\,,\,u_3)$, um ponto $P(x\,,\,y\,,\,z)$ pertence à reta se e só se:

$$\begin{cases} x = a_1 + ku_1 \\ y = a_2 + ku_2 \\ z = a_3 + ku_3 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

Diz-se que é o **sistema de equações paramétricas** de r no espaço.

Exercício

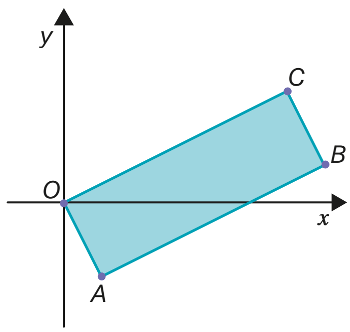
89 **Indica o sistema de equações paramétricas que define, no espaço, a reta que passa em $A(-4\,,\,1\,,\,1)$ e com vetor diretor $\vec{u}(2\,,\,0\,,\,-1)$.**

1.5.14. Resolução de problemas no plano e no espaço

Os conceitos e competências que foste adquirindo ao longo desta unidade permitiram--te desenvolver capacidades de resolução de problemas no plano e no espaço com recurso a vetores. Analisa os exemplos de exercícios resolvidos, para depois praticares e resolveres problemas.

Exemplo 41

No referencial o.n. Oxy ao lado está representado um paralelogramo $[OABC]$, com $A(2\,,-4)$ e $C(12\,,6)$.



1. Determina as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AC}$.

2. Quais as coordenadas do ponto B?

3. Determina a área do paralelogramo.

4. Prova que a figura é um paralelogramo.

Resolução

1. $\overrightarrow{OC}=C-O=C=(12\,,6)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(12\,,6)-(2\,,-4)=(10\,,10)$

Logo,

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AC}=(12\,,6)+(10\,,10)=(22\,,16)$

2. Repara que sendo $[OABC]$ um paralelogramo, os lados opostos são paralelos, com o mesmo comprimento. Assim:

$OC\,//\,AB$

$\overline{OC}=\overline{AB}$

Portanto, os segmentos de reta $[OC]$ e $[AB]$ representam o mesmo vetor e $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

Também o ponto B corresponde à soma do ponto A com o vetor $\overrightarrow{AB}$.

$B=A+\overrightarrow{AB}=A+\overrightarrow{OC}=(2\,,-4)+(12\,,6)=(14\,,2)$

3. Para determinar a área do paralelogramo, necessitamos de conhecer o comprimento dos lados do paralelogramo, $d(A, B)$ e $d(O, A)$

$d(A, B) = \sqrt{(14-2)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

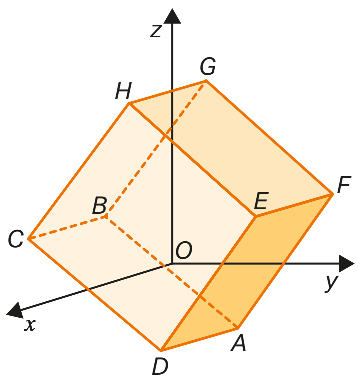
$d(O, A) = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Logo,

$A = b \times a = 2\sqrt{5} \times 6\sqrt{5} = 60$

Exemplo 42

No referencial o.n. $Oxyz$, considera o cubo $[ABCDEFGH]$ representado na figura, onde $A(0, 2, -2)$, $B(0, -2, 1)$ e $C(4, -2, 1)$.



1. Indica o ponto ou vetor resultante das seguintes operações:

a) $A + \overrightarrow{BG}$

b) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}$

c) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{DB}$

2. Indica as coordenadas do ponto D.

3. Determina a equação vetorial da reta BD.

4. A reta BD interseta o eixo Oz? Justifica.

Resolução

1. a) $A + \overrightarrow{BG} = A + \overrightarrow{AF} = F$

b) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BF}$

c) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

2. Sabemos que $C + \overrightarrow{CD} = D$.

Mas $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = A - B = (0, 4, -3)$.

Assim, $D = C + \overrightarrow{CD} = (4, -2, 1) + (0, 4, -3) = (4, 2, -2)$.

3. Como $B(0\,,\,-2\,,\,1)$ e $\overrightarrow{BD} = D - B = (4\,,\,4\,,\,-3)$,

temos que a equação vetorial da reta BD é $(x\,,\,y\,,\,z) = (0\,,\,-2\,,\,1) + k(4\,,\,4\,,\,-3)\,,\ k \in \mathbb{R}$.

4. Se a reta intersetar o eixo Ox, onde a ordenada e a cota são nulas, então, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(0\,,\,0\,,\,z) = (0\,,\,-2\,,\,1) + k(4\,,\,4\,,\,-3)\,,\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 + 4k \\ 0 = -2 + 4k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ z = 1 - 3k \end{cases} \longrightarrow \text{Impossível}$$

Como o sistema é impossível, conclui-se que não há interseção da reta com o eixo.

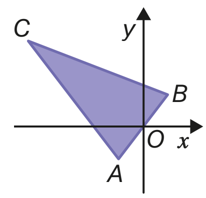
Exercícios

90 No referencial o.n. Oxy, considera o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

$\overrightarrow{AC}(-3\,,\,9)$

$\overrightarrow{CB}(9\,,\,-3)$



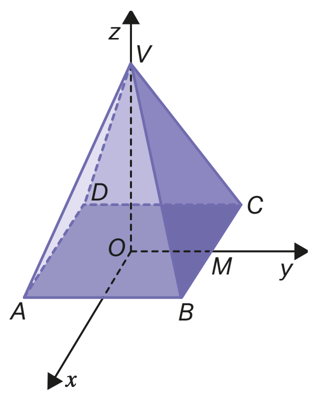
90.1. Prova que o triângulo $[ABC]$ é um triângulo isósceles.

90.2. Sendo a origem do referencial, O, o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, determina as coordenadas de A e de B.

90.3. Mostra que $C(-6\,,\,6)$.

90.4. Determina o ponto de interseção da reta CB com o eixo Oy.

91 No referencial o. n. $Oxyz$, considera a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabemos que:

- o volume da pirâmide é $12\ \text{cm}^3$; $V(0\,,\,0\,,\,3)$;
- M é o ponto médio de $[BC]$;
- a origem do referencial é o centro da base da pirâmide.

91.1. Determina o comprimento do lado da base da pirâmide.

91.2. Indica as coordenadas dos vértices da base da pirâmide.

91.3. Indica as coordenadas de um vetor colinear a $\overrightarrow{AC}$.

91.4. O vetor $\vec{u}(9, -9, -18)$ é colinear a $\overrightarrow{AV}$? Justifica.

91.5. Para que valor de k o vetor $\vec{v}(4k, k+3, 0)$ é colinear com $\overrightarrow{BD}$?

92 No referencial o. n. Oxy, considera as retas r e s definidas por:

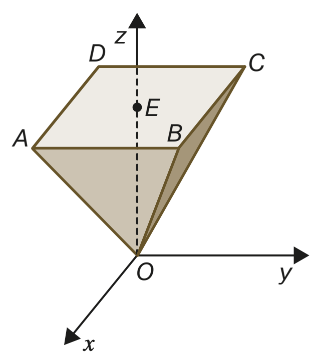
$$r: \begin{cases} y = -1 + 2k \\ 2x = 3 - k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

$$s: \ 2x + y = 4$$

92.1. Indica um vetor diretor para cada uma das retas.

92.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção das retas.

93 No referencial o. n. $Oxyz$, considera a pirâmide quadrangular regular $[ABCDO]$, com vértice na origem do referencial e altura 5, e o ponto E, pertencente ao eixo Oz, centro da base da pirâmide.



A reta OB é definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 5 + 5k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

93.1. Determina as coordenadas dos vértices da base da pirâmide.

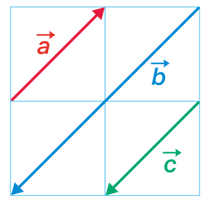
93.2. Determina $\overrightarrow{AD}$.

93.3. Indica a equação vetorial do plano mediador de $[AD]$.

Síntese

Um **vetor** $\overrightarrow{AB}$ **é caracterizado** por:

- uma **direção**: a da reta AB;
- um **sentido**: de A para B;
- um **comprimento**: $\overline{AB}$.



Vetores colineares têm a mesma direção:
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares** se e só se $\vec{u} = k\vec{v}$, com $k \in \mathbb{R}$.

Vetores simétricos têm a mesma direção, o mesmo comprimento, mas sentidos opostos:

$$\vec{a} = -\vec{b} \text{ ou } \vec{b} = -\vec{a}$$

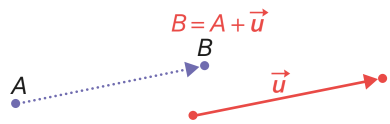
Norma do vetor $\vec{v}$, e representamos por $\|\vec{v}\|$, é o comprimento do vetor:

$$\|\vec{v}\| = d(A, B)$$

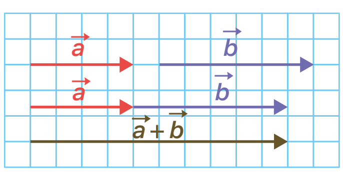
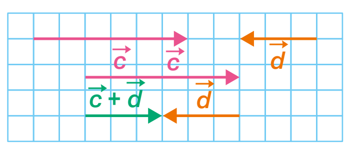
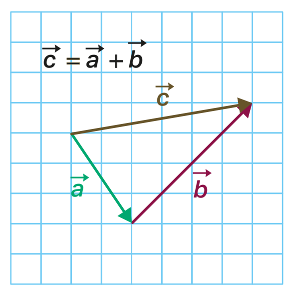
Operações com vetores

Soma de um ponto com um vetor

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ $\qquad A + \vec{u} = B$ $\qquad \overrightarrow{AB} = B - A$

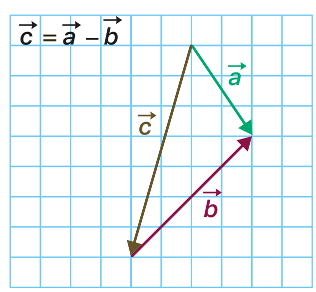


Adição e subtração de vetores

Colineares		Não colineares
A mesma direção e o mesmo sentido	A mesma direção, mas sentidos opostos	Regra do triângulo
		

Subtração de vetores

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$



Síntese

Produto de um escalar por um vetor $\vec{v}$

$k\vec{v}$, com $k \in \mathbb{R}$, é um vetor com:

- a mesma direção de $\vec{v}$;
- o mesmo sentido de $\vec{v}$, se $k > 0$, e sentido oposto se $k < 0$;
- norma igual $|k|\|\vec{v}\|$.

No plano	No espaço
Coordenadas de um vetor	
$\vec{v} = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2$ $\vec{v}(v_1, v_2)$	$\vec{v} = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2 + v_3\,\vec{e}_3$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$	$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$
Operações com vetores	
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
$k\vec{u} = (k\,u_1, k\,u_2)$	$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$
Equação vetorial da reta	
$(x, y) = (a_1, a_2) + k(u_1, u_2)$	$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(u_1, u_2, u_3)$
Sistema de equações paramétricas da reta	
$\begin{cases} x = a_1 + ku_1 \\ y = a_2 + ku_2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = a_1 + ku_1 \\ y = a_2 + ku_2 \\ z = a_3 + ku_3 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$

Propriedades algébricas das operações com vetores

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (vetor nulo, $\vec{0}$, é o elemento neutro da adição de vetores)

$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ (para qualquer vetor nulo, $\vec{u}$, existe o seu simétrico, $-\vec{u}$)

$(a + b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$

$b\,(a\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$

$a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$

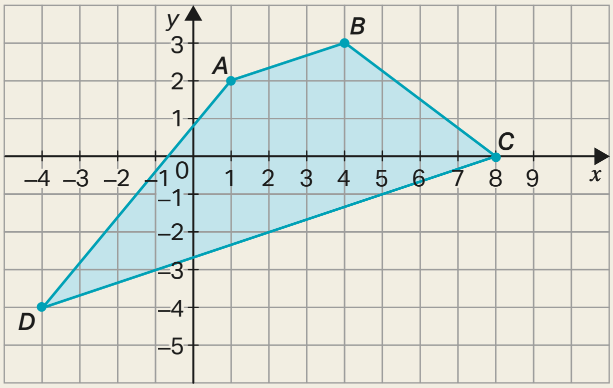
Declive m de uma reta

Seja $\vec{u}(u_1, u_2)$ o **vetor diretor**, então $\boldsymbol{\dfrac{u_2}{u_1} = m}$ é o declive da reta.

Relação do declive de retas paralelas: $r // s \iff m_r = m_s$

Para aplicar

1 Num referencial o.n. Oxy, considera o quadrilátero $[ABCD]$, com $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(8, 0)$ e $D(-4, -4)$.



1.1. Determina as coordenadas dos seguintes vetores:

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{CD}$

1.2. Usa as coordenadas dos vetores para provar que $\dfrac{\overrightarrow{CD}}{4} = \overrightarrow{AB}$.

1.3. Demonstra que o quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio.

1.4. Determina as coordenadas dos pontos médios, M_1 e M_2, de $[AD]$ e $[BC]$, respetivamente.

1.5. Demonstra que a reta $M_1 M_2$ é paralela à reta CD.

2 Num referencial o.n. Oxy, considera as retas:

$a: (x, y) = (0, 0) + k(-4, 3), \ k \in \mathbb{R}$

$c: y = 3x + 3$

2.1. Indica um vetor diretor da reta a.

2.2. Qual é o ponto de interseção, S, da reta c com o eixo Oy?

2.3. Sabendo que $a // b$ e que b contém o ponto $(-4, 2)$, indica a equação reduzida da reta b.

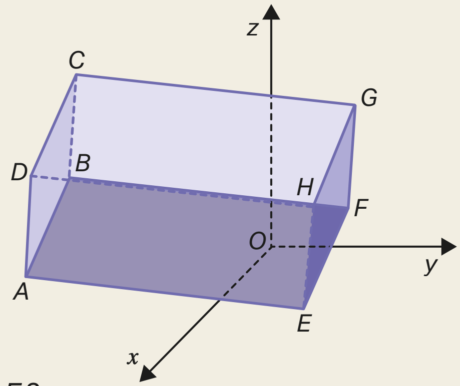
2.4. Determina o número real m tal que $(m, 14 - m)$ seja ponto da reta a.

2.5. Define a reta através de uma equação reduzida.

3 **Num referencial o.n. $Oxyz$, considera um cubo $[ABCDEFGH]$, com:**

- $A(14, -7, 4)$
- $B(16, -4, 10)$
- $C(10, -6, 13)$
- o ponto E pertence ao plano xOy.
- a reta AE é definida pelo seguinte sistema de equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = 14 - 3k \\ y = -7 + 6k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 2k \end{cases}$$

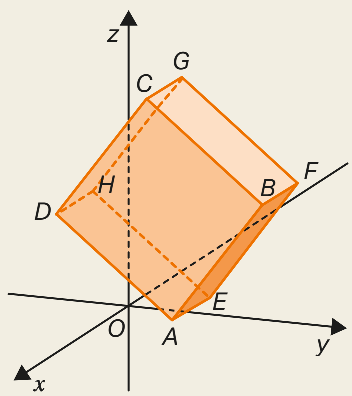


3.1. Quais são as coordenadas do ponto E?

3.2. Determina a equação vetorial da reta AE.

4 **Num referencial o.n. $Oxyz$, considera um cubo $[ABCDEFGH]$, com:**

- $A(1, 2, 0)$
- $C(1, 1, 7)$
- $G(-2, 1, 7)$
- a face $[ABCD]$ é paralela ao plano yOz.



4.1. Efetua as seguintes operações com vetores:

a) $A + \overrightarrow{EH} =$

b) $H + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} =$

c) $\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{BE} =$

d) $\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DF} =$

4.2. Calcula a medida do comprimento do lado do cubo.

4.3. Calcula o volume do cubo.

4.4. Determina por uma equação vetorial a reta AG.

4.5. Define a reta AC por um sistema de equações paramétricas.

4.6. Determina as coordenadas do ponto de ordenada 3 da reta AC.

4.7. Determina o ponto de interseção de AG com o plano xOy.

4.8. Determina as coordenadas do ponto E.

4.9. Indica as coordenadas do vetor $\vec{u}$, colinear a $\overrightarrow{AC}$ e norma 10.

Teste

1 Considera o sólido representado na figura abaixo composto por um prisma quadrangular e um prisma triangular.

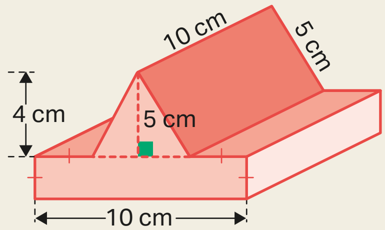
1.1. O volume do sólido é:

(A) $120\ \text{cm}^3$

(B) $180\ \text{cm}^3$

(C) $240\ \text{cm}^3$

(D) $320\ \text{cm}^3$



1.2. A área de toda a superfície do sólido é:

(A) $344\ \text{cm}^2$ **(B)** $424\ \text{cm}^2$

(C) $622\ \text{cm}^2$ **(D)** $222\ \text{cm}^2$

2 A forma simplificada do radical $\sqrt{27}$ é:

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** $3\sqrt{3}$ **(D)** $4\sqrt{3}$

3 Num referencial o.n. Oxy, os pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes pares.

Pode-se concluir que:

(A) $x_1 = y_2$ e $x_2 = y_1$ **(B)** $x_1 = -y_1$ e $x_2 = y_2$

(C) $x_1 = y_1$ e $x_2 = -y_2$ **(D)** $x_1 = -y_2$ e $x_2 = -y_1$

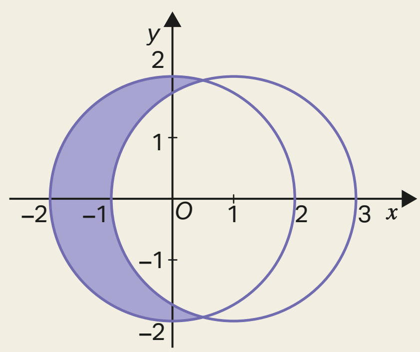
4 A condição que define o conjunto de pontos da região a sombreado na figura é:

(A) $x^2 + y^2 \geqslant 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4$

(B) $x^2 + y^2 \geqslant 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4$

(C) $x^2 + y^2 \leqslant 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4$

(D) $x^2 + y^2 \leqslant 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4$

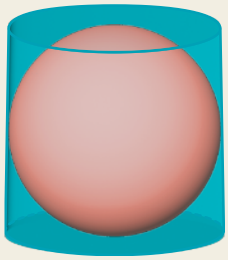


5 Considera, num referencial o.n. xOy, a reta r que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2 e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 8.
Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y = -4x + 8$ **(B)** $y = 4x + 8$

(C) $y = -2x + 4$ **(D)** $y = 2x + 4$

6 Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição $x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 6z \leqslant 3$ define uma esfera inscrita num cilindro.



Seja F o centro da esfera e h a altura do cilindro. Então:

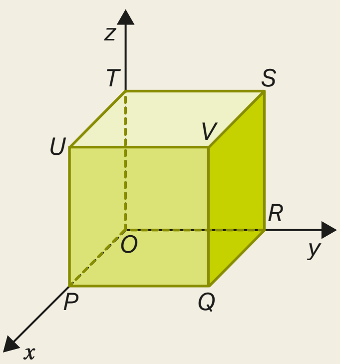
(A) $F(-2, 0, 3)$ e $h = 4$

(B) $F(2, 0, -3)$ e $h = 4$

(C) $F(2, 0, -3)$ e $h = 8$

(D) $F(-2, 0, 3)$ e $h = 8$

7 O cubo $[OPQRSTUV]$ de aresta 2 está representado num referencial o.n. $Oxyz$.
Os pontos P, R e T pertencem aos semieixos positivos.



Qual das seguintes coordenadas corresponde a um ponto pertencente a uma aresta do cubo?

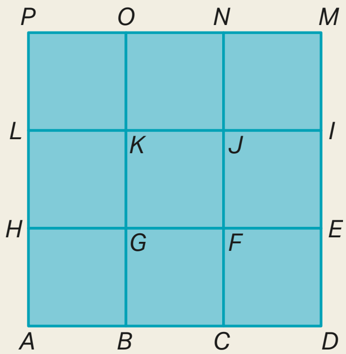
(A) $(0, 1, 1)$

(B) $(1, 1, 1)$

(C) $(1, 1, 2)$

(D) $(1, 2, 0)$

8 Considera o quadrado ao lado decomposto em nove retângulos iguais.



O resultado da operação $K + \overrightarrow{LB} - \overrightarrow{JE}$ é:

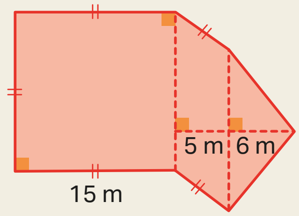
(A) F

(B) G

(C) H

(D) I

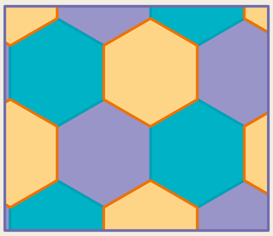
9 Considera o polígono representado na figura.
Determina a área do polígono e apresenta os procedimentos que efetuares.



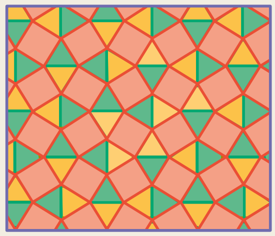
Teste

10 Classifica cada uma das seguintes pavimentações.

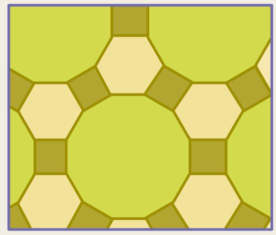
(A)



(B)



(C)



11 Para guardar pacotes cilíndricos de bolachas construíram-se três tipos de embalagens de cartão sem tampa. Em todos eles, os pacotes de bolachas estão tangentes às laterais e à base da embalagem. Observa o pacote de bolachas e as três caixas diferentes (todas com seis pacotes).

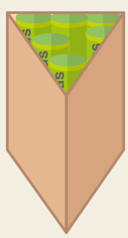
Sabemos que:

- um pacote de bolachas tem a forma de um cilindro com 22 cm de altura e 6 cm de diâmetro da base;
- a embalagem A tem a forma de um prisma triangular cuja base é um triângulo equilátero com aproximadamente 22,4 cm de lado.

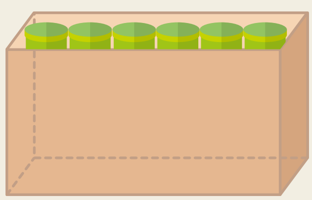
11.1. Calcula o volume de cada pacote de bolachas.

11.2. Determina o volume de cada embalagem.

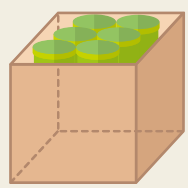
11.3. Qual das embalagens necessita de menos cartão para ser construída?



Embalagem A



Embalagem B



Embalagem C

12 Escreve sob a forma de uma potência cuja base seja um número racional:

12.1. $3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{2}}$

12.2. $8^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{1}{4}}$

12.3. $\left(6^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{5}} : 3^{\frac{1}{10}}$

12.4. $8^{\frac{1}{8}} : 2^{\frac{1}{4}} : 4^{\frac{3}{2}}$

12.5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{7}{2}}$

12.6. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{5}$

13 Considera o seguinte retângulo de base $\sqrt{54}$ e altura $\sqrt{150}$.

13.1. Simplifica os valores da base e da altura do retângulo.

13.2. Calcula o perímetro da figura e apresenta o resultado simplificado.

14 Indica dois números reais a e b, tais que:

14.1. $a < b$ e $a^2 > b^2$

14.2. $-a < b$ e $a^2 > b^2$

14.3. $a < b$ e $a^4 = b^4$

15 Qual é a distância entre os pontos A e B sabendo que suas coordenadas são $A(2, 3)$ e $B(-2, -2)$?

16 Determina as coordenadas do ponto médio dos seguintes pares de pontos:

16.1. $A(2, 1)$ e $B(3, 4)$

16.2. $A(-2, 4)$ e $B(7, -4)$

17 Considera a circunferência definida pela equação:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

17.1. Indica as coordenadas do centro da circunferência.

17.2. Indica o raio da circunferência.

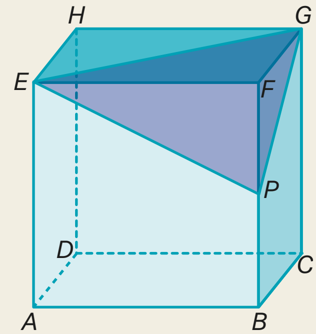
17.3. Determina as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy.

17.4. O ponto E de coordenadas $\left(2, \sqrt{13} - 3\right)$ pertence à circunferência? Justifica a tua resposta.

Teste

18 Considera o cubo $[ABCDEFGH]$, com $1000\ \text{cm}^3$ de volume.

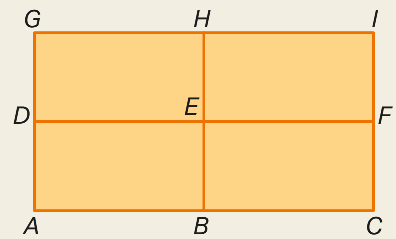
P é o ponto médio do segmento de reta $[BF]$.



18.1. Determina o valor exato do comprimento do segmento de reta $[AG]$.

18.2. Mostra que $\overline{PE} = 5\sqrt{5}$ cm.

19 Considera o retângulo decomposto em quatro retângulos iguais apresentado na figura e realiza as seguintes operações com vetores:



19.1. $A + \overrightarrow{DE}$

19.2. $E - \overrightarrow{FI}$

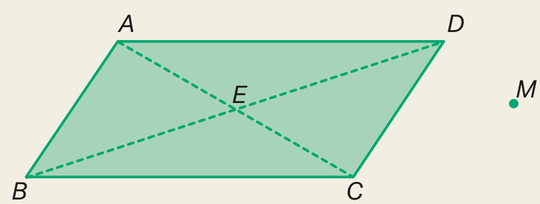
19.3. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GE}$

19.4. $A + 2\overrightarrow{EH}$

19.5. $E - \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

19.6. $\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{BF}$

20 Considera o paralelogramo $[ABCD]$ representado na figura. O ponto E é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo e M é um ponto qualquer do plano.



Mostra que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{ME}$.

21 Considera, num determinado referencial o.n. Oxy, os pontos:

$$A(0,\ 1),\ B(2,\ -1)\ \text{e}\ C(1,\ 2)$$

21.1. Escreve uma equação:

a) vetorial da reta AB;

b) cartesiana da reta AB.

21.2. Verifica se o ponto C pertence à reta AB.

22 Considere os pontos $A(-1, 3)$ e $B(4, -2)$.
Define por um sistema de equações paramétricas a reta AB.

23 Considera num plano o.n. Oxy os pontos A, B e C, tais que:

- $A(1, 0)$
- $B(2, 0)$
- C tem coordenada positiva e pertence à reta $x = 3$.

Determina as coordenadas de C, sabendo que $B\hat{A}C = 45°$.

24 Considera os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(4, -1, 2)$, e $C(-2, 5, 0)$ no espaço.

24.1. Calcula a distância entre os pontos A e B.

24.2. Determina se o ponto C está mais próximo de A ou de B.

24.3. Encontra o ponto médio do segmento $[AC]$.

25 Racionaliza os denominadores das seguintes expressões e simplifica o resultado, se possível.

25.1. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

25.2. $\dfrac{7}{2+\sqrt{5}}$

25.3. $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

26 Considera dois pontos $A(1, 2, 3)$ e $B(5, 6, 7)$ no espaço.

a) Encontra a equação do plano mediador do segmento $[AB]$.

b) Verifica se o ponto $Q(3, 4, 5)$ pertence ao plano mediador.

27 Considera os vetores no espaço $\mathbb{R}^3$. $\vec{u} = (2, -3, 5)$ e $\vec{v} = (4, 1, -2)$.

27.1. Calcula o **produto interno** $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

27.2. Que tipo de ângulo formam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

27.3. Considera a afirmação: "Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais."
Indica, justificando, o valor lógico da afirmação.

2

Funções

O que vou aprender neste tema

Generalidades sobre funções

- Identificar funções
- Indicar o domínio e o contradomínio de uma função
- Analisar gráficos de funções
- Determinar a imagem de uma função
- Identificar funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas
- Definir uma função composta
- Definir a função inversa de uma função

Funções reais de variável real

- Identificar uma função real de variável real
- Definir funções por expressões algébricas
- Traçar o gráfico de uma função
- Identificar uma função definida por ramos
- Estudar a paridade e simetrias dos gráficos de funções
- Interpretar diferentes transformações geométricas

Monotonia, extremos e concavidade

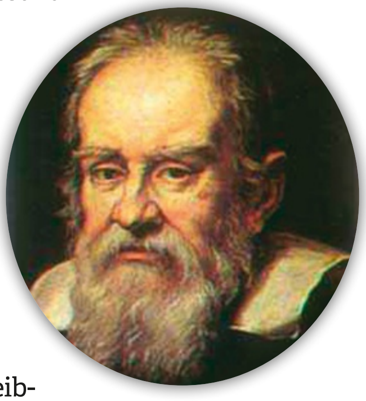
- Descrever os intervalos de monotonia
- Identificar os extremos relativos e absolutos
- Estudar a concavidade de funções quadráticas

Resolução de problemas

- Resolver equações que envolvam funções polinomiais
- Resolver inequações que envolvam funções polinomiais
- Resolver problemas em contexto real e de modelação matemática

Introdução

O termo função é frequentemente utilizado no dia a dia, em variadíssimas situações. A ideia que intuitivamente temos sobre este termo corresponde, em grande parte, ao seu significado matemático. Os meios de comunicação recorrem com grande frequência à linguagem de funções, principalmente à representação gráfica para explicar a evolução de fenómenos. Em muitas situações, o recurso a gráficos permite-nos, de forma visualmente simples, sintetizar muita informação.



Já na Antiguidade, apesar do uso não explícito, podemos observar a utilização do conceito de função em alguns trabalhos percursores de filósofos e matemáticos medievais. No século XVII, começaram a surgir as primeiras ideias sobre o conceito de **função**, com a necessidade de observação dos fenómenos e das leis que os procuravam explicar. Por exemplo, Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727) utilizaram algumas noções de lei e dependência que hoje reconhecemos estarem relacionadas com o conceito de função em alguns dos seus trabalhos. Considera-se, assim, que o conceito matemático de função emergiu no século XVII.

Mas o termo "função" foi introduzido por Gottfried Leibniz (1646-1716) numa das suas cartas, datada de 1673, na qual descreve a declividade de uma curva num ponto específico. Também no século XVIII, Jean Bernoulli, matemático suíço (1667-1748), utilizou o termo função para se referir ao resultado de operações entre variáveis e constantes, e Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a notação ainda hoje utilizada para representar funções.

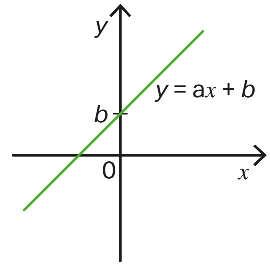
Enquanto os matemáticos dos séculos XVII e XVIII tratavam por funções apenas aquelas que eram definidas por expressões analíticas, com os desenvolvimentos rigorosos da Análise Matemática, por Weierstrass (1815-1897) e outros, bem como com a reformulação da geometria convergindo na formulação da Teoria dos Conjuntos, por Cantor (1845-1918), a noção de função evoluiu. Assim, chegou-se ao conceito moderno e geral de função como um mapeamento unívoco de um conjunto em outro.

Apesar dos matemáticos já referidos terem dado os primeiros contributos, os moldes atuais com que se trabalham as funções devem-se a diversos nomes, sendo valorizadas as contribuições de vários matemáticos, como Nikolai Lobachevsky (1792-1856), Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Dedekind (1831-1916).

Iremos, nesta unidade, explorar o conceito matemático de função, procurando dar-lhe o rigor que, no seu uso corrente, nem sempre tem.

Recorda

Uma **função afim** é definida por uma expressão algébrica do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b constantes, em que x é uma variável independente.
Uma função afim é representada graficamente por uma reta não vertical.



- a corresponde ao declive da reta;
- b corresponde à ordenada na origem, porque $f(0) = b$.

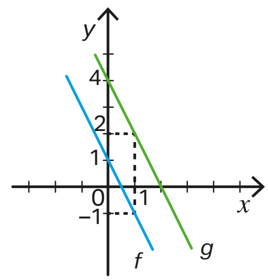
Dados dois pontos da reta, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), o declive da reta é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

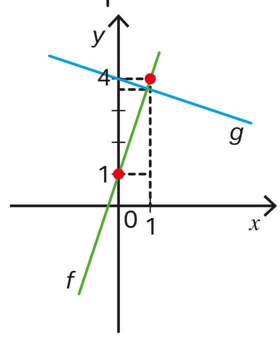
Uma função de **proporcionalidade direta** é uma função linear f do tipo $f(x) = kx$, com $k \neq 0$, em que $f(1) = k$ representa a constante de proporcionalidade direta.

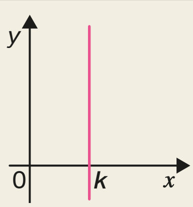
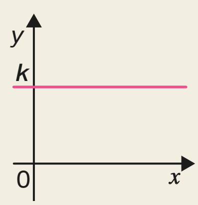
Nota
Quando a ordenada na origem é 0 $(b = 0)$, a função diz-se **linear**.
Neste caso, a reta passa na origem do referencial.

Retas que têm o mesmo declive são paralelas.

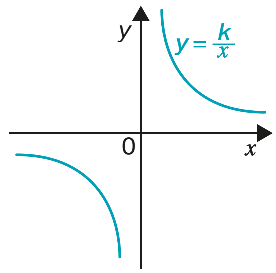


Se o declive de uma reta for igual ao simétrico do inverso do declive de outra reta, as retas são perpendiculares.

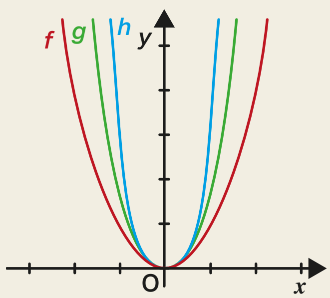
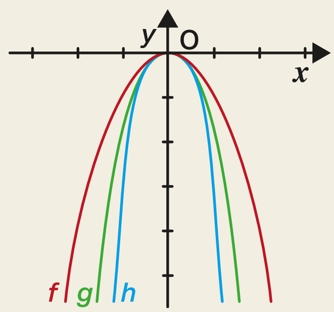


Reta vertical $x = k$	**Reta horizontal** $y = k$
 (Não corresponde a uma função)	 (Função constante)

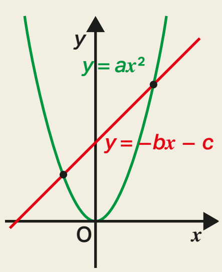
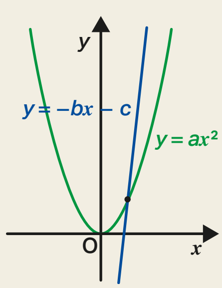
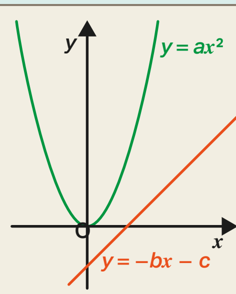
Uma **função de proporcionalidade inversa** é uma função f do tipo $f(x)=\frac{k}{x}$, com $x\neq 0$ e $k\neq 0$, em que $f(1)=k$ representa a constante de proporcionalidade inversa.
Uma função de proporcionalidade direta é representada graficamente por uma hipérbole, centrada na origem.



Uma função f do tipo $f(x)=ax^2$, com $a\neq 0$, é uma **função quadrática**.
O gráfico destas funções são parábolas, com vértice na origem do referencial e simétricas em relação ao eixo dos yy.

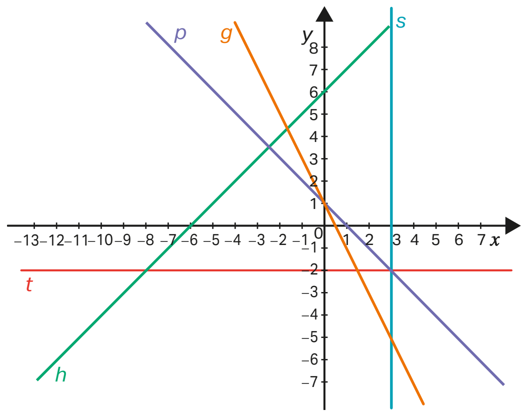
$a>0$ **Concavidade da parábola voltada para cima**	$a<0$ **Concavidade da parábola voltada para baixo**
	

O conjunto-solução de uma equação do 2.º grau $ax^2+bx+c=0$ é o conjunto das abcissas dos pontos de interseção da parábola de equação $y=ax^2$ com a reta de equação $y=-bx-c$.

Interpretação gráfica do número de soluções de uma equação do 2.º grau: $ax^2+bx+c=0$, com $a>0$ e $b<0$		
		
A equação tem duas soluções reais.	A equação tem uma solução real.	A equação não tem soluções reais.

Antes de começar

1 Considera as retas representadas no seguinte referencial o.n..



1.1. Qual das retas não representa uma função?

1.2. Estabelece a relação entre as retas e respetivas expressões algébricas.

h •	• $x = 3$
p •	• $y = x + 6$
g •	• $y = -2x + 1$
s •	• $y = -2$
t •	• $y = -x + 1$

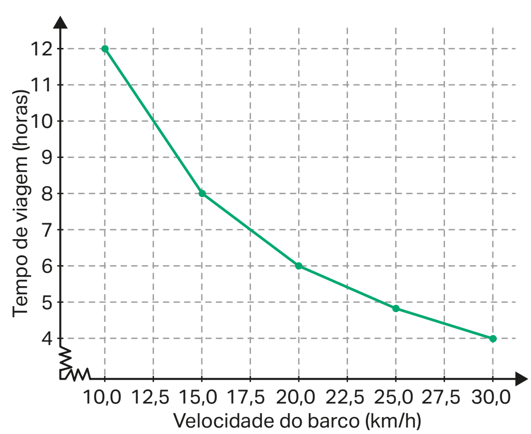
1.3. Indica a expressão algébrica de uma reta:

a) horizontal; **b)** vertical;

c) com declive positivo; **d)** com declive negativo.

1.4. Qual é a expressão algébrica da reta r, sabendo que é paralela à reta de expressão algébrica $y = -x + 1$ e que passa no ponto $(0, 5)$?

2 Os barcos da Cabo Verde Interilhas viajam entre as ilhas. Um dos barcos precisa de percorrer uma distância de 120 km. Se viaja a uma velocidade constante de 15 km/h, levará 8 horas para completar a viagem.



2.1. Qual seria o tempo de viagem se o barco aumentar a sua velocidade para 20 km/h ?

2.2. Quanto tempo levaria se a velocidade fosse reduzida para 10 km/h ?

2.3. A relação entre a velocidade do barco e o tempo de viagem é uma relação de proporcionalidade inversa. Porquê?

2.4. Qual é a constante de proporcionalidade inversa?

2.5. Qual é o significado da constante de proporcionalidade inversa no contexto do problema?

3 **Considera as seguintes funções: $f(x)=x^2$ e $g(x)=2x+3$.**

3.1. Esboça os gráficos da função quadrática e da reta no mesmo referencial cartesiano.

3.2. Determina os pontos de interseção das funções.

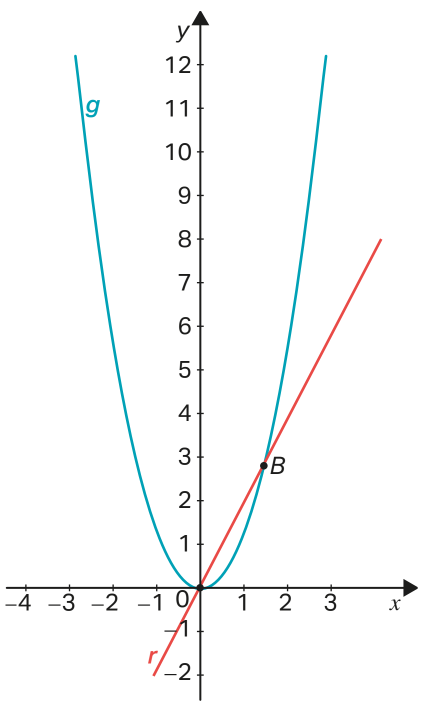
4 **No referencial cartesiano ao lado estão representadas uma reta r e a parábola g .**

A reta e a parábola intersetam-se na origem e no ponto B .

O ponto de coordenadas $(-1\ ;\ -2)$ pertence à reta.

4.1. Indica uma expressão algébrica que defina a reta.

4.2. Sabendo que a equação da parábola g é $y=\sqrt{2}x^2$, determina a ordenada do ponto B .



2 Funções

Manual Interativo

Exercício
Reconhecer funções lineares e afins

Vídeo
Funções do tipo $f(x) = ax^2$

2.1. Generalidades acerca de funções

Noção de função

Uma função é uma aplicação que relaciona os elementos de dois conjuntos não vazios.

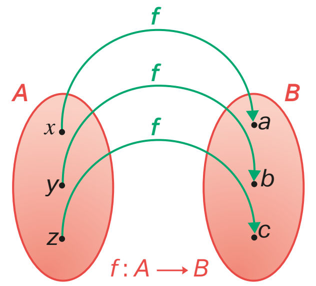
Consideremos dois conjuntos não vazios A e B, em que uma função f faz corresponder a cada elemento do conjunto A um e um só elemento do conjunto B.

Exemplo 1

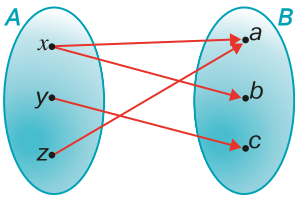
O diagrama ao lado representa a função f.

A cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B.

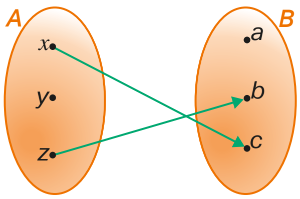
Em qualquer função, para cada elemento do conjunto A, existe um único elemento que lhe corresponde no conjunto B.



Exemplo 2



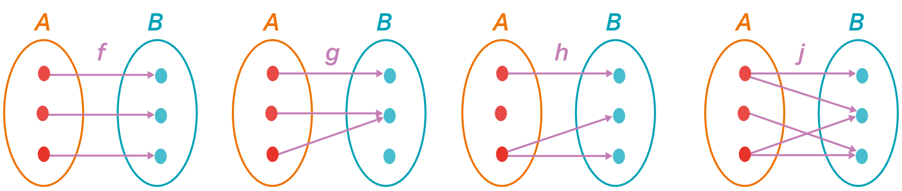
Não é uma função, pois um elemento do conjunto A relaciona-se com dois elementos distintos de B.



Não é uma função, pois existe um elemento de A que não se relaciona com nenhum elemento de B.

Exercício

1 Quais das seguintes relações representam funções?



De modo geral, podemos descrever algebricamente uma função da seguinte maneira:

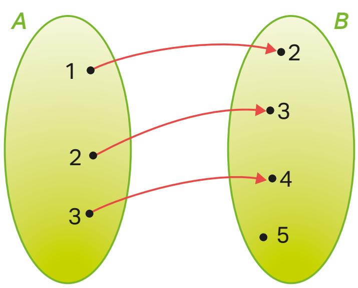
$$\begin{aligned} f:\ A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Repara que a função, a cada elemento do conjunto A (representados por x), faz-lhes corresponder elementos de B (representados por y). Também se diz que os elementos do conjunto B são dados em função dos elementos do conjunto A, logo, podemos representar y por: $y = f(x)$. Lê-se: y igual a f de x.

Manual Interativo

Exercício
Associar expressões algébricas a gráficos de funções afins

Uma função também pode ser representada por uma expressão algébrica.



Repara na situação ao lado em que a cada elemento do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ corresponde o número natural consecutivo no conjunto $B = \{2, 3, 4\}$.

Assim, podemos definir a função g:

$$\begin{aligned} g:\ A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow x+1 \end{aligned}$$

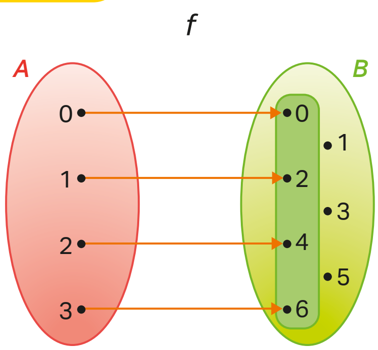
Para $x = 1$, temos que $g(1) = 1 + 1 = 2$

Para $x = 2$, temos que $g(2) = 2 + 1 = 3$

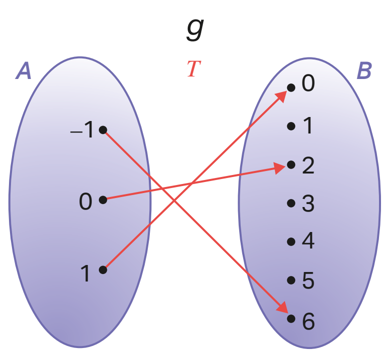
Para $x = 3$, temos que $g(3) = 3 + 1 = 4$

Logo, podemos também definir a função g através da seguinte expressão algébrica: $g(x) = x + 1$.

Exemplo 3



$$\begin{aligned} f:\ A = \{0, 1, 2, 3\} &\longrightarrow B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ x &\longrightarrow 2x \end{aligned}$$



$$g:\ A = \{-1, 0, 1\} \longrightarrow B = \{0, 1, 6\}$$

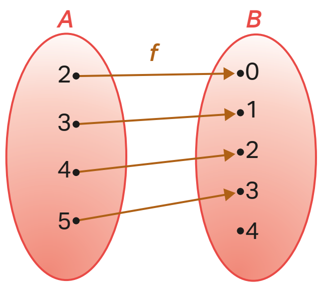
$$x \longrightarrow \begin{cases} 6 & \text{se } x = -1 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Dizemos, neste caso, que a função está definida por ramos.

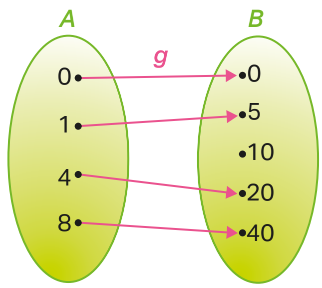
Exercício

2 Indica uma expressão algébrica que permita definir as seguintes funções:

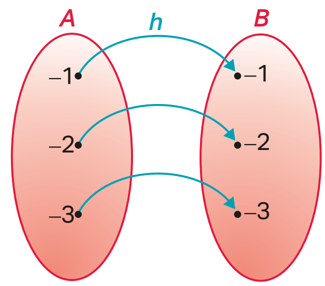
2.1.



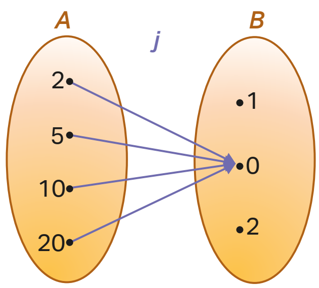
2.2.



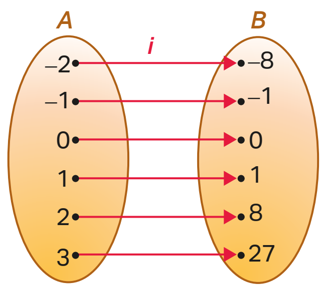
2.3.



2.4.



2.5.



2.1.1. Gráficos de funções

Sejam A e B dois conjuntos. Designa-se por produto cartesiano de A por B o conjunto dos pares ordenados:

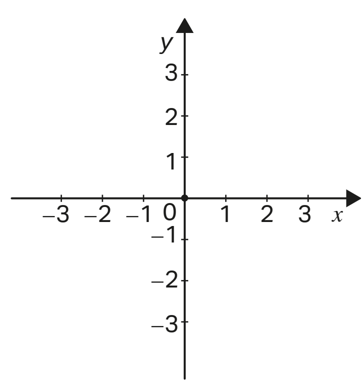
$$A \times B = \{(a\,;\ b):\ a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo 4

Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$, o resultado do produto cartesiano de A por B é dado por:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x\,;\ y):\ x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ corresponde a todos os pontos do plano cartesiano.



Agora, sendo A e B dois conjuntos e f a função $f\colon A \longrightarrow B$, o conjunto $G \subset A \times B$ corresponde ao **gráfico da função f** e representa-se por G_f se e somente se qualquer que seja $a \in A$ existir um e um só elemento de $b \in B$ tal que $(a\,;\ b) \in G$.

$$G_f = \left\{(x\,;\ f(x))\ :\ x \in A\right\}$$

Como sei se uma representação gráfica corresponde a uma função?

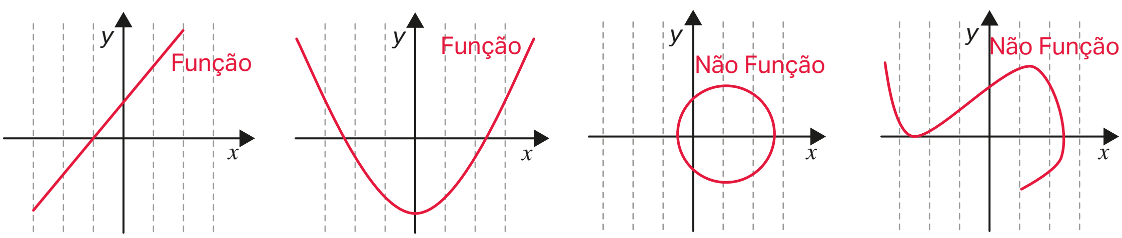
Basta traçar retas paralelas ao eixo dos yy e verificar se essas retas intersetam o gráfico no máximo num único ponto. Caso uma delas intersete o gráfico em mais do que um ponto, esse gráfico não representa uma função. Isto acontece porque a cada abcissa x só pode corresponder uma ordenada $f(x)$ para que $(x\,,\ f(x))$ seja ponto do gráfico de uma função f.

Manual Interativo

Exercício
Identificar o sentido da concavidade, extremos e monotonia do gráfico de uma função

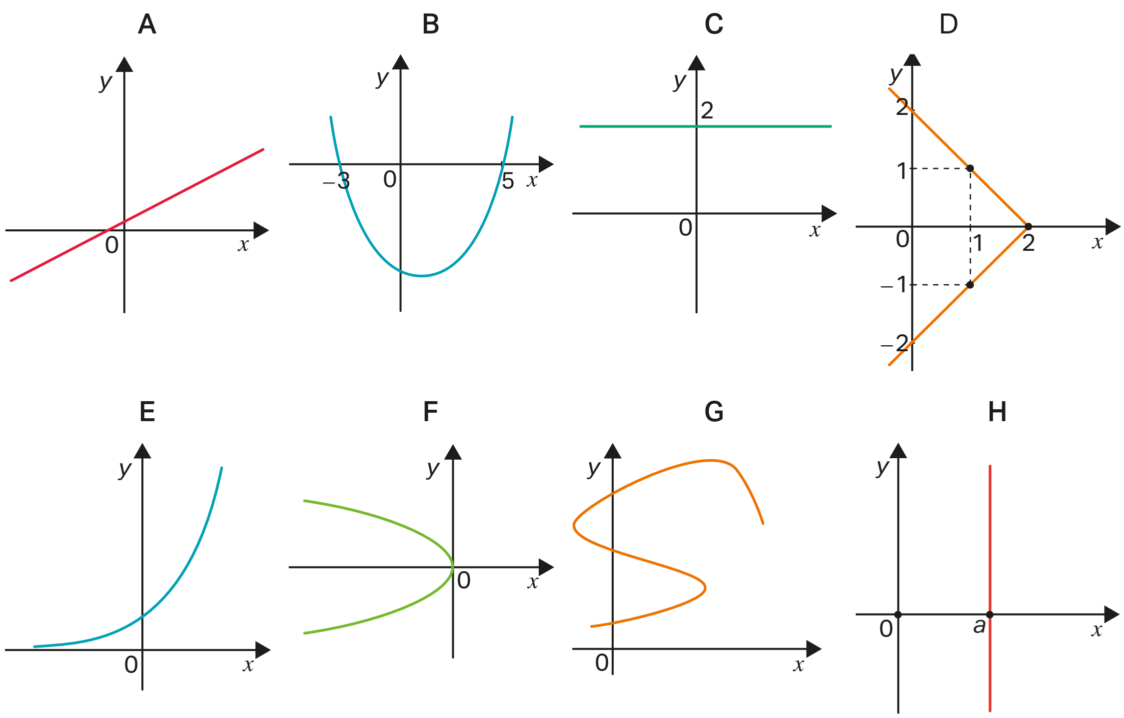
Vídeo
Formas de representar uma função

Exemplo 5



Exercício

3 Em quais dos seguintes gráficos estão representadas funções?



2.1.2. Restrições de uma função

Sejam A e B dois conjuntos, não vazios, e $f: A \longrightarrow B$ uma função.

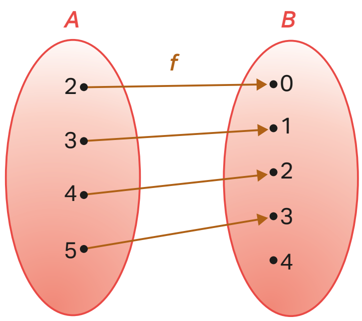
Dado um conjunto qualquer, não vazio, C, chama-se **restrição de f a C** à função $f_{|C}: C \cap A \longrightarrow B$, tal que $\forall x \in C \cap A$, $f_{|C}(x) = f(x)$.

Exercício

4 Representa num diagrama as restrições de cada uma das funções ao conjunto C indicado.

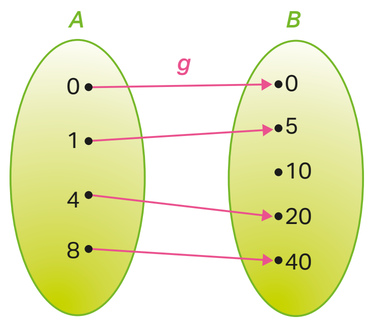
4.1.

$C = \{2, 4\}$



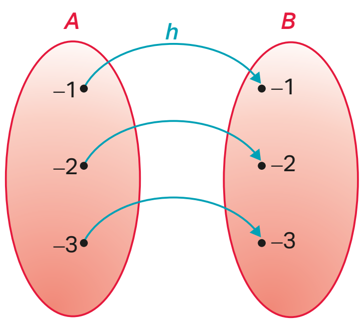
4.2.

$C = \{0, 1, 4, 8\}$



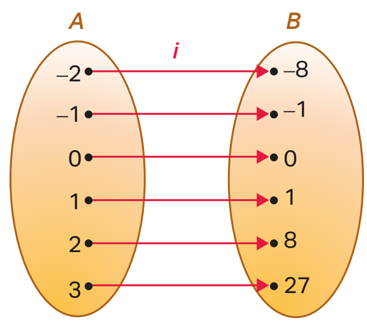
4.3.

$C = \{-1\}$



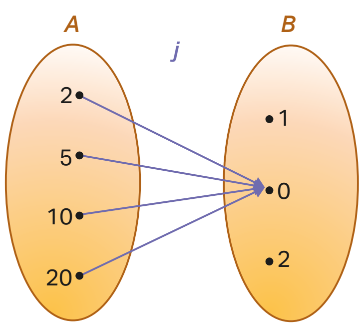
4.4.

$C = \{1, 2, 3\}$



4.5.

$C = \{5, 10, 15, 20\}$



2.1.3. Imagem de um conjunto por uma função

Considerando uma função f, os conjuntos que se relacionam recebem nomes específicos.

Seja f a função que aos elementos do conjunto A faz corresponder os elementos do conjunto B:

$$f:\ A \longrightarrow\ B$$

Assim:

O **domínio da função** é o conjunto formado pelos valores x que podem ter correspondência por meio da função f.

Neste caso, A é o domínio da função.

O **conjunto de chegada da função** é o conjunto formado por todos os valores aos quais x pode estar associado.

Neste caso, B é o conjunto de chegada da função.

O subconjunto do conjunto de chegada de uma função formado pelos elementos que se relacionam com elementos do domínio denomina-se por contradomínio.

Domínio de f: D_f

Conjunto de chegada de f: CCh_f

Contradomínio de f: D'_f

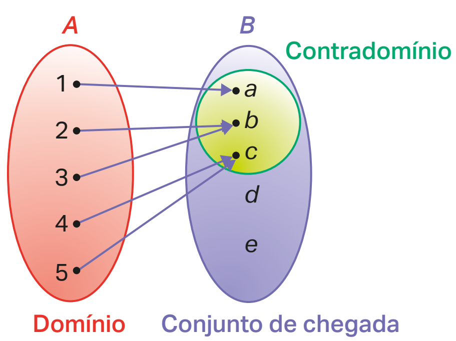
Aos elementos de D_f chama-se **objetos** e aos elementos de D'_f chama-se **imagens**. Se $y = f(x)$, diz-se que y é a imagem do objeto x por f.

Exemplo 6

$D_f = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$CCh_f = B = \{a, b, c, d, e\}$

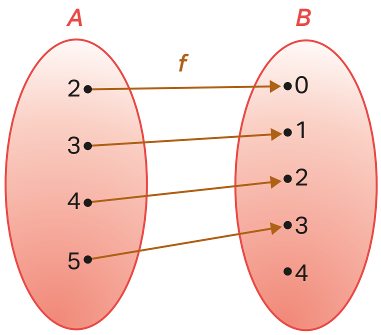
$D'_f = \{a, b, c\}$



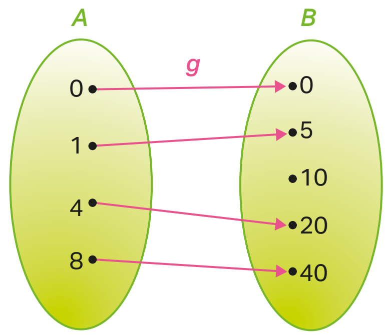
Exercício

5 Indica para cada uma das seguintes funções o seu domínio, contradomínio e conjunto de chegada.

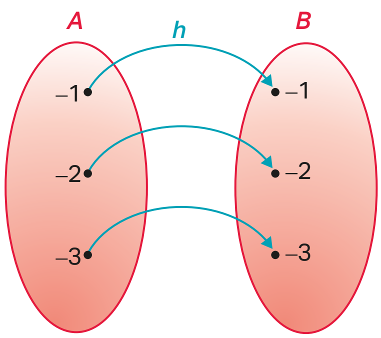
5.1.



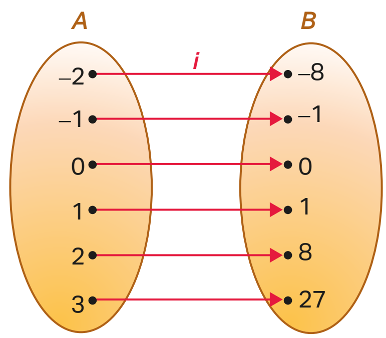
5.2.



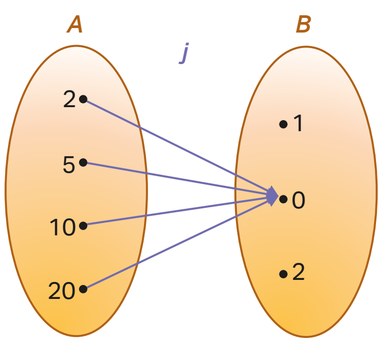
5.3.



5.4.



5.5.



2.1.4. Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

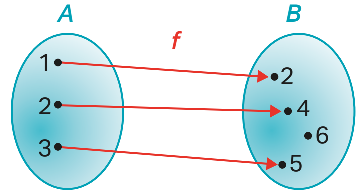
Seja f uma função tal que $f\colon A \longrightarrow B$.

A função f diz-se **injetiva** se:

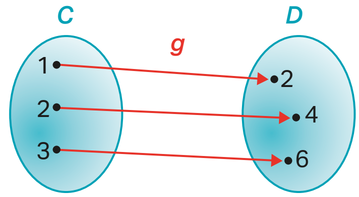
$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Exemplo 7

A função f é injetiva, pois todos os objetos têm diferentes imagens.

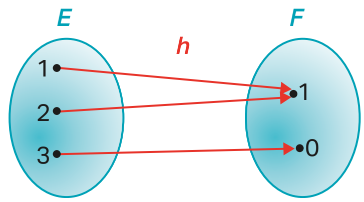


A função g é injetiva, pois todos os objetos têm diferentes imagens.



A função h não é injetiva, pois existem dois objetos E, 1 e 2, que têm a mesma imagem.

$$1 \neq 2 \text{, mas } h(1) = h(2) = 1$$



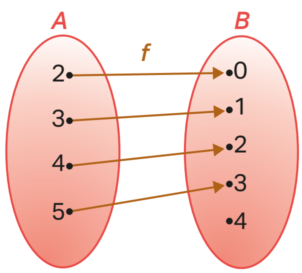
Manual Interativo

Vídeo
Função injetiva

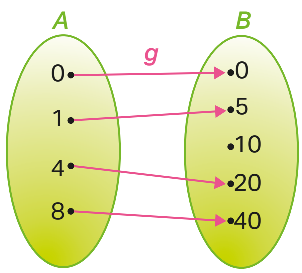
Exercício

6 **Para cada uma das seguintes funções, indica se é ou não injetiva.**

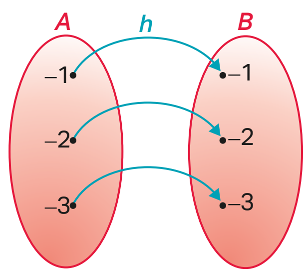
6.1.



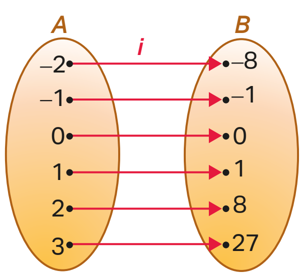
6.2.



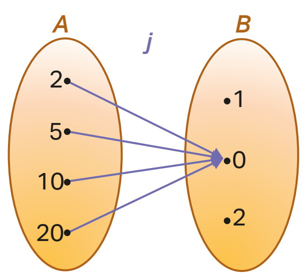
6.3.



6.4.



6.5.



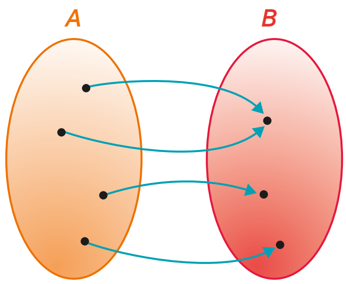
A função $f: A \longrightarrow B$ diz-se **sobrejetiva** se e só se $\forall y \in B,\ \exists x \in A: y = f(x)$.

Portanto, uma função é sobrejetiva quando o conjunto de chegada coincide com o contradomínio.

Manual Interativo

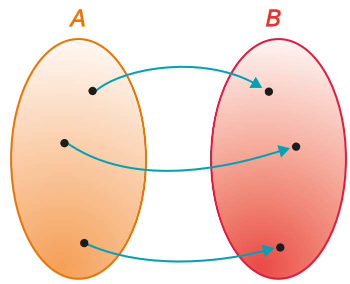
Vídeo
Função sobrejetiva

Exemplo 8



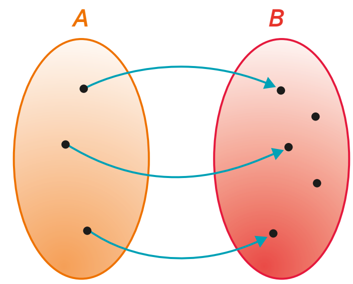
Todos os elementos do conjunto de chegada têm um correspondente no domínio.

É uma função sobrejetiva.



Todos os elementos do conjunto de chegada têm um correspondente no domínio.

É uma função sobrejetiva.



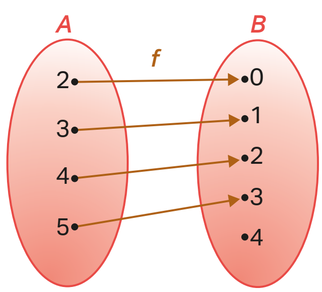
Existem elementos do conjunto de chegada que não têm um correspondente no domínio.

Não é uma função sobrejetiva.

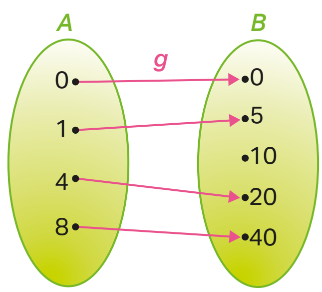
Exercício

7 Para cada uma das seguintes funções, indica se é ou não sobrejetiva.

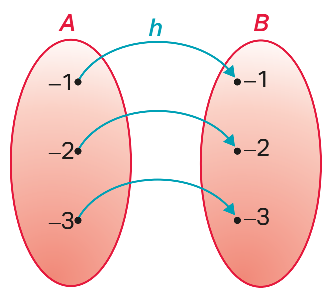
7.1.



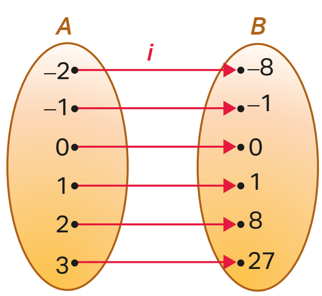
7.2.



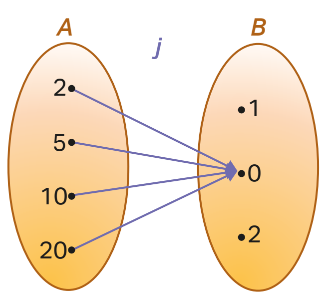
7.3.



7.4.



7.5.



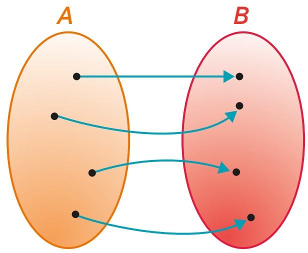
Quando uma função é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, diz-se **bijetiva.**

Exemplo 9

Todos os objetos têm uma imagem diferente no contradomínio, logo é injetiva.

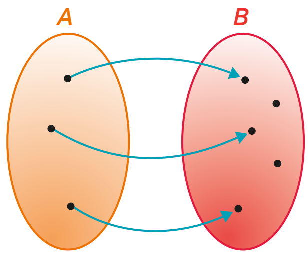
Todos os elementos do conjunto de chegada são imagem de algum elemento do domínio, logo é sobrejetiva.

Assim, a função é bijetiva.



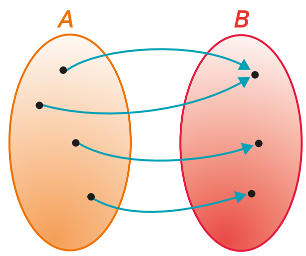
Existem elementos do conjunto de chegada que não são imagem de nenhum elemento do domínio, logo não é sobrejetiva.

Assim, a função não é bijetiva.



Dois objetos diferentes do domínio têm igual imagem, logo a função não é injetiva.

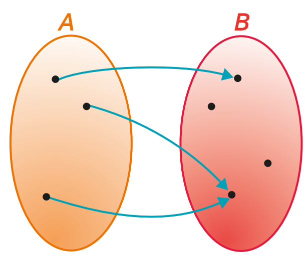
Assim, a função não é bijetiva.



Dois objetos diferentes têm igual imagem, logo a função não é injetiva.

Existem elementos do conjunto de chegada que não são imagem de nenhum elemento do domínio, logo não é sobrejetiva.

Assim, a função não é bijetiva.



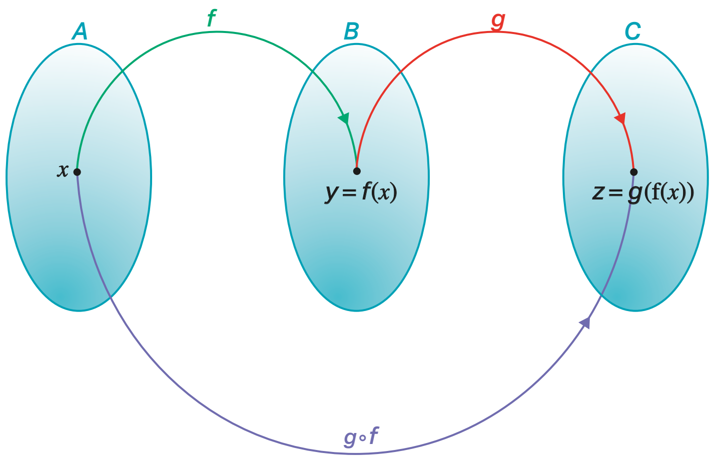
Numa função bijetiva, o conjunto de chegada é igual ao contradomínio e, simultaneamente, objetos distintos do domínio têm imagens distintas. Desta forma, cada elemento do domínio relaciona-se com um único elemento do conjunto de chegada, e vice-versa, ou seja, todos os elementos do conjunto de chegada relacionam-se com algum elemento do domínio.

Exercício

8 **Considerando as funções apresentadas nos exercícios anteriores, indica as que são bijetivas.**

2.1.5. Composição de funções

Dados três conjuntos não vazios A, B e C:



Considera duas funções f e g, tais que:

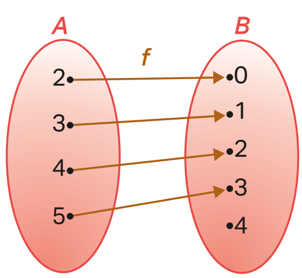
- a função f faz corresponder a cada elemento x, do conjunto A, um elemento $y = f(x)$ do conjunto B;
- e a função g faz corresponder a cada elemento $y = f(x)$, do conjunto B, um elemento z, do conjunto C.

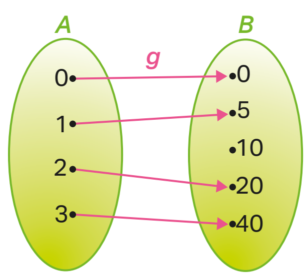
Supõe que aplicamos a função g, depois de ter aplicado a função f.

A função que faz corresponder diretamente os elementos do conjunto A aos elementos do conjunto C designa-se por **função composta**, $g \circ f$ ou $g(f(x))$.

Exemplo 10

Dadas as funções f e g:





Temos que:

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(0) = 0$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = 5$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(5) = 3$

Função composta

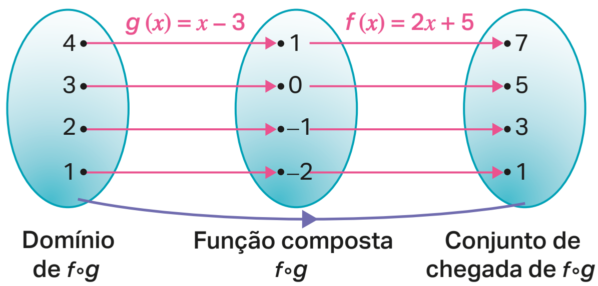
Sejam $f: D_f \longrightarrow A$ e $g: D_g \longrightarrow B$ duas funções.

A função composta de g após f é a função $g \circ f: D_{g \circ f} \longrightarrow B$ tal que:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} \quad \text{e} \quad \forall x \in D_{g \circ f},\ g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemplo 10

No caso de conhecermos as expressões algébricas que definem as funções, podemos determinar a expressão algébrica da função composta.



$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-3) = 2(x-3)+5 = 2x-6+5 = 2x-1$$

Repara que:

$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 7$ ou $(f \circ g)(4) = 2 \times 4 - 1 = 7$

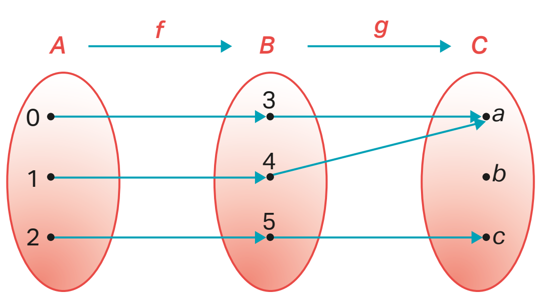
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = 5$ ou $(f \circ g)(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-1) = 3$ ou $(f \circ g)(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-2) = 1$ ou $(f \circ g)(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$

Exercícios

9 **Considera as seguintes funções:**



9.1. Determina:

$(g \circ f)(0)$

$(g \circ f)(1)$

$(g \circ f)(1)$

9.2. A função $(g \circ f)$ é bijetiva? Justifica.

10 **Considera as funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = -2x + 1$.**
Determina a expressão algébrica de:

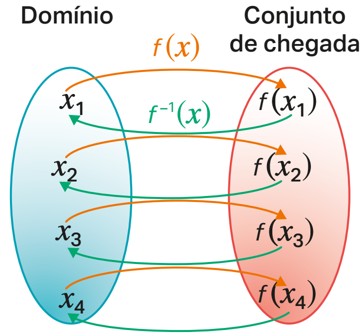
10.1. $(g \circ f)(x)$ **10.2.** $(f \circ g)(x)$ **10.3.** $(g \circ f)(-1)$ **10.4.** $(f \circ g)(-1)$

2.1.6. Função inversa de uma função bijetiva

Manual Interativo

Vídeo
Função inversa de uma função bijetiva

Sejam A e B conjuntos e $f\colon A \longrightarrow B$ uma função bijetiva.



Designa-se por função inversa de f a função $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$, tal que $\forall y \in B$, $f^{-1}(y) = x_y$, sendo que x_y é o único objeto de A tal que $f(x_y) = y$.

Designamos por **função inversa** a função $f^{-1}(x)$, que faz o oposto do que a função $f(x)$ faz.

Assim, seja $f(x)$ uma função $f\colon A \longrightarrow B$, em que $f(a) = b$, então, a função inversa:

$$f^{-1}\colon B \longrightarrow A\text{, tal que } f(b) = a.$$

Nem toda a função admite uma inversa: podemos encontrar a função inversa só quando a função for bijetiva, ou seja, injetiva e sobrejetiva.

Como se determina a função inversa?

Partindo da ideia que f^{-1} faz o contrário da função f, repara que se f duplica cada objeto, ou seja, a imagem de x é o dobro de x, então f^{-1} fará o inverso, ou seja, a cada objeto faz corresponder a sua metade.

Assim, se $f(x) = 2x$, então $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Para determinar a expressão algébrica de uma função inversa podemos recorrer à resolução de equações.

Na expressão algébrica de f, substitui $f(x)$ por x e x por $f^{-1}(x)$. Resolves a equação em ordem a $f^{-1}(x)$ e determinas a expressão algébrica da função inversa.

Exemplo 11

$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow f(x) = 2x - 6$

Substituímos $f(x)$ por x e x por $f^{-1}(x)$, de onde vem:

$x = 2f^{-1}(x) - 6$

Resolvemos a equação em ordem a $f^{-1}(x)$:

$$x = 2f^{-1}(x) - 6 \iff x + 6 = 2f^{-1}(x) \iff \frac{x+6}{2} = f^{-1}(x) \iff f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 3$$

Logo, a função inversa de $f^{-1}(x)$ é dada por:

$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 3$

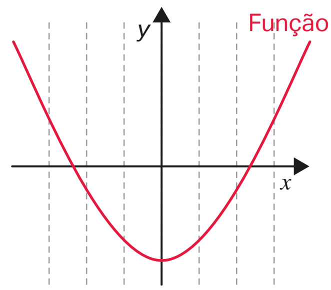
Síntese

- Uma **função** é uma aplicação que relaciona os elementos de dois conjuntos não vazios. Consideremos dois conjuntos não vazios A e B, em que uma função f faz corresponder a cada elemento do conjunto A um e um só elemento do conjunto B.

$$\begin{aligned} f:\ A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

- O conjunto $G \subset A \times B$ corresponde ao **gráfico da função f** e representa-se por G_f se e somente se qualquer que seja $a \in A$ existir um e um só elemento $b \in B$ tal que $(a\,;\ b) \in G$.

$$G_f = \{(x\,;\ f(x))\ :\ x \in A\}$$



- Dado um conjunto qualquer, não vazio, C, chama-se **restrição de f a C** à função: $f_{|C}:\ C \cap A \longrightarrow B$, tal que $\forall x \in C \cap A$, $f_{|C}(x) = f(x)$.

- O **domínio da função** é o conjunto de elementos x do primeiro conjunto, ou seja, A, aos quais será aplicada a função. Escreve-se $D_f = A$.

- O **conjunto de chegada da função** é o conjunto de todos os elementos do segundo conjunto, ou seja, B, onde se encontram as correspondências de x, por aplicação da função f. $CCh = B$.

- O subconjunto do conjunto de chegada de uma função formado pelos elementos que são correspondência de algum objeto x, diz-se contradomínio e representa-se por D'_f.

- Uma função $f:\ A \longrightarrow B$ diz-se **injetiva** se e só se $\forall x_1,\ x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Uma função $f:\ A \longrightarrow B$ diz-se **sobrejetiva** se e só se $\forall y \in B, \exists x \in A:\ y = f(x)$.

- Quando uma função é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, diz-se **bijetiva.**

- Sejam $f:\ D_f \longrightarrow A$ e $g:\ D_g \longrightarrow B$ duas funções. A **função composta** de g após f é a função $g \circ f:\ D_{g \circ f} \longrightarrow B$ tal que:

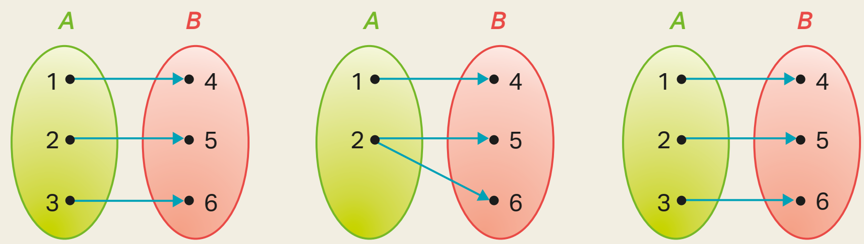
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f:\ f(x) \in D_g\} \text{ e } \forall x \in D_{g \circ f},\ g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$g \circ f = g(f(x))$$

- Seja uma função $f:\ A \longrightarrow B$, em que $f(a) = b$, então, a **função inversa** $f^{-1}:\ B \longrightarrow A$ é tal que $f^{-1}(b) = a$.

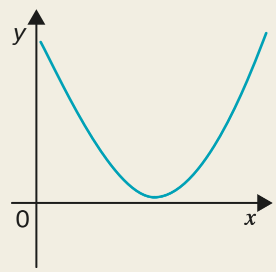
Para aplicar

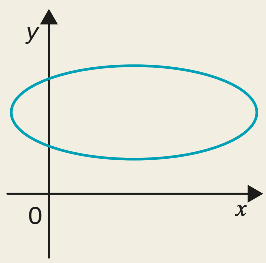
1 Considera os seguintes diagramas que representam relações entre os conjuntos A e B.

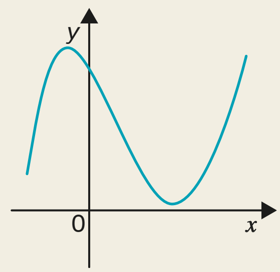


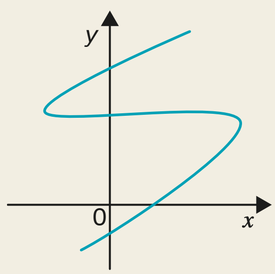
Quais deles representam funções? Justifica a tua resposta.

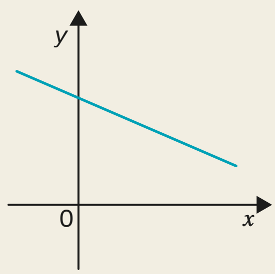
2 Considera as representações gráficas que se seguem.

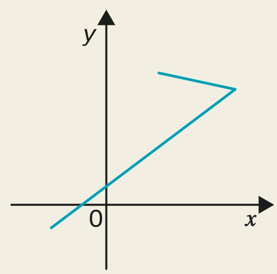
a)


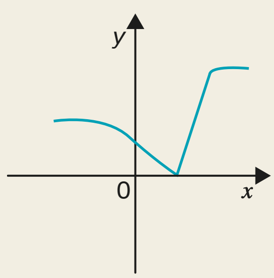
b)


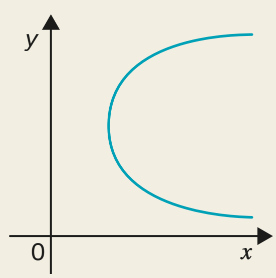
c)


d)


e)


f)


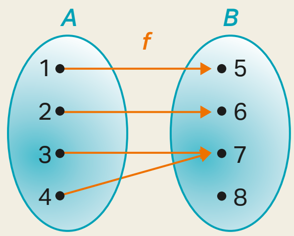
g)


h)


Quais delas representam funções?

3 **Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$.**

A função $f: A \longrightarrow B$ está representada no diagrama seguinte:



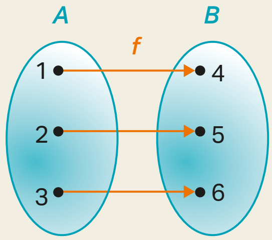
3.1. Determina a imagem de cada elemento de A pela função f.

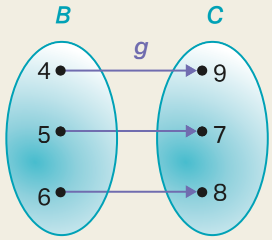
3.2. A função f é injetiva? Justifica tua resposta.

3.3. A função f é sobrejetiva? Justifica a tua resposta.

3.4. Desenha o diagrama da função inversa f^{-1}, se ela existir. Se não existir, explica o motivo.

4 **Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{7, 8, 9\}$ e as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ representadas pelos seguintes diagramas:**





4.1. Determina a função composta $g \circ f$, ou seja, $g(f(x))$, para cada $x \in A$.

4.2. Representa a função composta $g \circ f: A \longrightarrow C$ através de um diagrama.

4.3. A função composta $g \circ f$ é injetiva? Justifica a tua resposta.

5 **Considera as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$.**

5.1. Determina a expressão algébrica da função composta $(g \circ f)(x)$.

5.2. Determina a expressão algébrica da função composta $(f \circ g)(x)$.

5.3. Calcula $(g \circ f)(2)$ e $(f \circ g)(2)$.

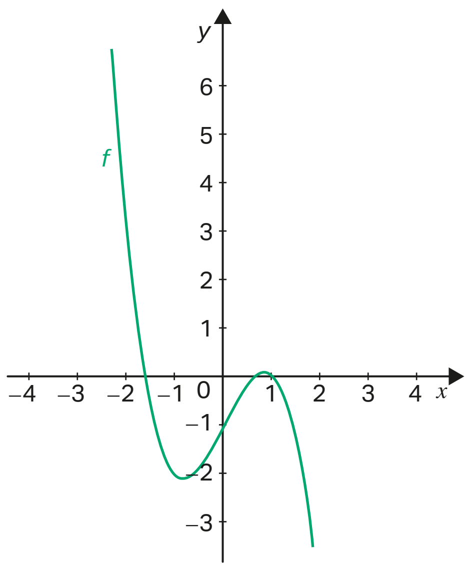
2.2. Funções reais de variável real

2.2.1. Noções sobre funções reais de variável real

Uma função real de variável real é uma função cujo domínio e o conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 12

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = -x^3 + 2x - 1$$



Nem todas as funções têm domínio $\mathbb{R}$, uma vez que nem todas são definidas para todos os números reais. Dependendo da expressão algébrica, certos valores não tornam a expressão válida.

Exemplo 13

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, nesta situação quando $x = 0$ teríamos $f(0) = \dfrac{1}{0}$.

  Mas $\dfrac{1}{0}$ é uma indeterminação, uma vez que não é possível dividir por zero.

  Assim, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

  (x pode assumir qualquer valor real, exceto zero.)

- $g(x)=\sqrt{x}$, nesta situação, por exemplo, quando $x=-1$, teríamos $g(-1)=\sqrt{-1}$.
  Em $\mathbb{R}$, a raiz quadrada só está definida para valores positivos ou nulos, logo, x não pode assumir valores reais negativos.
  Assim, $D_f=\mathbb{R}_0^+$.

Portanto, na determinação de domínios de funções reais de variável real definidas pela respetiva expressão analítica, deve-se ter sempre em atenção as seguintes situações:

- se a variável independente x se encontrar em denominador, é preciso garantir que o denominador é diferente de zero;
- se a variável independente x se encontrar no radicando de um radical com índice par, é preciso garantir que o radicando é maior ou igual a zero;
- em caso de se ter as duas situações em simultâneo, terá de se considerar a conjunção das duas condições.

Exemplo 14

- $f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\geqslant 0\}$
  Como $x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 1$, temos que $D_f=[1,+\infty[$
- $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$ $\quad D_g=\left\{x\in\mathbb{R}: \sqrt{x+4}\neq 0 \wedge x+4\geqslant 0\right\}$
  Como $\sqrt{x+4}\neq 0 \wedge x+4\geqslant 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x+4\neq 0 \wedge x+4\geqslant 0$
  $\Leftrightarrow x\neq -4 \wedge x\geqslant -4$
  $\Leftrightarrow x>-4$
  Logo, $D_g=]-4,+\infty[$

Exercício

11 Determina o domínio das seguintes funções:

11.1. $f(x)=3x-1$

11.2. $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$

11.3. $h(x)=\sqrt{x+2}$

11.4. $i(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-x}$

11.5. $j(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-1}$

11.6. $k(x)=\sqrt[3]{x-1}$

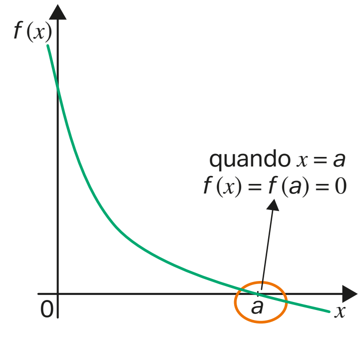
Manual Interativo

Vídeo
Zeros de uma função

Zeros de uma função

Chama-se zero de uma função f a todo o objeto cuja imagem é zero.

O zero de uma função corresponde aos valores de x onde o gráfico corta o eixo dos Ox.

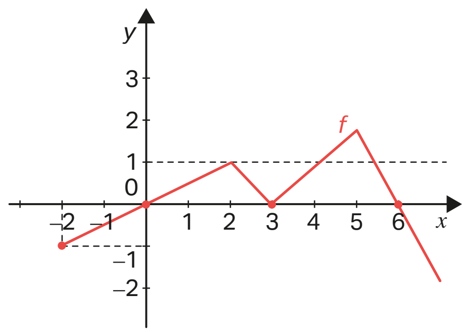


Exemplo 15

A função f representada pelo gráfico ao lado tem três zeros: 0, 3 e 6.

Dada a expressão algébrica de uma função, para determinar os seus zeros, basta igualar a função a zero e resolver a equação resultante.

$$f(x) = 0$$



Exemplo 16

- Dada a função $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

O zero da função é: 1.

- Dada a função $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+4}} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \quad \text{Impossível}$$

A função não tem zeros.

- Dada a função $h(x) = \dfrac{2}{x} - 3x$

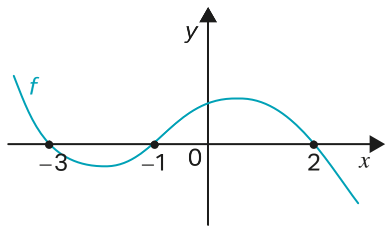
$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{x} - 3x = 0 \wedge x \in D_h \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x} = 3x \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 = 3x \times x \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 = 3x^2 \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 = 2 \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x = \sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \wedge x \neq 0 \end{aligned}$$

Os zeros da função são dois: $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ e $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

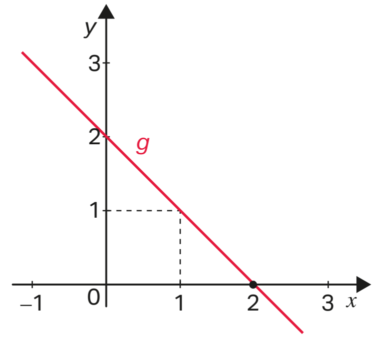
Exercícios

12 Indica os zeros das seguintes funções.

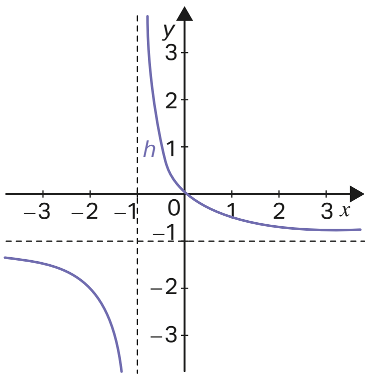
12.1.



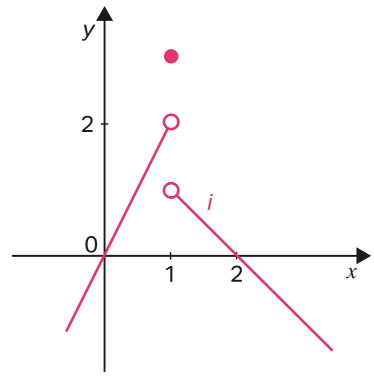
12.2.



12.3.



12.4.



Manual Interativo

Exercício
Identificar graficamente os zeros de uma função

13 Determina os zeros das seguintes funções:

13.1. $f(x) = 3x - 1$

13.2. $g(x) = 2x^2 - 3x$

13.3. $h(x) = \sqrt{x+2}$

13.4. $i(x) = \dfrac{3x+1}{x^2 - x}$

13.5. $j(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-1}$

13.6. $k(x) = \sqrt[3]{x-1}$

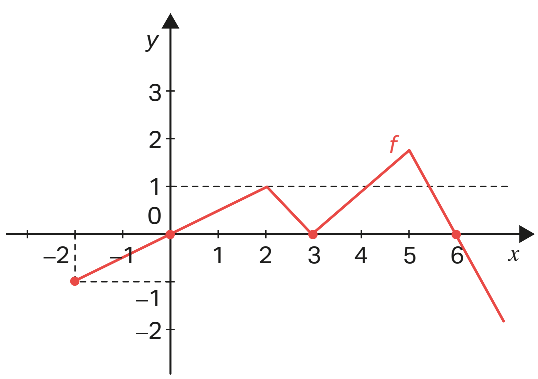
Sinal de uma função

Relativamente a uma função real de variável real f, diz-se:

- positiva em $a \in D_f$ se $f(a) > 0$;
- negativa em $a \in D_f$ se $f(a) < 0$.

A função f representada no gráfico ao lado é:

- positiva em $]0, 3[,]3, 6[$;
- negativa em $[-2, 0[,]6, +\infty[$.



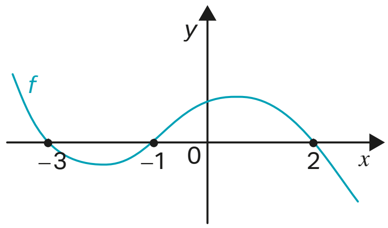
Repara que uma função diz-se:

- positiva, quando o gráfico da função se encontra acima do eixo Ox;
- negativa, quando o gráfico da função se encontra abaixo do eixo Ox.

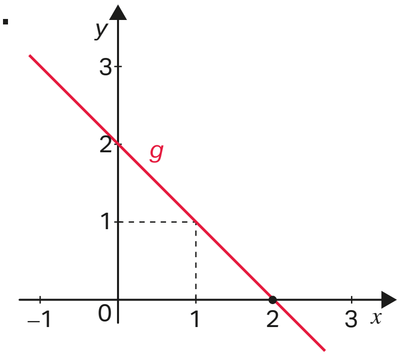
Exercício

14 Indica a variação de sinal das seguintes funções:

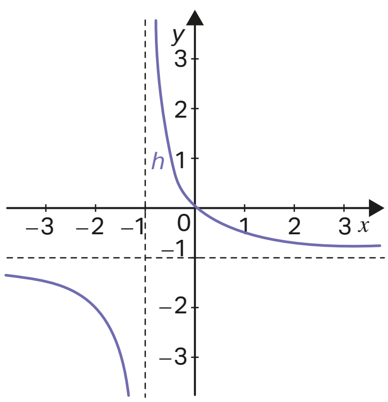
14.1.



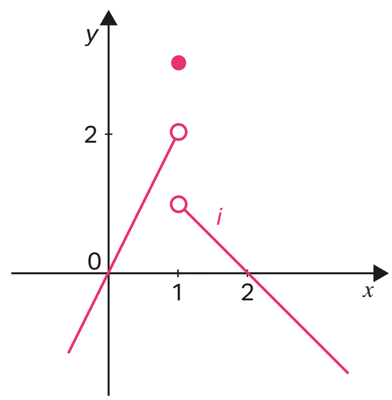
14.2.



14.3.



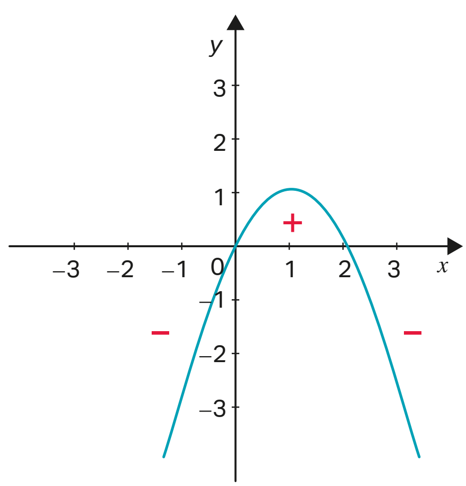
14.4.



Como determinar o sinal de uma função, dada a sua expressão algébrica?

Considera a seguinte função:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = -x^2 + 2x$$



Analisando o gráfico, verificamos que:

$f(0) = 0$

e

$f(2) = 0$

0 e 2 são os zeros da função.

E ainda se pode concluir que:

- $]-\infty\,,\,0[$, a função é negativa;
- $]0\,,\,2[$, a função é positiva;
- $]2\,,\,+\infty[$, a função é negativa.

Para determinar o sinal de uma função é necessário entender o comportamento da sua representação gráfica. É útil estudar os zeros, o domínio e perceber como se comporta a função entre cada intervalo de zeros.

Manual Interativo

Vídeo
Sinal de uma função

Exemplo 17

Dada a função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow g(x) = (x+3)\,(x-2)$$

Zeros da função:

$g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+3)\,(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x+3 = 0 \vee x-2 = 0$

$\Leftrightarrow\; x = -3 \vee x = 2$

-3 e 2 são os zeros da função.

Sinal da função no intervalo entre os zeros

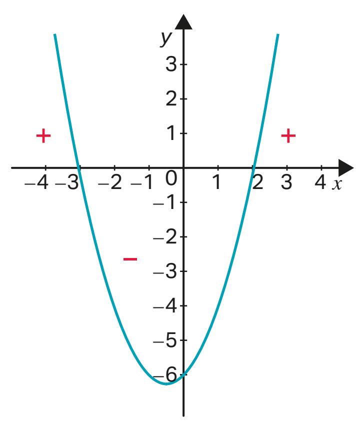
Trata-se de uma função quadrática, representada graficamente por uma parábola.

Podes verificar o sinal da função antes do primeiro zero, entre o primeiro e o segundo zeros e depois do segundo zero:

- $x = -4 \in \,]-\infty\,,\,-3[$ e $g(-4) = (-4+3)\,(-4-2) = -1 \times (-6) = 6 > 0$
  Logo, a função é positiva em $]-\infty\,,\,-3[$.
- $x = 0 \in \,]-3\,,\,2[$ e $g(0) = (0+3)\,(0-2) = 3 \times (-2) = -6 < 0$
  Logo, a função é negativa em $]-3\,,\,2[$.
- $x = 3 \in \,]2\,,\,+\infty[$ e $g(3) = (3+3)\,(3-2) = 6 \times (1) = 6 < 0$
  Logo, a função é positiva em $]2\,,\,+\infty[$.

Podemos construir uma tabela de sinais da função:

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



Exercício

15 Estuda algebricamente o sinal das seguintes funções:

15.1. $f(x) = 3x - 1$

15.2. $g(x) = 2x^2 - 3x$

15.3. $h(x) = \sqrt{x+2}$

15.4. $i(x) = \dfrac{3x+1}{x^2 - x}$

15.5. $j(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-1}$

15.6. $k(x) = \sqrt[3]{x-1}$

2.2.2. Funções definidas por expressões analíticas e propriedades dos seus gráficos

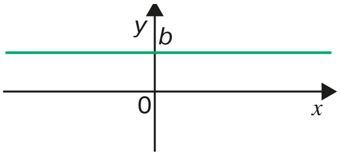
Como já vimos, as funções podem ser definidas através de uma expressão analítica, que define a lei que transforma os objetos, x, nas imagens, y.

Vamos, seguidamente, estudar algumas funções reais de variável real e as suas expressões analíticas.

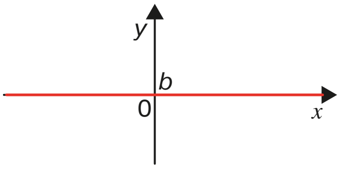
Função constante

A expressão algébrica de uma função constante é do tipo $\boldsymbol{f(x) = b}$.

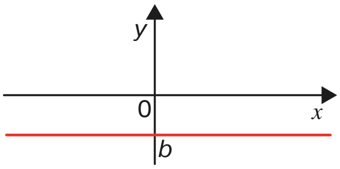
- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = \{b\}$



Repara que, para qualquer valor de x, a função faz corresponder sempre o mesmo valor de y, que será b.

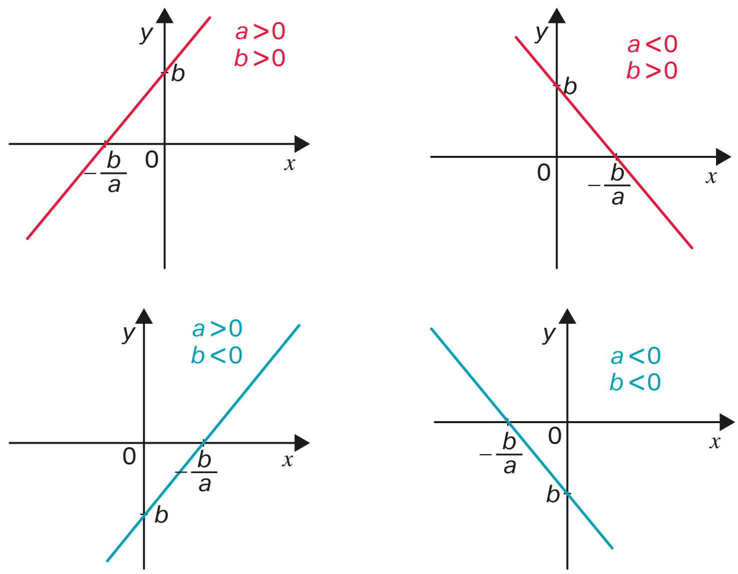


- Zeros:
  - Nenhum, se $b \neq 0$.
  - Todos os números reais, se $b = 0$.
- Sinal:
  - Se $b < 0$, negativa em todo o seu domínio.
  - Se $b > 0$, positiva em todo o seu domínio.



Função afim

A expressão algébrica de uma função afim é do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$. A sua representação gráfica é uma reta não vertical.



- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = \mathbb{R}$
- Zeros: $-\dfrac{b}{a}$

$$f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$$

- Sinal:

Se $a < 0$

- Positiva em $\left]-\infty, -\dfrac{b}{a}\right[$
- Negativa em $\left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$

Se $a > 0$

- Negativa em $\left]-\infty, -\dfrac{b}{a}\right[$
- Positiva em $\left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$

Função quadrática

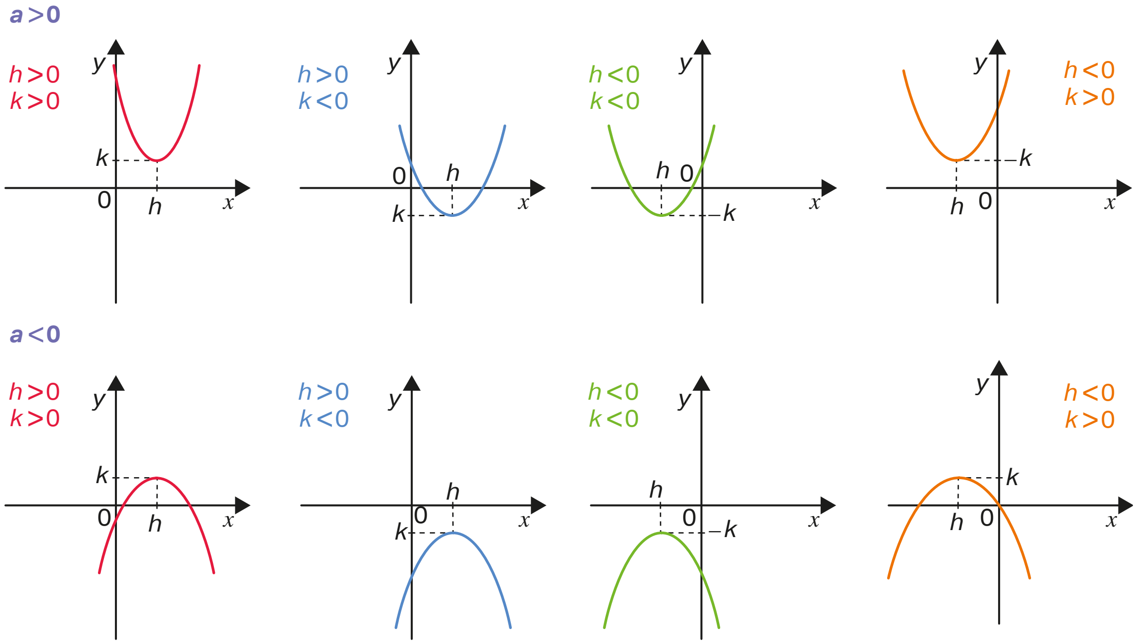
Uma função quadrática é uma função real de variável real definida por um polinómio do 2.º grau, do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que tem um vértice, digamos, de coordenadas (h, k).

$$D_f = \mathbb{R}$$

- Contradomínio:
  - $D'_f = \left[f\left(-\dfrac{b}{2a}\right), +\infty\right[$, se $a > 0$
  - $D'_f = \left]-\infty, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right]$, se $a < 0$

- A função pode ter 0, 1 ou 2 zeros.
- Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$



Dado o gráfico da função quadrática, como determinar a sua expressão algébrica?

Para determinar a expressão algébrica que define uma função quadrática, precisamos de conhecer três pontos da função para determinar os valores de a, b e c.

Exemplo 18

Sabendo que a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ passa nos pontos de coordenadas $(2, 2)$, $(-2, 2)$ e $(0, 1)$:

Para cada ponto, substituir pelos valores das coordenadas dos pontos:

- $f(0)=1 \Leftrightarrow a.0^2+b.0+c=1 \Leftrightarrow c=1$
  Sabemos que $c=1$
- $f(-2)=2 \Leftrightarrow a(-2)^2+b(-2)+c=2$
  Como $c=1$
  $\Leftrightarrow 4a-2b+1=2 \Leftrightarrow 4a-2b=1$
- $f(2)=2 \Leftrightarrow a2^2+b2+c=2$
  Como $c=1$
  $\Leftrightarrow 4a+2b+1=2 \Leftrightarrow 4a+2b=1$

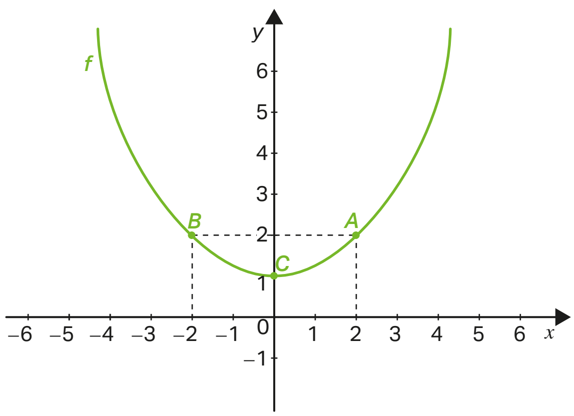
Agora resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4a-2b=1 \\ 4a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b=1 \\ 2b=-4a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b=1 \\ b=-2a+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2\left(-2a+\frac{1}{2}\right)=1 \\ b=-2a+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4a-1=1 \\ b=-2a+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a=2 \\ b=-2a+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-2a+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-2.\frac{1}{4}+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=0 \end{cases}$$

Assim, $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$.



Manual Interativo

Vídeo
Funções módulo

Função módulo

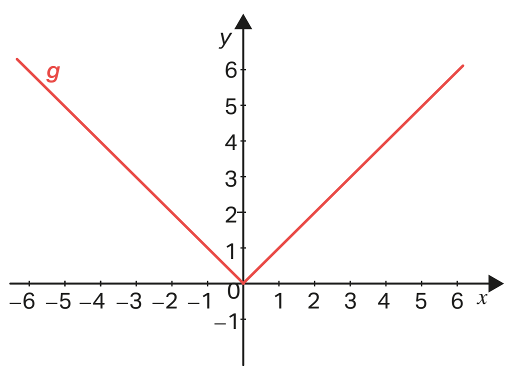
A função módulo é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada número real faz corresponder o seu valor absoluto.

Assim, sabemos que:

- Se $x \geqslant 0$, $|x| = x$
- Se $x < 0$, $|x| = -x$

Podemos definir a função módulo por ramos:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$



- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = \mathbb{R}_0^+$
- Zeros: 0
- Sinal: positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Funções definidas por ramos

Uma função diz-se definida por ramos quando é definida por diferentes expressões analíticas em diferentes partes do seu domínio.

Vejamos alguns exemplos.

Manual Interativo

Vídeo
Funções definidas por ramos

Exemplo 19

Considera a seguinte função definida por ramos:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{se} \quad x<1\\ 3 & \text{se} \quad x=1\\ -x+2 & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

O seu domínio é $\mathbb{R}$.

Mas, para diferentes partes do domínio, a expressão algébrica que atribui a imagem a cada objeto é distinta. Vejamos, por exemplo:

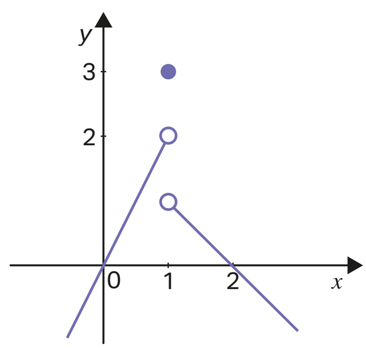
$f(-1)=2\times(-1)=-2$ $\qquad$ $f(0)=2\times 0=0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$ $\qquad$ $f(1)=3$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $f(2)=-2+2=0$

Para representar graficamente a função f é necessário seguir as expressões que definem a função em cada uma das partes do seu domínio. Assim:

- $x<1$, representa-se parte da reta $y=2x$;
- $x=1$, representa-se o ponto $(1\,,\,3)$;
- $x>1$, representa-se parte da reta $y=-x+2$.



A função $f(x)$ tem zeros em $x=0$ e $x=2$.

Vejamos:

$(2x=0 \wedge x<1) \vee (-x+2=0 \wedge x>1)$

$(x=0 \wedge x<1) \vee (x=2 \wedge x>1)$

$x=0 \vee x=2$

No que diz respeito à variação de sinal da função, pode dizer-se que:

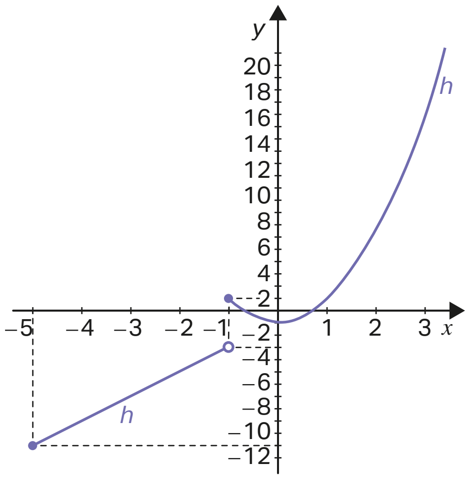
- f é positiva em $]0\,,\,2[$;
- f é positiva em $]-\infty\,,\,0[$ e em $]2\,,\,+\infty[$.

O seu contradomínio é dado por: $D'_f=]-\infty\,,\,2[\,\cup\,\{3\}$.

Exemplo 20

Considerando a função h apresentada no referencial cartesiano ao lado, dado por:

$$h(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{se} \quad x\geqslant -1 \\ 2x-1 & \text{se} \quad -5\leqslant x<-1 \end{cases}$$



podemos dizer que:

$D_h=[-5\,,+\infty[$

$D'_h=[-11\,,-3[\,\cup\,[-1\,,+\infty[$

Zeros são $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, uma vez que:

$$(2x-1=0 \wedge -5\leqslant x<-1)\vee\left(2x^2-1=0\wedge x\geqslant -1\right)$$

$$\Leftrightarrow (2x=1\wedge -5\leqslant x<-1)\vee\left(2x^2=1\wedge x\geqslant -1\right).$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x=\frac{1}{2}\wedge -5\leqslant x<-1\right)}_{\text{impossível}}\vee\left(x^2=\frac{1}{2}\wedge x\geqslant -1\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\wedge x\geqslant -1$$

$$\Leftrightarrow \left(x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge x=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\wedge x\geqslant -1$$

Manual Interativo

Vídeo
Gráfico de funções definidas por ramos

Exercícios

16 **Considera a seguinte função definida por ramos:**

$$f(x)=\begin{cases} -x-4 & \text{se} \quad x<3 \\ x^2-7 & \text{se} \quad 3\leqslant x\leqslant 4 \\ 2x & \text{se} \quad x>4 \end{cases}$$

16.1. Determina:

a) $f(2)$ **b)** $f(5)$

c) $f(10)$ **d)** $f(3)$

16.2. A função tem zeros? Quais?

16.3. Faz um esboço da representação gráfica da função.

16.4. Indica o domínio e contradomínio da função.

16.5. A função é bijetiva? Justifica.

Manual Interativo

Exercícios
Interpretar gráficos de funções definidas por ramos

Determinar o contradomínio de uma função módulo

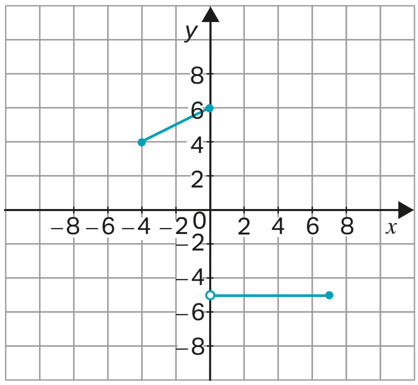
Determinar a expressão analítica de uma função definida por ramos

17 **Considera a seguinte função definida por ramos:**

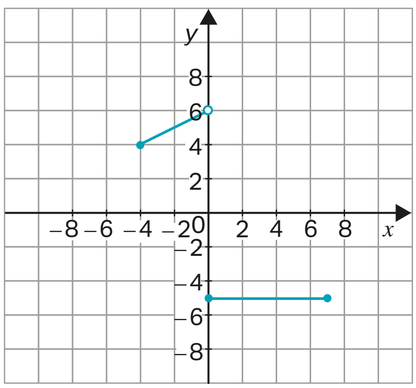
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+6 & \text{se} \quad -4\leqslant x<0\\ -5 & \text{se} \quad 0\leqslant x\leqslant 7\end{cases}$$

17.1. Qual dos seguintes gráficos corresponde à representação gráfica da função?

(A)



(B)



17.2. Qual é o domínio da função?

17.3. Qual é o contradomínio da função?

18 **Considera a função f definida por ramos da seguinte forma:**

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{se} \quad x<0\\ 2x+1 & \text{se} \quad 0\leqslant x\leqslant 3\\ 5 & \text{se} \quad x>3\end{cases}$$

18.1. Determina o valor de $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ e $f(4)$.

18.2. Determina os zeros da função.

18.3. Esboça o gráfico da função f.

18.4. Indica o domínio e o contradomínio da função.

2.2.3. Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares

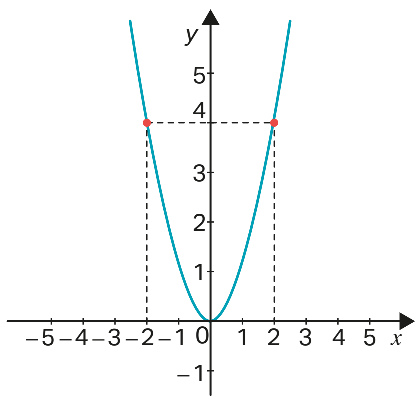
Manual Interativo

Exercício
Identificar a paridade e a injetividade de uma função

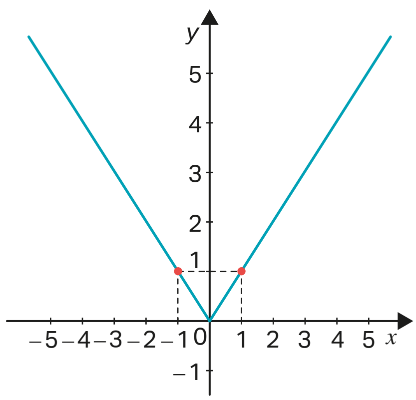
Exercício

19 Observa os seguintes gráficos e completa a tabela, indicando as imagens dos objetos sugeridos na primeira coluna.

$f(x) = x^2$



$g(x) = |x|$



x	$f(x) = x^2$	$g(x) = \lvert x \rvert$
1		
-1		
2		
-2		
$\frac{1}{2}$		
$-\frac{1}{2}$		
x		
$-x$		

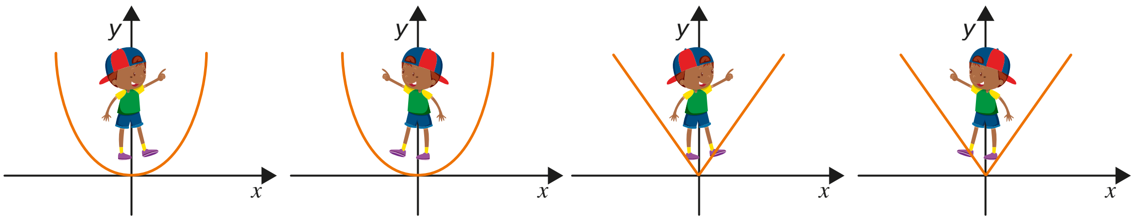
Repara que na função f temos que $f(x) = x^2$ e $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

Portanto, $f(x) = f(-x)$.

De igual forma, na função g, temos que $g(x) = |x| = x$ e $g(-x) = |-x| = x$.

Logo, também $g(x) = g(-x)$.

Se fosse possível posicionares-te sobre o eixo Oy e olhasses para a esquerda e depois para a direita, visualizarias a mesma imagem (valor de y).



O eixo Oy é eixo de simetria destas funções, funciona como um espelho.

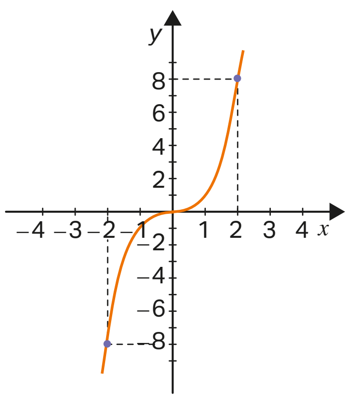
As funções f e g são simétricas em relação ao eixo Oy.

Dizemos que as funções são pares.

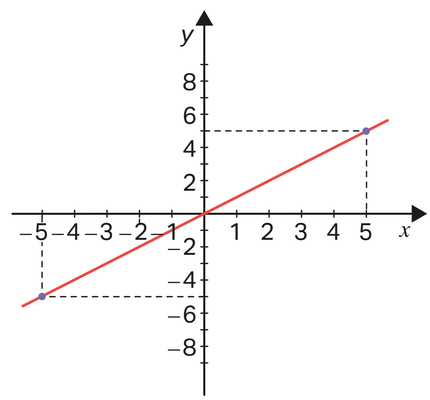
Exercício

20 **Observa os seguintes gráficos e completa a tabela, indicando as imagens dos objetos sugeridas na primeira coluna.**

$h(x) = x^3$



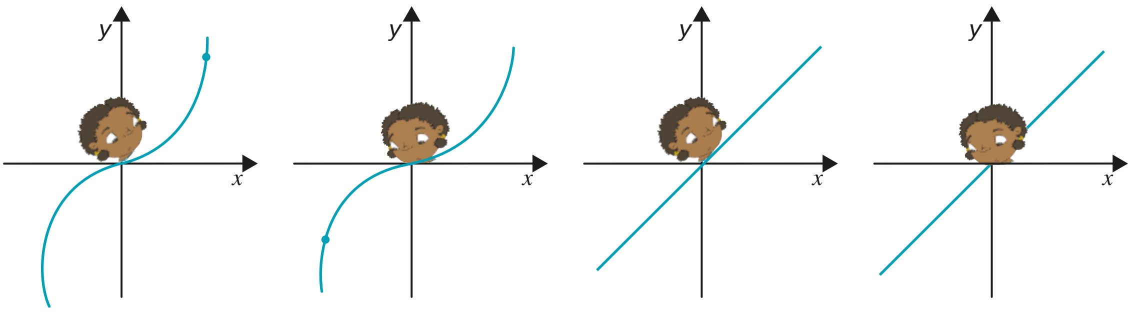
$j(x) = x$



x	$h(x) = x^3$	$j(x) = x$
1		
-1		
2		
-2		
$\frac{1}{2}$		
$-\frac{1}{2}$		
x		
$-x$		

Repara que na função h temos que $h(x) = x^3$.
Logo, $-h(x) = -x^3$ e $h(-x) = (-x)^3 = -x^3$.
Portanto, $h(-x) = -h(x)$.
De igual forma, na função j, temos que $j(x) = x$, logo $-j(x) = -x$ e $j(-x) = -x$.
Logo, também $j(-x) = -j(x)$.

Agora, a simetria não é em relação ao eixo Oy. A simetria é em relação à origem.



As funções h e j são simétricas em relação à origem.
Dizemos que as funções são ímpares.

Concluímos que:

- Uma função real de variável real f diz-se **par** se e só se $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.
  f é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico.
- Uma função real de variável real f diz-se **ímpar** se e só se $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.
  f é ímpar se e somente se o respetivo gráfico for simétrico relativamente à origem O do referencial.

Manual Interativo

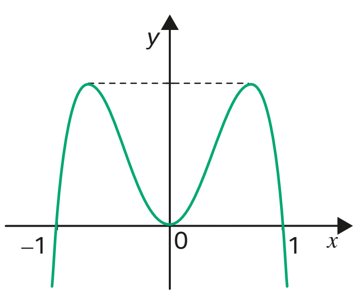
Vídeos
Função par

Função ímpar

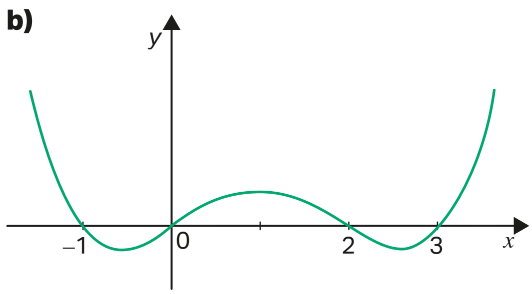
Exercício

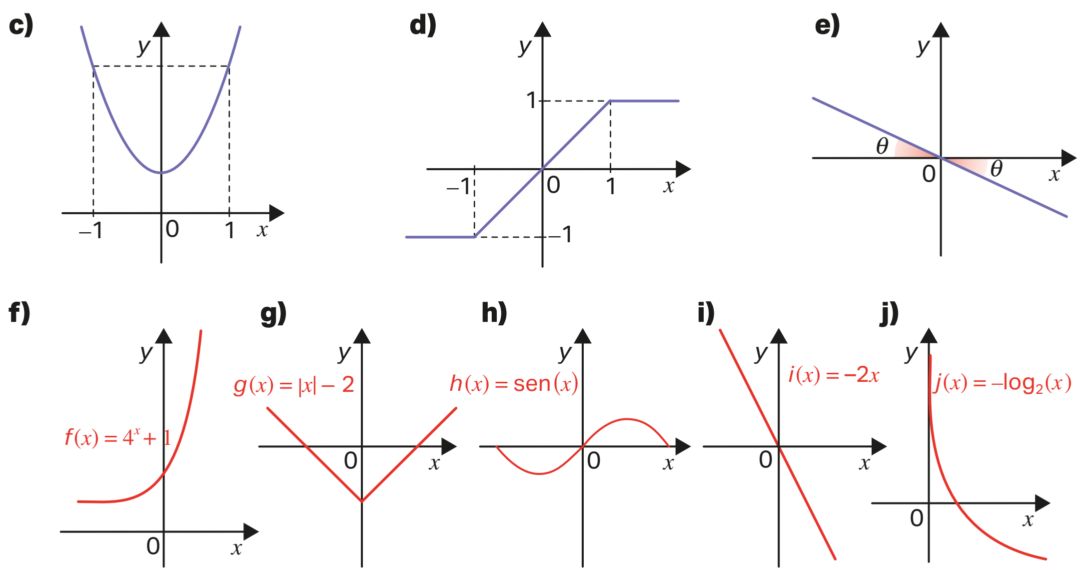
21 **Relativamente às seguintes representações gráficas, indica aquelas que correspondem a funções pares, as que correspondem a funções ímpares e aquelas que não são pares nem ímpares.**

a)



b)





Manual Interativo

Exercício
Caracterizar uma função ímpar

Exemplo 21

- **$f(x) = x^2 + 3$ é uma função par, pois:**
  $f(x) = x^2 + 3$ e $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3$
  $f(x) = f(-x)$, logo a função é par.

- **$g(x) = \dfrac{1}{x}$ é uma função ímpar, pois:**
  $-g(x) = -\dfrac{1}{x}$ e $g(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$
  $-g(x) = g(-x)$, logo a função é ímpar.

- **$h(x) = x + 1$** não é par nem ímpar, pois:
  $h(x) = x + 1$ e $h(-x) = -x + 1$, logo, $h(x)$ **não é par**;
  $-h(x) = -(x + 1) = -x - 1$ e $h(-x) = -x + 1$, logo $h(x)$ **não é ímpar.**

Exercício

22 Estuda a paridade das seguintes funções definidas pelas expressões algébricas.

22.1. $f(x) = x^4$

22.2. $g(x) = x^3 + 2$

22.3. $h(x) = |x + 2|$

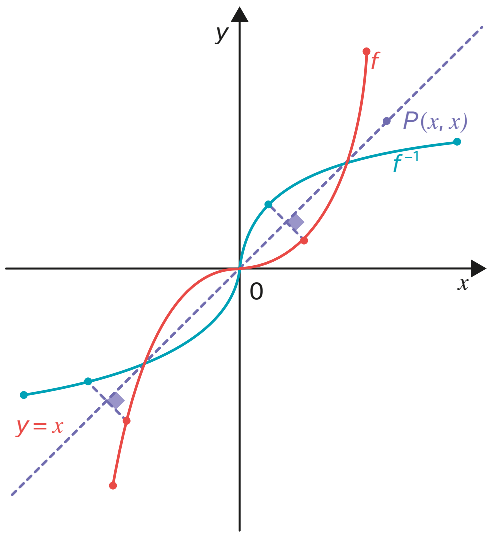
22.4. $j(x) = \dfrac{1}{x^2}$

2.2.4. Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa

Considera a função $f(x) = x^3$.

A função inversa de f é definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

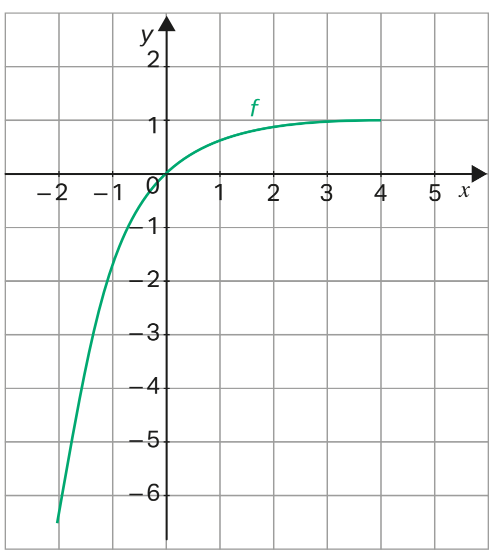
Ambas as funções estão representadas no seguinte referencial cartesiano:



Ao compararmos os **gráficos de duas funções inversas**, podemos concluir que a reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares, é o eixo de simetria entre os dois gráficos. Isto ocorre porque se (a, b) é ponto de G_f, então (b, a) é ponto de $G_{f^{-1}}$.

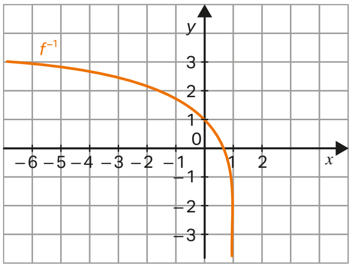
Exercício

23 **Considera a seguinte função bijetiva:**

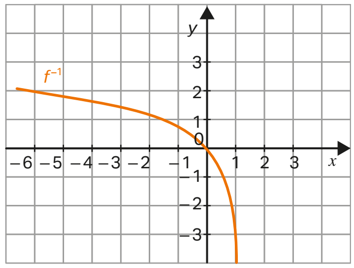


Qual dos gráficos corresponde à representação da sua função inversa?

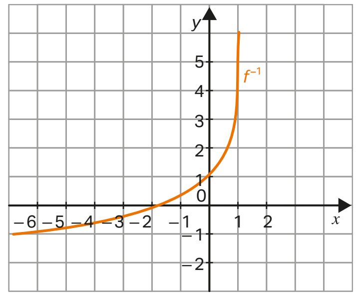
(A)



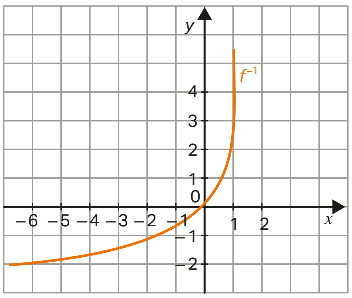
(B)



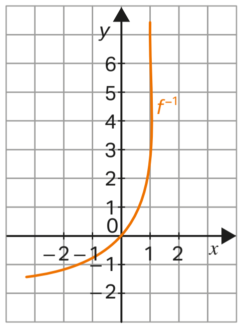
(C)



(D)

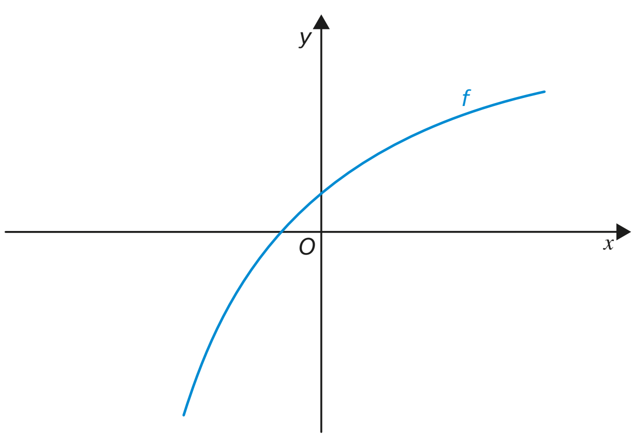


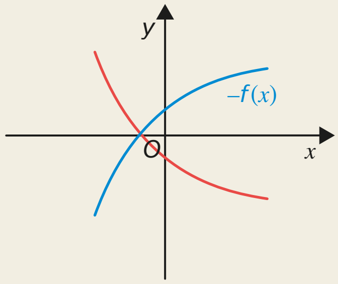
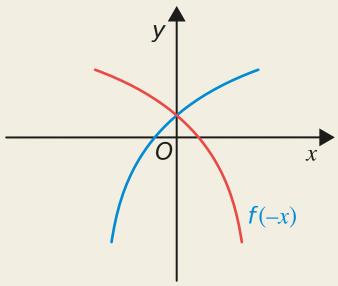
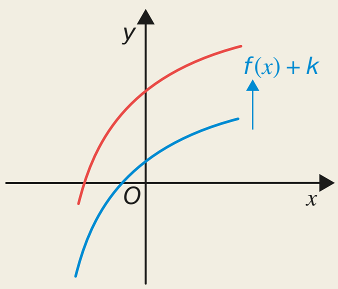
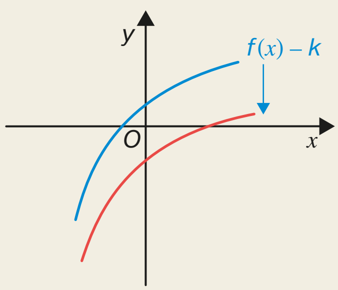
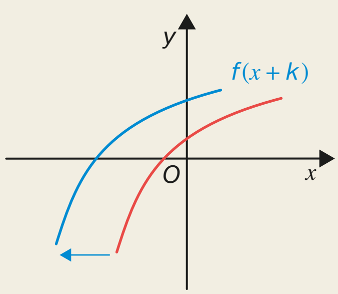
(E)



2.2.5. Transformações geométricas do gráfico de uma função f e os gráficos das funções $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=af(x)$, $y=f(ax)$ e $y=|f(x)|$, sendo a um número real, não nulo

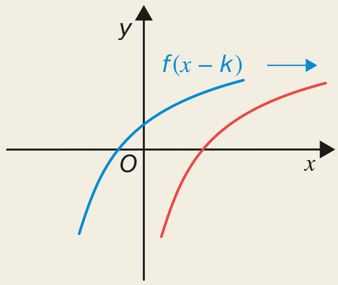
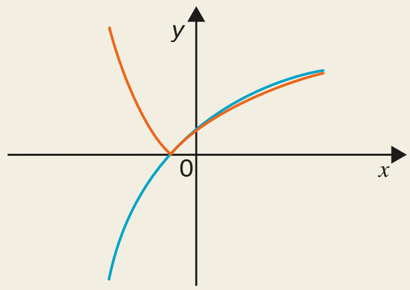
Seja f uma função real de variável real e k um número real positivo. Supõe que a seguir se representa o gráfico de f. Vamos ver que funções resultam de algumas transformações a este gráfico.



	Transformação geométrica do gráfico	**Descrição do efeito sobre o gráfico de f**
$-f(x)$		Reflexão em relação ao eixo Ox .
$f(-x)$		Reflexão em relação ao eixo Oy .
$f(x)+k$		O gráfico desloca-se k unidades para cima.
$f(x)-k$		O gráfico desloca-se k unidades para baixo.
$f(x+k)$		O gráfico desloca-se k unidades para a esquerda.

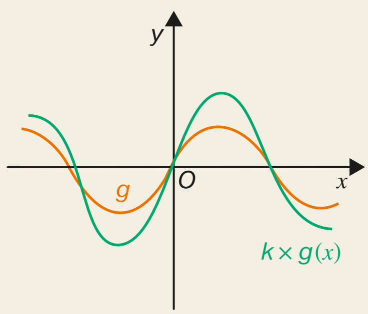
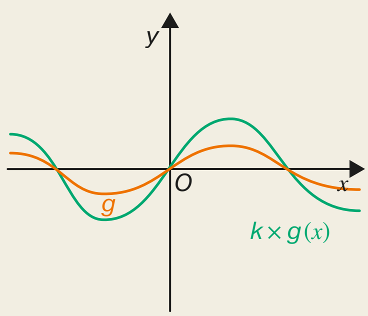
Manual Interativo

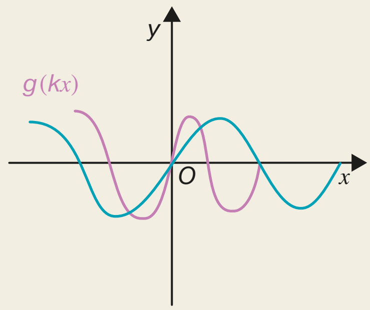
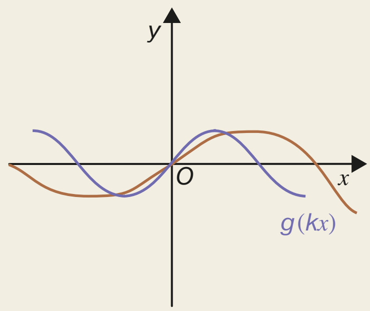
Vídeo
Transformações de funções

	Transformação geométrica do gráfico	**Descrição do efeito sobre o gráfico de f**
$f(x-k)$		O gráfico desloca-se k unidades para a direita.
$\lvert f(x)\rvert$		A parte negativa do gráfico faz simetria em relação ao eixo Ox.

Vejamos outro exemplo.

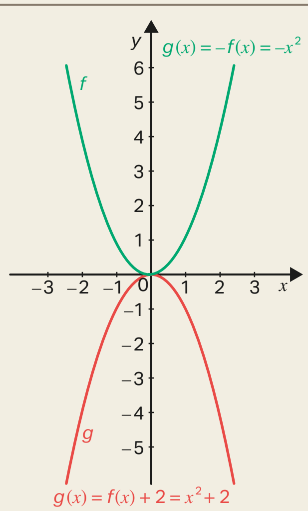
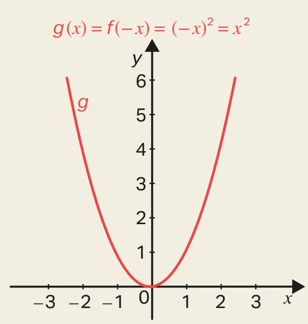
Considera, agora, uma função g e um número real positivo k.

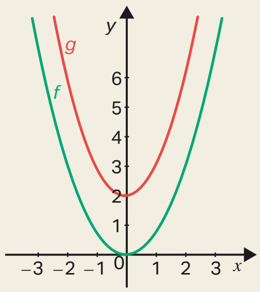
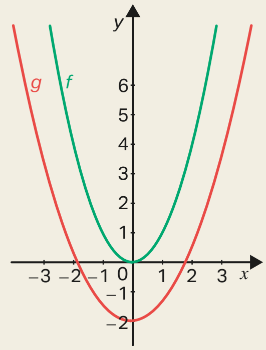
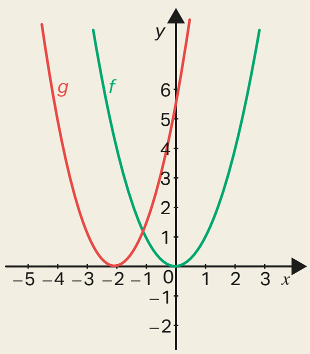
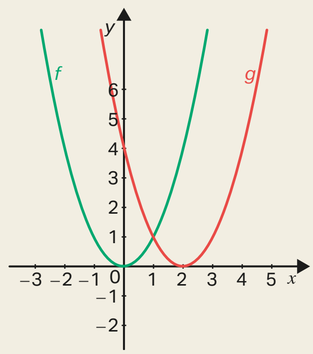
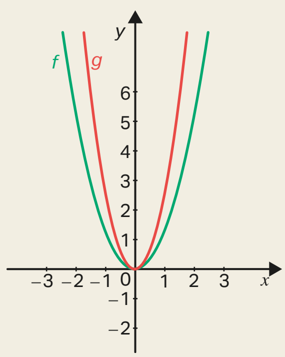
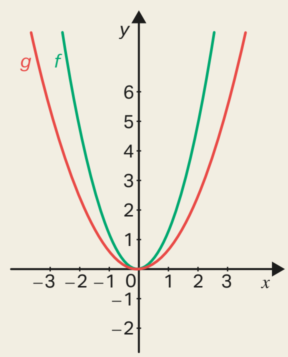
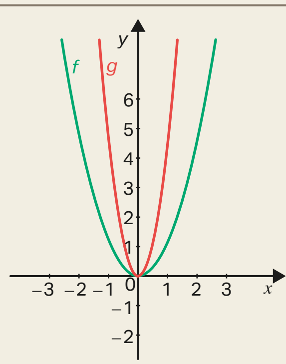
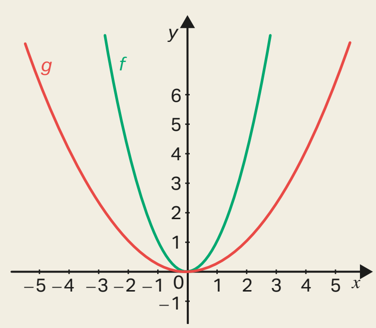
	Transformação geométrica do gráfico	**Descrição do efeito sobre o gráfico de f**
Se $k>1$ $k\times g(x)$		Dilatação vertical de coeficiente k.
Se $0<k<1$ $k\times g(x)$		Contração vertical de coeficiente k.

	Transformação geométrica do gráfico	Descrição do efeito sobre o gráfico de f
Se $k > 1$ $g(kx)$		Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.
Se $0 < k < 1$ $g(kx)$		Dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.

Exemplo 22

Considerando a função definida por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, temos:

$\boldsymbol{g(x) = -f(x) = -x^2}$	$\boldsymbol{g(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2}$
	

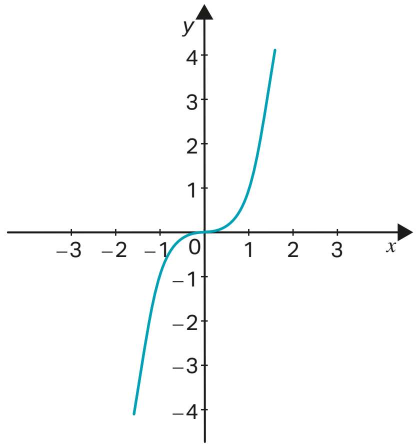
$g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$	$g(x) = f(x) - 2 = x^2 - 2$
	
$g(x) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$	$g(x) = f(x-2) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
	
$g(x) = 2f(x) = 2x^2$	$g(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}x^2$
	
$g(x) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$	$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$
	

Manual Interativo

Atividade
Transformações de gráficos de funções

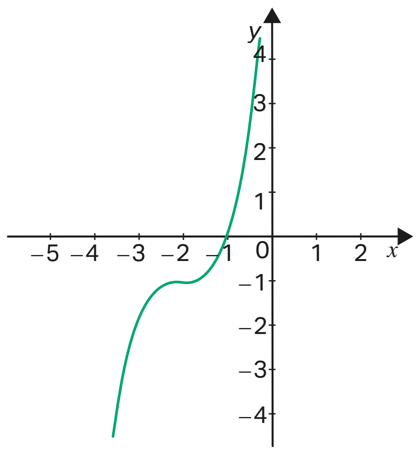
Exercício

24 Considera a função $f(x) = x^3$.



Aplicando duas transformações geométricas à função $f(x)$, obteve-se o gráfico abaixo.

Descreve as transformações e indica a expressão algébrica da função.



25 Considera a função módulo, definida por $h(x) = |x|$.

Traça representações gráficas de cada uma das funções.

25.1. $h(x+2)$

25.2. $h(x-3)$

25.3. $h(x)+1$

25.4. $h(x)-1$

25.5. $h(2x)$

25.6. $2h(x)$

25.7. $-h(x)$

25.8. $h(-x)$

Síntese

Determinar o **domínio** de uma função real de variável real:

- se a variável independente se encontrar em denominador, deve-se garantir que o denominador é diferente de zero;
- se a variável independente se encontrar no radicando de um radical com índice par, deve-se garantir que o radicando é maior ou igual a zero.

Zeros de uma função: $x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$

O zero de uma função corresponde aos valores de x onde o gráfico corta o eixo dos Ox.

Sinal de uma função

Uma função real de variável real f diz-se:

- positiva em $a \in D_f$ se $f(a) > 0$
(o gráfico da função encontra-se acima do eixo Ox);
- negativa em $a \in D_f$ se $f(a) < 0$
(o gráfico da função encontra-se abaixo do eixo Ox).

Função módulo $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Funções definidas por ramos

Uma função f diz-se definida por ramos quando é definida por diversas expressões analíticas em diferentes partes distintas do seu domínio.

Paridade de uma função

- Uma função real de variável real f diz-se **par** se e só se:

$$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \quad \text{e} \quad f(-x) = f(x)$$

  f é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico.

- Uma função real de variável real f diz-se **ímpar** se e só se:

$$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \quad \text{e} \quad f(-x) = -f(x)$$

  f é ímpar se e somente se o respetivo gráfico for simétrico relativamente à origem O do referencial.

Síntese

Sendo f uma função real de variável real e $k \in \mathbb{R}^+$, as transformações ao gráfico de f resultam em funções com as seguintes expressões algébricas

Subir o gráfico k casas	$f(x)+k$
Descer o gráfico k casas	$f(x)-k$
Deslocar o gráfico para a direita k casas	$f(x-k)$
Deslocar o gráfico para a esquerda k casas	$f(x+k)$
Fazer simetria em relação ao eixo Ox	$-f(x)$
Fazer simetria em relação ao eixo Oy	$f(-x)$
Fazer simetria da parte negativa do gráfico em relação ao eixo Ox	$\|f(x)\|$
Dilatar, na vertical, com coeficiente k	$k \times f(x)$ (com $k>1$)
Contrair, na vertical, com coeficiente k	$k \times f(x)$ (com $0<k<1$)
Dilatar, na horizontal, com coeficiente $\frac{1}{k}$	$f(kx)$ (com $k>1$)
Contrair, na horizontal, com coeficiente $\frac{1}{k}$	$f(kx)$ (com $0<k<1$)

Para aplicar

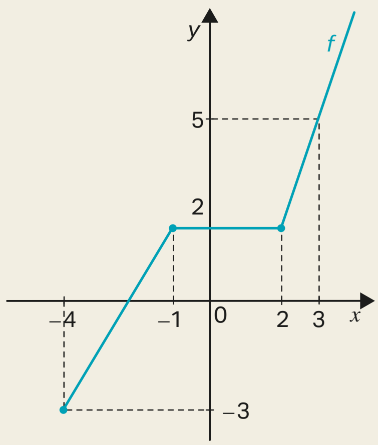
1 Seja $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se} \quad -2<x<0\\ 3x-4 & \text{se} \quad 0<x<5\end{cases}$

1.1. Indica o domínio de f.

1.2. A função f tem zeros? Quais?

1.3. Estuda o sinal da função.

2 **Considera a função representada graficamente no referencial cartesiano.**



2.1. Indica o domínio da função.

2.2. Indica o contradomínio da função.

2.3. Define a função por ramos.

2.4. Determina o zero da função.

3 **Considera a função** $f(x)=(x-1)^2$.

3.1. Qual é o domínio da função?

3.2. Qual é o contradomínio da função?

3.3. Quais são os zeros da função?

3.4. Estuda o sinal da função.

3.5. A função é par? Justifica.

3.6. Determina a expressão algébrica da função definida por $g(x)=f(x)+f(-x)$.

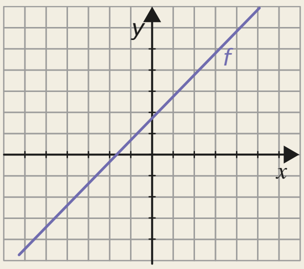
3.7. Verifica a paridade da função $g(x)$.

4 **Estuda a função** $f(x)=2x^2-2$, **referindo:**

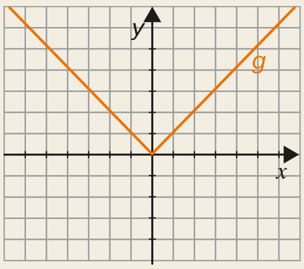
- Domínio
- Contradomínio
- Zeros
- Sinal
- Paridade

5 Classifica as seguintes funções quanto à sua paridade (par, ímpar ou sem paridade):

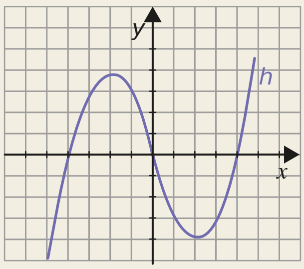
a)



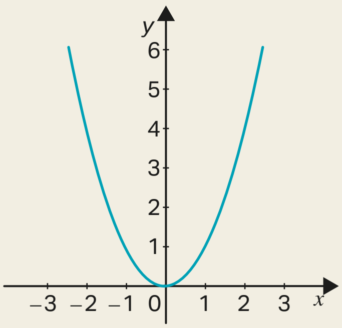
b)



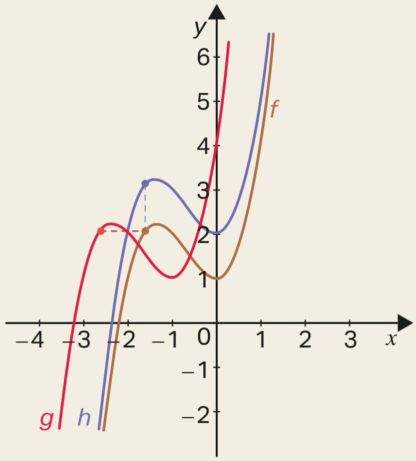
c)

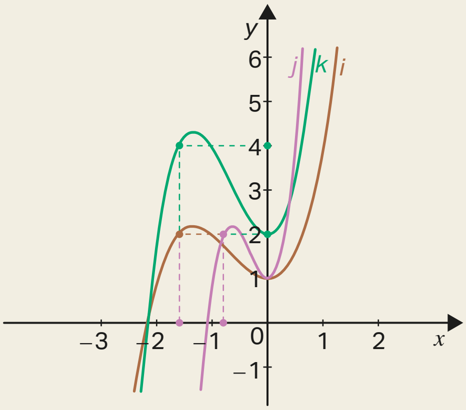


6 Dado que a seguinte representação corresponde à representação gráfica de $f(x) = x^2$, esboça o gráfico da função $g(x) = (x - 3)^2 + 1$.



7 Considera as funções representadas nos seguintes referenciais cartesianos.





A partir das representações gráficas das funções f e i, determina as expressões algébricas que podem definir as restantes funções.

2.3. Monotonia, extremos e concavidade

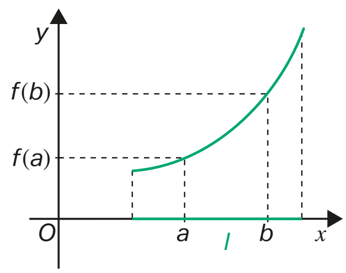
Manual Interativo

Atividade
Monotonia de funções afins

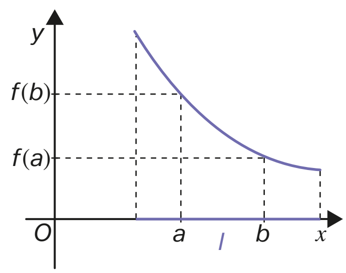
2.3.1. Intervalos de monotonia

A monotonia de uma função descreve o comportamento de crescimento ou decrescimento dessa função no seu domínio. Ou seja, indica se a função cresce, diminui ou se mantém um valor constante num determinado intervalo. Assim:

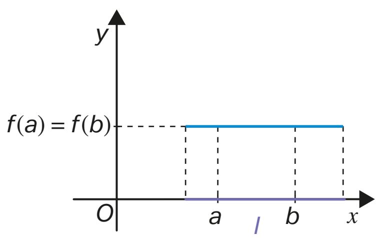
- Dizemos que uma função f é **crescente** num intervalo I se:
  $\forall a,\ b \in I,\ a < b \implies f(a) \leqslant f(b)$
  Se a desigualdade for estrita, ou seja, $f(a) < f(b)$, a função diz-se **estritamente crescente**.



- Dizemos que uma função f é **decrescente** num intervalo I se:
  $\forall a,\ b \in I,\ a < b \implies f(a) \geqslant f(b)$
  Se a desigualdade for estrita, ou seja, $f(a) > f(b)$, a função diz-se **estritamente decrescente**.



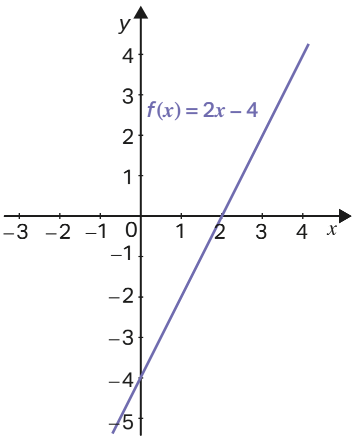
- Dizemos que uma função f é **constante** num intervalo I se:
  $\forall a,\ b \in I,\ a < b \implies f(a) = f(b)$

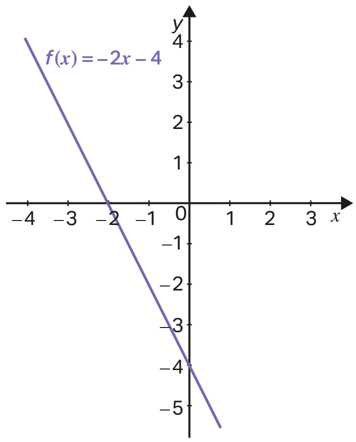


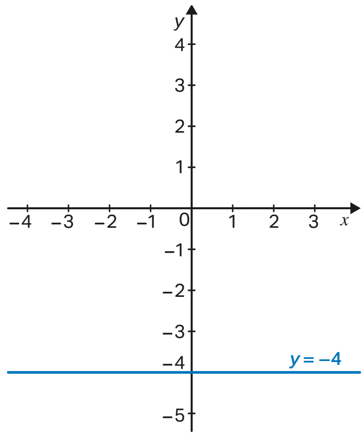
Caso da função afim

Considera uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, a e $b \in \mathbb{R}$.

- Se $a > 0$, a função é crescente em todo o seu domínio.
- Se $a < 0$, a função é decrescente em todo o seu domínio.
- Se $a = 0$, a função é constante em todo o seu domínio.







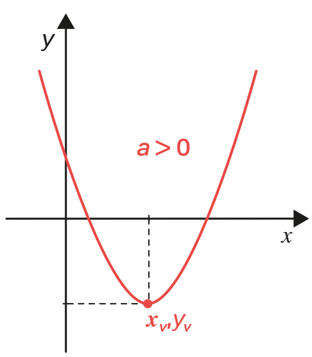
Manual Interativo

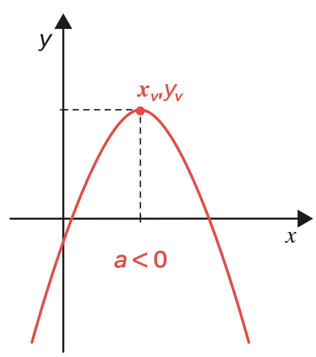
Atividade
Monotonia de funções quadráticas

Caso da função quadrática

Considera uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, com vértice (x_V, y_V).

- Se $a > 0$
  - **Decrescente em** $]-\infty, x_V]$
  - **Crescente em** $[x_V, +\infty[$
- Se $a < 0$
  - **Crescente em** $]-\infty, x_V]$
  - **Decrescente em** $[x_V, +\infty[$

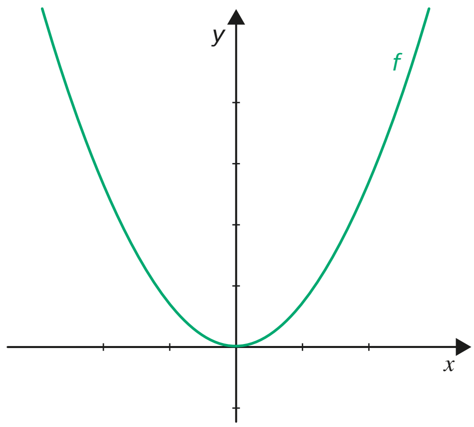




Exemplo 23

Para a função $f(x) = x^2$, cujo vértice é a origem:

- a função é decrescente em $]-\infty, 0]$, pois $f(x)$ diminui conforme x aumenta;
- a função é crescente em $[0, +\infty[$, pois $f(x)$ aumenta conforme x aumenta.

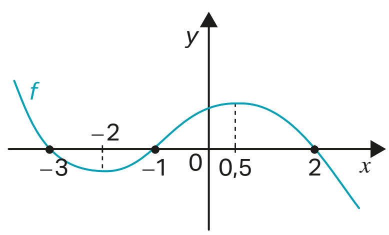


$V(0, 0)$

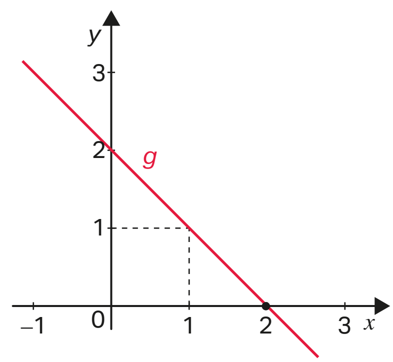
Exercício

26 Descreve a monotonia das seguintes funções:

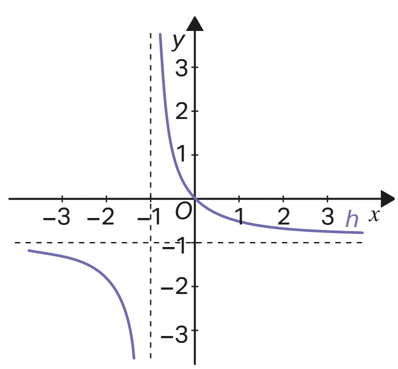
26.1.



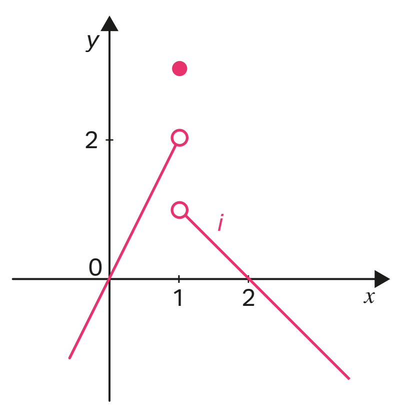
26.2.



26.3.

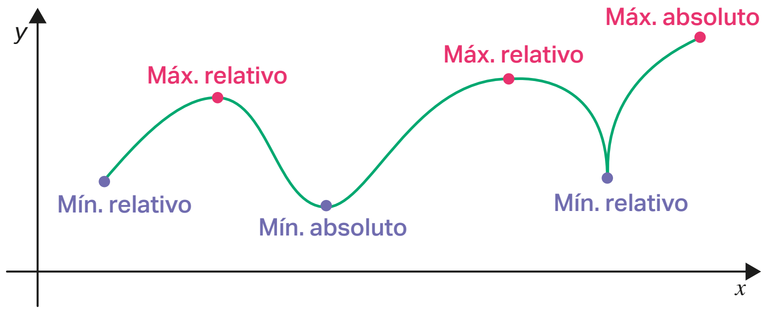


26.4.



2.3.2. Extremos relativos e absolutos

Extremos relativos e absolutos referem-se aos pontos em que uma função atinge valores máximos ou mínimos num intervalo.



Manual Interativo

Vídeo
Estudo da monotonia e extremos de uma função

Dada uma função real de variável real f e um valor $f(a)$ do contradomínio de f, diz--se que:

- $f(a)$ é um máximo absoluto de f se $\forall x \in D_f,\ f(a) \geqslant f(x)$.
  Ou seja, $f(a)$ é o valor mais alto que a função atinge;
- $f(a)$ é um mínimo absoluto de f se $\forall x \in D_f,\ f(a) \leqslant f(x)$.
  Ou seja, $f(a)$ é o valor mais baixo que a função atinge.

Para além dos máximos e mínimos absolutos, podemos ter máximos e mínimos relativos.

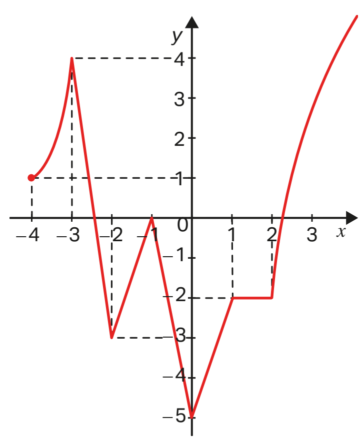
Assim:

- num máximo relativo de $f(a)$, o valor de $f(a)$ é maior ou igual a todos os valores de $f(x)$ em torno de a;
- num mínimo relativo de $f(a)$, o valor de $f(a)$ é menor ou igual a todos os valores de $f(x)$ em torno de a.

Exemplo 24

Considera a função representada no referencial cartesiano ao lado.

- Em $x=0$, a função atinge o mínimo absoluto, que é $f(0)=-5$.
- O contradomínio da função é $[-5, +\infty[$, por isso, a função não admite máximo absoluto.



Nos intervalos onde a função é constante, considera-se atingir máximos e mínimos relativos.

Os extremos absolutos também se consideram extremos relativos.

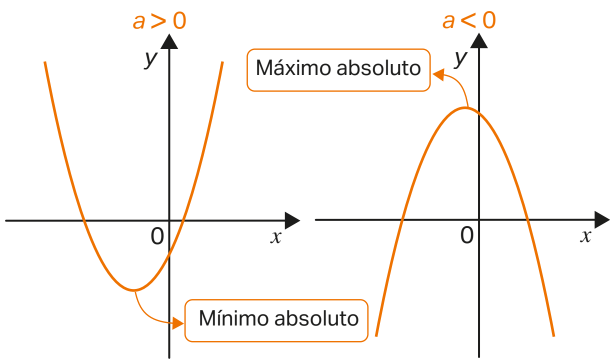
Assim:

- a função admite os seguintes máximos relativos: 4, 0 e -2;
- a função admite os seguintes mínimos relativos: 1, -3, -5, -2.

Caso das funções quadráticas

Considera uma função quadrática dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

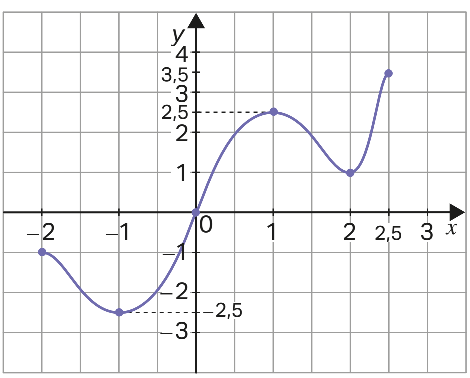
- Se $a>0$, a função tem um mínimo absoluto que corresponde à ordenada do vértice da função.
- Se $a<0$, a função tem um máximo absoluto que corresponde à ordenada do vértice da função.



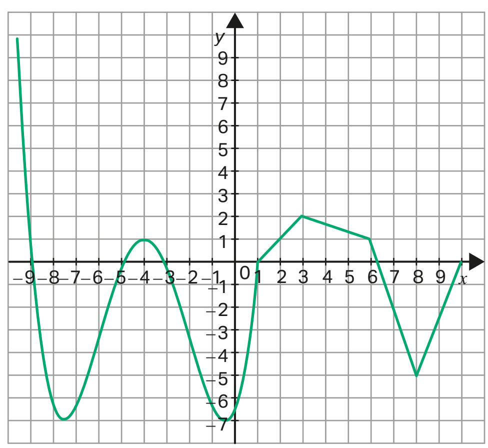
Exercício

27 Indica os extremos absolutos e relativos da função representada nos referenciais cartesianos seguintes.

a)



b)

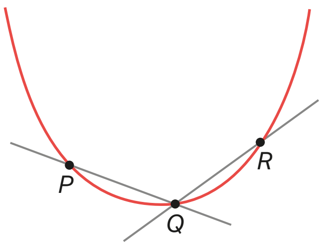


2.3.3. Sentido da concavidade do gráfico

Dada uma função real de variável real f e um intervalo $I \subset D_f$, diz-se que o gráfico de f tem:

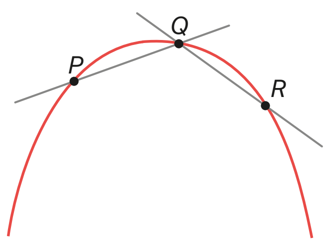
- a concavidade (estritamente) voltada para cima em I se, dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior ao da reta QR;
- a concavidade (estritamente) voltada para baixo em I se, dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é superior ao da reta QR.

Concavidade voltada para cima



$m_{PQ} < m_{QR}$

Concavidade voltada para baixo



$m_{PQ} > m_{QR}$

Exercício

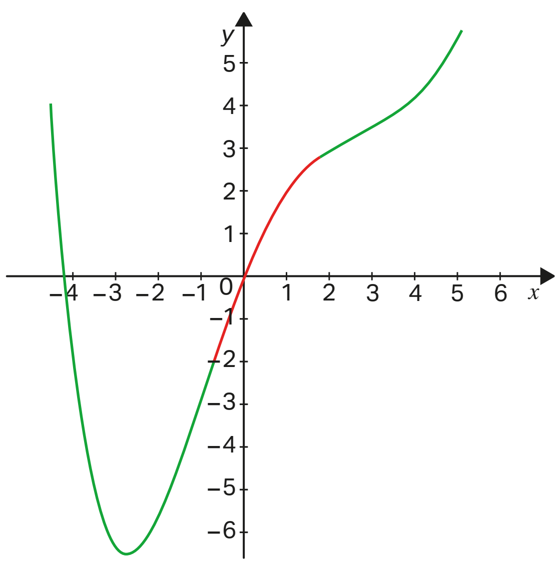
28 **Por observação do gráfico ao lado, responde às seguintes questões:**

28.1. Qual é o sentido da concavidade da função em $]-\infty, -1[$?

28.2. Qual é o sentido da concavidade da função em $]-1, 2[$?

28.3. Qual é o sentido da concavidade da função em $]2, +\infty[$?

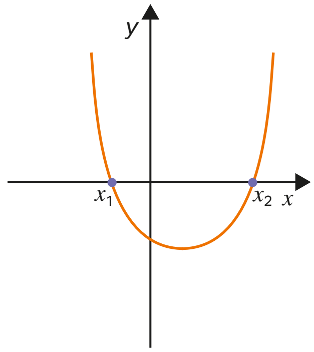
28.4. Quais são os pontos de inflexão (onde o gráfico da função muda de concavidade)?



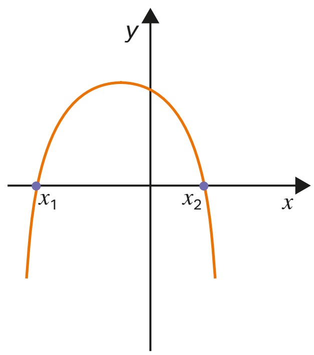
Caso das funções quadráticas

Considera uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.



- Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.



Exercício

29 Indica o sentido da concavidade dos gráficos das seguintes funções, justificando.

29.1. $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$

29.2. $g(x) = -x^2 - 6$

29.3. $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 2x - 1$

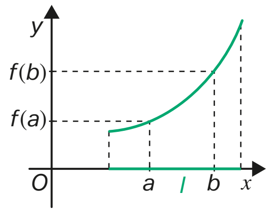
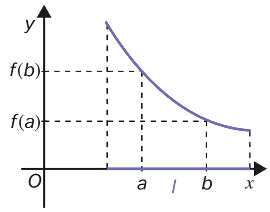
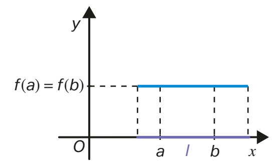
29.4. $j(x) = -2x^2$

29.5. $k(x) = -10x^2 - 5x$

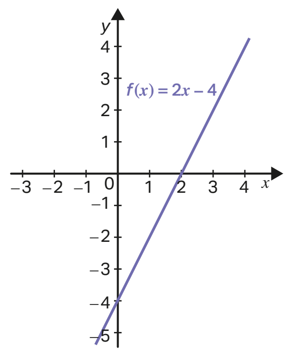
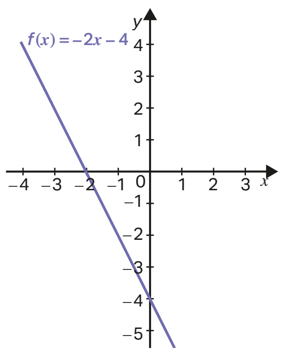
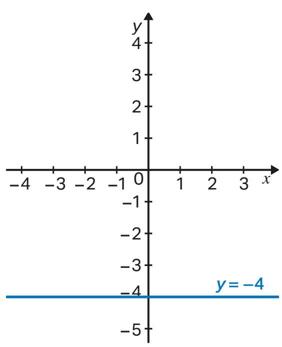
29.6. $l(x) = x^2 + 4x + 3$

Síntese

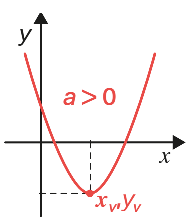
Intervalos de monotonia

Crescente	Decrescente	Constante
		
$\forall a, b \in I, a < b \implies$ $\implies f(a) \leqslant f(b)$	$\forall a, b \in I, a < b \implies$ $\implies f(a) \geqslant f(b)$	$\forall a, b \in I, a < b \implies$ $\implies f(a) = f(b)$

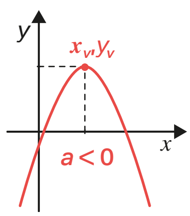
Função afim

Crescente, se $a > 0$	Decrescente, se $a < 0$	Constante, se $a = 0$
		

Função quadrática

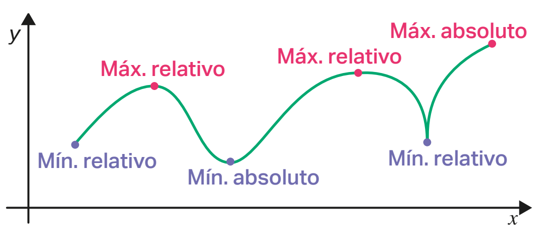


- Se $a > 0$
  - **decrescente em** $]-\infty, x_V]$
  - **crescente em** $[x_V, +\infty[$



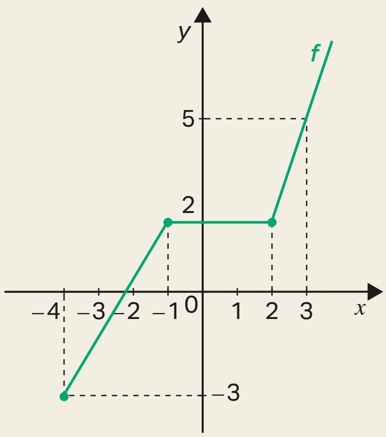
- Se $a < 0$
  - **crescente em** $]-\infty, x_V]$
  - **decrescente em** $[x_V, +\infty[$

Extremos absolutos e relativos



Para aplicar

1 Considera a função representada graficamente no referencial cartesiano.



1.1. Estuda a monotonia da função.

1.2. Indica, se existirem, os seus extremos absolutos e relativos.

2 Seja $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se} \quad -2<x<0 \\ 3x-4 & \text{se} \quad 0<x<5\end{cases}$

2.1. Estuda a monotonia da função.

2.2. Indica, se existirem, os seus extremos.

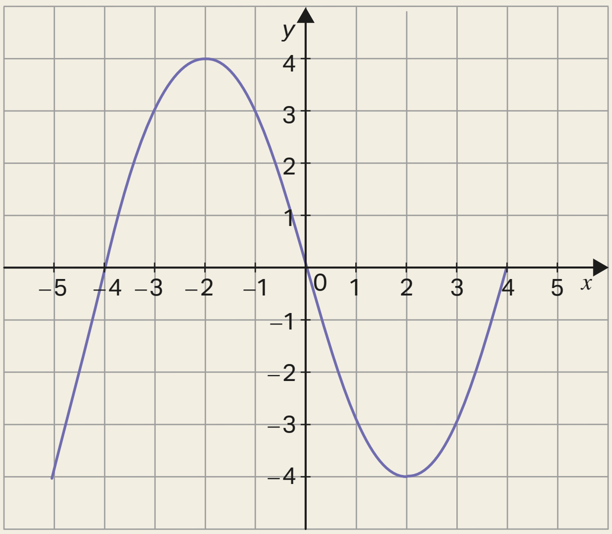
3 Considera a função $f(x)=2x^2-2$.

3.1. Estuda a monotonia da função.

3.2. Indica, se existirem, os seus extremos.

3.3. Qual é a concavidade da função?

4 Considera a função representada graficamente no seguinte referencial cartesiano.



4.1. Estuda a monotonia da função.

4.2. Indica, se existirem, os extremos.

4.3. Estuda os intervalos da concavidade da função.

2.4. Resolução de problemas

2.4.1. Equações e inequações envolvendo funções polinomiais

Uma função polinomial é uma função definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.

Exemplo 25

- $f(x) = x^3 + 2x - 1$ é uma função definida por um polinómio do 3.° grau.
- $f(x) = 2x - 1$ é uma função definida por um polinómio do 1.° grau (corresponde a uma função afim).
- $f(x) = 3x^2 + 1$ é uma função definida por um polinómio do 2.° grau (corresponde a uma função quadrática).

Equações envolvendo funções polinomiais

Já aprendeste, no ano anterior, que uma equação do 2.° grau pode ser resolvida aplicando a fórmula resolvente (resolução algébrica), mas também pode ser resolvida graficamente.

Exemplo 26

$x^2 + x - 2 = 0$

Resolução algébrica

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{2} \vee x = \frac{-1-3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \vee x = \frac{-4}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

$S = \{-2, 1\}$

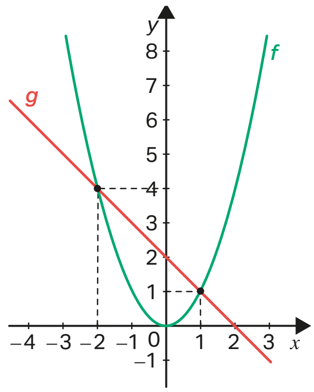
Recorda:
Fórmula resolvente de equações de 2.° grau
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolução gráfica

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x^2 = -x + 2$

Considerando as funções

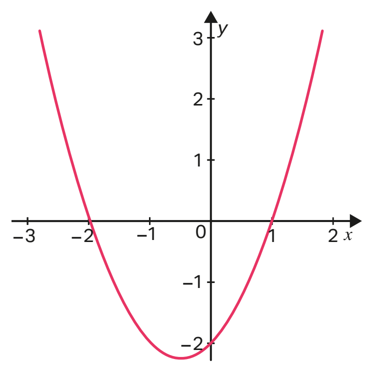
$$f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = -x + 2$$



As funções intersetam-se nos pontos $(-2, 4)$ e $(1, 1)$.

As abcissas dos pontos de interseção das duas funções correspondem à solução da equação, ou seja, -2 e 1.

Recorda que as soluções da equação $x^2 + x - 2 = 0$ correspondem aos zeros da função $h(x) = x^2 + x - 2$, por isso, também podes procurar as soluções da equação $h(x) = 0$ observando os zeros na representação gráfica da função h.



Mas, e se a equação tiver grau superior ao 2.º?

Considera a seguinte equação:

$$x^3 + x^2 + 2x = 0$$

Neste caso, como todos os termos têm a incógnita x, podemos colocar o x em evidência.

$x^3 + x^2 + 2x = 0 \iff x\left(x^2 + x + 2\right) = 0$

O produto de dois polinómios (x e $x^2 + x + 2$) é igual a zero se e só se um deles for igual a zero – Lei do Anulamento do Produto.

$$\iff x = 0 \lor x^2 + x + 2 = 0$$

$$\iff x = 0 \lor x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (2)}}{2 \times 1}$$

$$\iff x = 0 \lor \underbrace{x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}}$$

Logo, o conjunto com a solução da equação é $S = \{0\}$.

Exercício

30 Resolve as seguintes equações:

30.1. $4x^2 - 2x = 0$

30.2. $-x^3 + 4x^2 - 2x = 0$

30.3. $4x^3 - 4x^2 = 0$

30.4. $x^3 + x^2 - 2x = 0$

Agora, será que consegues resolver a seguinte equação?

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$$

Não é uma equação de 2.º grau, onde possamos aplicar a fórmula resolvente, nem é possível colocar o x em evidência, uma vez que existe um termo independente.

Neste caso, podemos fazer o seguinte:

$$\underbrace{x^3 - 4x^2}_{\text{Colocar o } x^2 \text{ em evidência}} \underbrace{- 4x + 16}_{\text{Colocar o } -4 \text{ em evidência}} = 0$$

$$x^2(x-4) - 4(x-4) = 0$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos que:

$$(x^2 - 4)(x-4) = 0$$

Agora, temos o produto de dois polinómios, pelo que podemos aplicar a lei do anulamento do produto:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 = 0 \vee x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \vee x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-2, 2, 4\}$.

Exercício

31 Resolve as seguintes equações:

31.1. $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$

31.2. $x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0$

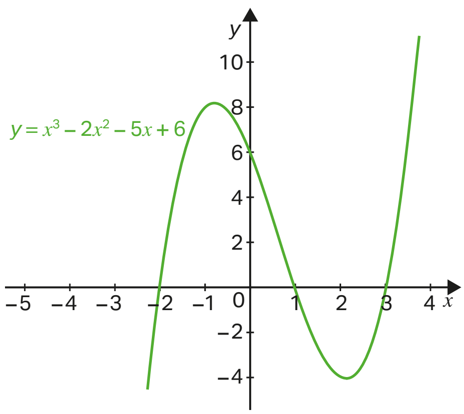
31.3. $2x^3 - 4x^2 - 4x + 8 = 0$

Há situações onde não é possível encontrar facilmente uma estratégia para a resolução analítica. Nesses casos, a resolução gráfica é o melhor caminho a seguir.

Repara, para resolver a equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, podes, por exemplo:

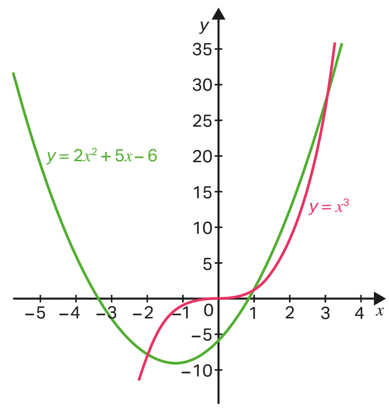
Procurar os zeros da função

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$



Procurar as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções

$$g(x) = x^3 \text{ e } h(x) = 2x^2 + 5x - 6$$



Das duas formas podes concluir que:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$, logo C.S. $= \{-2, 1, 3\}$

Inequações envolvendo funções polinomiais

Também já aprendeste que uma inequação com uma incógnita x é uma desigualdade na qual figura uma única variável x, que representa um valor desconhecido.

Exemplo 27

1. $1 + 4x < 3(x-2) \Leftrightarrow 1 + 4x < 3x - 6$
$\Leftrightarrow 4x - 3x < -6 - 1$
$\Leftrightarrow x < -7$

C.S. $=]-\infty, -7[$

2. $2x - \frac{1}{3} - (x+2) \geqslant -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{3} - x - 2 \geqslant -1$
$\Leftrightarrow \frac{6}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{3}{3}x - \frac{6}{3} \geqslant -\frac{3}{3}$
$\Leftrightarrow 6x - 1 - 3x - 6 \geqslant -3$
$\Leftrightarrow 6x - 3x \geqslant -3 + 1 + 6$
$\Leftrightarrow 3x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{4}{3}$

C.S. $= \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$

3. $1 - \frac{4+3x}{2} < x \Leftrightarrow \frac{2}{2} - \frac{4+3x}{2} < \frac{2}{2}x$

$\Leftrightarrow 2 - 4 - 3x < 2x$

$\Leftrightarrow -3x - 2x < -2 + 4$

$\Leftrightarrow -5x < 2$

$\Leftrightarrow 5x > -2$

$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$

$\text{C.S.} = \left]-\frac{2}{5}, +\infty\right[$

Agora, como resolver uma inequação do 2.º grau?

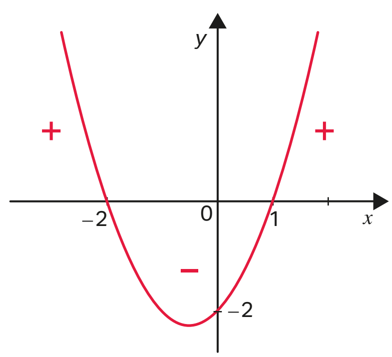
Considera a seguinte inequação:

$$x^2 + x - 2 < 0$$

Para resolver esta inequação, vamos estudar o gráfico da função quadrática:

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

Comecemos por determinar os seus zeros e estudar o sinal da função no seu domínio.



Zeros:

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

Como $a = 1$, a função tem concavidade voltada para cima.

Logo,

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Logo, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 1[$.

Exercício

32 Resolve as seguintes inequações:

32.1. $-x^2 + 4x - 3 \leqslant 0$

32.2. $2x^2 + 11x + 5 > 0$

32.3. $x^2 \geqslant 9x - 2$

32.4. $3x^2 - 11x < 4$

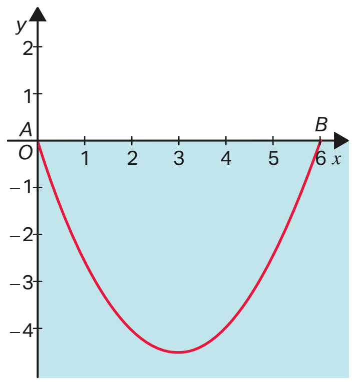
2.4.2. Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real

Os conceitos e as propriedades que estudámos sobre as funções reais de variável real ajudam-nos a resolver problemas matemáticos diversos.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 28

Um atleta mergulhou no mar, no Pontão de Santa Maria, na ilha do Sal.



Sabe-se que a profundidade, em metros, a que ele se encontra x segundos depois de entrar na água, é dada pela função $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$, que está representada no referencial cartesiano acima.

Seja A o ponto que corresponde ao momento em que o atleta entra na água, e o ponto B o momento em que ele chega à tona.

1. Indica as coordenadas dos pontos A e B.
2. Determina o vértice da parábola que representa graficamente a função f.
3. Qual é a profundidade máxima atingida pelo atleta durante o mergulho?
4. Supõe agora que outro atleta também saltou do pontão, mas o seu mergulho é dado pela função $g(x)=f(2x)$. Será que este atleta atingiu uma maior profundidade do que o atleta anterior? Justifica a tua resposta.

Resolução

1. Por observação do gráfico, conclui-se que $A(0,0)$ e $B(6,0)$.

Algebricamente, poderíamos confirmar as abcissas dos pontos, uma vez que são os zeros da função f.

$$\frac{1}{2}x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x-3\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \frac{1}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$$

2. Como a parábola é simétrica, a abcissa do vértice é o ponto médio de $[AB]$, o seja $x=3$. Para determinar a ordenada bastará determinar $f(3)$.

   $f(3)=\frac{1}{2}\times 3^2-3\times 3=\frac{9}{2}-9=\frac{9}{2}-\frac{18}{2}=-\frac{9}{2}=-4{,}5$

   O vértice da parábola tem coordenadas $V(3\,;\,-4{,}5)$.

3. O atleta mergulhou até aos $4{,}5$ metros de profundidade.

4. A função $g(x)=f(2x)$, em relação à função $f(x)$, sofre uma contração horizontal, logo a profundidade atingida será a mesma.

   A diferença que ocorre tem apenas a ver com a velocidade a que o atleta atinge a profundidade máxima (passados $1{,}5$ s) e a velocidade a que regressa à tona (passados 3 s).

Exemplo 29

Considera a função f de domínio $\mathbb{R}$ e de contradomínio $[-1\,,\,5]$.

Indica o contradomínio das funções definidas pelas seguintes expressões:

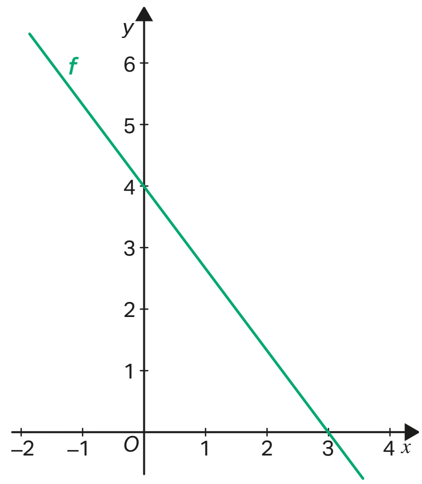
1. $g(x)=f(x)-4$
2. $h(x)=-f(x)+2$
3. $j(x)=2f(x)$
4. $k(x)=|f(x)|$

Resolução

1. O gráfico da função g, em relação ao gráfico da função f, sofre uma deslocação de 4 unidades para baixo, logo $D'_g=[-5\,,\,1]$.
2. O gráfico da função h, em relação ao gráfico da função f, faz simetria em relação ao eixo Ox e sofre uma deslocação de 2 unidades para cima, no eixo Oy, logo $D'_g=[-3\,,\,3]$.
3. O gráfico da função j, em relação ao gráfico da função f, sofre uma dilatação, na vertical, de coeficiente 2, logo $D'_g=[-2\,,\,10]$.
4. O gráfico da função k, em relação ao gráfico da função f, faz simetria, em relação ao eixo Ox, apenas da parte que era negativa, portanto, transforma-se numa função de contradomínio não negativo, logo $D'_g=[0\,,\,5]$.

Exercícios

33 **Considera o gráfico de uma função afim f que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 3 e o eixo Oy no ponto de ordenada 4.**



33.1. Determina a expressão algébrica que define a função f.

33.2. Determina os zeros da função g definida por $g(x) = -f(x-1)$.

33.3. Determina o contradomínio da função h definida por $h(x) = -|f(x)| + 2$.

33.4. Esboça o gráfico da função j definida por $j(x) = 2f(-x) - 1$.

34 **Considera a função f de domínio $\mathbb{R}$ e de contradomínio $[-2, 2]$.**
Indica o contradomínio das funções definidas pelas seguintes expressões:

34.1. $g(x) = f(x) + 3$

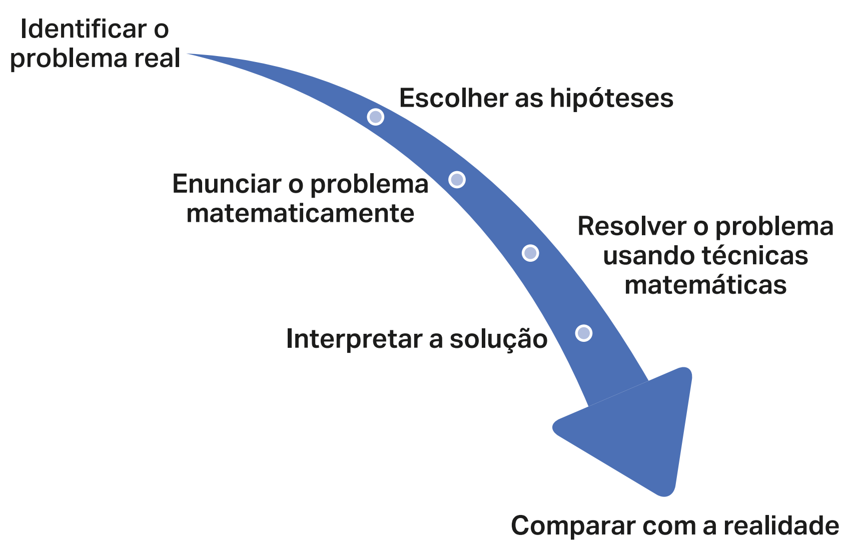
34.2. $h(x) = f(-x) - 2$

34.3. $j(x) = -2f(x)$

34.4. $k(x) = |f(x)|$

2.4.3. Resolução de problemas envolvendo funções em contextos de modelação

A modelação matemática consiste no estabelecimento de um conjunto de ferramentas matemáticas que permitem fazer uma análise teórica de uma situação dada.



Assim, e de forma análoga ao que fizemos na secção anterior, vejamos alguns exemplos de situações em que se utilizam funções reais de variável real para modelar situações reais.

Exemplo 30

Uma nova empresa de distribuição de água afirma, na sua publicidade, que irá praticar a seguinte tabela de preços:

- Tarifa fixa
  - até 20 m^3, 200 escudos
  - mais de 20 m^3, 400 escudos
- Tarifa variável
  - até 20 m^3, 345 escudos por m^3
  - mais de 20 m^3, 580 escudos por m^3

Para um consumidor doméstico:

1. Determina o preço a pagar por 20 m^3 de água.

2. Determina o preço a pagar por 30 m^3 de água.

3. Define analiticamente a função p que traduz o preço a pagar em função dos m^3 de água consumidos.

Resolução

1. Por 20 m^3 de água, pagar-se-á:

- Tarifa fixa: 200 escudos
- Tarifa variável: $20 \times 345 = 6900$ escudos

Total: $200 + 6900 = 7100$ escudos

2. Por 30 m^3 de água, pagar-se-á:

- Tarifa fixa: 400 escudos
- Tarifa variável: $30 \times 580 = 17\,400$ escudos

Total: $400 + 17\,400 = 17\,800$ escudos

3. $p(x) = \begin{cases} 200 + 345x & \text{se} \quad x \leqslant 20 \\ 400 + 580x & \text{se} \quad x > 20 \end{cases}$

Exemplo 31

Considera um cone que tem altura igual ao triplo do raio da base.

1. Sendo r o raio da base, indica uma expressão que te permita determinar o volume do cone em função do raio da base.
2. Se o volume do cone for igual a $2\pi\ \text{cm}^3$, qual será o raio e a altura do cone?

Resolução

1. O volume de um cone é dado por:

$$V=\frac{1}{3}A_b\times a=\frac{1}{3}\pi r^2\times a$$

Mas como $a=3r$, temos que:

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\times 3r=\pi r^3$$

2. $V(r)=2\pi \iff \pi r^3=2\pi \iff r^3=2 \iff r=\sqrt[3]{2}$

O raio será $\sqrt[3]{2}$ e a altura $3\sqrt[3]{2}$.

Exemplo 35

Depois de uma análise financeira a um hotel de 5 estrelas em Cabo Verde, conclui-se que o lucro do hotel num dia, em mil escudos cabo-verdianos, é dado em função do número de quartos alugados (x), nesse dia, por:
$f(x)=-x^3+30x^2+16x-480$, sendo $0\leqslant x\leqslant 30$.

1. Quantos quartos tem o hotel?
2. Se o hotel não alugar nenhum quarto, quanto terá de prejuízo?
3. Qual o número mínimo de quartos que o hotel terá de alugar por dia para não ter prejuízo?
4. Se alugar os 30 quartos o hotel terá lucro? Justifica a afirmação.

Resolução

1. Uma vez que x corresponde ao número de quartos alugados e $0\leqslant x\leqslant 30$, o hotel tem no máximo 30 quartos.
2. $f(0)=-0^3+30\times 0^2+16\times 0-480=-480$

Se não alugar nenhum quarto, o hotel terá 480 mil escudos cabo-verdianos de prejuízo.

3. Para que o hotel não tenha prejuízo, $f(x)\geqslant 0$.

$f(x)\geqslant 0$

Zeros:

$-x^3+30x^2+16x-480=0 \Leftrightarrow x^2(-x+30)-16(-x+30)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-16)(-x+30)=0 \Leftrightarrow x^2-16=0 \vee -x+30=0$

$\Leftrightarrow x^2=16 \vee x=30 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=4 \vee x=30$

Mas $0 \leqslant x \leqslant 30$, logo, no contexto do problema, só nos interessam 4 e 30.

Logo, como $0 \leqslant x \leqslant 30$.

x	0		4		30
$-x^3+30x^2+16x-480$	$-$	$-$	0	$+$	0

Para que o hotel não tenha prejuízo, terá de alugar no mínimo 5 quartos.

4. Se alugar os 30 quartos, o hotel não terá lucro, pois $f(30)=0$.

Exercícios

35 Considera o seguinte problema:
O quadrado da soma de dois números naturais consecutivos tem de ser 9.

35.1. Indica uma equação que permita dar resposta ao problema.

35.2. Resolve-a.

36 Uma bola foi lançada verticalmente. A altura da bola é dada pela função a (em metros acima do solo), em função de t (em segundos após o instante inicial $t=0$), definida por:

$$a(t)=-5t^2+40t$$

36.1. A que altura estava a bola quando foi lançada?

36.2. Qual foi a altura máxima que a bola atingiu?

36.3. Quanto tempo esteve a bola a uma altura superior a 25 metros?

36.4. Ao fim de quanto tempo a bola atingiu o solo?

37 O efeito de um medicamento é medido numa escala de 0 a 15.
Considerando que, x horas após a sua administração, o efeito é dado, aproximadamente, pela função:

$$E(x)=-0{,}01x^3+0{,}1x^2+0{,}26x$$

37.1. Os efeitos do medicamento começam a sentir-se quando E toma valores superiores a 2. Quanto tempo após a toma se começam a sentir os efeitos?

37.2. Durante quanto tempo é sentido o efeito do medicamento?

Síntese

Resolução de equações polinomiais

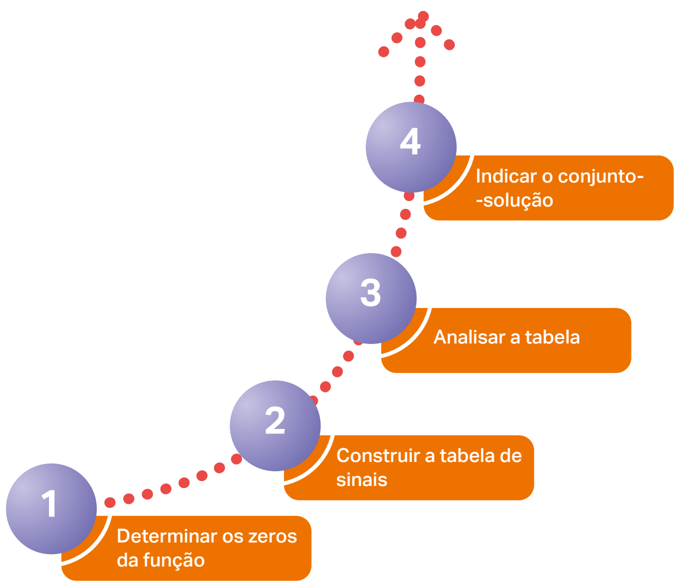
Uma função polinomial é uma função definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.

Resolução de equações polinomiais

- **Equação do 2.° grau**
  - Fórmula resolvente
- **Equação de grau superior ao 2.°**
  - Fatorizar e aplicar a Lei do anulamento do produto

Resolução de inequações polinomiais

Estudar o sinal da função.



Para aplicar

1 Resolve as seguintes equações:

1.1. $\frac{3}{4}x^2 = 2x + 1$

1.2. $3x + x(x - 1) = 2x + 1$

1.3. $x^2 + x(x - 1) - 2 = 4x - 2 + x^3$

2 Resolve as seguintes inequações:

2.1. $\frac{3}{4}x^2 + 1 \geqslant \frac{1}{4}x$

2.2. $3x \leqslant x(x - 1) + 1$

2.3. $x^2 + x(x - 1) - 2 < 4x - 2 + x^3$

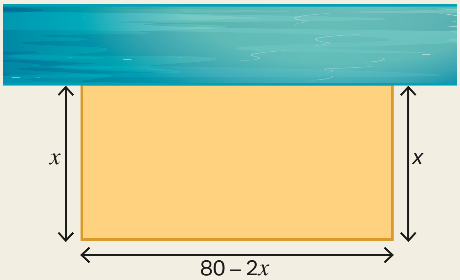
3 **De um helicóptero foi lançado um saco com alimentos. A distância do saco ao solo, durante o lançamento, é dada, em metros, por $f(x) = -4x^2 + 800$, com x em segundos.**

3.1. De que altura foi lançado o saco?

3.2. Quanto tempo demorou a chegar ao solo?

3.3. Qual era a distância do saco ao solo 10 segundos após ter sido lançado?

4 **Um produtor de milho decidiu colocar uma vedação no seu terreno retangular que se encontra junto a uma ribeira, de forma a proteger o seu cultivo.**



Ele tem 80 metros de rede disponível. O lado da região retangular junto à margem da ribeira não necessita de ser vedado.

Quais devem ser as medidas, em metros, da região para que a área vedada seja a maior possível?

5 **O José vai construir uma cerca retangular no seu quintal para produzir alguns legumes para a sua casa. Ele dispõe de 24 metros de rede para fazer a sua horta e não quer comprar mais rede.**

5.1. Exprime a largura (l) da horta em função do seu comprimento (x).

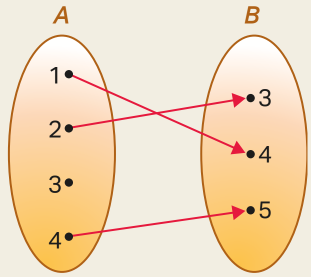
5.2. Indica uma expressão, em função do comprimento (x), que permita definir a área da horta.

5.3. Quais deverão ser as medidas da horta de forma que tenha área máxima?

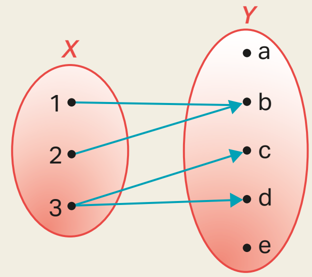
Teste

1 Qual dos seguintes diagramas representa uma função?

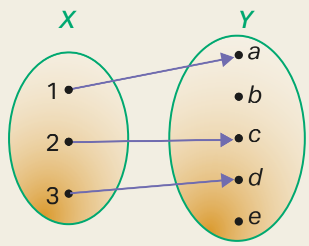
(A)



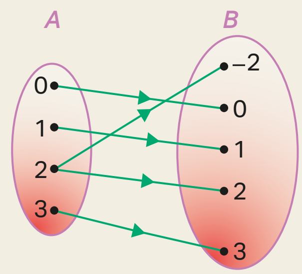
(B)



(C)



(D)



2 Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}6x+1 & \text{se } x\leqslant 1\\ 2x+1 & \text{se } x>1\end{cases}$.
Qual é o valor de $f\left(\frac{2}{3}\right)$?

(A) $\frac{7}{3}$ **(B)** 5 **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 0

3 Uma empresa de telecomunicações anunciou o seguinte plano de preços nas chamadas telefónicas feitas a partir de um telefone registado nessa empresa.

- 27 escudos pelo primeiro minuto de conversação (mesmo que a chamada tenha duração de menos de 1 minuto).
- $0{,}5$ escudos por segundo, a partir do primeiro minuto.

Por exemplo, se a chamada tiver a duração de 1 minuto e meio, o preço a pagar será de 42 escudos (27 escudos pelo primeiro minuto mais $0{,}5$ escudos por cada um dos 30 segundos seguintes).

Qual das seguintes expressões corresponde à modelação matemática desta situação da vida real, onde t corresponde ao tempo em segundos da chamada?

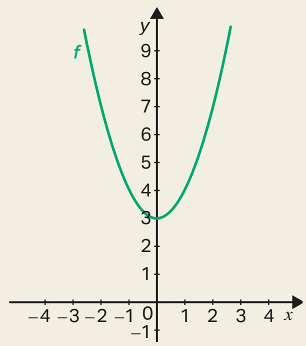
(A) $\begin{cases}27 & \text{se } t\leqslant 60\\ 0{,}5(t-60)+27 & \text{se } t>60\end{cases}$

(B) $\begin{cases}27t & \text{se } t\leqslant 60\\ 0{,}5(t-60) & \text{se } t>60\end{cases}$

(C) $\begin{cases}27t & \text{se } t\leqslant 60\\ 0{,}5(t-60)+27 & \text{se } t>60\end{cases}$

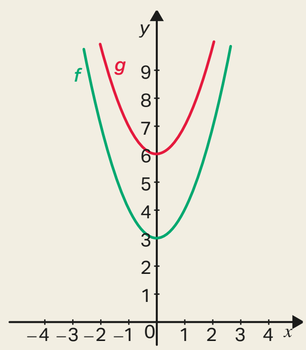
(D) $\begin{cases}27 & \text{se } t\leqslant 60\\ 0{,}5t+27 & \text{se } t>60\end{cases}$

4 Considera a função f representada no referencial o.n..

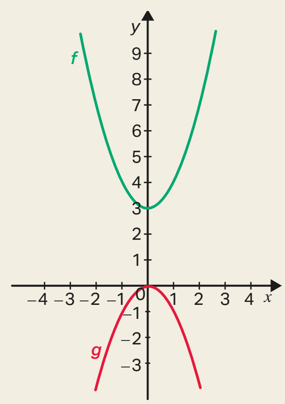


Em qual dos referenciais se encontra representada a função $g(x) = f(-x) + 3$?

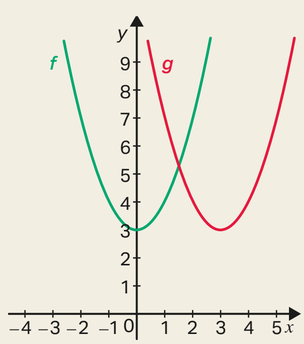
(A)



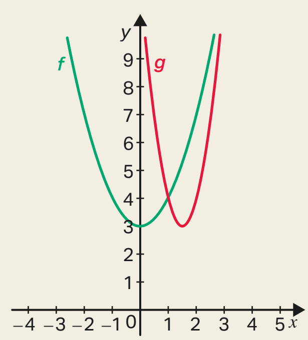
(B)



(C)



(D)



5 Considera as funções f e g representadas no referencial cartesiano ao lado.

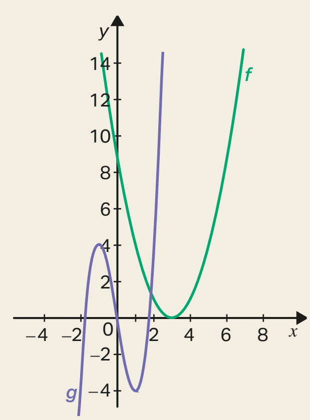
Qual das afirmações é verdadeira?

(A) A função f não tem zeros.

(B) A função f tem um zero, $x = 9$.

(C) A função g não tem zeros.

(D) A função g tem um máximo relativo em $x = -1$.



Teste

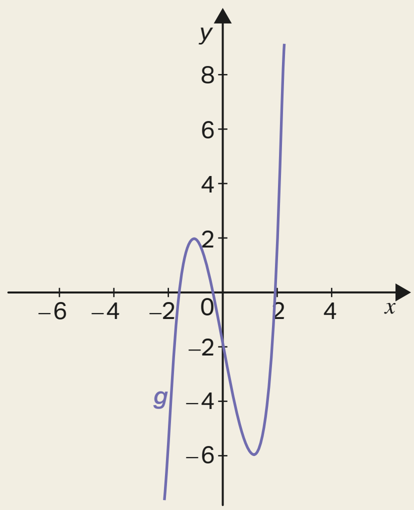
6 Considera a função ao lado.
Qual das afirmações é verdadeira?

(A) A função tem dois zeros.

(B) A função é sempre crescente em todo o seu domínio.

(C) A função é decrescente em $[-1\,,\,1]$.

(D) A função é bijetiva.



7 Dadas as funções definidas por $f(x) = 3x$ e $g(x) = -x^2$.
Qual é a expressão algébrica de $f \circ g$?

(A) $(f \circ g)(x) = -3x^2$

(B) $(f \circ g)(x) = -9x^2$

(C) $(f \circ g)(x) = 9x^2$

(D) $(f \circ g)(x) = 3x^2$

8 Dada uma função bijetiva, podemos dizer que:

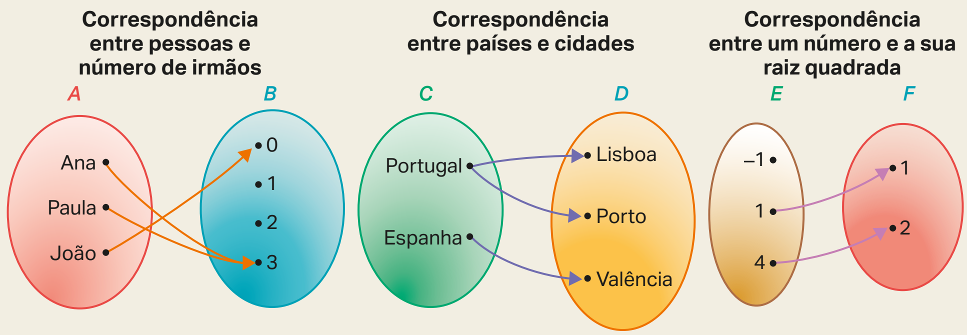
(A) A função admite função inversa.

(B) A função não é sobrejetiva.

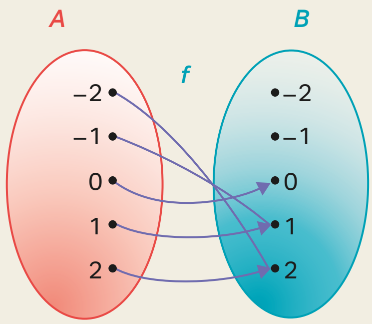
(C) A função é constante.

(D) A função tem dois zeros.

9 Para cada uma das correspondências seguintes indica, justificando, se representam ou não uma função.



10 **Considera a função f representada pelo seguinte diagrama de setas.**



10.1. Indica o domínio da função.

10.2. Indica o contradomínio da função.

10.3. Qual é o conjunto de chegada?

10.4. Indica a imagem do objeto -1.

10.5. Quais são os objetos que têm como imagem 2?

10.6. Completa:

$f(0) = ...$ $\qquad$ $f(...) = f(...) = 1$

11 **Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 20 & \text{se } x < 0 \\ 4x^2 - 16 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

11.1. Determina, caso existam, os zeros da função f.

11.2. Refere um intervalo do domínio onde f admita concavidade e diga de que tipo se trata.

12 **Considera a função g definida por $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$.**

12.1. Indica os zeros da função.

12.2. Representa graficamente a função.

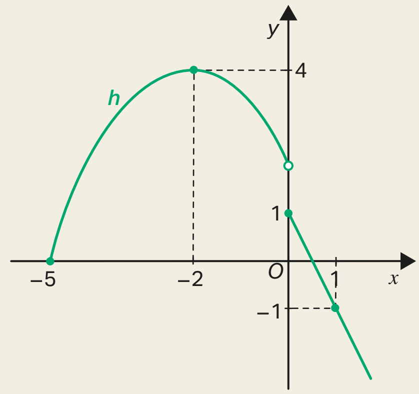
12.3. Estuda o sinal da função.

12.4. Refere um intervalo do domínio onde f admita concavidade e indica de que tipo se trata.

12.5. Indica, caso exista, extremos absolutos ou relativos da função.

Teste

13 Considera a função h, com a representação gráfica ao lado.



13.1. Completa de forma a definir a função h por ramos.

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{4}{9}(x+5)(x-1) & \text{se } -5\leqslant x<0\\ \square\, x+\square & \text{se } x\geqslant 0\end{cases}$$

13.2. Indica o domínio de h.

13.3. Quais são os zeros da função h?

13.4. Indica o máximo absoluto da função h.

13.5. Estuda o sinal da função h.

14 Indica, justificando, quais das seguintes funções são funções pares.

14.1. $f_1(x)=|3x|+1$

14.2. $f_2(x)=5\sqrt[3]{x}$

14.3. $f_3(x)=x^3-2x$

14.4. $f_4(x)=5x^2-3x^4$

15 Considera a função $f(x)=2x-1$.

15.1. A função é injetiva? Justifica a tua resposta.

15.2. A função é sobrejetiva? Justifica a tua resposta.

15.3. A função é bijetiva? Justifica a tua resposta.

15.4. Determina a função inversa da função f.

16 Considera as funções definidas por $f(x)=2x-1$ e $g(x)=-x+2$.

16.1. As funções são bijetivas. Justifica a afirmação.

16.2. Determina $f\circ g$.

16.3. Indica o valor de $(f\circ g)(3)$.

16.4. Determina $g\circ f$.

16.5. Indica o valor de $(g\circ f)(3)$.

16.6. Dá um exemplo de duas funções h e j, tais que $h\circ j\neq j\circ h$.

17 **Resolve a equação $(x-1)^2 - 1 = 0$.**

18 **Resolve a inequação $(x-1)^2 - 1 \leqslant 0$.**

19 **Uma bola é lançada.**

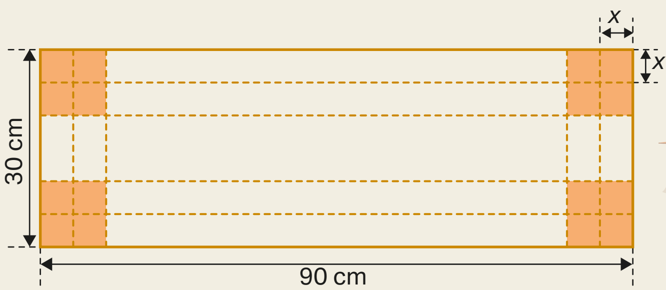
Sabe-se que a altitude (f) da bola, em centímetros, em função do tempo (x), em segundos, após ter sido lançada, é dada por $f(x) = 100x - 5x^2$.

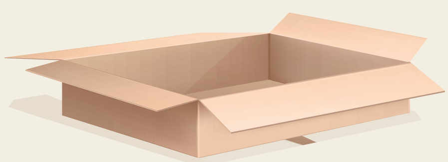
19.1. Determina a altura máxima atingida pela bola.

19.2. Resolve a seguinte inequação e interpreta o resultado no contexto do problema: $f(x) \geqslant 0$.

19.3. Resolve a seguinte equação e interpreta o resultado no contexto do problema: $f(x) = 200$.

20 **Com uma folha de cartão de dimensões 90 cm de comprimento e 30 cm de largura, constroem-se, numa empresa, caixas, cortando, em cada um dos quatro cantos, quatro quadrados de x cm de lado e, de seguida, efetuando as dobragens sugeridas pela figura.**





20.1. Entre que valores poderá variar x? Justifica.

20.2. Prova que o volume da caixa é dado, em função de x, por:

$$V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 675x$$

20.3. Qual será o volume da caixa, caso os quadrados recortados tenham 1 cm de lado?


3

Estatística

3.1. Organização e interpretação de caracteres estatísticos

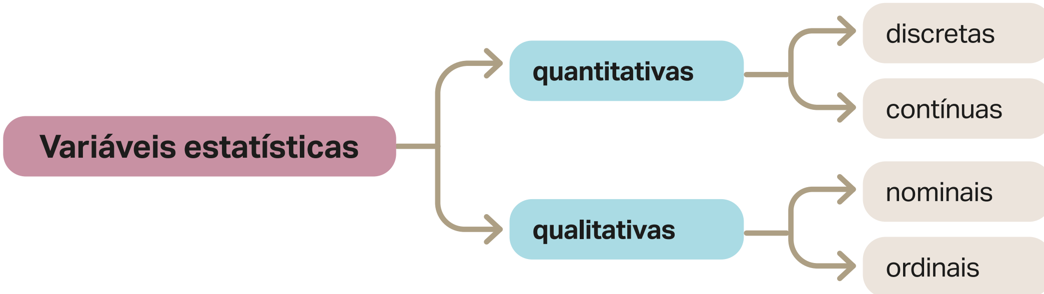
3.2. Distribuições bidimensionais

Recorda

Manual Interativo

Atividade
Classificação de variáveis estatísticas

Variável estatística é uma característica que admite diferentes valores (um número ou uma modalidade), um por cada unidade estatística.



Frequência absoluta (f_a) representa o número total de vezes que um determinado valor ou categoria ocorre num conjunto de dados. Ou seja, é uma contagem direta de ocorrências de um dado específico num conjunto de observações.

Frequência relativa (f_r) indica a proporção de vezes que um determinado valor ou categoria aparece num conjunto de dados em relação ao total de observações. É geralmente expressa como uma fração, um número decimal ou uma percentagem.

$$f_r = \frac{\text{Frequência absoluta}}{\text{Total de observações}}$$

Agrupar os dados em classes

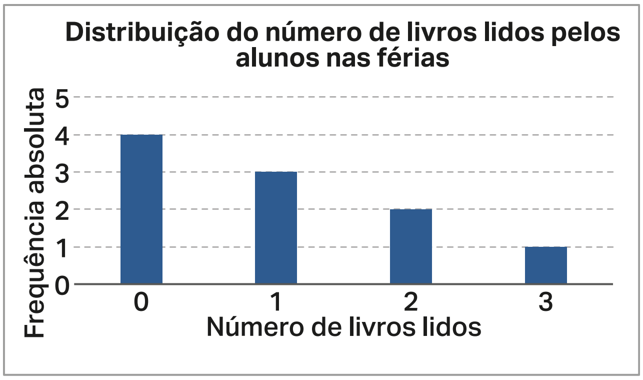
Num estudo estatístico, quando os dados estatísticos quantitativos (discretos ou contínuos) são em número elevado e variados, é útil agrupá-los em classes. As classes correspondem a intervalos de números reais, fechados à esquerda e abertos à direita.

Tabelas de frequências são ferramentas usadas na estatística para organizar e resumir um conjunto de dados, apresentando o número de vezes (frequência) que cada valor ou grupo de valores ocorre. Permitem identificar padrões, tendências e distribuições de dados de forma clara e estruturada.

Exemplos:

Tabela das leituras realizadas por 10 alunos nas férias			
N.º de livros lidos	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa (Decimal)**	**Frequência relativa (%)**
0	4	$\frac{4}{10}=0{,}4$	40%
1	3	$\frac{3}{10}=0{,}3$	30%
2	2	$\frac{2}{10}=0{,}2$	20%
3	1	$\frac{1}{10}=0{,}1$	10%
Total	10	1	100%

Gráfico de barras representa dados qualitativos ou quantitativos discretos, em que se utiliza barras retangulares cuja altura ou comprimento é proporcional ao valor que representam.



Histograma

É um gráfico de barras retangulares justapostas, sendo a área dos retângulos diretamente proporcional à frequência absoluta.

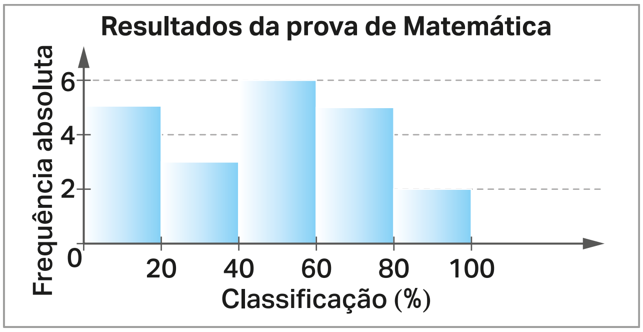
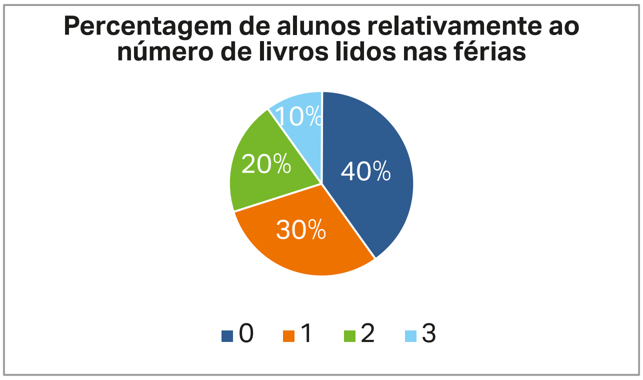


Gráfico circular apresenta dados em forma de setores circulares.

Cada setor representa uma categoria e a amplitude o setor é proporcional à frequência absoluta ou relativa da categoria no conjunto de dados.

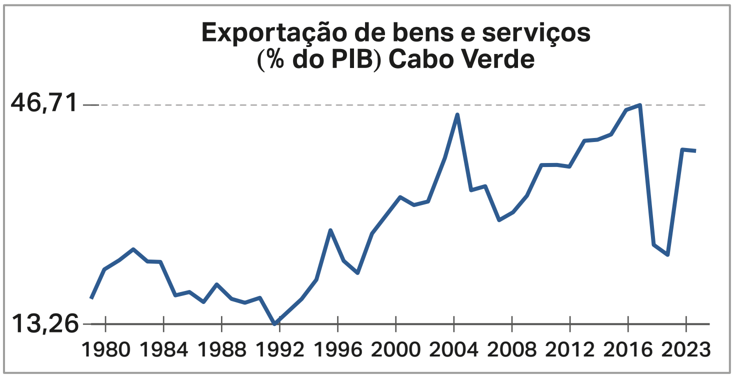


Manual Interativo

Atividade
Classificação de variáveis estatísticas

Recorda

Gráfico de linhas representa dados contínuos ao longo de um intervalo de tempo.



Fonte: https://pt.theglobaleconomy.com/Cape-Verde/exports/

Medidas de tendência central

Média: Valor igual ao quociente entre a soma de todos os dados e a quantidade deles.

Mediana: Valor central num conjunto ordenado de dados.

Moda: Valor mais frequente no conjunto de dados.

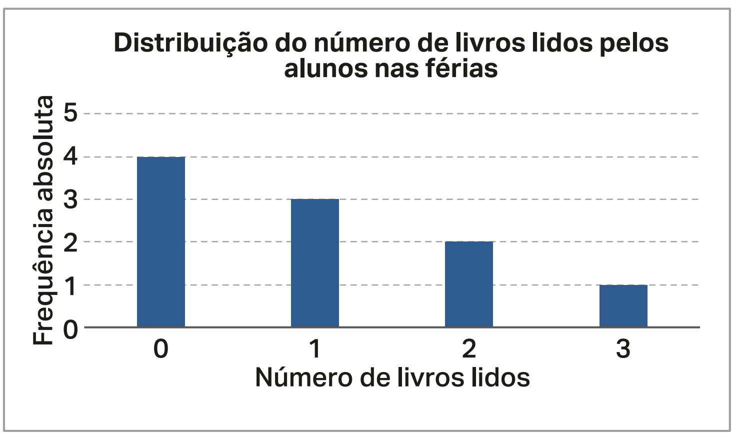
Exemplo:

A média de livros lidos pelos alunos foi de 1, pois $\frac{0 \times 4 + 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1}{10} = 1$.

A moda é 0, ou seja, a maioria dos alunos leu 0 livros.

A mediana relativamente ao número de livros lidos pelos alunos é de $\frac{1+1}{2} = 1$.

Dados ordenados: $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3$



Noção de quartil

Os quartis, num conjunto de dados numéricos ordenados, são valores que dividem os dados em quatro partes de igual percentagem de ocorrência. Como medidas de localização, os quartis permitem obter a indicação da variabilidade e a distribuição dos dados.

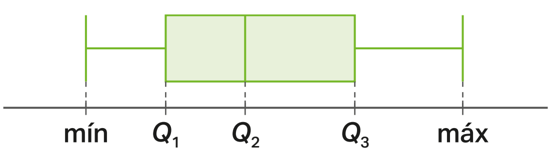
- O **2.º quartil** (Q_2), igual à **mediana** (M_d), é o valor que divide o conjunto em duas partes com o mesmo número de elementos:
  – quando o número de dados é ímpar, a mediana (ou 2.º quartil) é o dado que ocupa a posição central: valor de ordem $\frac{n+1}{2}$;
  – quando o número de dados é par, a mediana (ou 2.º quartil) é a média dos dois dados centrais: valores de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.
- O **1.º quartil** (Q_1) é a mediana dos dados que ficam à esquerda do 2.º quartil.
- O **3.º quartil** (Q_3) é a mediana dos dados que ficam à direita do 2.º quartil.

Nota: Quando o número de dados é ímpar, a mediana é um dos dados. Esse dado é rejeitado para se determinar o Q_1 à esquerda dele e o Q_3 à direita dele. Quando o número de dados é par, a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais. Esses valores não são rejeitados, para a determinação de Q_1 e Q_3.

Diagramas de extremos e quartis

O diagrama de extremos e quartis, ou *boxplot*, é uma representação gráfica que permite a interpretação da distribuição de dados numéricos.

O diagrama de extremos e quartis divide os dados em partes iguais, cada uma contendo aproximadamente 25% dos dados do conjunto.



Amplitude interquartil é a diferença entre o 3.º e o 1.º quartis de um conjunto de dados.

Amplitude é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de um conjunto de dados.

Antes de começar

1 **A professora de Matemática questionou os alunos da sua turma sobre o número de horas que eles dedicam a atividades extracurriculares por semana. Os dados recolhidos foram os seguintes:**

$$2 , 3 , 2 , 4 , 5 , 5 , 3 , 0 , 2 , 4 , 3 , 2 , 1 , 4 , 5 , 3 , 3 , 2 , 4 , 0 , 3 , 1$$

1.1. Identifica a variável estatística presente neste estudo.

1.2. A variável é quantitativa ou qualitativa? Justifica.

1.3. Quantos alunos tem a turma?

1.4. Constrói uma tabela de frequências que inclua a frequência absoluta e a frequência relativa em percentagem.

2 **Numa outra turma, a professora questionou os alunos sobre o número de minutos semanais de leitura. Os resultados obtidos foram os seguintes:**

$$30 , 10 , 25 , 75 , 40 , 50 , 60 , 15 , 20 , 45 , 70 , 35 , 40 , 55 , 60 , 30 , 25 , 45 , 55 , 65$$

2.1. Quantos alunos tem a turma?

2.2. Agrupa os dados em classes com amplitude 10 .

2.3. Constrói um histograma para representar os dados agrupados.

2.4. Calcula a frequência relativa para cada classe e constrói um gráfico circular com as frequências relativas (em percentagem).

3 **Os números de livros lidos por um grupo de alunos durante um ano foram registados da seguinte forma:**

$$0 , 4 , 2 , 1 , 0 , 1 , 1 , 2 , 4 , 3 , 3$$

3.1. Calcula a média do número de livros lidos.

3.2. Determina a mediana do conjunto de dados.

3.3. Identifica a moda.

3.4. Qual é a amplitude dos dados?

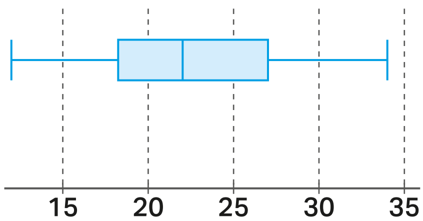
4 **Os resultados de um teste de Matemática foram:**

$$12 , 14 , 15 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22 , 23 , 24 , 26 , 28 , 30 , 32$$

4.1. Determina o Q_1 , Q_2 (mediana) e Q_3 .

4.2. Calcula a amplitude interquartil.

4.3. O seguinte diagrama é o digrama de extremos e quartis relativo aos dados recolhidos? Justifica.



5 **A seguinte tabela mostra o peso, em percentagem, da exportação de bens e serviços, no PIB de Cabo Verde, ao longo dos últimos cinco anos.**

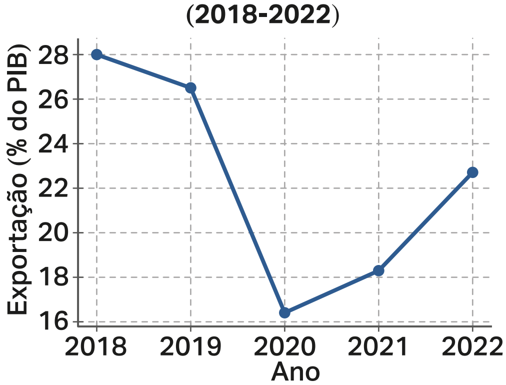
Ano	Exportação (% do PIB)
2018	28,0
2019	26,5
2020	16,4
2021	18,3
2022	22,7

5.1. Calcula a média dos pesos, no PIB, em percentagem, das exportações, nos cinco anos indicados.

5.2. Determina o ano em que a exportação atingiu o valor, em percentagem do PIB, mais baixo e o valor mais alto. Qual é a amplitude desses dados?

5.3. Com base no seguinte gráfico de linhas, analisa a tendência dos dados e sugere possíveis fatores que expliquem a variação.

Exportação (% do PIB) de Cabo Verde (2018-2022)



3 Estatística

Manual Interativo

Vídeo
A estatística no dia a dia

3.1. Organização e interpretação de caracteres estatísticos

3.1.1. A importância da estatística na sociedade atual

A estatística é uma ciência fundamental na sociedade moderna, desempenhando um papel indispensável na análise e compreensão de dados que afetam a vida quotidiana.

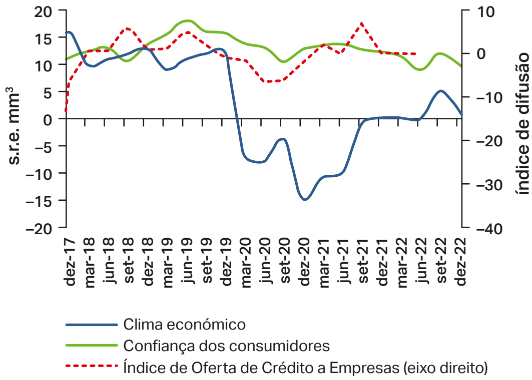
A estatística oferece ferramentas cruciais para a recolha, análise e interpretação de dados. Num mundo cada vez mais regido pela informação, a capacidade de transformar números e dados em conhecimento acionável é essencial para a tomada de decisões informadas em diversos setores, como economia, saúde, educação, tecnologia, política e meio ambiente.

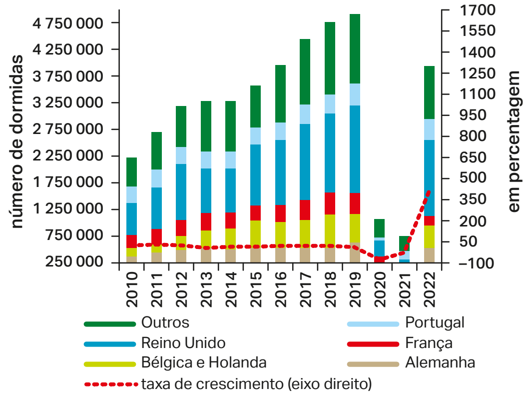
No campo da saúde, a estatística auxilia na análise de dados epidemiológicos, permitindo o controlo de pandemias e a elaboração de políticas públicas de prevenção e tratamento.

Na economia, é fundamental para a avaliação de mercados, previsões económicas, políticas fiscais e monetárias.

O impacto da estatística pode ser observado, por exemplo, na educação, quando se avalia o desempenho escolar, e no meio ambiente, ao medir as mudanças climáticas e os seus impactos.

Indicadores de confiança e procura turística





Além disso, num contexto de globalização, no qual existem disponíveis grandes volumes de dados, conhecido como *Big Data*, a estatística é a chave para compreender padrões, tendências e fazer previsões.

As empresas utilizam a análise estatística para otimizar operações e desenvolver estratégias de mercado, enquanto os governos aplicam-na para incrementar políticas públicas, baseadas em dados concretos. Nesse sentido, a importância da estatística vai além dos números, ela molda a sociedade, orientando decisões que afetam diretamente a vida das pessoas.

Os dois gráficos anteriores, apresentam dados sobre a procura turística em Cabo Verde, permitindo assim ao setor privado e público tomar decisões em relação ao turismo com base em informação estatística.

História da estatística no mundo

A história da estatística remonta a civilizações antigas, em que os primeiros registos de atividades estatísticas podem ser observados no Egito e na Babilónia, por volta de 3000 a. C.. Nessa época, as sociedades contabilizavam colheitas, impostos e propriedades.

Na China, o Governo também realizava censos regulares para quantificar a população e os recursos disponíveis.

A palavra "estatística" deriva do termo latino *status*, que se referia a dados do Estado, um reflexo da sua aplicação inicial na gestão de governos e populações.

Durante a Idade Média, a estatística avançou lentamente, mas ganhou um impulso significativo no século XVII, com o surgimento da Probabilidade como uma disciplina formal. Este período foi marcado pelo trabalho de estudiosos como Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que desenvolveram as bases da teoria das probabilidades. No século XVIII, a estatística moderna começou a consolidar-se com a introdução de técnicas como o recurso ao cálculo da média aritmética, bem como fazendo-se os primeiros estudos demográficos, como o trabalho de John Graunt, que analisou dados sobre a mortalidade em Londres.

No século XIX, a estatística passou por uma revolução com o desenvolvimento de métodos mais robustos para análise de dados. Personagens como Karl Pearson e Francis Galton foram cruciais para o avanço da estatística, estabelecendo a correlação e o conceito de regressão e introduzindo a distribuição normal. A criação do conceito de amostragem e a introdução de métodos inferenciais, desenvolvidos por Ronald Fisher no início do século XX, também foram passos fundamentais para o crescimento da estatística como ciência.

No século XXI, a estatística continua a evoluir rapidamente graças à parceria com a ciência da computação, permitindo a análise de grandes volumes de dados (*Big Data*). Esses avanços ampliam ainda mais o impacto da estatística em praticamente todos os domínios da vida humana.

A estatística em Cabo Verde

Em Cabo Verde, como em outros países, a estatística desempenha um papel crucial na formulação de políticas públicas e no desenvolvimento socioeconómico do país. As informações estatísticas são vitais para o governo, instituições e organizações internacionais avaliarem o progresso em diversas áreas, incluindo a saúde, educação, infraestruturas e desenvolvimento humano. A realização de censos periódicos e pesquisas estatísticas ajudam a desenhar um retrato detalhado da população, das suas condições de vida e dos desafios que enfrentam, contribuindo para a implementação de políticas mais eficazes e alinhadas com as necessidades reais da população, como, por exemplo, o planeamento de infraestruturas, como escolas e hospitais.

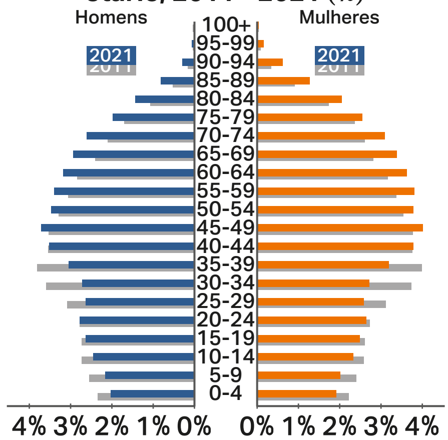
Espécies terrestres conhecidas, por ilha (2016)

	Fungos	Líquenes	Plantas	Animais	Total
	Número (N.º)				
Santo Antão	26	158	617	794	1595
São Vicente	26	81	328	569	1004
Santa Luzia	0	1	79	65	145
Ilhéu Branco	0	2	64	22	88
Ilhéu Raso	2	2	65	31	100
São Nicolau	16	113	405	560	1094
Sal	7	32	146	355	540
Boavista	1	28	222	360	611
Maio	0	13	229	260	502
Santiago	60	132	519	1204	1915
Fogo	5	105	451	519	1080
Brava	2	59	276	371	708

Fonte: INIDA

O primeiro censo oficial em Cabo Verde ocorreu em 1940, ainda sob a administração colonial portuguesa, e, desde então, os censos têm sido realizados regularmente. O mais recente aconteceu em 2021.

População residente por grupo etário, 2011 - 2021 (%)



Os censos têm como objetivo recolher dados fundamentais sobre a população, como o número de habitantes, estrutura etária, nível de educação, situação profissional e condições habitacionais.

Além dos censos, o Instituto Nacional de Estatística (INE) de Cabo Verde, fundado em 1996, é a principal instituição responsável pela produção, análise e divulgação de dados estatísticos no país.

O INE conduz inquéritos de diversos tipos, como o Inquérito Demográfico e de Saúde Reprodutiva (IDSR), o Inquérito Multiobjetivo Contínuo (IMC) e o Inquérito às Despesas e Receitas Familiares (IDRF). Estes inquéritos permitem obter uma visão ampla das condições socioeconómicas do país e oferecem informações valiosas para, como já referido, a formulação de políticas públicas e o desenvolvimento de estratégias de combate à pobreza e à desigualdade social.

A produção e disseminação de estatísticas confiáveis são também essenciais para a monitorização dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) das Nações Unidas, com os quais Cabo Verde está comprometido. Assim, o país pode monitorizar indicadores essenciais relacionados com a saúde, educação, igualdade de género, meio ambiente e outros aspetos importantes para o desenvolvimento sustentável.

Proporção (%) da população abrangida por:			
	Proteção social (INPS+CNPS)	**Regime contributivo (INPS)**	**Regime não contributivo (CNPS)**
Total	48,0	43,9	4,1
Feminino	49,6	43,8	5,8
Masculino	46,6	44,1	2,5

Fonte: Instituto Nacional de Previdência Social e Centro Nacional de Pensão Social

Tomar decisões informadas e resolver problemas de maneira eficaz depende da capacidade de analisar dados de forma crítica e estruturada. Para isso, é essencial desenvolver habilidades de matematização, isto é, de organizar e representar dados usando conceitos matemáticos, para então tirar conclusões que nos ajudem a entender melhor a realidade. Este processo envolve não apenas a manipulação de números e gráficos, mas também a consciência dos limites dessa matematização, para que possamos interpretar as conclusões com responsabilidade.

3.1.2. Recolha e organização de dados de natureza quantitativa e qualitativa, variáveis discretas e contínuas

Neste capítulo, vamos analisar aspetos relacionados com a formulação de questões pertinentes para a realização de um estudo estatístico, com a organização e representação dos dados de forma eficaz e como devem ser tratados esses dados de forma crítica, reconhecendo as limitações que podem existir durante todo o processo.

Recorda que a recolha de dados, a sua organização e tratamento, assim como a análise e interpretação dos mesmos, fazem parte de qualquer estudo estatístico.

Todos os dias são publicadas notícias baseadas em estudos estatísticos de maior ou menor relevância, as quais pretendem transmitir informações em diferentes domínios da atualidade.

Formular questões relevantes

O primeiro passo para analisar uma situação é definir o que queremos saber ou estudar. A formulação de questões claras e bem definidas é fundamental para guiar o processo de investigação e análise.

Exemplos de questões relevantes:

- Como tem evoluído a taxa de alfabetização nas diferentes ilhas ao longo dos anos?
- Qual é a distribuição da população em idade ativa nas zonas urbanas e rurais de Cabo Verde?
- Quais são os impactos das mudanças climáticas na agricultura local?

Ao formular questões, lembra-te de que elas devem ser:

- claramente definidas;
- específicas, pois quanto mais precisa for a pergunta, mais fácil será proceder à sua análise;
- relevantes, ou seja, as perguntas devem ser importantes para o contexto local e para a realidade.

Exemplo 1

Em vez de se perguntar "Como está o turismo de Cabo Verde?", uma pergunta mais pertinente seria "Como a pandemia afetou o turismo em Cabo Verde nos últimos dois anos?".

Exercício

1 **Estabelece a associação entre as diferentes situações a ser estudadas e a questão estatística mais adequada.**

Situação	Questão estatística
Uma escola quer avaliar o desempenho dos seus alunos no exame nacional de Matemática. •	• Quantos turistas visitaram cada ilha de Cabo Verde no último ano?
Uma empresa de transportes marítimos em Cabo Verde deseja saber a satisfação dos passageiros com os serviços oferecidos. •	• Qual é a média das notas dos alunos no exame nacional de Matemática?
Uma operadora turística quer avaliar a distribuição de turistas entre as diferentes ilhas do arquipélago. •	• Qual é a proporção da população vacinada contra a doença em cada ilha?
O Ministério da Saúde de Cabo Verde quer estudar a taxa de vacinação completa contra uma doença específica em diferentes ilhas. •	• Qual é a percentagem de passageiros que classificam o serviço como "muito bom" ou "excelente"?
Uma organização ambiental quer analisar a quantidade de resíduos reciclados em diferentes municípios ao longo dos últimos cinco anos. •	• Qual é a tendência na quantidade de resíduos reciclados nos últimos cinco anos em cada município?

Manual Interativo

Vídeos
População e amostra

Como elaborar um estudo estatístico

Definir a amostra

Durante a realização de um estudo estatístico é necessário definir a população sobre a qual realizamos esse estudo. Essa população não corresponde necessariamente à população de um país, pois podemos realizar estudos sobre parte de uma população ou ainda sobre instituições ou objetos.

Assim, consideramos **população**, ou u**niverso**, uma coleção de objetos com uma característica comum.

A cada elemento da população damos o nome de **indivíduo** ou **unidade estatística**.

Exemplo 2

Numa pesquisa realizada numa escola secundária com 800 alunos sobre continuar os estudos no ensino superior, teremos como população estatística todos os alunos dessa escola secundária, ou seja, os 800 alunos, e como indivíduo cada aluno dessa escola.

Um **censo** ou **recenseamento** é um estudo estatístico que implica a observação de todos os elementos da população.

A realização de censos é, por vezes, muito dispendiosa pelo facto de terem de ser recolhidos dados de todos os indivíduos da população. Noutras situações, nem é possível estudar toda a população.

Exemplo 3

Uma empresa quer determinar o tempo médio de vida útil de lâmpadas LED que produz. Para isso, terá de realizar testes para descobrir o número de horas que cada lâmpada funciona antes de fundir.

Repara que não é possível estudar toda a população, neste caso todas as lâmpadas LED produzidas pela empresa, pois:

- testar todas as lâmpadas seria inviável, pois isso exigiria destruir todas as lâmpadas durante os testes, não restando nada para ser vendido;
- o número total de lâmpadas produzidas é muito grande, tornando o estudo de toda a população inviável em termos de tempo e custo.

Assim, muitos estudos estatísticos são realizados observando só uma parte da população. Um estudo estatístico deste tipo é uma sondagem.

Uma **amostra** é um subconjunto de elementos extraídos da população em estudo utilizando uma metodologia adequada. O processo ou técnica usada para selecionar a amostra designa-se **amostragem**.

Uma **sondagem** é um estudo estatístico de uma população a partir de uma amostra.

Exercício

2 **Para cada uma das seguintes situações indica a população, o indivíduo e se o estudo é, ou não, uma sondagem.**

Situação 1: **Uma fábrica de** ***smartphones*** **pretende saber o número médio de defeitos encontrados nos seus produtos numa linha de produção. Para isso, a fábrica recolhe dados sobre a quantidade de defeitos por dispositivo fabricado.**

Situação 2: Uma pesquisa pretende avaliar o consumo mensal de energia elétrica de diversas casas num bairro. Os dados são coletados de todas as residências do bairro, com a quantidade de kWh consumidos por mês.

Situação 3: Uma universidade realiza um estudo sobre a produção de pesquisas científicas nas suas faculdades. A análise concentra-se no número de artigos científicos publicados por cada faculdade nos últimos cinco anos.

Situação 4: Está a ser feita uma análise de mercado sobre o preço médio de um produto em várias lojas de uma cidade. A pesquisa recolhe dados de preços de um produto específico em diferentes pontos de venda.

Situação 5: Uma empresa agrícola quer estudar o "peso" médio das mangas produzidas na sua plantação. A empresa recolhe dados de "peso" de todas as mangas colhidas numa safra.

Manual Interativo

Exercício
Identificar a população, amostra e unidade estatística de um estudo estatístico

A fiabilidade de uma sondagem depende das metodologias usadas para construir a amostra. A este procedimento de seleção chama-se amostragem.

Processos de amostragem

A **amostragem** é usada para selecionar uma parte da população que representará o todo, otimizando recursos e tempo.

As amostragens mais usuais são:

a) Amostragem aleatória simples

Na amostragem aleatória simples cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado, é um processo ideal para ser utilizado em populações homogéneas.

Exemplo 4

Uma escola com 500 alunos quer saber qual é a média de horas que eles gastam a estudar em casa por semana. Para isso, a escola decide realizar uma pesquisa, mas, em vez de perguntar a todos os 500 alunos, escolhe uma amostra aleatória, de 50 alunos, para fazer o levantamento.

Como na **amostragem aleatória simples**, cada aluno tem a mesma probabilidade de ser escolhido para participar na pesquisa. A seleção dos alunos é feita de forma completamente aleatória, sem que haja qualquer tipo de critério para escolher quem será incluído.

Para o processo de seleção é dado um número de identificação (ID) a cada aluno (de 1 a 500) e, posteriormente, são escolhidos os 50 alunos através de um sorteio aleatório, ou seja, qualquer aluno de 1 a 500 tem a mesma possibilidade de ser selecionado.

Manual Interativo

Vídeos
Como selecionar uma amostra?

Técnicas de amostragem aleatória

Vantagens da amostragem aleatória simples:

- Imparcialidade: Todos os indivíduos têm a mesma possibilidade de serem selecionados, o que elimina qualquer viés na amostra.
- Simplicidade: A técnica é fácil de implementar e pode ser aplicada de maneira eficiente.
- Representatividade: Quando bem realizada, a amostra tende a ser representativa da população, permitindo generalizações confiáveis.

Desvantagens da amostragem aleatória simples:

- Dificuldade na obtenção de uma lista completa da população: Para realizar a seleção aleatória, é necessário ter uma lista completa de todos os elementos da população, o que pode ser inviável em populações grandes ou dispersas.
- Custos elevados e tempo: O processo pode ser caro e demorado, especialmente quando envolve populações extensas ou geograficamente distribuídas, exigindo muitos recursos para recolher dados de diferentes locais.

Exercício

3 **Uma empresa quer saber a preferência dos seus funcionários em relação ao tipo de transporte que utilizam para chegar ao trabalho. Para isso, decide realizar uma pesquisa com todos os trabalhadores.**

3.1. Identifica:

a) a população estatística;

b) o indivíduo ou a unidade estatística.

3.2. Supõe que a empresa tem 500 funcionários, mas decide entrevistar apenas 100. Este estudo trata-se de um censo ou de uma sondagem?

3.3. Explica como aplicarias uma amostragem aleatória simples nesta situação.

b) Amostragem estratificada

Na amostragem estratificada, a população é dividida em diferentes estratos, devendo a proporção de indivíduos escolhidos em cada estrato ser aproximadamente igual à proporção do estrato no total da população. É bastante útil quando há subgrupos com características diferentes.

Exemplo 5

Uma universidade pretende saber a opinião dos estudantes sobre a qualidade das instalações do *campus*.

A população total é composta por $10\,000$ estudantes, divididos em quatro grupos:

- Curso de Engenharia: 4000 estudantes
- Curso de Economia: 2500 estudantes
- Curso de Letras: 2000 estudantes
- Curso de Artes: 1500 estudantes

Como esses grupos têm tamanhos diferentes, a universidade decide usar amostragem estratificada, de 1000 estudantes, para garantir que cada grupo seja proporcionalmente representado na amostra.

Assim, procede-se da seguinte forma:

1) Dividir a população em estratos.

Neste caso os estratos são os cursos: Engenharia, Economia, Letras e Artes.

2) Calcular a proporção de cada estrato na população.

- Engenharia: $\frac{4000}{10\,000} = 40\%$
- Economia: $\frac{2500}{10\,000} = 25\%$
- Letras: $\frac{2000}{10\,000} = 20\%$
- Artes: $\frac{1500}{10\,000} = 15\%$

3) Distribuir a amostra proporcionalmente para cada estrato.

- Engenharia: $1000 \times 40\% = 400$
- Economia: $1000 \times 25\% = 250$
- Letras: $1000 \times 20\% = 200$
- Artes: $1000 \times 15\% = 150$

4) Selecionar os indivíduos.

Dentro de cada estrato (curso), são escolhidos os 400, 250, 200 e 150 estudantes, recorrendo ao método de amostragem aleatória (ex.: sorteio ou números aleatórios).

A amostra total de 1000 estudantes será composta por:

- 400 estudantes de Engenharia
- 250 estudantes de Economia
- 200 estudantes de Letras
- 150 estudantes de Artes

Assim, a amostra é proporcional aos tamanhos dos estratos, garantindo que as opiniões de cada curso sejam representadas de forma justa.

Vantagens da amostragem estratificada:

- Representatividade garantida: grupos menores são incluídos de forma proporcional, o que não aconteceria numa amostragem simples.
- Redução de vieses: cada estrato é representado de acordo com a sua importância na população total.

Desvantagem da amostragem estratificada:

- Requer conhecimento prévio da população, bem como da estratificação que se pretende realizar, tornando o processo mais trabalhoso.

Exercício

4 **Uma empresa quer avaliar a satisfação dos seus clientes em relação aos serviços oferecidos. A empresa possui uma base de 6000 clientes, distribuídos por duas regiões:**

- **Barlavento: 4000 clientes**
- **Sotavento: 2000 clientes**

A empresa decide entrevistar uma amostra de 600 clientes, utilizando o método de amostragem estratificada proporcional para garantir que cada região esteja devidamente representada na amostra.

4.1. Quantos clientes devem ser selecionados de cada região?

4.2. Explica por que a amostragem estratificada proporcional é uma boa escolha para esse estudo.

4.3. Se a empresa, por questões de praticidade, decidir entrevistar apenas 50% dos clientes sorteados no Barlavento, mas mantiver os números exatos do Sotavento, qual seria o total de clientes entrevistados?

4.4. Analisa os riscos de alterar o tamanho da amostra de apenas uma região na representatividade dos resultados gerais.

c) Amostragem sistemática

Na amostragem sistemática, os elementos da população são escolhidos a partir de uma regra previamente definida. É um processo simples e rápido, mas pode ser enviesado se houver padrões na população.

Exemplo 6

Uma empresa de pesquisas quer avaliar a satisfação dos clientes em relação a um novo produto lançado. A empresa tem uma lista de 1000 clientes e decide selecionar uma amostra de 100 clientes para responder à pesquisa, sendo que a seleção decorrerá através de uma amostragem sistemática.

Assim, procede-se da seguinte forma:

1) Identificar o tamanho da amostra.

A empresa quer entrevistar 100 clientes a partir de uma lista de 1000 clientes.

2) Calcular o intervalo de amostragem.

O intervalo de amostragem é o número de elementos entre cada amostra. Para calcular, dividimos o tamanho da população pelo tamanho da amostra:

$$\text{Intervalo de amostragem} = \frac{\text{População}}{\text{Tamanho da amostra}} = \frac{1000}{100} = 10$$

Isto significa que, para selecionar a amostra, os clientes da lista serão escolhidos de 10 em 10.

3) Escolher um ponto de partida aleatório.

O próximo passo é escolher aleatoriamente o primeiro cliente da lista entre os primeiros 10. Suponhamos que o número sorteado seja o 6.

4) Selecionar os clientes.

A partir do número sorteado, a seleção é feita sistematicamente, de 10 em 10:

- primeiro cliente sorteado: 6.º da lista;
- depois serão os clientes nas posições 16.º, 26.º, 36.º, 46.º, ..., até se definirem os 100 clientes para a amostra.

5) Resultado da amostra.

A amostra será composta pelos clientes nas posições 6, 16, 26, 36, 46, ..., 996 na lista de 1000 clientes.

Vantagens da amostragem sistemática:

- Simplicidade: O processo é fácil de aplicar, especialmente quando os dados estão organizados numa lista ordenada.

Desvantagens da amostragem sistemática:

- Risco de viés: Se a lista tiver algum padrão (como clientes em ordem de frequência de compras), a amostragem pode ser enviesada. Por exemplo, se a lista estiver ordenada por data de compra, e houver um padrão de compras que se repete a cada 10 clientes, a amostra pode não ser representativa.

Exercício

5 **Uma empresa de telefones quer avaliar a qualidade do atendimento ao cliente na sua central de suporte. Para isso, decide entrevistar 500 clientes a partir de uma lista ordenada de $10\,000$ clientes atendidos no último mês. Será realizada uma amostragem sistemática.**

5.1. Qual será o intervalo de amostragem?

5.2. Se o ponto de partida aleatório sorteado for o cliente número 8, quais serão os primeiros cinco clientes selecionados?

5.3. Explica por que a amostragem sistemática pode ser uma boa escolha para este estudo.

5.4. Quais são os potenciais riscos de usar a lista fornecida pela empresa para aplicar a amostragem sistemática?

d) Amostragem por conglomerados

A **amostragem por conglomerados** é um método em que a população é dividida em *clusters* (grupos) e alguns *clusters* são selecionados aleatoriamente para análise completa. Revela-se muito útil em populações geograficamente dispersas.

Exemplo 7

O Ministério da Educação quer avaliar a qualidade do ensino nas escolas públicas de todo o país. Como o país tem várias ilhas e muitas escolas, seria impraticável entrevistar alunos de todas as escolas de todas as ilhas. Assim, o Ministério decide usar uma amostragem por conglomerados.

Procede-se da seguinte forma:

1) Definir os conglomerados.

Neste caso, as escolas públicas de uma ilha são os conglomerados. Cada escola de uma ilha pode ser considerada um conglomerado.

2) Seleção dos conglomerados.

O Ministério decide selecionar quatro ilhas de forma aleatória entre as nove ilhas que têm escolas.

3) Seleção dentro dos conglomerados.

O Ministério decide entrevistar todos os alunos de todas as escolas das quatro ilhas selecionadas. Ou seja, dentro de cada ilha, todos os alunos, de todas as escolas públicas, serão entrevistados sobre a qualidade do ensino.

Vantagens da amostragem por conglomerados:

- Eficiência: É mais prático do que realizar uma amostragem aleatória simples em toda a população, especialmente se os dados estão agrupados de forma natural (como neste caso, em escolas).
- Economia de tempo e custo: Selecionar grupos inteiros (escolas) e estudar todos os indivíduos dentro desses grupos pode ser mais rápido e barato, pois evita deslocamentos para entrevistar pessoas dispersas geograficamente.

Desvantagens da amostragem por conglomerados:

- Maior variação dentro dos conglomerados: Se os conglomerados não são homogéneos entre si (ou seja, se dentro de uma mesma escola as opiniões dos alunos variam muito), a amostra pode não ser representativa da população inteira.

- Possível viés: Se as escolas selecionadas não forem representativas das diferentes características da cidade (por exemplo, escolas de bairros mais ricos ou mais pobres), os resultados podem ser enviesados.

Exercício

6 **O Ministério do Turismo de Cabo Verde deseja realizar uma pesquisa para avaliar a satisfação dos turistas com os serviços de transporte entre as ilhas, como os *ferries* e voos domésticos. Existem nove ilhas habitadas em Cabo Verde e o Ministério tem dados sobre as condições de transporte em todas elas.**

Como seria inviável entrevistar todos os turistas de todas as ilhas, a pesquisa será feita usando uma amostragem por conglomerados. O Ministério decide selecionar algumas ilhas como conglomerados e entrevistar todos os turistas que estiverem nessas ilhas no momento da pesquisa.

A população deste estudo corresponde ao total de $200\,000$ turistas que visitaram as ilhas no último ano, e as principais ilhas turísticas são: Santiago, Sal, Boa Vista, São Vicente e Santo Antão.

O Ministério decide selecionar três ilhas aleatoriamente e, dentro dessas ilhas, entrevistar todos os turistas.

6.1. Quantos conglomerados foram selecionados para a amostra?

6.2. Supondo que as três ilhas selecionadas sejam Santiago, Sal e Boa Vista, e que o número de turistas em cada ilha seja o seguinte:

Santiago: $70\,000$ turistas

Sal: $50\,000$ turistas

Boa Vista: $30\,000$ turistas

Quantos turistas serão entrevistados no total?

6.3. Explica por que a amostragem por conglomerados foi uma boa escolha para esse estudo em Cabo Verde.

6.4. Quais são os potenciais riscos ou limitações ao usar a amostragem por conglomerados para avaliar a satisfação dos turistas nas ilhas de Cabo Verde?

e) Amostragem por conveniência

A **amostragem por conveniência** é um método em que a amostra é escolhida com base na facilidade de acesso aos elementos, sem um critério aleatório ou sistemático. Embora seja prática e económica, pode não ser representativa da população, resultando em possíveis vieses.

Exemplo 8

A Câmara Municipal da Boa Vista deseja saber a opinião dos moradores sobre a construção de uma nova praça pública. Por limitações de tempo e de recursos, decide entrevistar apenas as pessoas que estão a passear no parque central da cidade quando se realiza a pesquisa.

Assim, não existe um processo propriamente dito.

A população em estudo são todos os moradores da cidade.

A amostra corresponde apenas às pessoas que estavam presentes no parque central no momento da pesquisa e a escolha dos entrevistados é baseada na facilidade de acesso (as pessoas disponíveis no local), sem considerar se a amostra é representativa da população geral.

Vantagens da amostragem por conveniência:

- Rapidez e facilidade: É um método simples, ideal para quando há restrições de tempo, recursos ou acesso.
- Baixo custo: Não requer planeamentos ou métodos elaborados para selecionar a amostra.

Desvantagens da amostragem por conveniência:

- Falta de representatividade: As opiniões das pessoas podem não refletir as opiniões de toda a população, já que quem é escolhido pode ter características ou interesses diferentes dos restantes moradores.
- Vieses: O método pode resultar numa amostra enviesada, influenciando a validade dos resultados.

Exercício

7 **Um pesquisador está a desenvolver um estudo sobre as preferências gastronómicas dos turistas que visitam Cabo Verde. Como o estudo precisa de ser realizado rapidamente, o pesquisador decide aplicar um método de amostragem por conveniência.**

Ele escolhe realizar as entrevistas nos restaurantes do centro turístico de Santa Maria, na ilha do Sal, durante um único dia de trabalho. No total, ele entrevista 150 turistas que estavam a almoçar ou a jantar nos restaurantes, durante o período da pesquisa.

7.1. Qual é a população que é o alvo deste estudo?

7.2. A amostra de 150 turistas obtida neste estudo é representativa de todos os turistas que visitam Cabo Verde? Justifica.

7.3. Quais são as principais vantagens da amostragem por conveniência neste caso?

7.4. Quais são os riscos de usar a amostragem por conveniência para um estudo que pretende representar as preferências gastronómicas de todos os turistas em Cabo Verde?

7.5. Como o pesquisador poderia melhorar a representatividade do estudo?

De uma forma genérica, considerando as características da população, podemos dizer que:

- Para uma população grande e homogénea, a amostragem aleatória simples será o método mais adequado.
- Para uma população heterogénea, será melhor optar por uma amostragem estratificada.
- No caso da população ser dispersa ou agrupada, a amostragem por conglomerados será uma boa opção.
- No caso de um estudo exploratório inicial, será mais fácil utilizar uma amostragem por conveniência.

Repara que estes métodos garantem análises estatísticas confiáveis, permitindo inferências robustas e representativas dos dados populacionais.

Exercícios

8 **O INE – Instituto Nacional de Estatística deseja realizar diferentes estudos estatísticos para recolher dados sobre várias situações. Para cada caso, indica qual o tipo de amostragem que consideras mais adequado. Justifica a tua escolha.**

8.1. Pretende-se avaliar a satisfação dos turistas que visitaram todas as ilhas de Cabo Verde durante o ano, desejando obter-se dados representativos de todas as ilhas, mas existe um orçamento limitado para a realização da pesquisa e só se podem visitar três ilhas para recolher os dados.

8.2. Pretende-se investigar a saúde mental dos alunos, sendo que possuem os dados dos estudantes divididos por faculdades (Ciências, Engenharia, Direito, Medicina, etc.). Deseja-se garantir que a amostra represente proporcionalmente os alunos de cada faculdade.

8.3. Pretende-se medir a satisfação dos passageiros que utilizam os *ferries* para se deslocarem de uma ilha para outra. Então, decide-se entrevistar passageiros em diferentes pontos de recolha de passageiros, durante um único dia de pesquisa.

8.4. Pretende-se avaliar a satisfação dos clientes que utilizam serviços de fornecimento de energia de diferentes empresas. Então, selecionaram-se aleatoriamente 5000 clientes de uma lista de $50\,000$ clientes registados.

8.5. Pretende-se avaliar o nível de poluição do ar em diferentes bairros de uma cidade. Então, selecionaram-se cinco bairros ao acaso e mediu-se a qualidade do ar em todos eles.

9 **Justifica, em cada uma das seguintes situações, porque é que a amostra escolhida não é aquela que conduz a resultados mais fiáveis.**

9.1. Para saber qual o candidato mais votado para as eleições de Primeiro-Ministro em Cabo Verde, ouviu-se a opinião dos simpatizantes de determinado partido político.

9.2. Para avaliar a qualidade dos fósforos produzidos numa fábrica, acenderam-se todos os fósforos fabricados num dia.

9.3. Para saber a opinião das pessoas sobre música *rock*, questionou-se um grupo de pessoas que saíam de um concerto de música *rock*.

Organizar dados

Depois de formular a questão, o próximo passo é recolher dados que ajudem a responder à mesma. Os resultados obtidos, sejam quantitativos ou qualitativos, chamam-se dados estatísticos.

A organização desses dados de forma estruturada facilita a sua análise posterior.

Os dados podem ser organizados de diferentes formas, dependendo do tipo de informação recolhida. Contudo, normalmente, são organizados em **tabelas**.

Exemplo:

Número de turistas que visitaram Cabo Verde ao longo dos últimos anos

Ano	Total de turistas	Ilha do Sal	Ilha da Boa Vista	Ilha de Santiago	Ilha de São Vicente
2022	705 555	59,1%	34,5%	2,3%	2,1%
2021	302 957	61,2%	33,6%	2,2%	1,9%
2020	85 897	74,3%	20,0%	3,9%	1,0%
2019	819 308	40,2%	39,9%	11,7%	5,1%

Fonte: Instituto Nacional de Estatística (INE), 2022

Analisando a tabela anterior, podemos dizer que:

- a Ilha do Sal continua a ser a mais visitada, com a maioria dos turistas escolhendo esta ilha para a sua estadia;
- o número de turistas diminuiu significativamente em 2020, com um total de 85 897 turistas;
- o número de turistas aumentou significativamente em 2022, com um total de 705 555 turistas, mas não alcançando os valores anteriores a 2020.

Tabelas de frequências

Como já foi referido, quando se recolhem dados estatísticos é essencial organizá-los de forma a facilitar a sua leitura e interpretação, por exemplo, recorrendo a tabelas.

Uma das questões mais importantes é que a variável estatística em estudo seja definida de forma clara, bem como a população ou a amostra sobre a qual incidem os dados.

Sempre que se conhece o valor da variável estatística para cada indivíduo ou elemento da população ou da amostra em estudo dizemos que temos uma **distribuição estatística.**

Designam-se por x_1, x_2, x_3, ..., x_n os diferentes valores que a variável estatística x pode assumir.

No caso da variável estatística x ser quantitativa e assumir apenas um número limitado de valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n, é necessário ordenar os valores que a variável assume por ordem crescente.

Exemplo 9

Na turma do 10.º ano de uma determinada escola, realizou-se um estudo sobre as idades dos alunos da turma. Os dados obtidos estão registados na seguinte tabela:

16	17	17	16	18	16	16	15	16	17
15	16	17	18	19	17	16	17	16	18
17	17	16	15	18	16	16	16	17	18

A variável estatística em estudo é a "Idade", sendo que a população em estudo é uma turma do 10.º ano.

Neste caso, a variável estatística pode assumir os valores:

15, 16, 17, 18, 19

Assim, $x_1 = 15$; $x_2 = 16$; $x_3 = 17$; $x_4 = 18$; $x_5 = 19$

Quando se pretende organizar os dados numa tabela, na coluna da esquerda colocam-se os diferentes valores x_i que a variável em estudo pode assumir e na coluna seguinte regista-se o número de vezes que cada valor x_i da variável aparece na amostra estudada.

Exemplo 10

Considerando a situação do estudo da idade dos alunos de uma turma do 10.º ano, teríamos:

Idade	N.º de alunos
15	3
16	12
17	9
18	5
19	1

A **frequência absoluta** de um dado estatístico é o número de vezes que este se repete e representa-se por f_i.

A tabela do exemplo é então representada da seguinte forma:

x_i	f_i
15	3
16	12
17	9
18	5
19	1
Total	30

Exemplo 11

Supõe que precisávamos de comparar as idades dos alunos da turma do 10.º ano com as idades dos alunos da turma do 11.º ano da mesma escola, e sabíamos que 8 alunos do 11.º ano tinham 17 anos.

Esta informação, por si só, não nos permite fazer uma comparação, pois não sabemos o "peso" dos 8 alunos no total dos alunos do 11.º ano.

Imagina que o número total de alunos do 11.º ano é de 32, então $\frac{8}{32} = 25\%$ têm 17 anos.

Mas se forem apenas 20 alunos, então $\frac{8}{20} = 40\%$ dos alunos do 11.º ano têm 17 anos.

A razão entre a frequência absoluta e o total de observações permite-nos comparar melhor as duas distribuições.

A **frequência relativa** de um dado estatístico corresponde ao quociente entre a frequência absoluta (f_i) e o número total de dados observados (n) e representa-se por: $fr_i = \frac{f_i}{n}$.

A frequência relativa pode ser apresentada na forma de fração, número decimal ou percentagem.

Exemplo 12

Assim, na turma do 10.º ano, teríamos a seguinte tabela de frequências absolutas e relativas:

x_i	f_i	fr_i
15	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1 = 10\%$
16	12	$\frac{12}{30} = 0{,}4 = 40\%$
17	9	$\frac{9}{30} = 0{,}3 = 30\%$
18	5	$\frac{5}{30} = 0{,}1(6) \cong 17\%$
19	1	$\frac{1}{30} = 0{,}0(3) \cong 3\%$
Total	30	100%

E, agora, supondo que os alunos do 11.º ano eram 24, já poderíamos comparar a proporção de alunos com 17 anos.

$$\frac{8}{24} \approx 33\%$$

Logo, apesar de no 10.º ano existirem mais alunos com 17 anos, no 11.º a proporção de alunos com 17 anos é maior.

Suponhamos agora que nos questionavam quantos alunos do 10.º ano têm 17 anos ou menos.

Para responder à questão, teríamos de somar as frequências absolutas ou relativas para os 15 anos, 16 anos e 17 anos, ou seja:

- $3 + 12 + 9 = 24$ alunos têm 17 anos ou menos;
- $10\% + 40\% + 30\% = 80\%$ dos alunos têm 17 anos ou menos.

Para responder a este tipo de questões é útil determinarmos e indicar na tabela as frequências absolutas acumuladas e as frequências relativas acumuladas.

Manual Interativo

Vídeo
Tabela de frequências acumuladas

Exercício
Construir uma tabela de frequências absolutas e relativas

Exemplo 13

x_i	f_i	fr_i	F_i	Fr_i
15	3	$\frac{3}{30}=0{,}1=10\%$	3	10%
16	12	$\frac{12}{30}=0{,}4=40\%$	$3+12=15$	$10\%+40\%=50\%$
17	9	$\frac{9}{30}=0{,}3=30\%$	$15+9=24$	$50\%+30\%=80\%$
18	5	$\frac{5}{30}=0{,}1(6)\cong 17\%$	$24+5=29$	$80\%+17\%=97\%$
19	1	$\frac{1}{30}=0{,}0(3)\cong 3\%$	$29+1=30$	$97\%+3\%=100\%$
Total	30	100%		

Chama-se **frequência absoluta acumulada** do valor x_i à soma das frequências absolutas de todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por F_i.
Chama-se **frequência relativa acumulada** do valor x_i à soma das frequências relativas de todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por Fr_i.

Exercício

10 Registou-se o número de crias nascidas por ninhada de um casal de coelhos, obtendo-se os seguintes dados:

5 2 3 2 5 3 4 1 3 5 5 2 4 1 5 5 1 2 4 4
2 3 3 4 2 3 5 4 3 5 4 4 3 5 4 4 5 4 4 2

Constrói uma tabela de frequências absolutas simples, relativas simples e absolutas e acumuladas.

Representar dados

Uma vez organizados, os dados precisam de ser apresentados à sociedade de forma precisa, clara, confortável e apelativa. Na maioria das vezes, essa informação apresenta-se recorrendo a representações gráficas, que podem assumir diferentes formas, e que irão facilitar a compreensão dos dados recolhidos.

Independentemente do tipo de gráfico utilizado, estes devem conter informações básicas, tais como:

- título: indicam o tema principal da tabela ou gráfico;
- eixos (em gráficos): o eixo x e o eixo y mostram as variáveis representadas;
- legendas: ajudam a identificar o que cada elemento visual (cores, linhas, barras) representa;
- escalas: identificam unidades e intervalos, garantindo que os dados sejam comparáveis.

Manual Interativo

Vídeo
Gráfico de barras

Exercício
Interpretar um gráfico de barras

Gráficos de barras

Os **gráficos de barras** são ferramentas visuais amplamente utilizados em estatística e em análises de dados para comparar e representar dados qualitativos ou quantitativos discretos de forma clara, permitindo identificar padrões, tendências ou discrepâncias nos dados.

Esta é uma das representações gráficas mais usuais.

As categorias são dispostas no eixo horizontal (eixo do x) se as barras forem verticais, no eixo vertical (eixo do y) se as barras forem horizontais.

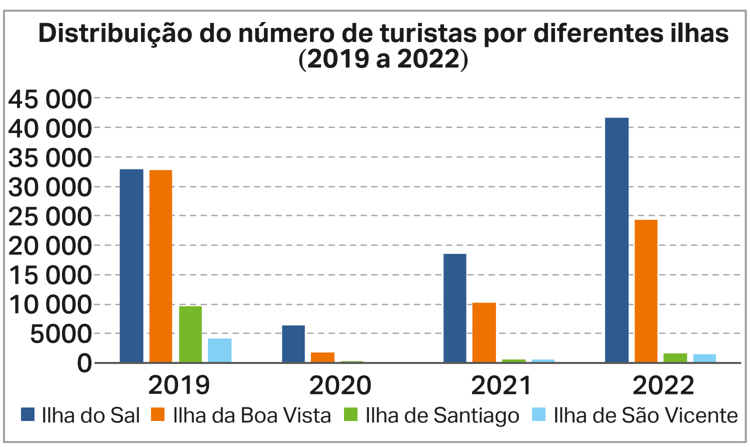
A altura (ou comprimento) da barra reflete o valor ou a frequência da categoria correspondente, ou seja, é proporcional à frequência que lhe corresponde.

Os gráficos de barras são de fácil leitura, por serem simples e intuitivos, mesmo para quem não tem conhecimentos estatísticos avançados. Além disso, são **flexíveis**, uma vez que podem ser usados para dados quantitativos ou qualitativos, e **versáteis**, funcionam bem para pequenas ou grandes quantidades de categorias.

Contudo, pode-se tornar confuso se houver muitas categorias ou subcategorias e uma escolha inadequada da escala do gráfico pode distorcer a interpretação.

Exemplo 14

Um gráfico de barras permite-nos comparar, neste caso, o número de turistas em cada uma das ilhas ao longo de quatro anos.



Neste caso, podemos dizer que:

- o número de turistas baixou drasticamente em 2020, provavelmente devido à pandemia do Covid-19;
- em 2022, o número total de turistas aproximou-se dos valores de 2019, sendo que na ilha do Sal receberam mais turistas do que em 2019.

Exercício

11 **Numa turma com 20 alunos, recolheram-se dados sobre o número de calçado de cada um.**

Os resultados obtidos foram os seguintes:

43 42 41 39 41 37 40 43 44 40 39 39 38 41 40 39 38 39 39 40

11.1. Constrói uma tabela de frequências absolutas simples e de frequências relativas.

11.2. Constrói um gráfico de barras que traduza as frequências absolutas da distribuição.

Gráficos circulares

Este tipo de representação pode ser utilizado em dados quantitativos e qualitativos. É uma ferramenta visual usada em estatística e em análise de dados para representar proporções ou percentagens de categorias num conjunto de dados.

Num gráfico circular, representamos cada uma das categorias de dados por um setor circular cuja amplitude é proporcional à frequência relativa. Assim, para obter a amplitude de cada setor é suficiente multiplicar a respetiva frequência relativa, expressa em numeral decimal, por 360°.

Normalmente, é utilizado para destacar a contribuição relativa de cada categoria em relação ao todo, sendo ideal para comparar visualmente as proporções entre categorias.

É fácil de entender e interpretar, mas não é adequado para conjuntos de dados com muitas categorias, pois pode-se tornar confuso e pode ser menos preciso do que outros gráficos (como o de barras) para comparar valores próximos.

Exemplo 15

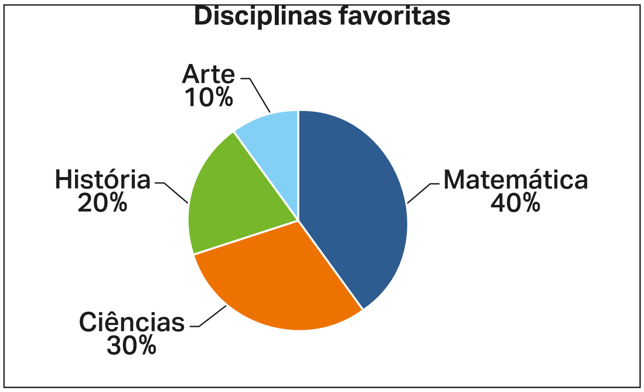
Imagina que foi realizada uma pesquisa com 100 alunos sobre as suas disciplinas favoritas e os resultados foram:

Disciplina favorita	N.º de alunos
Matemática	40
Ciências	30
História	20
Arte	10
Total	100

Ao criar um gráfico circular, os setores terão as seguintes amplitudes:

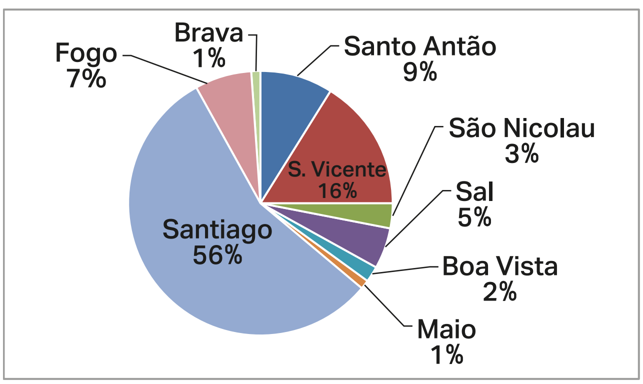
- Matemática: $\frac{40}{100} \times 360° = 144°$
- Ciências: $\frac{30}{100} \times 360° = 108°$
- História: $\frac{20}{100} \times 360° = 72°$
- Arte: $\frac{10}{100} \times 360° = 36°$

Assim, obteríamos o seguinte gráfico circular:



Exemplo 16

Considera o seguinte gráfico circular relativo à distribuição da população de Cabo Verde, em 2010.



Fonte: Fernandes, Nélida & Carvalho, Paulo. (2014). Território, população e desenvolvimento em Cabo Verde. DELOS. 7 (19). 12 pp.

Neste caso, podemos dizer que:

- em 2010, a maioria da população cabo-verdiana estava concentrada na ilha de Santiago;
- em 2010, as ilhas de Maio e Brava eram as ilhas com menor número de habitantes.

Exercício

12 Considera a situação do exercício anterior:

Numa turma com 20 alunos, recolheram-se dados sobre o número de calçado de cada um.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

43 42 41 39 41 37 40 43 44 40 39 39 38 41 40 39 38 39 39 40

Constrói um gráfico circular que traduza a distribuição.

Gráficos de linhas

Os **gráficos de linhas** são ferramentas visuais usadas para mostrar tendências, variações ou padrões em dados contínuos ao longo de um intervalo (como tempo, distância ou qualquer outra variável ordenada). Eles utilizam pontos conectados por linhas para representar os dados.

Por norma, no **eixo do** x (horizontal) surge a variável independente, como anos, meses, ou dias e no **eixo do** y (vertical) a variável dependente, como valores ou medições. Os pontos são marcados em coordenadas no plano cartesiano e conectados por linhas.

Este tipo de gráfico permite mostrar como os valores variam ou evoluem ao longo do tempo e identificar padrões como aumento, redução ou ciclos nos dados.

Os gráficos de linhas podem ser:

- **simples:** representa uma única série de dados;
- **múltiplo:** representa várias séries de dados num único gráfico para comparações.

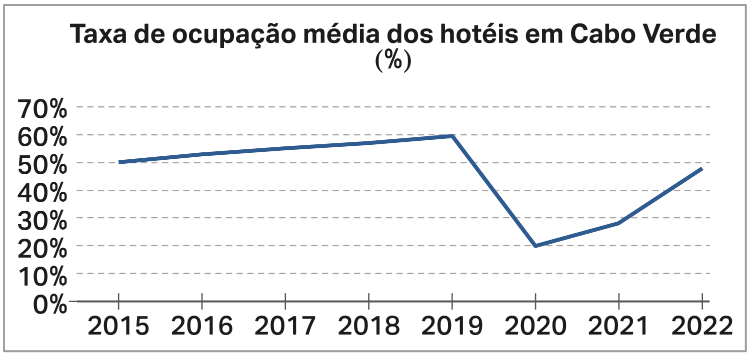
Estes gráficos são fáceis de interpretar visualmente para identificar picos, quedas ou estabilidade, são excelentes para mostrar tendências e mudanças ao longo do tempo e permitem comparar várias séries num mesmo gráfico.

Contudo, não são adequados para dados sem uma ordem lógica e pode ser confuso representar diferentes distribuições em simultâneo.

Devem ser utilizados para mostrar como os valores mudam ao longo do tempo, para destacar padrões e tendências, como crescimento, declínio ou sazonalidade, e para comparar o desempenho de diferentes séries temporais num único gráfico.

Exemplo 17

A evolução da taxa de ocupação dos hotéis ao longo do tempo pode ser melhor visualizada num gráfico de linhas.



Neste caso, podemos dizer que:

- a taxa de ocupação média de hotéis, em Cabo Verde, decaiu de 2019 para 2020;
- a partir de 2020 tem vindo a aumentar, sendo que ainda não alcançou os valores de 2015.

Exercício

13 **A seguinte tabela apresenta o crescimento de uma criança, considerando variáveis comuns como idade (anos), altura (em cm) e "peso" (em kg) durante 15 anos.**

Idade (anos)	Altura (cm)	"Peso" (kg)
1	75	9,5
2	88	11,0
3	95	12,5
4	102	14,0
5	108	15,5
6	115	17,0
7	122	18,5
8	130	20,0
9	137	22,0
10	143	24,0
11	150	26,0
12	157	28,0
13	163	30,5
14	168	32,0
15	172	34,0

Constrói os gráficos de linhas relativos à variação da altura e à variação do "peso", em função da idade.

Pictograma

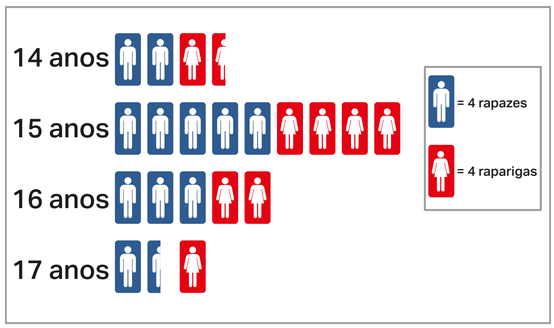
Um **pictograma** é um tipo de gráfico que utiliza ícones ou imagens para representar dados quantitativos de forma visual e acessível. Cada ícone ou figura no gráfico corresponde a um valor ou quantidade específicos e o número de ícones reflete a frequência do dado.

Um pictograma também torna a apresentação de dados intuitiva e visualmente atraente, simplificando a compreensão de quantidades e proporções e facilitando a comparação entre categorias de forma direta e visual.

Contudo, pode ser pouco preciso, principalmente se os ícones forem divididos.

Exemplo 18

Distribuição de idades dos alunos de um curso profissional de uma escola



Neste caso, podemos dizer que:

- a maioria dos alunos tem 15 anos e desses 20 são rapazes e 16 são raparigas;
- há 8 alunos com 14 anos e seis alunas com 14 anos.

Exercício

14 Uma escola realizou uma pesquisa sobre os estilos musicais preferidos de 30 alunos. Os resultados da pesquisa estão organizados na tabela seguinte.

Estilo musical	Frequência absoluta (n.º de alunos)
Pop	8
Hip-Hop	6
Kizomba	5
Rock	4
Música clássica	3
Reggae	4

Constrói um **pictograma** para representar estes dados.

Sugestão: Escolhe um símbolo, por exemplo, um círculo, que pode representar **dois alunos**.

Histograma

Um **histograma** é um tipo de gráfico usado para representar dados quantitativos de forma visual, mostrando a **distribuição de frequências** de um conjunto de dados. É muito usado em estatística para analisar dados numéricos contínuos ou discretos organizados em intervalos, ou seja, dados agrupados em classes.

O gráfico é formado por uma sucessão de retângulos adjacentes, ou seja, não existe espaço entre eles. Isso indica que os dados são contínuos, tendo cada um por base um intervalo de classe e por altura a frequência relativa ou absoluta.

Manual Interativo

Vídeos
Histogramas

Representação de dados em histogramas

Exemplo 18

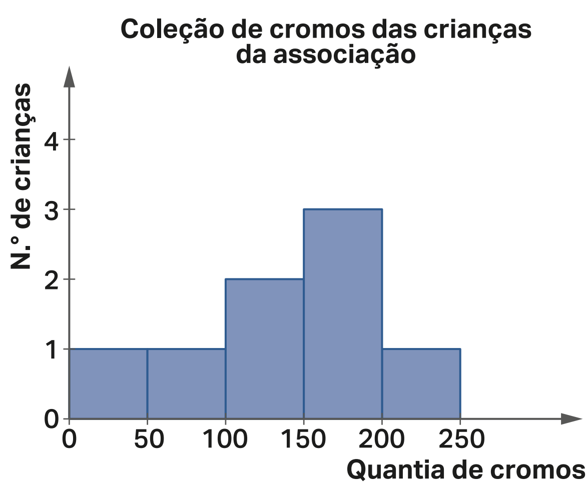
Numa associação, perguntou-se a um grupo de crianças quantos cromos de uma determinada coleção tinham. As respostas foram:

$$170\,;\ 220\,;\ 100\,;\ 150\,;\ 50\,;\ 24\,;\ 118\,;\ 181$$

Organizaram-se os dados em classes e construiu-se a tabela de frequências absolutas:

Quantidade de cromos na coleção	frequência absoluta
$[0\,,\ 50[$	1
$[50\,,\ 100[$	1
$[100\,,\ 150[$	2
$[150\,,\ 200[$	3
$[200\,,\ 250[$	1
Total	8

Por fim, construiu-se um histograma para representar a distribuição:



Exercício

15 Uma turma de 30 alunos do 10.º ano foi questionada sobre o número de horas que dedicam ao estudo diário.

Os resultados obtidos foram agrupados na tabela a seguir.

Horas de estudo por dia	Frequência absoluta
$[0, 1[$	5
$[1, 2[$	8
$[2, 3[$	9
$[3, 4[$	5
$[4, 5[$	3

Constrói um **histograma** que represente estes dados.

É importante ter sempre em consideração que a escolha da representação gráfica deve ser feita com base no tipo de dados e na pergunta a que se quer responder.

Atualmente, a construção de gráficos estatísticos manualmente tem-se tornado obsoleta devido ao avanço tecnológico e ao surgimento de diversas **ferramentas digitais** especializadas. Estas ferramentas são mais eficientes, precisas e rápidas, pois automatizam o processo de criação e análise de gráficos, eliminando erros humanos comuns na elaboração manual.

Com o uso de *software* como **Excel, Google Sheets, SPSS, Tableau ou outros programas estatísticos**, é possível criar gráficos de forma rápida e interativa, o que facilita a análise visual de dados. Além disso, esses recursos permitem ajustes automáticos, atualizações em tempo real e acesso a recursos avançados de visualização de dados.

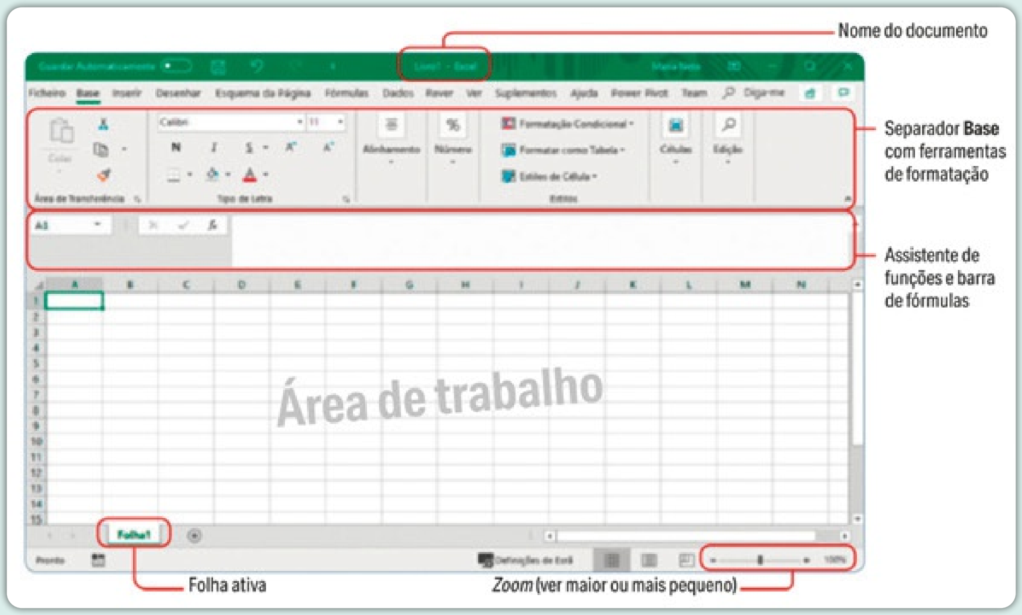
Portanto, ao invés de recorrer à elaboração manual de tabelas e representações gráficas, as ferramentas digitais oferecem maior praticidade, confiabilidade e produtividade para estudantes, pesquisadores e profissionais na análise e interpretação de informações estatísticas.

Tarefa

1 Construção de tabelas e gráficos com recurso ao Excel

1. Abrir o Excel.

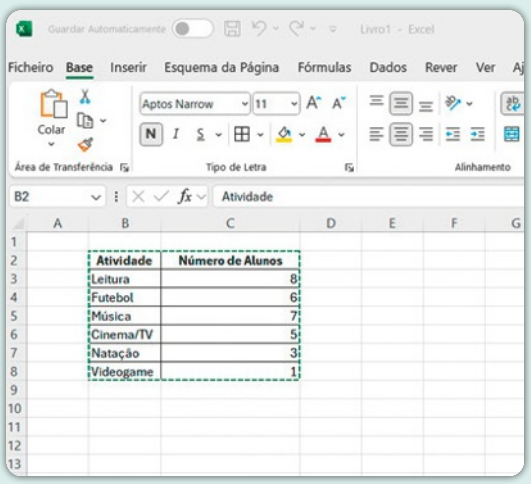
No teu computador abre o programa Excel. O aspeto visual assemelha-se a uma tabela (folha de cálculo), sendo que os diferentes separadores se assemelham aos separadores que surgem no Word.



2. Insere os dados.

Na folha de cálculo insere os seguintes dados. Tem em atenção que em cada célula deves colocar a informação correspondente.

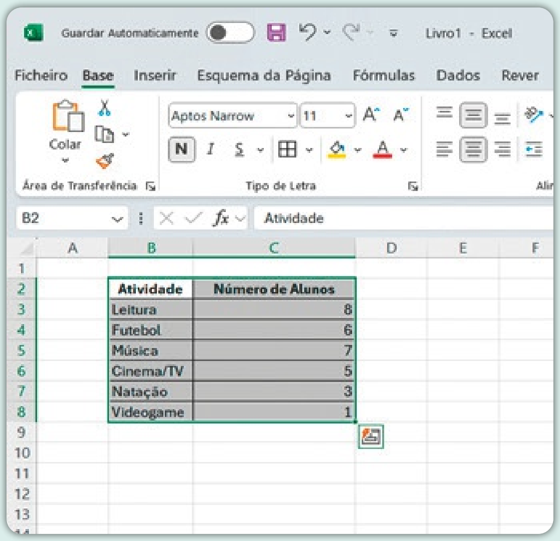
Atividade	Número de alunos
Leitura	8
Futebol	6
Música	7
Cinema/TV	5
Natação	3
Videogame	1



3. Construir gráficos.

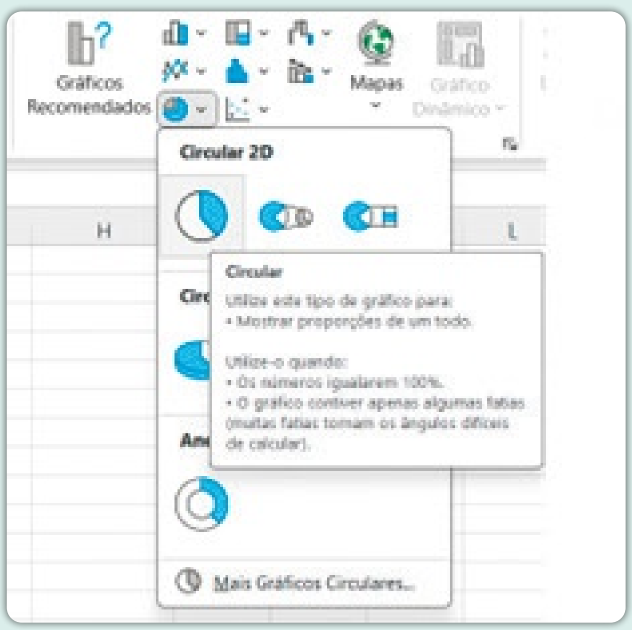
Depois de inserirmos os dados, podemos construir diferentes tipos de gráficos.

- **Selecionar todas as células que contêm informação**

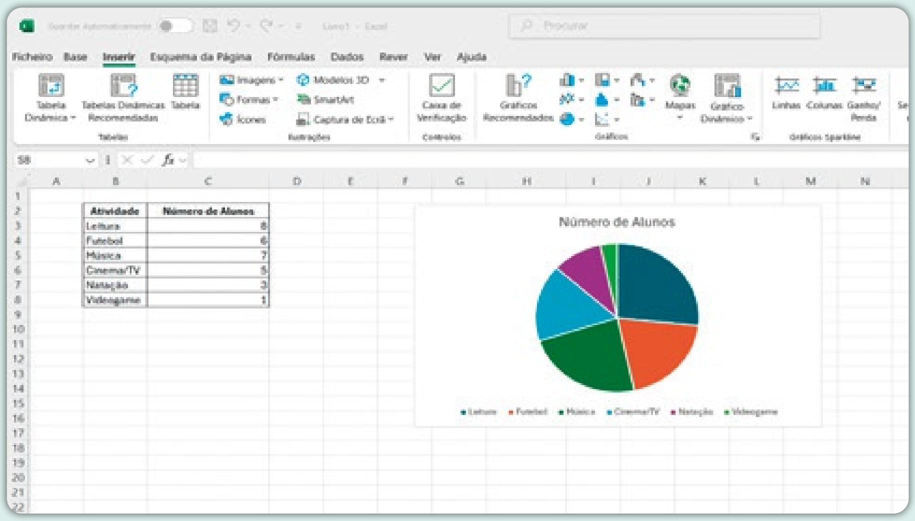


- **Clicar em "Inserir".**

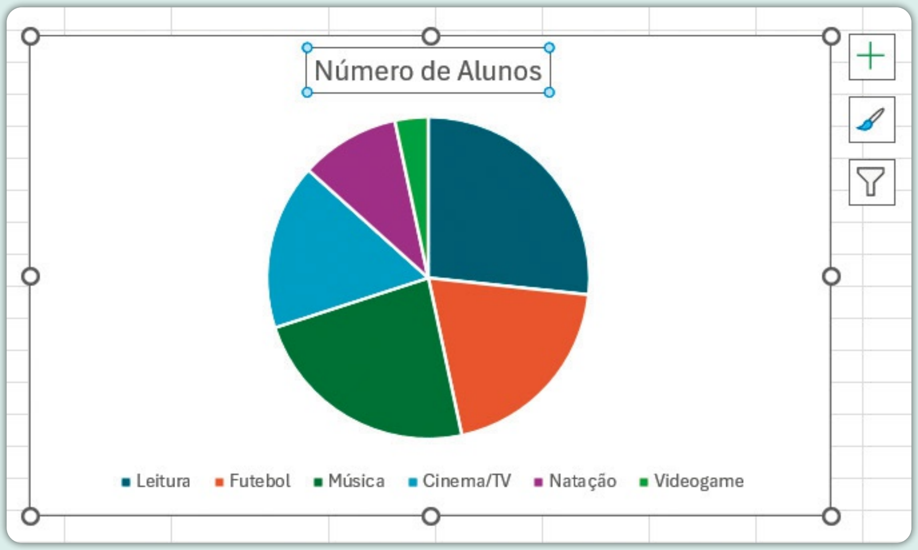
- **Escolher o tipo e estilo de gráfico pretendido, por exemplo, Gráfico Circular >>Circular 2D.**



O gráfico surgirá na folha de cálculo.



Atenção: Podes alterar o aspeto visual do gráfico incluindo o título clicando sobre as diferentes caixas que surgem.



4. Explora o programa e constrói agora um gráfico de barras.

2 Considera todos os gráficos que construíste nesta seção.
Utilizando o Excel ou outro *software* de estudo estatístico e constrói novamente, agora em formato digital, esses gráficos.

Interpretação de tabelas e gráficos

Manual Interativo

Vídeo
Pictograma

Exercício
Interpretar um histograma

Em qualquer estudo estatístico, após a recolha, organização e representação dos dados, é fundamental realizar a análise e reflexão sobre os resultados obtidos. Isso significa que apenas apresentar os dados de forma visual ou numérica não é suficiente. É necessário interpretá-los de maneira crítica para identificar padrões, tendências, correlações ou problemas relevantes.

O tratamento e a análise dos dados envolvem examinar as informações para responder às perguntas do estudo, validar hipóteses ou identificar oportunidades de ação. A reflexão permite compreender o significado dos dados no contexto da situação analisada, ajudando na tomada de decisões fundamentadas.

Portanto, após a representação visual (gráficos, tabelas, histograma, etc.) ou numérica dos dados, é essencial não apenas observar, mas analisar, interpretar e refletir sobre esses resultados para implementar ações eficazes e orientadas pela realidade dos dados.

Essa abordagem transforma a informação em conhecimento prático, que pode ser aplicado para resolver problemas, planear estratégias e tomar decisões mais precisas e fundamentadas.

Vejamos, então, essas etapas.

Tratar dados e realizar conclusões

Após a representação, é necessário tratar os dados. Isso envolve cálculos, análises e a interpretação crítica dos resultados.

Outras técnicas podem ajudar a tirar conclusões a partir dos dados, como:

- média, mediana e moda, para descrever características da distribuição;
- cálculos de crescimento ou variação, para entender tendências.

(Na secção seguinte proceder-se-á ao estudo destas medidas de localização e dispersão.)

No entanto, é importante ter consciência dos limites dessa matematização. As conclusões tiradas a partir dos dados podem ser influenciadas por diversos fatores externos, como erros na recolha dos dados, limitações nas fontes ou até mesmo na amostra considerada para aplicar o estudo estatístico. Por isso, ao concluíres as tuas análises, reflete sempre sobre as possíveis incertezas e limitações do processo.

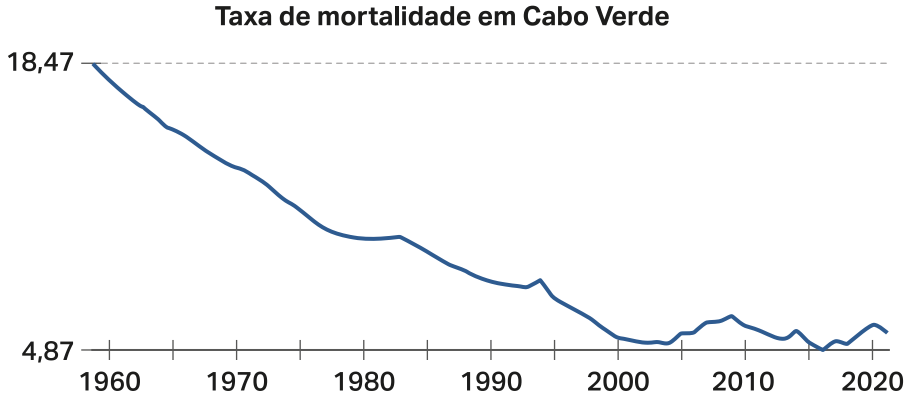
Reflexão crítica e conclusão

Por fim, a análise crítica dos dados implica questionar as conclusões tiradas. Não se deve confiar cegamente nos resultados obtidos, mas sim refletir sobre as implicações desses dados para a sociedade, para a política e para o futuro.

Exemplo 20

Considera o seguinte gráfico de linhas no qual se apresenta a taxa de mortalidade, desde 1960 a 2022, em Cabo Verde.

A taxa de mortalidade é expressa como "número de mortes por mil habitantes por ano".



Considerando o gráfico, podemos concluir que:

- em 2022, Cabo Verde teve uma taxa de mortalidade de cerca de 5 mortes por cada 1000 habitantes;
- o valor mínimo foi de $4,87$ mortes por 1000 habitantes, entre 2015 e 2020, e o máximo foi de $18,47$ em 1960;
- o gráfico indica que a taxa de mortalidade tem diminuído desde 1960. Contudo, a taxa de mortalidade sofreu ligeiros aumentos por volta de 2005 e, novamente, por volta de 2019.

Refletindo sobre os dados apresentados, podemos dizer que:

- o aumento da taxa de mortalidade, em 2020, é justificado pela pandemia Covid-19;
- refletindo criticamente sobre mudanças em políticas públicas para reduzir a taxa de mortalidade, poderiam ser priorizadas as seguintes ações:
  - melhoria no acesso aos serviços de saúde: garantir acesso a hospitais, clínicas e programas de vacinação;
  - programas de prevenção de doenças: campanhas de consciencialização sobre doenças crónicas e transmissíveis;
  - investimentos em saneamento básico e água potável: evitando doenças causadas por falta de infraestruturas;
  - educação em saúde materna e infantil: reduzir a mortalidade neonatal e a materna com acompanhamento pré-natal;
  - atenção a grupos vulneráveis: apoio a idosos e a populações de risco com programas específicos.

Atenção: Há alguns erros comuns que se cometem na análise de dados e tabelas, tais como:

- não compreender as escalas dos eixos;
- ignorar os rótulos ou títulos;
- assumir tendências sem base nos dados apresentados.

Exercícios

16 **A seguinte tabela apresenta a proporção da população pobre, por sexo, grupo etário e população empregada.**

	Proporção de população pobre (%)
Cabo Verde	35,2
Sexo	
Masculino	34,5
Feminino	35,9
Grupo etário	
0 – 4 anos	44,4
5 – 14 anos	43,1
15 – 24 anos	38,4
25 – 34 anos	27,7
35 – 64 anos	29,0
65 anos ou mais	27,2
População empregada	27,2
Masculino	27,1
Feminino	27,4

Nota: Proporção da população pobre = Incidência da pobreza
Fonte: INE – Inquérito às Despesas e Receitas Familiares (DIRF), 2015.

16.1. Qual é a proporção total da **população pobre** em Cabo Verde, de acordo com os dados fornecidos?

16.2. A tabela mostra diferenças na proporção de pobreza entre homens e mulheres.

a) Qual dos dois sexos tem uma maior incidência de pobreza?

b) Qual é a diferença percentual entre eles?

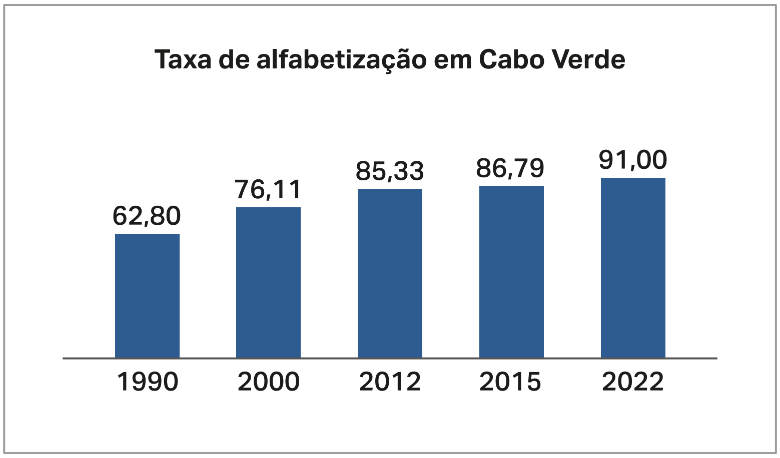
16.3. De acordo com a tabela, que grupo etário apresenta a maior proporção de população pobre? Que grupo apresenta a menor?

16.4. A incidência de pobreza também é analisada entre a população empregue.

a) Qual é a proporção de pobreza entre os homens empregados e as mulheres empregadas?

b) Há diferença significativa entre os dois?

17 **Considera o seguinte gráfico de barras em que se apresenta a taxa de alfabetização em Cabo Verde em diferentes anos.**



Fonte: https://pt.theglobaleconomy.com/Cape-Verde/Literacy_rate/

17.1. Qual era a taxa de alfabetização em Cabo Verde em 1990?

17.2. Qual foi a taxa de alfabetização em 2000?

17.3. Qual foi o aumento da taxa de alfabetização entre 1990 e 2000?

17.4. Compara a taxa de alfabetização entre os anos de 2012, 2015 e 2022. Houve algum aumento significativo durante esse período?

17.5. Qual foi o ano em que a taxa de alfabetização apresentou o maior valor?

17.6. Calcula a diferença entre a taxa de alfabetização em 2012 e a taxa em 2015.

17.7. Considerando a taxa de alfabetização em 2022, qual é o percentual de aumento em relação a 1990?

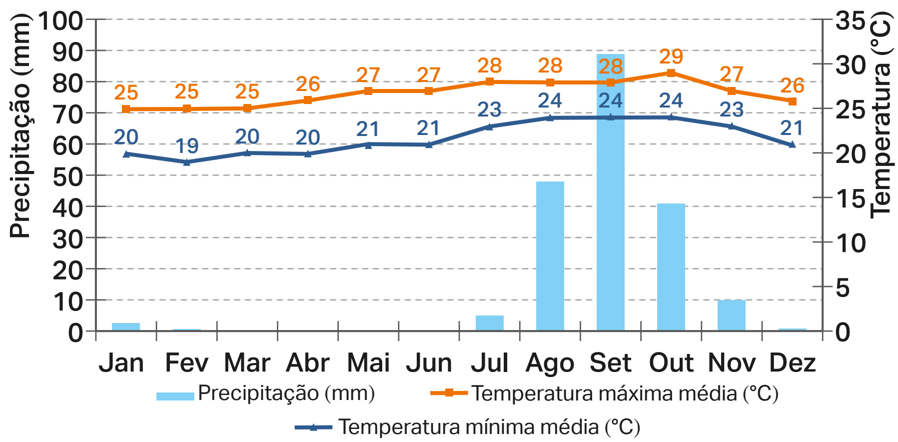
17.8. Que fatores acreditas que contribuíram para o aumento da taxa de alfabetização em Cabo Verde desde 1990 até 2022?

17.9. De acordo com os dados apresentados, é possível identificar uma tendência de crescimento na taxa de alfabetização em Cabo Verde?
Justifica a tua resposta.

17.10. Com base nos dados históricos do gráfico, que ações poderiam ser implementadas para continuar o progresso na taxa de alfabetização no futuro?

18 Considera o seguinte gráfico em que se apresentam as temperaturas médias anuais, máxima e mínima, bem como a precipitação média anual, na Cidade da Praia.

Gráfico de temperatura e precipitação anual na estação meteorológica da Cidade da Praia



Fonte: https://www.destinoseviagens.com/clima-cabo-verde-quando-ir/#google_vignette

18.1. Quais são as variáveis em estudo?

18.2. Qual é a temperatura máxima média no mês de setembro?

18.3. Em que mês ocorre o maior nível de precipitação?

18.4. Qual é a temperatura mínima média no mês de fevereiro?

18.5. Como varia a temperatura máxima média durante o ano?

18.6. Observa as variações da precipitação no período de julho a setembro. O que se nota acerca desses meses?

18.7. Considerando o padrão da precipitação nos meses de agosto e setembro, qual pode ser a explicação para o aumento observado?

18.8. Há alguma relação aparente entre a precipitação e as variações de temperatura?

Justifica a tua resposta.

18.9. Qual foi a diferença da temperatura máxima média entre janeiro e setembro?

18.10. Se tivesses de prever as condições climáticas para o mês de outubro, com base neste gráfico, como farias?

Que fatores considerarias?

19 **Foi realizada uma pesquisa com 50 estudantes do 10.º ano para avaliar o número de horas que eles estudam por semana. Os resultados estão apresentados na tabela seguinte.**

Horas de estudo por semana	Frequência absoluta (número de estudantes)
$[0, 5[$	10
$[5, 10[$	15
$[10, 15[$	12
$[15, 20[$	8
$[20, 25[$	5

19.1. Calcula a frequência relativa em percentagem de cada classe de horas de estudo por semana.

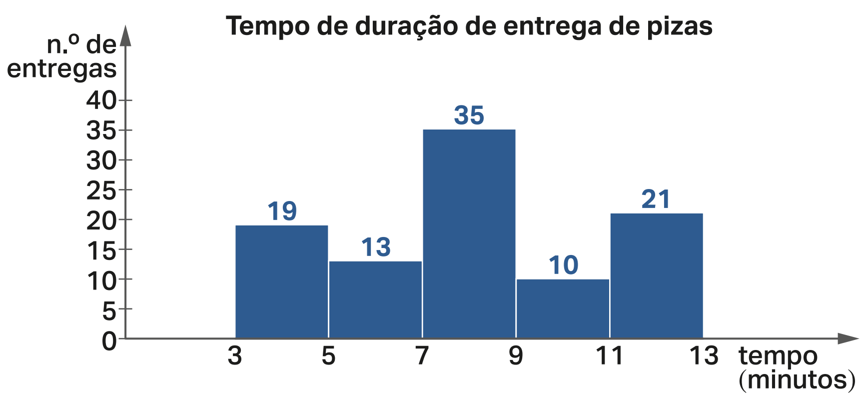
19.2. Apresenta os resultados numa tabela com as frequências relativas.

19.3. Constrói um histograma para representar esses dados.

19.4. Constrói um gráfico circular para visualizar as frequências relativas calculadas na questão anterior.

19.5. O que podes concluir com este estudo?

20 **Uma pizaria faz entregas ao domicílio. Para avaliar a qualidade do seu serviço, durante uma semana, registaram a duração de cada entrega, desde o momento em que o funcionário sai da pizaria até à entrega em casa do cliente.**



20.1. Qual é a variável em estudo?

20.2. Que tipo de gráfico foi utilizado para representar os dados obtidos?

20.3. Consideras que o gráfico foi bem escolhido? Porquê?

20.4. Qual a classe de tempos mais habitual nas entregas de pizas?

3.1.3. Medidas de localização de uma amostra (moda, média, mediana, quartis e percentis) e medidas de dispersão (amplitude interquartil, variância, desvio-padrão)

Manual Interativo

Atividade
Medidas de localização

Medidas de localização e de dispersão

Os gráficos, como histogramas, gráficos de linhas ou gráficos de dispersão, são representações visuais que ajudam a identificar padrões, tendências e a estrutura geral dos dados de forma empírica e rápida, oferecendo uma visão panorâmica e intuitiva da distribuição dos dados, mas existem outros elementos estatísticos que nos permitem, também, compreender os dados recolhidos: as medidas de localização e dispersão.

As medidas de localização e dispersão são valores numéricos que resumem aspetos específicos da distribuição dos dados, fornecendo precisão e detalhe quantitativo sobre as características desses dados. São fundamentais em estatística, permitindo a compreensão da sua variabilidade e tendência.

Enquanto as medidas de localização, como média, mediana e moda, indicam onde os dados estão concentrados, as medidas de dispersão, como variância, desvio-padrão e amplitude, quantificam o grau de variação ou afastamento em torno dessa concentração. Juntas, são essenciais para análises comparativas, previsões e tomadas de decisão informadas, pois ajudam a capturar tanto a essência geral, quanto as peculiaridades dos dados analisados.

Em conjunto, gráficos e medidas de localização e de dispersão permitem uma análise estatística mais completa, uma vez que se complementam.

Medidas de localização

As medidas de localização, como média, mediana e moda, identificam os valores centrais ou mais frequentes, servindo como pontos de referência que resumem o conjunto de dados.

Média

A **média**, também conhecida como média aritmética, é a medida de localização mais utilizada.

Representa-se por $\overline{x}$ e determina-se da seguinte forma:

- somam-se todos os valores;
- divide-se a soma pelo número total de elementos.

Exemplo

Registaram-se as classificações de um aluno:

$$8\,,\ 8\,,\ 8\,,\ 12\,,\ 12\,,\ 15$$

Assim, a média das suas classificações é dada por:

$$\overline{x} = \frac{8+8+8+12+12+15}{6} = 10{,}5$$

Mas também poderia ser feito de forma mais simples e rápida:

$$\overline{x} = \frac{3\times 8+2\times 12+15}{6} = 10{,}5$$

Dada uma amostra ou uma população com n elementos, sejam x_1, x_2, x_3, ..., x_n os dados recolhidos e seja $\overline{x}$ a média, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Em geral, dada uma amostra ou população com n elementos, onde cada variável x_i assume k valores diferentes, sendo f_i e fr_i a frequência absoluta e relativa de x_i, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \ldots + f_k \times x_k}{n}$$

$$\overline{x} = fr_1 \times x_1 + fr_2 \times x_2 + fr_3 \times x_3 + \ldots + fr_k \times x_k$$

Exemplo 21

Consideremos a situação da pesquisa da idade dos alunos numa turma do 10.º ano, em que obtivemos a distribuição de dados representada na tabela de frequências seguinte:

x_i	f_i	fr_i
15	3	0,1
16	12	0,4
17	9	0,3
18	5	0,17
19	1	0,03
Total	30	1

Neste caso, a média é dada por:

$$\overline{x} = \frac{3\times 15+12\times 16+9\times 17+5\times 18+1\times 19}{30} = 16{,}6(3) \approx 17$$

Ou $\overline{x} = 0{,}1\times 15+0{,}4\times 16+0{,}3\times 17+0{,}17\times 18+0{,}03\times 19 = 16{,}6(3) \approx 17$

Ou seja, em média, os alunos, nesta turma, têm aproximadamente 17 anos de idade.

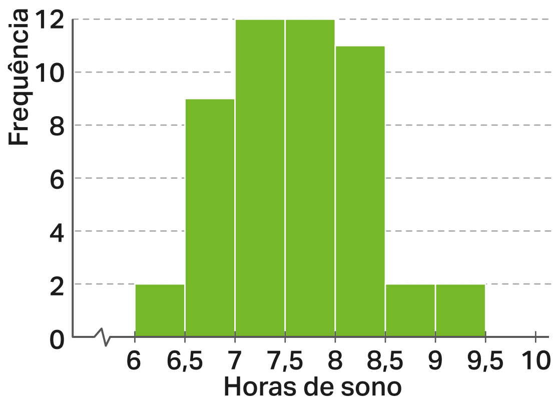
Manual Interativo

Vídeo
Média de dados discretos e de dados agrupados em classes

Exercício
Calcular a média para dados agrupados em classes

Exemplo 22

A Mayra decidiu registar o número de horas que dormiu durante 50 dias. Depois construiu o histograma ao lado.



Como os dados estão agrupados em classe, para determinar o número médio de horas que dormiu, ela precisa de determinar a marca de cada classe, ou seja, a média dos extremos da classe.

Assim:

Classe	Marca da classe	f_i
$[6\,;\ 6{,}5[$	$\frac{6{,}5+6}{2}=6{,}25$	2
$[6{,}5\,;\ 7[$	$\frac{7+6{,}5}{2}=6{,}75$	9
$[7\,;\ 7{,}5[$	$\frac{7{,}5+7}{2}=7{,}25$	12
$[7{,}5\,;\ 8[$	$\frac{8+7{,}5}{2}=7{,}75$	12
$[8\,;\ 8{,}5[$	$\frac{8{,}5+8}{2}=8{,}25$	11
$[8{,}5\,;\ 9[$	$\frac{9+8{,}5}{2}=8{,}75$	2
$[9\,;\ 9{,}5[$	$\frac{9{,}5+9}{2}=9{,}25$	2
Total		50

E a média será dada por:

$$\overline{x}=\frac{2\times 6{,}25+9\times 6{,}75+12\times 7{,}25+12\times 7{,}75+11\times 8{,}25+2\times 8{,}75+2\times 9{,}25}{50}=$$

$=7{,}6\approx 8$

Ou seja, em média, a Mayra dormiu aproximadamente 8 horas por noite.

Atenção, embora a média seja fácil de calcular e interpretar, ela pode ser sensível a valores extremos (*outliers*).

Por exemplo, num conjunto de salários em que a maioria das pessoas ganha 18 000 escudos cabo-verdianos e uma única pessoa ganha 100 000 escudos cabo-verdianos, a média será influenciada pelo valor mais alto e poderá não representar com precisão a maioria dos casos.

Exercícios

21 As temperaturas observadas na cidade da Praia foram registadas durante 30 dias de um determinado mês.

26	27	26	29	30	31	27	31	29	30
26	29	27	30	31	26	27	29	29	30
31	32	29	28	30	31	30	29	31	30

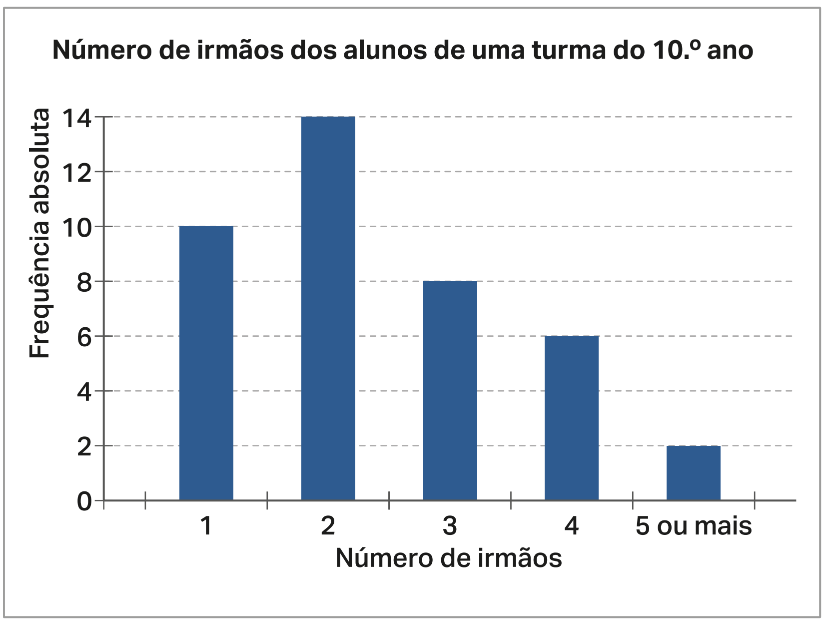
Determina a média das temperaturas registadas nesses 30 dias.

22 Considera a seguinte distribuição de idades:

x_i	f_i
26	6
28	7
30	4
32	3

Determina a média da distribuição dada.

23 O seguinte gráfico de barras apresenta a frequência relativa em relação ao número de irmãos dos alunos de uma turma do 10.º ano.



Determina a média do número de irmãos.

24 **Um serviço telefónico recolheu informações sobre o tempo de espera, em minutos, até a chamada ser reencaminhada para um assistente.**

Os dados obtidos, depois de agrupados em classes, foram os seguintes:

Tempo de atendimento (min)	N.º de pessoas
$[0\,,\,2[$	54
$[2\,,\,4[$	80
$[4\,,\,6[$	32
$[6\,,\,8[$	16
$[8\,,\,10[$	12
$[10\,,\,12[$	6

Em média, quanto tempo demora até que uma chamada seja reencaminhada para um assistente?

Mediana

A mediana é uma medida de localização que indica o valor central de um conjunto de dados, dividindo-o em duas metades iguais, quando os valores estão organizados por ordem crescente ou decrescente.

A mediana, ao contrário da média, não é influenciada por valores extremos (*outliers*), pelo que é ideal para representar dados que possuem distribuição assimétrica, ou seja, muito díspar.

Representa-se por $\tilde{x}$ e determina-se da seguinte forma:

- Organiza-se o conjunto de dados por ordem:
  - se o número de elementos for ímpar, a mediana será o valor no meio da sequência;
  - se o número for par, a mediana será a média dos dois valores centrais.

Exemplo 23

- No seguinte conjunto de dados ímpar: $3\,,\ 7\,,\ 9\,,\ 12\,,\ 15\,.$
  O valor central é $9\,,$ logo a mediana é $9\,.$
- No seguinte conjunto de dados par: $2\,,\ 4\,,\ 6\,,\ 8\,,\ 9\,,\ 9\,.$
  A mediana será a média dos dois valores centrais: $\tilde{x}=\dfrac{6+8}{2}=7\,.$

A mediana é o valor (pertencente ou não ao conjunto de dados) que divide esse conjunto ordenado ao meio, ou seja, 50% dos elementos da amostra são inferiores ou iguais à mediana e os outros 50% são superiores ou iguais à mediana.

Para determinar a mediana de uma amostra de n elementos, primeiro ordenam-se os elementos da amostra e:

- se n é ímpar: a mediana é o elemento que ocupa a posição $\frac{n+1}{2}$;
- se n é par: a mediana é a média dos elementos que ocupam as posições $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

Manual Interativo
Atividade
Propriedades da média

Exemplo 24

Registou-se o número de crias nascidas por ninhada de um casal de coelhos:

N.º de crias	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
2	3	3
3	24	27
4	30	57
5	13	70
6	7	77
Total	77	

O número total de crias é 77 (ímpar), a mediana é o valor que ocupa a posição:
$\frac{77+1}{2}=\frac{78}{2}=39$.

Observando a coluna das frequências absolutas, podemos concluir:

Os elementos x_1, x_2, x_3 são todos iguais a 2, do x_4 até x_{27} são todos iguais a 3 e assim sucessivamente. Logo, a mediana é $\tilde{x}=x_{39}=4$.

Em 50% das ninhadas nasceram quatro crias ou menos.

Considerando que houve mais algumas ninhadas, tem-se agora a seguinte distribuição, com um número total de crias de 114 (par).

N.º de crias	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
2	3	3
3	24	27
4	30	57
5	30	87
6	27	114
Total	114	

Como o número de dados é par, então a mediana é dada pelos valores que se encontram nas posições $\frac{114}{2} = 57$ e $\frac{114}{2} + 1 = 58$.

Assim, $\tilde{x} = \frac{x_{57} + x_{58}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4{,}5$

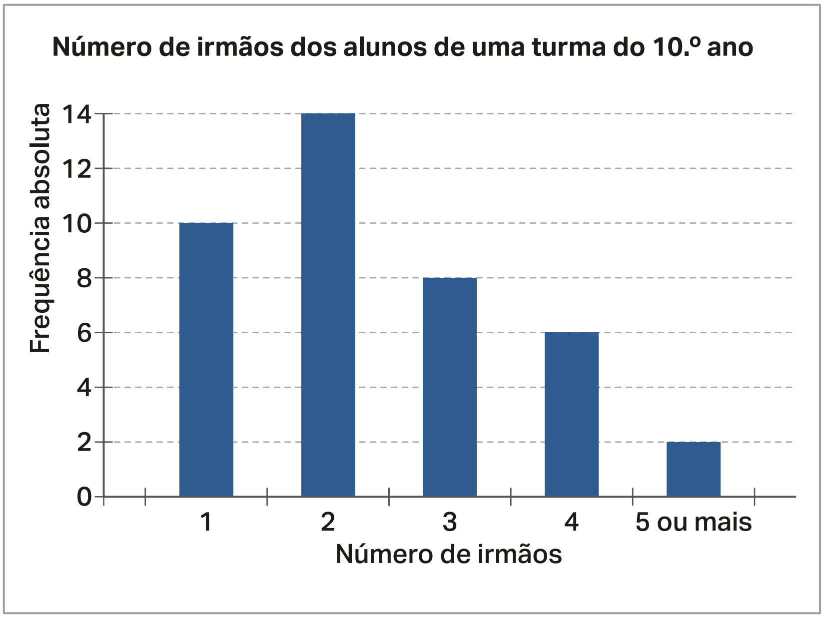
Exercícios

25 Considera a seguinte distribuição de idades:

x_i	f_i
26	6
28	7
30	4
32	3

Determina a mediana das idades.

26 Considera o gráfico de barras relativo ao número de irmãos dos alunos de uma turma do 10.º ano.



Determina a mediana do número de irmãos.

27 **Um serviço telefónico recolheu informações sobre o tempo de espera, em minutos até a chamada ser reencaminhada para um assistente. Os dados obtidos, depois de agrupados em classes, foram os seguintes:**

Tempo de atendimento (min)	N.º de pessoas
$[0, 2[$	54
$[2, 4[$	80
$[4, 6[$	32
$[6, 8[$	16
$[8, 10[$	12
$[10, 12[$	6

Determina a classe onde se encontra a mediana dos tempos de atendimento.

Moda

A moda é uma medida de localização em estatística que indica o valor ou categoria que ocorre com maior frequência num conjunto de dados. É especialmente útil para identificar tendências em dados qualitativos (como cores ou marcas) ou quantitativos, destacando o elemento mais comum dentro de um grupo.

Exemplo 25

Numa pesquisa sobre as cores preferidas de um grupo de pessoas, se a cor "azul" foi a mais escolhida, a moda será "azul".

No conjunto de números como $2, 3, 3, 4, 5$, a moda é 3, porque é o número que aparece mais vezes.

Sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ os k valores distintos de uma variável estatística, a moda corresponde ao valor que apresenta maior frequência absoluta (ou relativa) e representa-se por *Mo*.

Exemplo 26

No seguinte conjunto de dados $3; 4; 3; 6; 2; 3; 6; 5; 3$.

A moda é 3.

Exemplo 27

No seguinte conjunto de dados $3; 4; 3; 6; 2; 3; 6; 5; 6$.

Existem dois valores que apresentam a mesma frequência (3 e 6).

Assim, dizemos que a distribuição é bimodal e as modas são 3 e 6.

Exemplo 28

No seguinte conjunto de dados: 4 , 3 , 5 , 7 , 1 , 2

Nenhum valor se repete, logo, dizemos que não existe moda.

Assim, relativamente a um conjunto de dados ou distribuição, podemos dizer que:

- A moda pode ser única – unimodal
- Pode haver mais do que uma – bimodal ou multimodal
- Pode não existir, caso nenhum valor se repita – amodal

Manual Interativo

Vídeo
Classe modal

Exercício

28 **Considera a seguinte distribuição de idades:**

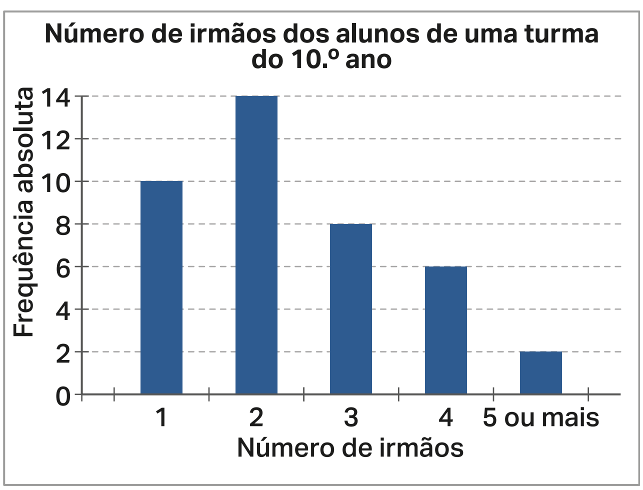
x_i	f_i
26	6
28	7
30	4
32	3

Indica a moda das idades.

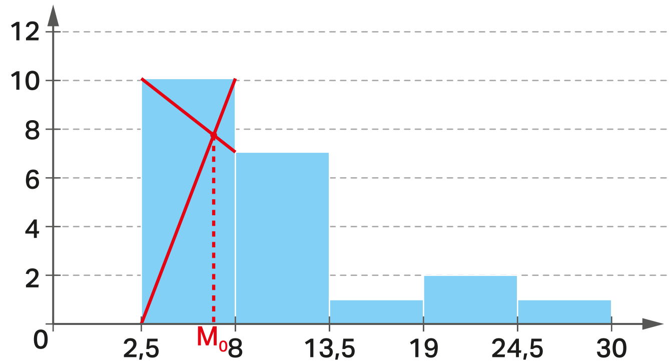
No caso de os dados estarem agrupados em classes, à classe com maior frequência absoluta dá-se o nome de **classe modal.**

Exercício

29 **Considerando a distribuição do número de irmãos dos alunos de uma turma do 10.º ano, representada no gráfico de barras abaixo, qual é a moda do número de irmãos?**



Se representamos os dados agrupados em classes por um histograma é possível fazer uma estimativa geométrica para a moda, procedendo da seguinte forma:



- representar os dados num histograma;
- determinar a classe modal;
- unir os vértices superiores do retângulo da classe modal com os vértices superiores das classes contíguas;
- traçar uma perpendicular ao eixo das abcissas, partindo do ponto de interseção das linhas obtidas anteriormente;
- indicar a localização gráfica da moda.

Exercício

30 **Considera os dados obtidos, depois de agrupados em classes, relativamente a um serviço telefónico que recolheu informações sobre o tempo de espera, em minutos, até a chamada ser reencaminhada para um assistente.**

Tempo de atendimento (min)	N.º de pessoas
[0 , 2[	54
[2 , 4[	80
[4 , 6[	32
[6 , 8[	16
[8 , 10[	12
[10 , 12[	6

30.1. Qual é a classe modal?

30.2. Representa os dados num histograma.

30.3. Determina geometricamente a moda deste conjunto de dados.

Quartis e percentis

Em muitos estudos estatísticos, com populações ou amostras de grande dimensão, é interessante conhecer a maior ou menor concentração de dados ao longo do intervalo de variação dos seus valores, ou seja, entre o maior e o menor valor que a distribuição toma.

Os quartis e percentis são medidas de posição que ajudam a dividir um conjunto de dados ordenado em partes iguais, permitindo analisar a dispersão e distribuição dos valores.

Manual Interativo

Vídeo
Quartis

- **Quartis**

Os quartis dividem o conjunto ordenado de dados em quatro partes com a mesma quantidade de dados, cada uma representando 25% dos valores:

- **1.º quartil (Q_1):** é o valor da variável, tal que 25% dos dados são menores ou iguais e 75% são maiores ou iguais;
- **2.º quartil (Q_2):** é o valor da variável que coincide com a mediana;
- **3.º quartil (Q_3):** é o valor da variável tal que 75% dos dados são menores ou iguais e 25% são maiores ou iguais.

Exemplo 29

Foi registado o número de mensagens SMS recebidas num telemóvel durante 11 dias.

$$12 \quad 12 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 10 \quad 9 \quad 10 \quad 11$$

- Primeiro ordenamos os elementos da distribuição:

$$5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 12$$

- Depois, determina-se a mediana.
  O número de dados é ímpar (11), logo, a mediana corresponde ao valor na posição $\frac{11+1}{2}=6$.

$$5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \mathbf{9} \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 12$$

- De seguida, determina-se o 1.º quartil.
  Neste caso, teremos de determinar a mediana entre o 1.º e o 5.º valores.

5	6	6	7	8	9	10	10	11	12	12
		Q_1			Q_2					

- Por fim, determina-se o 3.º quartil.
  Neste caso, a mediana entre o 7.º e o 11.º valores.

5	6	6	7	8	9	10	10	11	12	12
		Q_1			Q_2			Q_3		

Para este conjunto temos:

$$Q_1=6\,;\ Q_2=\tilde{x}=9\,;\ Q_3=11$$

Como o menor valor deste conjunto de dados é 5 e o maior é 12, é possível construir o diagrama de extremos e quartis.

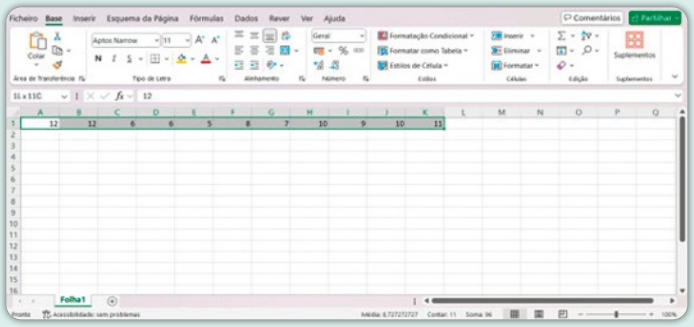
Tarefa

3 Na **Folha de Cálculo** é possível construir rapidamente o diagrama de extremos e quartis:

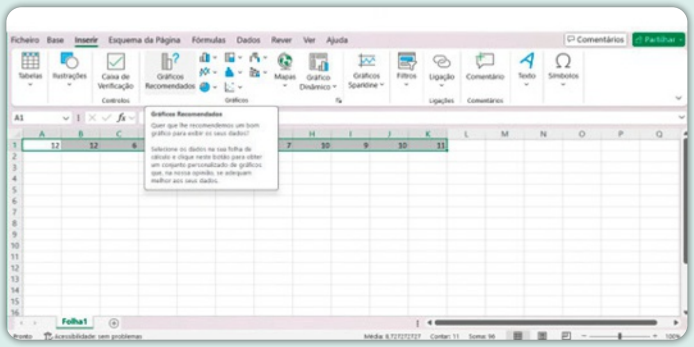
1) Abre a **Folha de Cálculo.**

2) Insere os dados recolhidos.

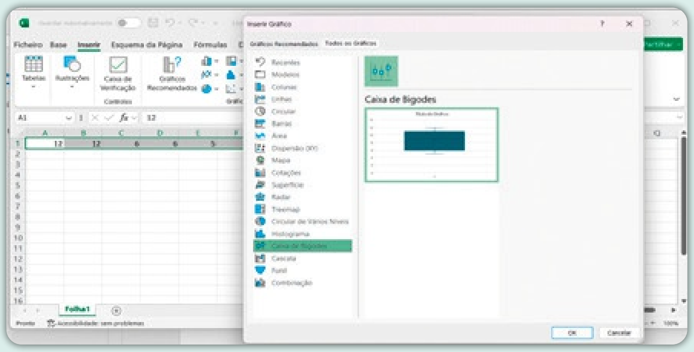
3) Seleciona os dados.



4) Seleciona Inserir > Gráficos Recomendados.

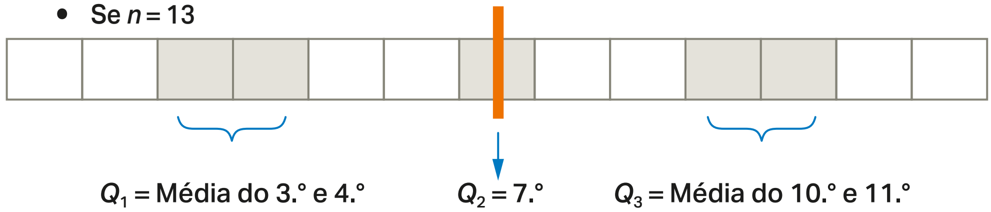


5) Seleciona o separador Todos os Gráficos e escolhe a opção Diagrama de Bigodes.

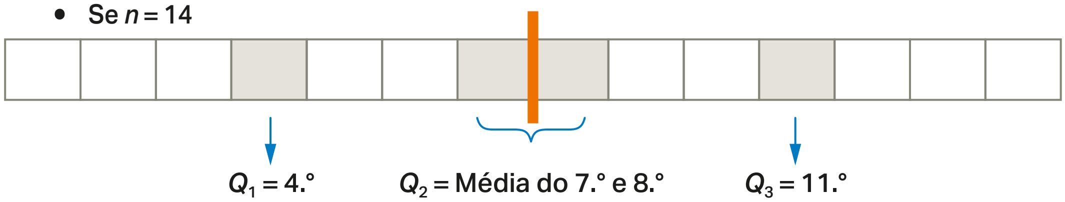


6) Clica em OK e o diagrama de extremos e quartis surge na área de trabalho.

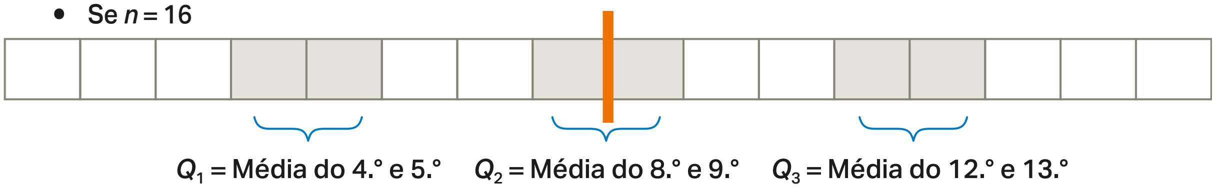
- Se $n = 13$



- Se $n = 14$



- Se $n = 16$



Exercício

31 A tabela seguinte apresenta os "pesos" (em kg) de 20 atletas.

"Peso" (kg)	55	57	60	62	65	68	70	72	75	78
Frequência	2	1	3	2	4	2	3	1	1	1

31.1. Constrói a tabela de frequências relativas acumuladas.

31.2. Determina a mediana do conjunto de dados.

31.3. Calcula o 1.° quartil (Q_1) e o 3.° quartil (Q_3).

- **Percentis**

Os **percentis** são medidas que dividem a amostra (por ordem crescente dos dados) em 100 partes, cada uma com uma percentagem de dados aproximadamente igual.

O *k-ésimo* percentil P_k é o valor $x\,(x_k)$ que corresponde à frequência cumulativa e $n \cdot \frac{k}{100}$, onde n é o tamanho amostral.

Portanto:

- o 1.º percentil (P_1) determina o 1% menor dos dados;
- o 98.º percentil (P_{98}) determina os 98% menores dos dados;
- o 25.º percentil (P_{25}) corresponde ao 1.º quartil;
- o 50.º percentil (P_{50}) corresponde à mediana;
- o 75.º percentil (P_{75}) corresponde ao 3.º quartil.

Percentis são amplamente usados em áreas como avaliação de desempenho (como em testes padronizados, em que um aluno no 90.º percentil superou 90% dos outros) e saúde (análise de crescimento infantil ou níveis de colesterol).

Exemplo 30

Numa prova de acesso a um emprego candidataram-se 40 pessoas.

Decidiu-se que todos os candidatos com classificações acima do percentil 70 passariam a uma fase de entrevista.

As classificações obtidas pelos candidatos foram (numa escala de 0 a 150):

78	83	100	93	35	99	28	99
102	95	102	89	38	108	89	140
110	93	109	50	41	140	111	77
150	70	35	148	84	84	106	85
141	46	149	137	96	78	95	86

Para determinar a classificação que corresponde ao percentil 70, temos de perceber em que posição estará, na lista das classificações organizadas.

Assim, sendo 40 classificações, o percentil 70 está na posição

$$n \cdot \frac{k}{100} = 40 \times \frac{70}{100} = 28$$

Então, vamos procurar a 28.ª classificação, na lista de dados ordenados

$$28;\ 35;\ 35;\ 38;\ 41;\ 46;\ 50;\ 70;\ 77;\ 78;\ 78;\ 83;\ 84;\ 84;\ 85;\ 86;\ 89;$$
$$89;\ 93;\ 93;\ 95;\ 95;\ 96;\ 99;\ 99;\ 100;\ 102;\ 102;\ 106;\ 108;\ 109;\ 110;$$
$$111;\ 137;\ 140;\ 140;\ 141;\ 148;\ 149;\ 150$$

$P_{70} = 102$

Assim, serão entrevistados os candidatos que obtiveram uma classificação superior a 102.

Exercício

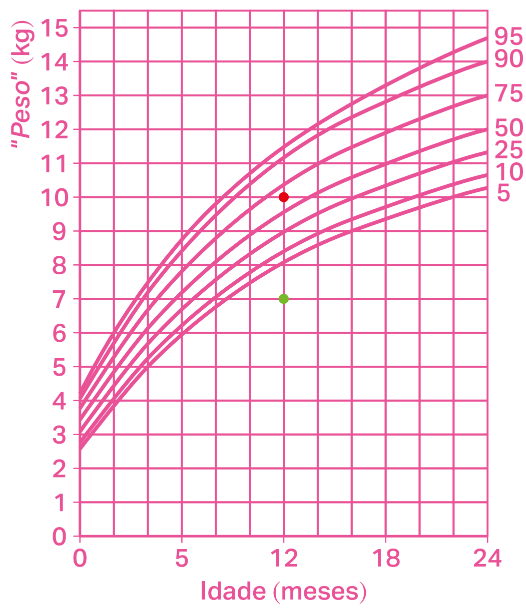
32 Numa prova, 650 alunos foram aprovados com nota igual ou superior a 10.
A distribuição das notas foram de acordo com a seguinte tabela:

Notas	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N.° de alunos	125	106	58	100	60	151	0	25	18	5	2

Os alunos com classificação inferior ou igual ao percentil 60 terão de realizar uma prova prática. Determinar as notas dos alunos que terão de realizar essa prova.

Exemplo 31

Observa o gráfico de percentis, ao lado, que serve para analisar uma criança num dado momento da sua evolução, relacionando a idade com o "peso".



No gráfico podes observar várias curvas (os percentis 5, 10, 25, 50, 75, 90 e 95) e o valor de "normalidade" geralmente encontra-se entre o 5% e o 95%.

O gráfico de percentis serve tanto para analisar a criança num dado momento como perspetivar a sua evolução.

Há um gráfico para cada parâmetro e intervalo de tempo. Por exemplo, o gráfico de "peso" para a idade de 0 a 24 meses. Para exemplificar, vamos dizer que existe uma criança de 1 ano de idade (12 meses) com 10 kg.

Em que parte do gráfico estaria essa criança?

Podemos ver então que, cruzando os eixos idade e "peso", uma criança com 1 ano de idade (12 meses) e 10 kg encontra-se entre os percentis 50 e 75 (ponto vermelho), estando dentro da faixa de normalidade.

Já uma criança com a mesma idade e 7 kg (ponto verde), estaria abaixo do percentil 5, sendo um sinal de alerta para desnutrição, por exemplo.

Consulta o gráfico e repara:

- em que linha se posiciona uma criança com 22 meses e com 10 kg ?

  Está precisamente na curva de percentil 5. Isso quer dizer que, para a idade de 22 meses, 5% das crianças têm 10 kg ou menos.

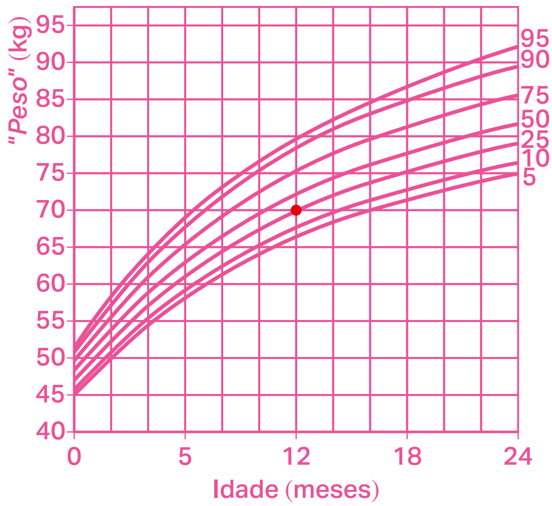
- e se considerarmos uma criança com 14 meses, que pese 11 kg, percebemos que está na linha do percentil 75.

  Isso significa que, 75% das crianças nessa idade têm esse "peso" ou menos, e apenas 25% delas terão mais de 10 kg.

Exercício

33 **Considera o gráfico de percentis ao lado que relaciona a idade de uma criança com a sua altura.**

O que poderás dizer sobre uma criança que tenha 12 meses e 70 cm de altura?



Manual Interativo

Vídeos

Medidas de dispersão, para quê?

Amplitude e amplitude interquartil

Medidas de dispersão

Já as medidas de dispersão, como desvio-padrão, variância e amplitude, quantificam o grau de afastamento dos dados ao redor da localização central, indicando a consistência ou heterogeneidade do conjunto.

Amplitude Interquartil é uma medida de dispersão que indica a extensão dos dados dentro do intervalo compreendido entre o **1.º quartil** (Q_1) e o **3.º quartil** (Q_3).

$$\text{Amplitude interquartil} = Q_3 - Q_1$$

Recorda que:

- Q_1 (1.º quartil): é o valor que separa os 25% menores dados do conjunto;
- Q_3 (3.º quartil): é o valor que separa os 25% maiores dados do conjunto.

Logo, a amplitude interquartil mostra onde está concentrada a metade central dos dados (entre Q_1 e Q_3), ignorando os valores mais extremos.

Esta medida é útil para comparar a dispersão, uma vez que conjuntos de dados com maior amplitude interquartil têm uma maior variação na metade central dos valores.

Manual Interativo

Vídeo
Variância e desvio-padrão de uma amostra

Exemplo 32

Dados: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40

- $Q_1 = 15$ (25% dos dados estão abaixo).
- $Q_3 = 35$ (25% dos dados estão acima).

Amplitude interquartil é $Q_3 - Q_1 = 35 - 15 = 20$.

A metade central dos dados está concentrada no intervalo de 20 unidades, entre 15 e 35.

Exercício

34 **A tabela abaixo apresenta os "pesos" (em kg) de 20 atletas.**

"Peso" (kg)	55	57	60	62	65	68	70	72	75	78
Frequência	2	1	3	2	4	2	3	1	1	1

Determina o intervalo interquartil.

(Nota: Já determinaste, anteriormente, os quartis para este conjunto de dados.)

Variância e desvio-padrão

A medida de localização central mais utilizada é a média. O desvio-padrão é uma medida de dispersão associada à média. Vejamos:

- Variância

A variância é a medida que se obtém dividindo a soma dos quadrados dos desvios das observações relativamente à média pelo número de observações e representa-se por s^2.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Caso os dados sejam discretos e tenhamos a frequência absoluta de cada valor, temos que:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Portanto, a variância é uma medida estatística que descreve o grau de dispersão dos dados em relação à média. Por outras palavras, indica o quão espalhados ou concentrados estão os valores de um conjunto de dados, respondendo à questão:

"Em média, quanto se afastam os dados da média do conjunto?"

Assim:

- valores pequenos de variância indicam que os dados estão muito próximos da média, ou seja, há baixa variabilidade;
- valores grandes de variância indicam que os dados estão mais espalhados, ou seja, há alta variabilidade.

Exemplo 33

Considera a tabela ao lado onde se apresenta o número de golos marcados por um clube em cada uma das 20 primeiras jornadas de um campeonato.

N.º de golos	N.º de jogos
0	2
1	5
2	4
3	5
4	3
5	1

Para determinar a variância:

- Determinamos a média:

$$\overline{x} = \frac{2 \times 0 + 5 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times 5}{20} = 2{,}25$$

- Construímos uma tabela com os valores envolvidos no cálculo da variância, o que facilitará a organização dos dados.

x_i	f_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i\,(x_i - \overline{x})^2$
0	2	$0 - 2{,}25 = -2{,}25$	$(-2{,}25)^2 = 5{,}0625$	$2 \times 5{,}0625 = 10{,}125$
1	5	$1 - 2{,}25 = -1{,}25$	$(-1{,}25)^2 = 1{,}5625$	$5 \times 1{,}5625 = 7{,}8125$
2	4	$2 - 2{,}25 = -0{,}25$	$(-0{,}25)^2 = 0{,}0625$	$4 \times 0{,}0625 = 0{,}25$
3	5	$3 - 2{,}25 = 0{,}75$	$0{,}75^2 = 0{,}5625$	$5 \times 0{,}5625 = 2{,}8125$
4	3	$4 - 2{,}25 = 1{,}75$	$1{,}75^2 = 3{,}0625$	$3 \times 3{,}0625 = 9{,}1875$
5	1	$5 - 2{,}25 = 2{,}75$	$2{,}75^2 = 7{,}5625$	$1 \times 7{,}5625 = 7{,}5625$
Total	20			

Assim, $\sum_{i=1}^{5} f_i(x_i - \overline{x})^2 = 10{,}125 + 7{,}8125 + 0{,}25 + 2{,}8125 + 9{,}1875 + 7{,}5625 = 37{,}75$

e $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{37{,}75}{20} = 1{,}8875$.

A variância calculada é $1{,}8875$, o que indica o grau de dispersão dos números de golos marcados em relação à média (2,25 golos).

Nota: No caso de dados contínuos, agrupados em classes, determina-se a variância usando a marca da classe.

Manual Interativo

Exercício
Determinar o desvio-padrão de uma amostra

Atividade
Propriedades do desvio-padrão

Exercício

35 **Realizou-se um controlo de qualidade a um fio elétrico produzido por uma empresa, medindo-se o comprimento de 10 fios.**
Obtiveram-se os seguintes resultados:

10,4	10,3	9,8	10,2	10	10,2
10,2	10,1	9,8	9,9	10	9,7

35.1. Determina a média do comprimento do fio.

35.2. Determina a variância da distribuição e indica se há uma grande variabilidade dos dados, justificando a tua resposta.

- **Desvio-padrão**

A variância permite-nos comparar diferentes distribuições, pois quanto maior forem os quadrados dos desvios em relação à média, maior será a variância. Não é, no entanto, reveladora em relação aos dados da distribuição, pois a ordem de grandeza é diferente da dos desvios.

Por este motivo, em vez de usar a variância como medida de dispersão relativa à média, usamos a sua raiz quadrada a que chamamos desvio-padrão.

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Exemplo 34

Sabendo que:

$$s^2 = 1{,}8875$$

temos que:

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}8875} \approx 1{,}37 \text{ (2 c.d.)}$$

De forma análoga à variância, relativamente ao desvio-padrão podemos dizer que:

- um desvio-padrão pequeno indica que os dados estão muito próximos da média, ou seja, há uma baixa variabilidade e os dados são consistentes;
- um desvio-padrão grande indica que os dados estão espalhados em relação à média, ou seja, há uma alta variabilidade e uma maior diversidade entre os dados.

Exemplo 35

Considera que duas turmas fizeram a mesma prova e os resultados foram os seguintes:

- Turma A (Notas): 50, 52, 54, 51, $53 \longrightarrow$ Média: 52
  - O desvio-padrão será pequeno, pois as notas estão todas próximas de 52.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(50-52)^2+(52-52)^2+(54-52)^2+(51-52)^2+(53-52)^2}{5}} \cong 1{,}41$$

- Turma B (Notas): 30, 60, 90, 20, $100 \longrightarrow$ Média: 60
  - O desvio-padrão será grande, pois as notas variam bastante em relação a 60.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(30-60)^2+(60-60)^2+(90-60)^2+(20-60)^2+(100-60)^2}{5}} \cong 31{,}62$$

A turma B tem maior dispersão dos dados em relação à sua média, quando comparativamente com a dispersão existente nos dados da turma A.

Repara que a variância mede a dispersão, mas a sua unidade é ao quadrado (por exemplo, se os dados são em metros, a variância será em metros quadrados), enquanto o desvio-padrão, sendo a raiz quadrada da variância, tem a mesma unidade dos dados originais, o que facilita a interpretação.

Exercício

36 **Num viveiro de peixes foi medido o comprimento de cada peixe, de uma amostra, para estudar o impacto de uma nova alimentação no seu crescimento. Obtiveram-se os seguintes dados, em cm.**

29,9	40,2	37,8	19,7	30,0	29,7	19,4	39,2	24,7	20,4	19,1	34,7	33,5	18,3
19,4	27,3	38,2	16,2	36,8	33,1	41,4	13,6	32,2	24,3	19,1	37,4	23,6	33,3
31,6	20,1	17,2	13,3	37,7	12,6	39,6	24,6	18,6	18,0	33,7	38,2		

36.1. Agrupa os dados em classes, construindo uma tabela de frequências.

36.2. Determina o desvio-padrão.

36.3. O que podes dizer relativamente à variabilidade dos dados recolhidos? Justifica a tua resposta.

Síntese

População, ou **universo**, corresponde a uma coleção de objetos com uma característica comum.
A cada elemento da população damos o nome de **indivíduo** ou **unidade estatística.**
Um **censo** ou **recenseamento** é um estudo estatístico que implica a observação de todos os elementos da população.
Uma **amostra** é um subconjunto de elementos extraídos da população em estudo utilizando uma metodologia adequada.
Uma **sondagem** é um estudo estatístico de uma população a partir de uma amostra.

Processos de amostragem

a) Amostragem aleatória simples

- Cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado.
- Ideal para populações homogéneas.

b) Amostragem estratificada

- Seleciona elementos de diferentes estratos da população, em número proporcional ao existente na população.
- Representatividade de todos os estratos da população assegurada, em proporção igual à existente na população, salientando a influência de cada um para o todo.

c) Amostragem sistemática

- Seleciona elementos a partir de uma regra previamente definida.
- Simples e rápida, mas pode ser enviesada se houver padrões na população.

d) Amostragem por conglomerados

- A população é dividida em *clusters* (grupos) e alguns *clusters* são selecionados aleatoriamente para análise completa.
- Útil para populações geograficamente dispersas.

e) Amostragem por conveniência

- Baseia-se na facilidade de acesso aos participantes.
- Rápida e económica, mas menos representativa.

Uma **distribuição estatística** corresponde ao valor da variável estatística para cada indivíduo ou elemento da população ou amostra em estudo**.**

Designam-se por x_1, x_2, x_3, $\dots$, x_n os diferentes valores que a variável estatística x pode assumir.

Síntese

A **frequência absoluta** de um dado estatístico é o número de vezes que este se repete e representa-se por f_i.

A **frequência relativa** de um dado estatístico corresponde ao quociente entre a frequência absoluta (f_i) e o número total de dados observados (n) e representa-se por $fr_i = \frac{f_i}{n}$.

A frequência relativa por ser apresentada na forma de uma fração, número decimal ou percentagem.

A frequência absoluta acumulada do valor x_i corresponde à soma das frequências absolutas correspondentes a todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por $\boldsymbol{F_i}$.

A frequência relativa acumulada do valor x_i corresponde à soma das frequências relativas correspondentes a todos os valores da variável até x_i (inclusive) e representa-se por $\boldsymbol{Fr_i}$.

Representações gráficas

Gráfico de barras

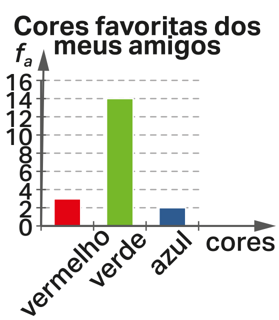
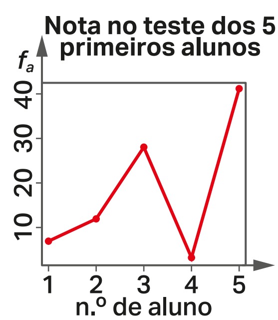
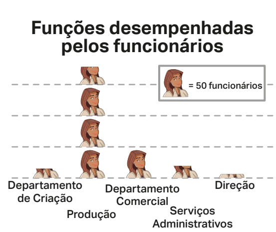


Gráfico circular

Gráfico de linhas



Pictograma



Histograma

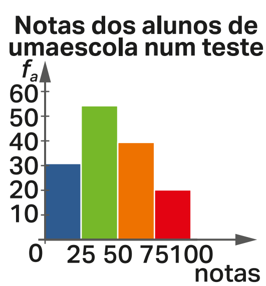
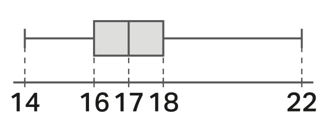


Diagrama de extremos e quartis



Síntese

A **média** representa o valor médio de um conjunto de dados.

Dada uma amostra ou uma população com n elementos, sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os dados recolhidos e seja $\overline{x}$ a média, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Sendo f_i e fr_i a frequência absoluta e relativa de x_i, tem-se que:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \ldots + f_k \times x_k}{n}$$

$\overline{x} = fr_1 \times x_1 + fr_2 \times x_2 + fr_3 \times x_3 + \ldots + fr_k \times x_k$

A **mediana** é uma medida de localização que indica o valor central de um conjunto ordenado de dados, dividindo-o em duas metades de igual dimensão.

- Se n é ímpar: a mediana é o elemento que ocupa a posição $\frac{n+1}{2}$.
- Se n é par: a mediana é a média dos elementos que ocupam as posições $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

Sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ os k valores distintos de uma variável estatística, a **moda** corresponde ao valor que apresenta maior frequência absoluta (ou relativa) e representa-se por *Mo*.

- A moda pode ser única – unimodal
- Pode haver mais de uma – bimodal ou multimodal
- Pode não existir, caso nenhum valor se repita – amodal

Os **quartis** dividem o conjunto ordenado de dados em quatro partes de iguais dimensões, cada uma representando 25% dos valores.

- **1.º quartil (Q_1):** é o valor da variável, tal que 25% dos dados são menores ou iguais e 75% são maiores ou iguais.
- **2.º quartil (Q_2):** é o valor da variável que coincide com a mediana.
- **3.º quartil (Q_3):** é o valor da variável tal que 75% dos dados são menores ou iguais e 25% são maiores ou iguais.

Síntese

Se n é par:

Quartil	Localização
$Q_1 = x_k$	$k = \frac{n+2}{4}$
$Q_2 = \tilde{x}$	$k = \frac{n}{2}$
$Q_3 = x_k$	$k = \frac{3n+2}{4}$

Se n é ímpar:

Quartil	Localização
$Q_1 = x_k$	$k = \frac{n+1}{4}$
$Q_2 = \tilde{x}$	$k = \frac{n+1}{2}$
$Q_3 = x_k$	$k = 3\frac{n+1}{4}$

Os **percentis** são medidas que dividem a amostra (por ordem crescente dos dados) em 100 partes, cada uma com uma percentagem de dados aproximadamente igual.

- O 1.º percentil (P_1) determina o 1% menor dos dados.
- O 98.º percentil (P_{98}) determina os 98% menores dos dados.
- O 25.º percentil (P_{25}) corresponde ao 1.º quartil.
- O 50.º percentil (P_{50}) corresponde à mediana.

Amplitude interquartil indica a extensão dos dados dentro do intervalo compreendido entre o 1.º quartil (Q1) e o 3.º quartil (Q3).

$$\text{Amplitude interquartil} = Q_3 - Q_1$$

Variância

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

- Um desvio-padrão pequeno indica que os dados estão muito próximos da média, ou seja, há uma baixa variabilidade e os dados são consistentes.
- Um desvio-padrão grande indica que os dados estão espalhados em relação à média, ou seja, há uma alta variabilidade e uma maior diversidade entre os dados.

Para aplicar

1 **Uma universidade deseja realizar uma pesquisa sobre a satisfação dos alunos com os serviços de apoio académico, como orientação académica, biblioteca e apoio psicológico. A universidade possui um total de 10 000 alunos matriculados, distribuídos por cinco faculdades (Faculdade de Ciências, Faculdade de Engenharia, Faculdade de Direito, Faculdade de Medicina e Faculdade de Economia).**

A pesquisa deve ser feita com uma amostra de 500 alunos e a universidade quer usar diferentes métodos de amostragem para selecionar essa amostra.

1.1. Se a universidade utilizar amostragem aleatória simples, como deve proceder para selecionar a amostra de 500 alunos?
Explica como a amostra será escolhida de forma aleatória.

1.2. Se a universidade optar por amostragem estratificada, como deve dividir os alunos e como serão os alunos selecionados de cada estrato?

1.3. Se a universidade decidir usar amostragem sistemática, qual seria o intervalo de amostragem para selecionar 500 alunos a partir dos alunos matriculados?
Calcula o intervalo de amostragem e explica como seria utilizado.

1.4. Se a universidade escolher a amostragem por conglomerados, como poderia selecionar os conglomerados e quais seriam os alunos incluídos na amostra?

1.5. Se a universidade optasse por amostragem por conveniência, onde poderia selecionar os alunos e como seria obtida a amostra?

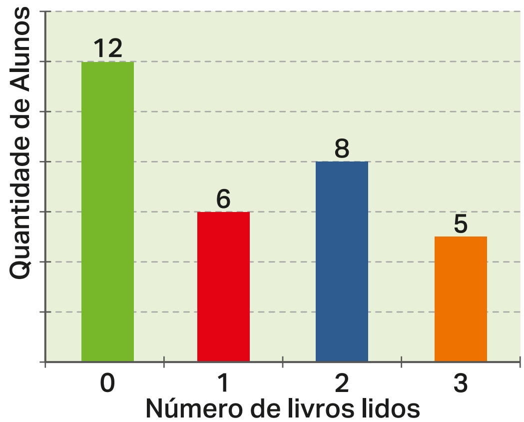
2 **A tabela ao lado apresenta os resultados obtidos por 20 alunos numa prova de Matemática.**

2.1. Calcula a **média**, a **mediana** e a **moda** dos resultados.

2.2. Determina a **variância** e o **desvio-padrão**.

Nota (%)	Frequência
0-10	2
11-20	3
21-30	5
31-40	4
41-50	3
51-60	2
61-70	1

3 O gráfico de barras ao lado mostra o número de livros lidos por mês por um grupo de estudantes.



3.1. Qual é o número médio de livros lidos por mês?

3.2. Calcula a **amplitude interquartil**, considerando os dados do gráfico.

3.3. Determina e explica a importância do desvio-padrão para estes dados.

4 Os dados a seguir representam as idades (em anos) de 15 pessoas que participaram de uma pesquisa:

21 , 25 , 30 , 35 , 28 , 40 , 20 , 22 , 32 , 31 , 33 , 27 , 29 , 23 , 34

4.1. Organiza os dados por ordem crescente.

4.2. Calcula a **mediana**, o **1.º quartil** (Q_1) e o **3.º quartil** (Q_3).

4.3. Calcula a **variância** e o **desvio-padrão** dos dados.

5 A tabela a seguir apresenta as notas médias de dois grupos de estudantes em dois exames diferentes.

Grupo	Exame 1	Exame 2
Grupo A	14	16
Grupo B	12	15

5.1. Compara as notas médias dos dois grupos nos dois exames.

5.2. Calcula o **desvio-padrão** de cada grupo para os dois exames.

5.3. Com base nos resultados, qual o grupo que teve uma *performance* mais consistente? Justifica a tua resposta.

Para aplicar

6 A tabela a seguir mostra o número de vendas mensais de um produto durante seis meses.

Mês	Vendas
Janeiro	50
Fevereiro	70
Março	60
Abril	80
Maio	75
Junho	90

6.1. Constrói um **gráfico de linhas** para representar a evolução das vendas ao longo dos meses.

6.2. Calcula a **média** de vendas durante os seis meses.

6.3. Que mês teve o maior aumento nas vendas em relação ao mês anterior?

7 Considera as seguintes afirmações e classifica-as de Verdadeira (V) ou Falsa (F), justificando as respostas.

(A) O 1.º quartil (Q_1) é o percentil que separa os 25% menores dados do conjunto de dados.

(B) O percentil 90 (P_{90}) indica que 90% dos dados estão abaixo do valor correspondente a esse percentil.

(C) A mediana de um conjunto de dados é sempre igual ao 2.º quartil (Q_2).

(D) O percentil 50 (P_{50}) corresponde à mediana de um conjunto de dados.

(E) O 3.º quartil (Q_3) é o percentil que separa os 25% maiores dados de um conjunto.

(F) O intervalo entre o 1.º quartil (Q_1) e o 3.º quartil (Q_3) é chamado de amplitude interquartil e mede a dispersão dos dados no meio da distribuição.

3.2. Distribuições bidimensionais

3.2.1. Dados bidimensionais

Introdução às distribuições bidimensionais

As **distribuições bidimensionais** exploram a relação entre duas variáveis e ajudam-nos a compreender como elas se relacionam. No nosso dia a dia, encontramos situações em que duas variáveis estão relacionadas. Por exemplo:

- Será que há relação entre o número de horas de estudo e o desempenho escolar?
- A temperatura e o consumo de energia starão relacionados?

Por meio do estudo das distribuições bidimensionais, poderemos analisar essas relações e tirar conclusões importantes.

Neste subtema, começaremos por perceber que dados bidimensionais se relacionam com observações de valores de duas variáveis.

Compreenderemos como esses dados são organizados e apresentados, formando a base para as análises subsequentes. A partir de representações visuais, com uma **abordagem gráfica e intuitiva**, aprenderemos a interpretar e identificar padrões em **distribuições bidimensionais**, o que nos permitirá perceber como duas variáveis se relacionam entre si.

O **diagrama de dispersão** é uma ferramenta gráfica muito útil que nos ajuda a visualizar a correlação entre duas variáveis. Também estudaremos a **reta de regressão**, que nos permite descrever, de forma aproximada, a relação entre as variáveis em estudo. Por fim, trataremos com o **coeficiente de correlação**, uma medida numérica que expressa a força e a direção da relação entre duas variáveis. Este conceito será essencial para uma análise quantitativa mais rigorosa das distribuições bidimensionais.

Distribuições bidimensionais

Os **dados bivariados** consistem em pares ordenados de valores associados a duas variáveis. Normalmente, para uma população de n elementos, representam-se por:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$$

Manual Interativo

Vídeo
Dados bivariados

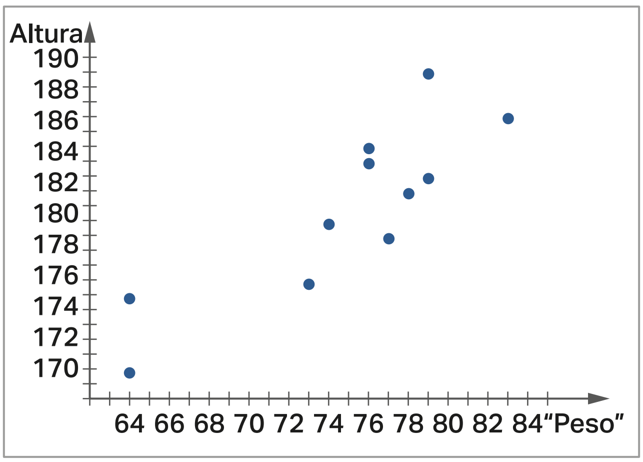
Cada par ordenado representa uma observação em que os valores de duas variáveis são registados simultaneamente. Por exemplo, num estudo sobre a altura e o "peso" de atletas de uma equipa, cada atleta fornece um par de valores: a altura (em centímetros) e o "peso" (em quilogramas).

Atletas	"Peso" (em quilogramas) (x)	Altura (em metros) (y)
Atleta 1	84 (x_1)	1,87 (y_1)
Atleta 2	78 (x_2)	1,82 (y_2)
...		
Atleta n	79 (x_n)	1,90 (y_n)

A **distribuição bidimensional** refere-se à distribuição conjunta de duas variáveis. É representada por tabelas ou gráficos que mostram como os valores de uma variável se associam à outra. Esta abordagem é essencial para compreender a interação e a interdependência entre variáveis.

"Peso"	Altura
84	187
78	182
74	180
64	170
76	184
79	183
77	179
76	185
64	175
83	187
73	176
79	190

Diagrama de dispersão



Quando duas variáveis exibem uma relação próxima à linear, dizemos que há uma correlação entre elas. A **correlação** é uma medida estatística que avalia a força e a direção dessa relação linear.

3.2.2. Abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais

Um **diagrama de dispersão**, também chamado de **nuvem de pontos**, é o gráfico utilizado para representar visualmente a relação entre duas variáveis quantitativas. Cada ponto no gráfico corresponde a uma observação dos dados, com a coordenada horizontal (x_i) que representa o valor de uma variável e a coordenada vertical (y_i) o valor da outra variável.

Manual Interativo

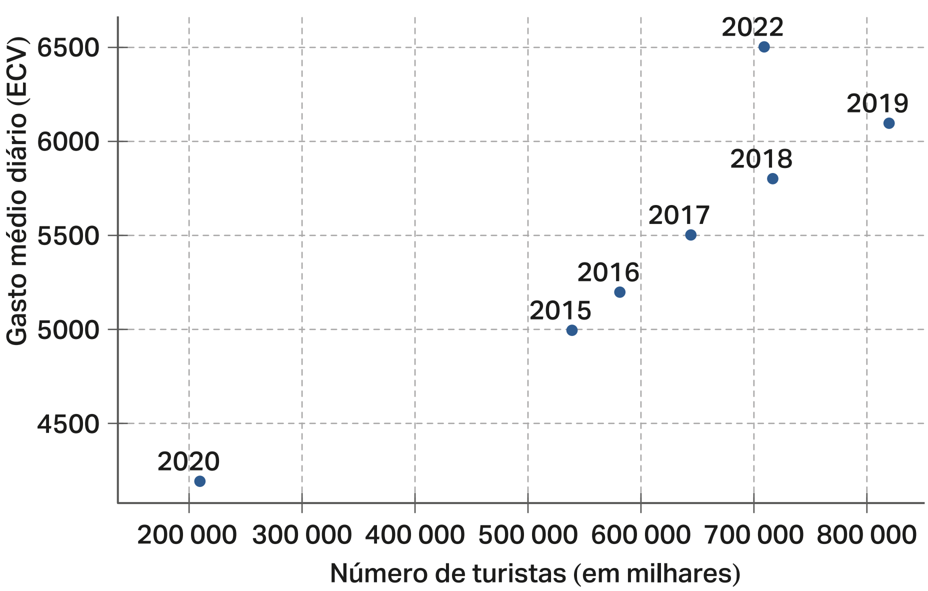
Vídeo
Nuvem de pontos

Exercício
Identificar o diagrama de dispersão (ou nuvem de pontos)

Exemplo 36

Um gráfico de dispersão mostra a relação, neste caso, entre o número de turistas e o gasto médio diário em Cabo Verde, entre os anos 2015 e 2022.

Relação entre número de turistas e gasto médio diário (Cabo Verde, 2015-2022)

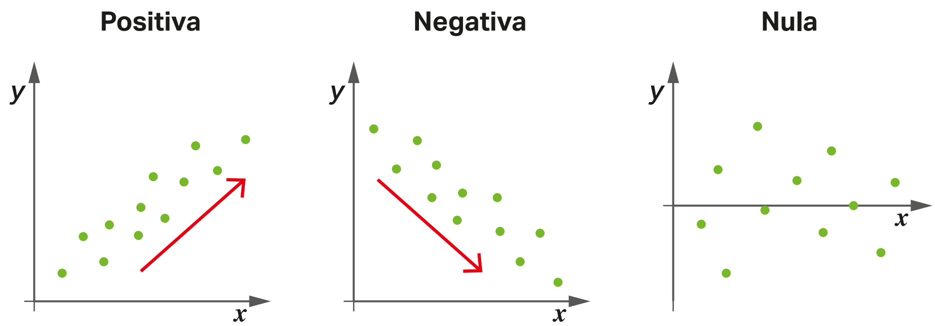


Cada ponto representa um ano, com os valores do número de turistas no eixo do X e o gasto médio diário no eixo do Y.

Assim, por exemplo, em 2017, um número de cerca de $650\,000$ turistas conduziu a um gasto diário médio de 5500 escudos.

Esse gráfico é utilizado em estatística para analisar padrões, tendências e relações entre as variáveis, sendo uma ferramenta fundamental na análise de correlação e regressão.

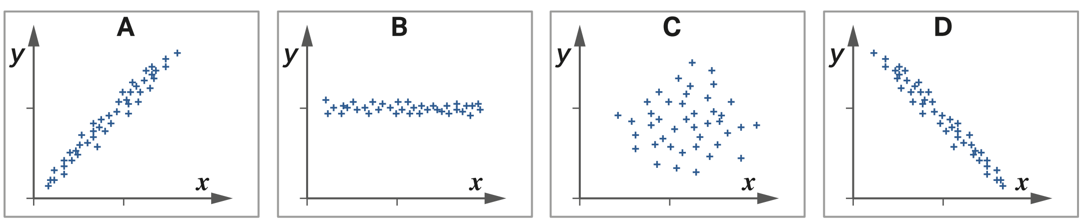
Podemos analisar as distribuições bidimensionais através da abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais:



- **Correlação positiva:** Os pontos formam uma tendência ascendente, ou seja, conforme x aumenta, y também aumenta.
- **Correlação negativa:** Os pontos formam uma tendência descendente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui.
- **Sem correlação:** Os pontos estão distribuídos de forma aleatória, sem um padrão aparente.

Exercício

37 Interpreta a correlação de cada um dos seguintes diagramas de dispersão (A, B, C e D).



Num diagrama de dispersão é comum representar-se o centro de gravidade da distribuição.

O centro de gravidade de uma distribuição bidimensional ou ponto médio da nuvem de pontos é o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$.

Exemplo 37

No caso dos atletas aos quais se recolheu as medidas do "peso" e da altura, a distribuição bidimensional dos valores (x, y), onde x é o peso e y é a altura, o centro de gravidade é, aproximadamente, o ponto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}) = (76, 182)$.

Exercícios

38 **Em diferentes dias, foram registados as temperaturas médias e o consumo de energia elétrica (em kWh).**

Representa os dados num gráfico, de modo a obteres um diagrama de dispersão.

Temperatura (°C)	Consumo de energia (kWh)
20	300
22	320
25	360
28	400
30	420

38.1. Determina e marca o centro de gravidade da distribuição bidimensional.

38.2. Interpreta a relação das variáveis.

39 **Constrói um gráfico e analisa a relação entre a temperatura média mensal (em °C) e o consumo médio de energia elétrica (em kWh), por residência. No gráfico marca o centro de gravidade da distribuição.**

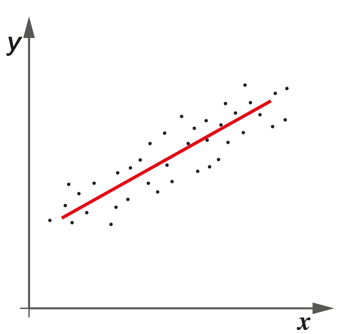
Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov
(°C)	24	25	26	27	28	29	30	31	30	28	25
(kWh)	150	160	170	180	190	200	210	220	210	190	160

Reta de regressão

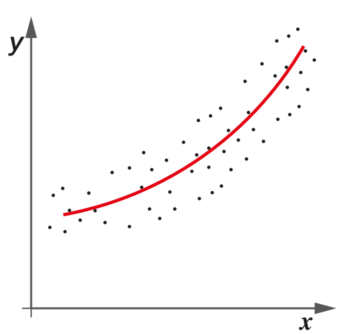
Quando verificamos que existe correlação linear entre as variáveis, em estudos de distribuições bidimensionais, é possível prever o valor de uma das variáveis conhecido o valor da outra variável correspondente. Para isso, necessitamos de determinar a reta de regressão para o nosso conjunto de dados.

A **reta de regressão linear** de um conjunto de dados bidimensionais é a reta que passa pelo centro de gravidade da distribuição e que melhor se ajusta à nuvem de pontos.

Os gráficos seguintes são exemplos de uma distribuição de bidimensional linear e de uma distribuição de bidimensional não linear.



Linear



Não linear

Para exemplificar como podemos obter a equação da reta de regressão linear e representá-la no gráfico de modo adequado, vamos recorrer ao seguinte exemplo.

Manual Interativo

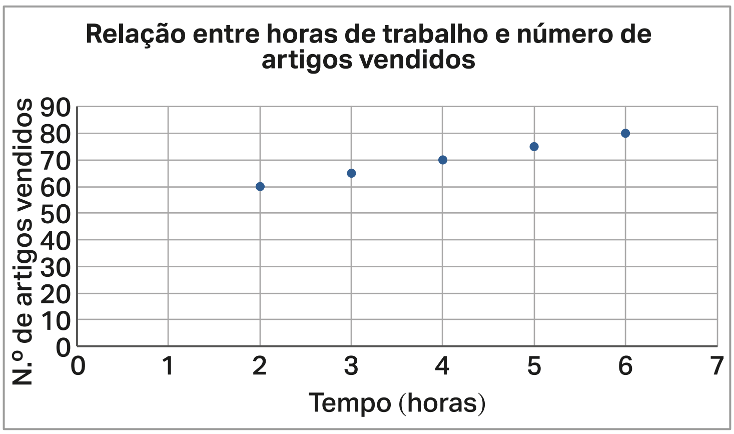
Vídeo
Reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados

Exemplo 38

Equação da reta de regressão linear e representação gráfica

O seguinte conjunto de dados corresponde à relação entre o número de horas de trabalho e venda de um determinado artigo.

x (horas de trabalho)	y (número de artigos vendidos)
2	60
3	65
4	70
5	75
6	80



Como visualmente verificamos que existe correlação entre as duas variáveis, podemos determinar a equação da reta de regressão.

A equação da reta de regressão é do tipo $y = mx + b$ e passa no ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, em que m é o coeficiente angular (o declive da reta).

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{60+65+70+75+80}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (4{,}70)$

Para determinar o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$, precisamos dos seguintes somatórios:

$\Sigma x = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

$\Sigma y = 60 + 65 + 70 + 75 + 80 = 350$

$\Sigma (xy) = (2 \times 60) + (3 \times 65) + (4 \times 70) + (5 \times 75) + (6 \times 80) = 1450$

$\Sigma (x^2) = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 90$

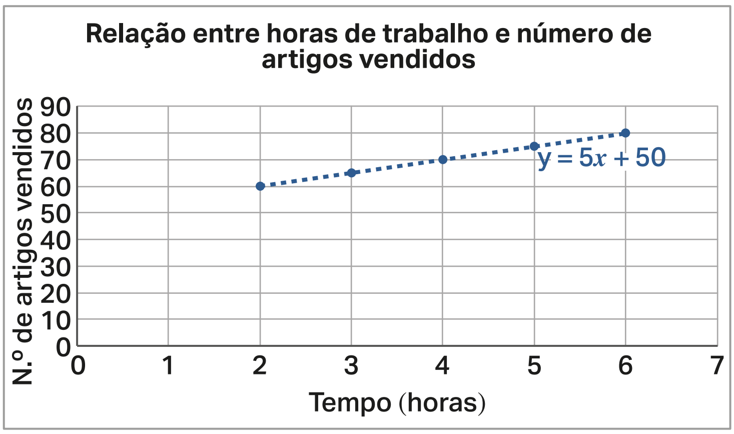
$$\boldsymbol{m} = \frac{n\Sigma (xy) - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma (x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{5 \times 1450 - 20 \times 350}{5 \times 90 - 20^2} = \frac{7250 - 7000}{450 - 400} = \frac{250}{50} = 5$$

Então, a reta será do tipo $y = 5x + b$.

Para determinar $\boldsymbol{b}$ (coeficiente linear), como $(4\,,\,70)$ pertence à reta, resolvemos a equação:

$70 = 5 \times 4 + \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} = 70 - 20 \iff \boldsymbol{b} = 50$

Logo, a equação da reta de regressão é $\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} + 50$.



Assim, podemos representar a equação da reta de regressão de modo rigoroso.

Para prevermos o valor de uma das variáveis conhecido o valor da outra variável correspondente, utilizamos a visualização gráfica ou a equação da reta de regressão.

Qual será o número estimado de artigos vendidos em oito horas de trabalho?
$y = 5 \times 8 + 50 = 90$

Em oito horas de trabalho, prevê-se que sejam vendidos 90 artigos.

Exercícios

40 **Para o conjunto de dados bivariados ao lado:**

x	y
5	50
10	40
15	30
20	20
25	10

40.1. Representa o diagrama de dispersão.

40.2. Determina a equação da reta de regressão linear.

40.3. Qual é o valor estimado de y se $x = 12$?

40.4. Qual é o valor estimado de x se $y = 12$?

41 **A tabela seguinte apresenta a relação entre a precipitação média anual (x, em mm) e a produção de milho (y, em toneladas).**

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
x (mm)	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380
y (t)	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330

41.1. Representa o diagrama de dispersão.

41.2. Consideras que existe uma correlação entre a precipitação média anual e a produção de milho? Justifica a tua resposta.

41.3. Determina a equação da reta de regressão linear e indica a previsão de toneladas produzidas se a precipitação média anual for de 250 mm .

42 **Em diferentes dias, foram registadas temperaturas médias (em °C) e os consumos de energia elétrica (em kWh).**

Temperatura (°C)	Consumo de energia (kWh)
20	300
22	320
25	360
28	400
30	420

42.1. Representa os dados num gráfico e determina a reta de regressão.

42.2. Prevê o consumo de energia para um dia de temperatura média de 32 °C.

42.3. Comenta a afirmação: "Não existe relação entre as temperaturas médias e o consumo de energia elétrica".

3.2.3. Coeficiente de correlação

O **coeficiente de correlação** é uma medida estatística que permite estabelecer o grau de correlação entre duas variáveis. Geralmente, dizemos que o coeficiente de correlação mede a força e a direção da relação linear entre duas variáveis e usualmente é representado pela letra $\boldsymbol{r}$.

A fórmula para o cálculo do coeficiente de correlação, para duas variáveis quantitativas, é dada por:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\Sigma\left((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right)}{\sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}}$$

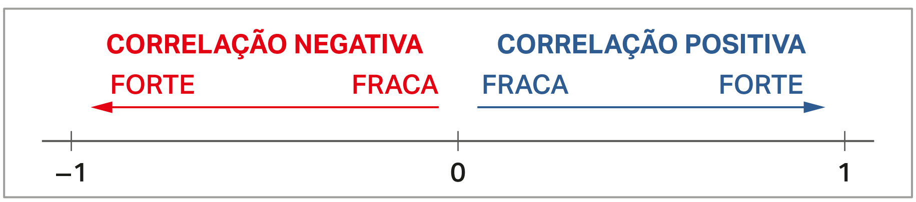
Em que:

$\overline{x}$ e $\overline{y}$ são, respetivamente, as médias das variáveis x e y;

Σ representa a soma de todos os valores.

O valor do **coeficiente de correlação varia entre** -1 **e** 1**,** em que:

- se $\boldsymbol{r} < 0$, a **correlação é negativa** e significa que a variação das variáveis é feita em sentidos opostos, quando uma aumenta a outra diminui;
- se $\boldsymbol{r} > 0$, a **correlação é positiva** e significa que a variação das variáveis é feita no mesmo sentido, quando uma aumenta a outra também aumenta;
- se $\boldsymbol{r} = 0$, a **correlação é nula** e significa que não há correlação entre as variáveis.



- Quando $\boldsymbol{r} = 1$ indica uma **correlação positiva perfeita.**
- Quando $\boldsymbol{r} = -1$ indica uma **correlação negativa perfeita.**

Manual Interativo

Vídeo
Coeficiente de correlação Linear

Exemplo 39

Interpretações do coeficiente de correlação linear

Se $\boldsymbol{r} = 0{,}85$, existe uma correlação positiva forte entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r} = 0{,}15$, existe uma correlação positiva fraca entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r} = -0{,}91$, existe uma correlação negativa forte entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r} = -0{,}12$, existe uma correlação negativa fraca entre as variáveis.
Se $\boldsymbol{r} = 0{,}51$, existe uma correlação positiva moderada entre as variáveis.

Manual Interativo

Exercício
Interpretar o coeficiente de correlação

Exemplo 40

Determinar e interpretar o coeficiente de correlação

(x)	(y)
5	16
7	19
4	11
6	16
5	11
3	14
1	8
4	10
6	17
4	13
3	13
2	10
2	11

Para os 13 estudantes de uma turma, a tabela apresenta o tempo de estudo médio realizado por semana para a disciplina A por cada estudante, em horas (x), e a correspondente classificação obtida no final do ano letivo à mesma disciplina A (y).

Para determinarmos o coeficiente de correlação, vamos começar por determinar $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

$$\overline{x} = \frac{5+8+4+\ldots+3+2+2}{13} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\overline{y} = \frac{16+19+\ldots+13+10+11}{13} = \frac{169}{13} = 13$$

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
5	16	1	3	3	1	9
7	19	3	6	18	9	36
4	11	0	– 2	0	0	4
6	16	2	3	6	4	9
5	11	1	– 2	– 2	1	4
3	14	– 1	1	– 1	1	1
1	8	– 3	– 5	15	9	25
4	10	0	– 3	0	0	9
6	17	2	4	8	4	16
4	13	0	0	0	0	0
3	13	– 1	0	0	1	0
2	10	– 2	– 3	6	4	9
2	11	– 2	– 2	4	4	4
				$\Sigma\left((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right) = 57$	$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 38$	$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = 126$

$$\boldsymbol{r} = \frac{\Sigma\left((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right)}{\sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{57}{\sqrt{38} \times \sqrt{126}} \approx 0{,}823754$$

Com este valor para o coeficiente de correlação, podemos afirmar que existe uma correlação positiva forte entre o tempo de estudo médio realizado por semana para a disciplina A e a classificação obtida no final do ano letivo à disciplina.

Manual Interativo

Exercício
Determinar e interpretar o valor do coeficiente de correlação

Exercícios

43 Para cada conjunto de dados seguinte, determina e interpreta o coeficiente de correlação.

43.1.

x	y
1	9
3	7
5	5
7	3
9	1

43.2.

x	y
5	50
10	40
15	30
20	20
25	10

44 Numa determinada região de um país, a relação entre a população de um município (x, em milhares) e o número de escolas (y) pode ser verificada na seguinte tabela.

Município	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x (mil)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y (escolas)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

44.1. Existe uma correlação entre o número de habitantes e o número de escolas por município existentes naquele país?

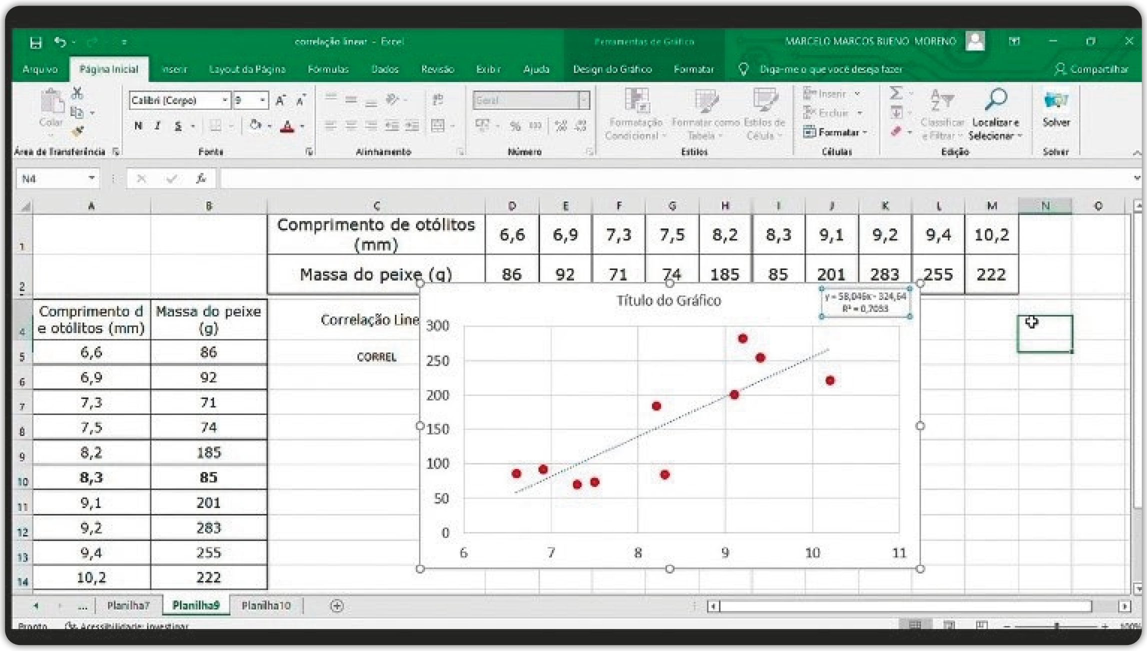
44.2. Se um município tiver 135 890 habitantes, qual será o número previsível de escolas?

44.3. Se um município tem duas escolas, qual será o número previsível de habitantes?

3.2.4. Distribuições bidimensionais com folha de cálculo bidimensional

Diagrama de dispersão e reta de regressão

A análise de distribuições bidimensionais, em particular a determinação do coeficiente de correlação e a construção gráfica do diagrama de dispersão e da reta de regressão, é um processo demorado e que exige muitos cálculos.



Para tornar a análise de distribuições bidimensionais mais eficaz, podemos realizá-la com o auxílio de folhas de cálculo como *Excel* ou *Google Sheets*. Este tipo de análise permite estudar a relação entre duas variáveis, representadas como pares ordenados, para identificar padrões, correlações ou tendências.

Numa folha de cálculo, é possível organizar os dados em tabelas, calcular medidas estatísticas como média, desvio-padrão e correlação, além de visualizar a relação entre as variáveis por meio de gráficos de dispersão e retas de regressão. Essa abordagem prática e visual facilita a interpretação dos dados e o entendimento das interações entre variáveis, sendo amplamente utilizada em diversas áreas, como economia, ciência e engenharia.

Exemplo 41

Determinar o coeficiente de correlação e efetuar representações gráficas com uma folha de cálculo.

x	y
5	16
7	19
4	11
6	16
5	11
3	14
1	8
4	10
6	17
4	13
3	13
2	10
2	11

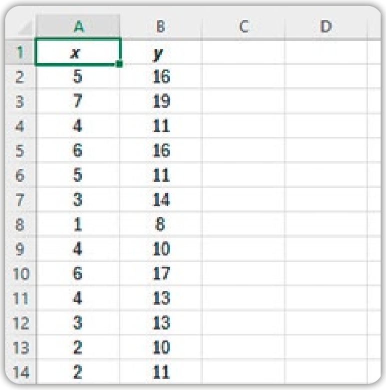
Neste exemplo vamos recorrer a um outro já realizado, mas agora com uma folha de cálculo.

Para os 13 estudantes de uma turma, a tabela apresenta o tempo de estudo médio realizado por semana para a disciplina A por cada estudante, em horas (x), e a correspondente classificação obtida no final do ano letivo à mesma disciplina A (y).

Procedimentos

1) Abre o *Excel* ou *Google Sheets*.

2) Insere as variáveis e os dados fornecidos.
Por exemplo, a variável x na célula A1 e os dados na coluna A e a variável y na célula B1 e os dados na coluna B.



	A	B	C	D
1	x	y		
2	5	16		
3	7	19		
4	4	11		
5	6	16		
6	5	11		
7	3	14		
8	1	8		
9	4	10		
10	6	17		
11	4	13		
12	3	13		
13	2	10		
14	2	11		

Para determinar o **coeficiente de correlação**

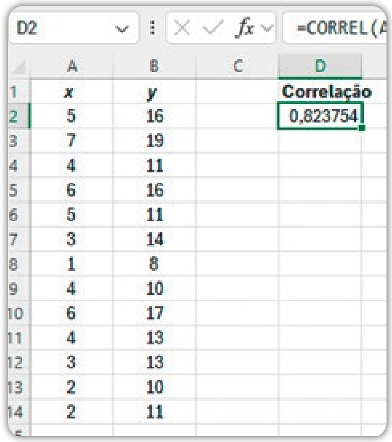
3) Numa célula vazia (por exemplo, D1), insere o título "Correlação".

4) Na célula abaixo (por exemplo, D2), insere a fórmula para calcular o coeficiente de correlação:

– No *Excel*: Usa a fórmula =***CORREL (A*2*:A*14*;B*2*:B*14*)***.

– No *Google Sheets*: Usa a fórmula =***CORREL (A*2*:A*14*, B*2*:B*14*)***.

5) Pressiona ***Enter*** para obteres o valor do coeficiente de correlação.



Representação gráfica – **Gráfico de dispersão**

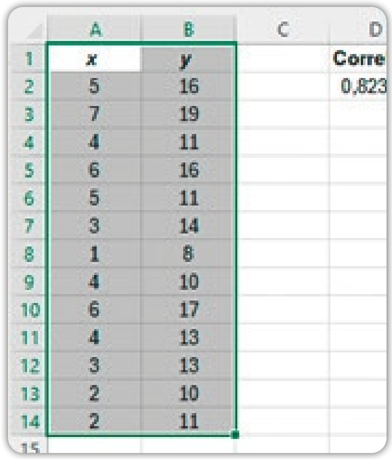
6) Seleciona os dados.

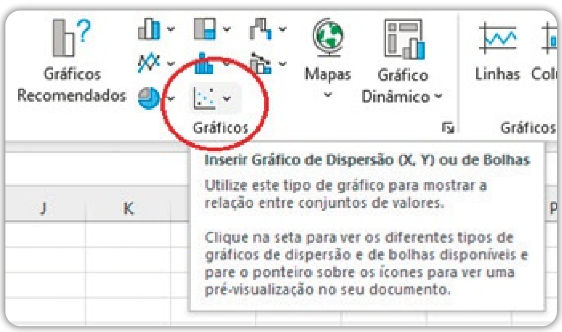
Clica e arrasta para selecionares as colunas x e y (incluindo os cabeçalhos).

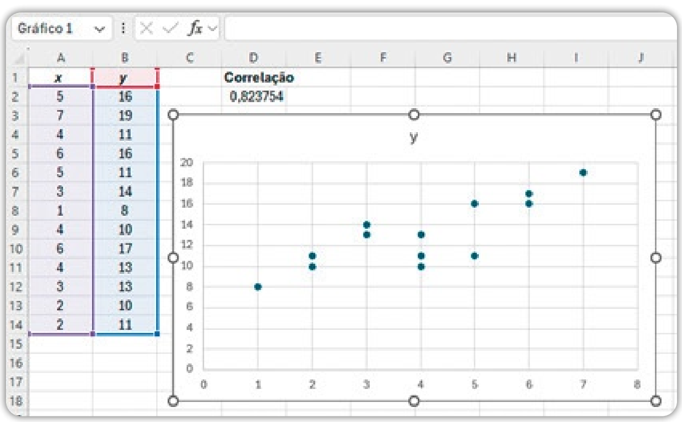
7) Insere o gráfico.

– Vai até à aba **Inserir**.

– Escolhe o **Gráfico Dispersão** (XY).



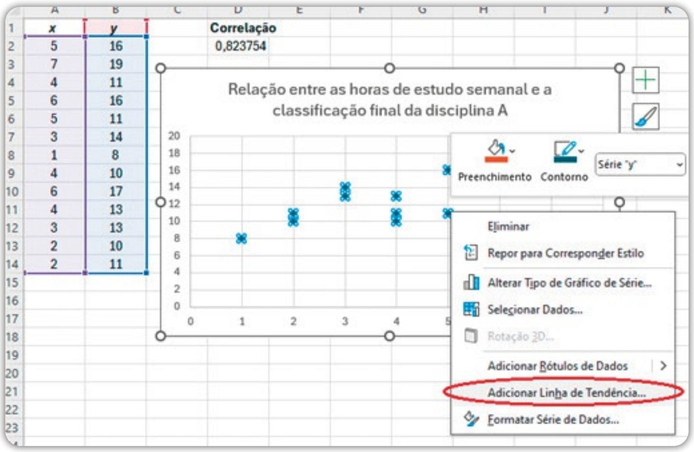


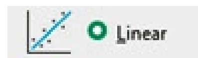


8) Adiciona a **Reta de regressão linear**.

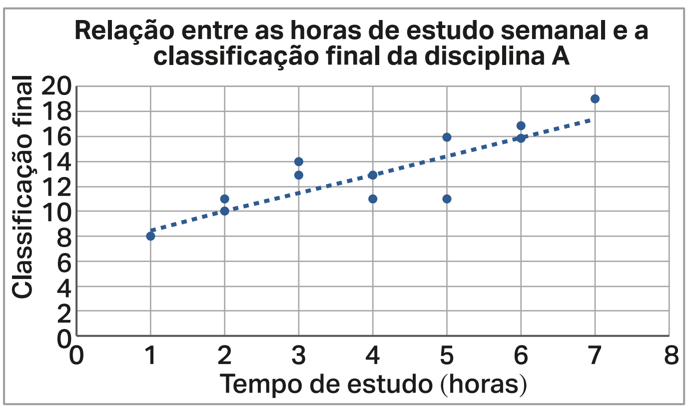
Seleciona os pontos do gráfico, clicando num dos pontos.

Seleciona as opções: ***Adicionar Linha de Tendência...*** e ***Linear***.





Deste modo, obténs o traçado da reta de regressão linear juntamente com o diagrama de dispersão.



Exercício

45 Para cada conjunto de dados seguinte, e recorrendo a uma folha de cálculo, determina e interpreta o coeficiente de correlação e representa graficamente o diagrama de dispersão e a reta de regressão.

45.1.

(x)	(y)
1	9
3	7
5	5
7	3
9	1

45.2.

(x)	(y)
5	50
10	40
15	30
20	20
25	10

Para aplicar

1 **Analisa cuidadosamente cada uma das afirmações seguintes e indica se cada afirmação a seguir é Verdadeira (V) ou Falsa (F).**

(A) Quando o coeficiente de correlação linear r é igual a zero, significa que as variáveis não possuem relação.

(B) Uma dispersão de pontos alinhada numa reta inclinada positivamente indica uma correlação positiva perfeita.

(C) O coeficiente de correlação linear r pode assumir valores fora do intervalo $[-1, 1]$.

(D) O gráfico de dispersão é uma ferramenta útil para visualizar a relação entre duas variáveis qualitativas.

(E) A regressão linear procura modelar a relação entre duas variáveis utilizando uma equação de reta.

(F) A equação de regressão é única para cada conjunto de dados e depende das variáveis em estudo.

(G) No estudo de variáveis bidimensionais, uma relação não linear entre variáveis não pode ser analisada por regressão linear.

(H) É possível ter uma correlação perfeita mesmo com dados que não sejam linearmente relacionados.

2 **Observa os seguintes diagramas que relacionam duas variáveis.**

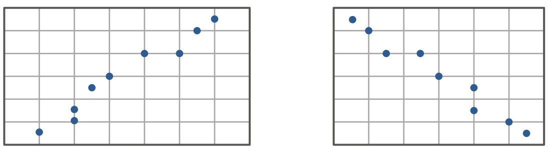


Diagrama I   Diagrama II

2.1. Apresenta dois exemplos de variáveis estatísticas que possam corresponder a cada um dos diagramas.

2.2. Interpreta as correlações de cada diagrama.

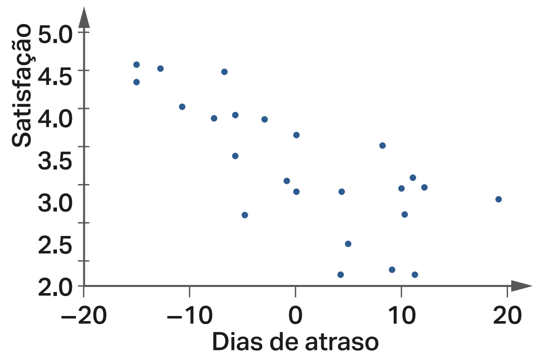
3 **A tabela seguinte relaciona a quantidade de publicidade (x) em milhares de escudos e o número de vendas de um produto (y).**

x (mil escudos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (vendas)	15	20	25	30	35	40	50	45	60	70

3.1. Representa o diagrama de dispersão dos dados bivariados.

3.2. Com base no diagrama de dispersão, interpreta a relação entre a quantidade de publicidade (x) em milhares de escudos e o número de vendas de um produto (y).

4 **O diagrama ao lado apresenta a relação entre o grau de satisfação de clientes e o número de dias de atraso na entrega de um produto.**



4.1. Qual dos seguintes coeficientes de correlação será mais ajustado aos dados do gráfico?

(A) $r = -0{,}70$ **(B)** $r = 0{,}75$

(C) $r = 0{,}1$ **(D)** $r = -0{,}1$

4.2. Justifica a escolha que fizeste na alínea anterior.

5 **A tabela ao lado apresenta dados bivariados para a emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.**

5.1. Representa num gráfico a nuvem de pontos dos dados.

Determina o centro de gravidade desta nuvem.

5.2. Representa graficamente a reta de regressão linear.

5.3. Determina o coeficiente de correlação.

Produção da fábrica (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – ppm)
1	2,04
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03

6 **A tabela seguinte apresenta a relação entre a temperatura diária (x, em °C) e o consumo de gelado (y, em litros).**

x (°C)	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
y (litros)	5	6	7	8	10	12	14	15	16	18

Recorrendo a uma folha de cálculo, representa graficamente o diagrama de dispersão e a reta de regressão, determina e interpreta o coeficiente de correlação.

Teste

1 O que caracteriza uma amostragem aleatória simples?

(A) Todos os elementos têm a mesma probabilidade de serem selecionados.

(B) Escolha baseada na conveniência.

(C) Divisão proporcional em estratos.

(D) Seleção de grupos inteiros.

2 Considera a seguinte tabela de frequências relativas de idades numa turma. Qual é a idade média dos alunos na turma?

Idade	Frequência Relativa (%)
15	10
16	40
17	30
18	17
19	3

(A) 16,5

(B) 16,8

(C) 17,0

(D) 16,7

3 Foi realizada uma pesquisa com 200 alunos acerca do número de irmãos. Qual é a moda desses dados?

N.º de irmãos	Frequência
0	40
1	80
2	50
3	20
4	10

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

4 Qual gráfico é ideal para representar dados contínuos ao longo do tempo?

(A) Gráfico de linhas **(B)** Gráfico de barras

(C) Gráfico circular **(D)** Diagrama de dispersão

5 Qual é o método mais adequado para avaliar a dispersão em torno da média?

(A) Moda **(B)** Amplitude

(C) Desvio-padrão **(D)** Mediana

6 O que mede o coeficiente de correlação?

(A) O valor central de um conjunto de dados.

(B) A relação entre duas variáveis.

(C) A amplitude entre o maior e o menor valor.

(D) A moda dos dados.

7 A tabela seguinte, apresenta dados sobre o consumo de energia em diferentes temperaturas. Qual gráfico seria mais adequado para representar a relação entre as variáveis?

Temperatura (°C)	Consumo (kWh)
20	300
25	350
30	400
35	450
40	500

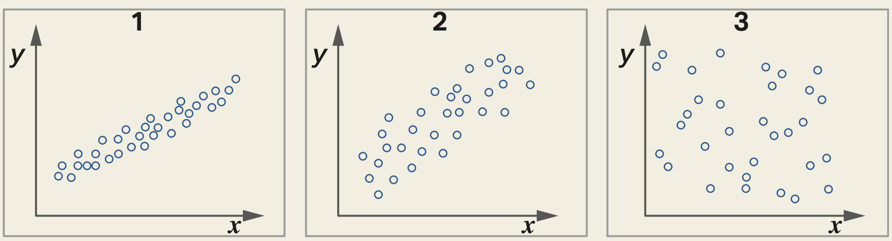
(A) Gráfico de barras

(B) Diagrama de dispersão

(C) Gráfico circular

(D) Histograma

8 Observa os seguintes diagramas de dispersão e identifica a opção correta.



(A) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação positiva e o diagrama 3 correlação nula.

(B) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação positiva e o diagrama 3 correlação negativa.

(C) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação negativa e o diagrama 3 correlação nula.

(D) Os diagramas 1 e 2 apresentam correlação negativa e o diagrama 3 correlação positiva.

9 Um estudo regista o número de horas trabalhadas semanalmente (x) e o salário semanal em escudos (y) de 10 indivíduos. A correlação calculada é $r = 0{,}92$. O que podemos concluir da relação entre x e y?

(A) Não há correlação

(B) Correlação moderada positiva

(C) Correlação forte positiva

(D) Correlação negativa

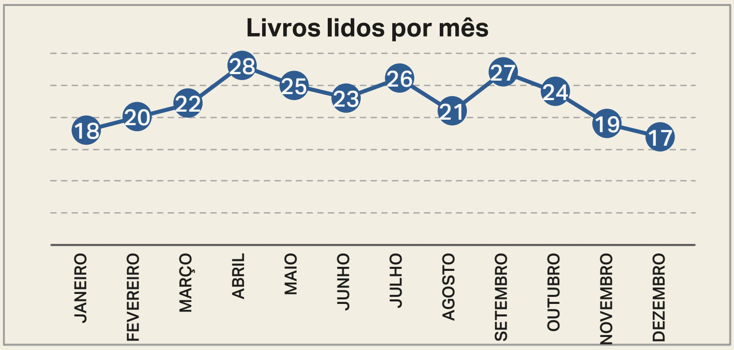
10 A reta de regressão para um conjunto de dados é dada por $y = 3x + 2$. Se $x = 4$, qual será o valor previsto de Y?

(A) 12 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 20

11 Considera três números naturais diferentes dos quais 1 é o menor e a é o maior. Sabe-se que o valor exato da média aritmética desses três números é 11. Qual é o maior valor que a pode tomar?

Teste

12 O Martin e a Mariana registaram o total de livros lidos por todos os alunos de uma escola por mês e elaboraram o seguinte o gráfico.



12.1. Indica o mês em que se leram menos livros.

12.2. Em que mês se leram mais livros e quantos livros se leram?

12.3. Qual foi o número de livros lidos, pelos alunos da escola, no primeiro semestre desse ano?

13 Complete a distribuição abaixo, determinando as frequências simples:

i	x_i	F_i	F_{ac}
1	2	…	2
2	3	…	9
3	4	…	21
4	5	…	29
5	6	…	34
		$\Sigma = 34$	

14 Numa turma do 10.° ano, obtiveram-se os seguintes resultados no teste de Matemática, sendo que as classificações dos alunos foram registadas e agrupadas em intervalos de pontuação.
A tabela ao lado mostra a distribuição de frequência absoluta desses intervalos.

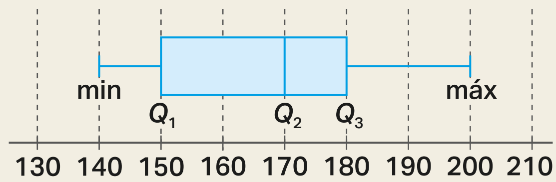
Intervalo da classificação (%)	Frequência absoluta
$[0\,;\,20[$	2
$[20\,;\,40[$	5
$[40\,;\,60[$	15
$[60\,;\,80[$	12
$[80\,;\,100]$	6

14.1. Quantos alunos tem a turma?

14.2. Quantos alunos obtiveram 40% ou mais?

14.3. Qual é a percentagem de alunos que obtiveram 60% ou mais?

15 Observa o diagrama de extremos e quartis abaixo, relativo às alturas, em centímetros, de 32 alunos de uma turma.



15.1. Indica possíveis alturas para dez dos alunos da turma.

15.2. Comenta a afirmação: "O aluno mais baixo mede 138 cm".

15.3. Quantos alunos medem 150 cm ou mais?

16 Considera o seguinte conjunto de dados.

20	35	28	40	15	27	50	44	31	26	32	29	42

16.1. Indica a mediana.

16.2. Determina a amplitude dos dados.

16.3. Constrói o diagrama de extremos e quartis.

17 Os dados seguintes apresentam a relação entre o peso de um objeto (x, em kg) e o número de pessoas para levantá-lo (y).

x (kg)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y (n.º de pessoas)	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4

17.1. Representa o diagrama de dispersão dos dados.

17.2. Determina o coeficiente de correlação dos dados.

18 É esperado que a massa muscular de uma pessoa diminua com a idade. Para estudar essa relação, uma nutricionista selecionou 18 mulheres, com idade entre 40 e 79 anos, e observou em cada uma delas a idade (x) e a massa muscular (y).

Idade (x)	71	64	43	67	56	73	68	56	76	65	45	58	45	53	49	78	73	68
Massa muscular (y)	82	91	100	68	87	73	78	80	65	84	116	76	97	100	105	77	73	78

Estuda a relação e comente a afirmação inicial: "É esperado que a massa muscular de uma pessoa diminua com a idade."

S

Soluções

Página 12 – Antes de começar

1.1. 125 cm^3
1.2. 150 cm^2
1.3. 7,1 cm (arred. às décimas)

2.1. 1420 cm^2
2.2. 2400 cm^3

3. 1200 cm^3

4.1. Aproximadamente, 38 792 cm^3.
4.2. Não.

Página 13

5.1. Por exemplo, AB e DC.
5.2. Por exemplo, AB e AG.
5.3. Por exemplo, AB e HC.
5.4. Por exemplo, ABC e ABH.
5.5. Por exemplo, ABC e FGH.
5.6. Por exemplo, AB.
5.7. Por exemplo, GB.
5.8. Por exemplo, AH.

6.1. **a)** perpendicular;
b) não complanares;
c) oblíqua:
d) contida;
e) perpendiculares.
6.2. Sim, se o triângulo $[ABC]$ for equilátero ou isósceles de base $[AB]$.

Página 14

7.1. $6\ \pi d^3$
7.2. 1206,37 cm^3

8.1. 735 000 π cm^3
8.2. 15 400 π cm^2

9.1. 288 cm^3
9.2. 1440 cm^3

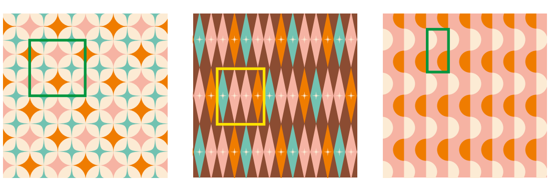
Página 19

1. 56 cm^3

2. 105,98 m

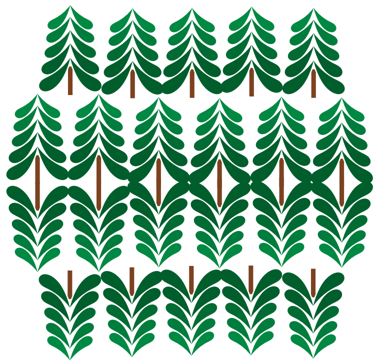
Página 21

Tarefa 1



Tarefa 2

Por exemplo:



Página 23

3. B, C e D

4.

Polígonos regulares	Amplitude de cada ângulo interno de um mosaico	Número de polígonos que se encontram num vértice de pavimentação	Pode pavimentar o plano?
Triângulo	60°	360° : 60° = 6	Sim
Quadrado	90°	360° : 90° = 4	Sim
Pentágono	108°	360° : 108° = 3,(3)	Não
Hexágono	120°	360° : 120° = 3	Sim
Heptágono	128,57° (aprox.)	360° : 128,57° = 2,8	Não
Octógono	135°	360° : 135° = 2,(6)	Não
Eneágono	140°	360° : 140° = 2,57	Não

5. Não, porque os ângulos internos de um decágono têm de amplitude $\frac{(10-2)\cdot 180}{10} = 144°$ e $360° : 144° = 2,5$, que não é número inteiro.

Página 24

6. Vértice de pavimentação tem um triângulo equilátero, dois quadrados e um hexágono, logo, $60° + 2 \times 90° + 120° = 360°$.

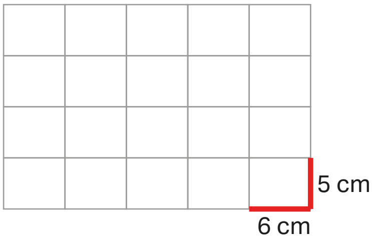
Página 27

Tarefa 3

3.1. 128 caixas.
3.2. Opção D.
3.3. Resposta aberta.

7.1. 20 retângulos.

7.2.



8. 25 círculos.

9. 64 cubos.

Página 28

10.1. $\frac{125}{6}\ m^3$

10.2. $125\ m^3$

Página 29

Tarefa 4

4.1. Se a aresta do cubo é a, então a aresta do cuboctaedro é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4.2. $\frac{625}{6}\ cm^3$

Página 30

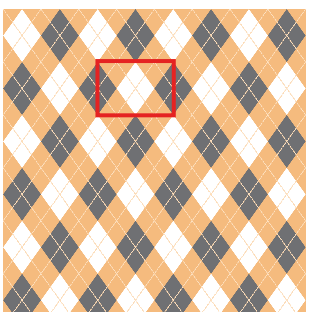
11. 4 faces, 6 arestas e 4 vértices.

12. Quadrado. 12 arestas. Prisma quadrangular.

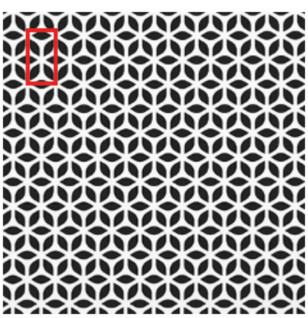
13. Quadrado. 5 faces, 8 arestas e 4 vértices.

Página 32 – Para aplicar

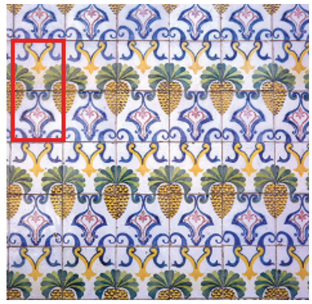
1.1.



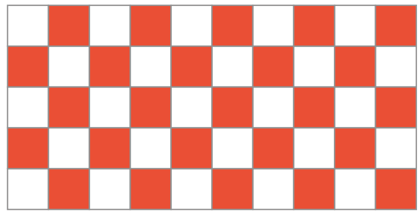
1.2.



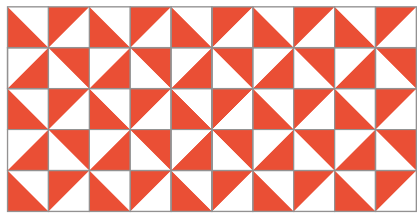
1.3.



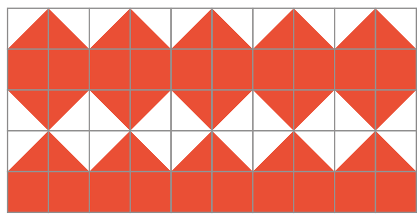
2.1.



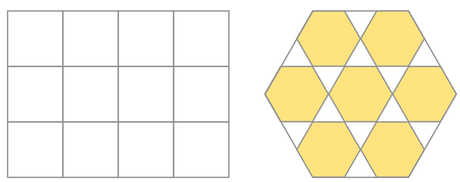
2.2.



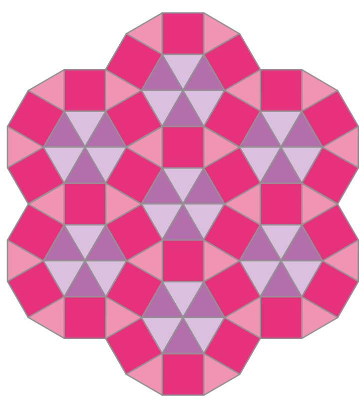
2.3.



3.



4.



Página 33

5.

Polígonos	Soma das amplitudes
1 hexágono e 4 triângulos equiláteros	$1 \times 120° + 4 \times 60° = 360°$
2 hexágonos e 2 triângulos equiláteros	$2 \times 120° + 2 \times 60° = 360°$
2 octógonos e 1 quadrado	$2 \times 135° + 1 \times 90° = 360°$

6. 220 caixas.

7. 144 latas.

Página 34

8. $2649{,}375\ cm^3$

9. $140\ m^3$

10. $87{,}45\ cm^3$ (aprox.)

11. $1102{,}70\ m^3$ (aprox.)

12. $2261{,}95\ cm^3$ (aprox.)

Página 37 – Antes de começar

1.1. 5
1.2. 2
1.3. 8^2
1.4. $2^{\frac{1}{2}}$
1.5. $2^{-\frac{1}{2}}$

2. 4^6

3.1. $a > b$
3.2. $a - 3 > b - 3$
3.3. $4a < 5a$
3.4. $4b < 5a$
3.5. $a + 5 > b + 5$
3.6. $-2b > -2a$
3.7. $ab < 0$
3.8. $5 > ab$
3.9. $-2ab > 2ab$
3.10. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
3.11. $a^2 > b$
3.12. $a^2 > 3b$
3.13. $a > b^3$
3.14. $a > b^3 - 3$

Página 39

14. Exercícios de demonstração.

Página 40

15.1. **a)** $>$ **b)** $<$ **c)** $<$ **d)** $<$
e) $>$ **f)** $<$ **g)** $>$ **h)** $<$

15.2. **a)** $<$ **b)** $<$ **c)** $>$
d) $<$ **e)** $>$ **f)** $<$

16.1. Por exemplo, 2 e 3.
16.2. Por exemplo, -3 e 2.
16.3. Por exemplo, 2 e 3.
16.4. Por exemplo, -3 e 2.
16.5. Por exemplo, 0 e 1.

Página 43

17.1. $\sqrt{10}$ **17.2.** $\sqrt[3]{-6}$

17.3. $\sqrt[5]{1} = 1$ **17.4.** $\sqrt[4]{100}$

17.5. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ **17.6.** $\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}$

17.7. $\sqrt[5]{\frac{1}{100}}$ **17.8.** $\sqrt[3]{32}$

17.9. 3 **17.10.** $\sqrt[5]{2^7}$

Página 44

18.1. $5\sqrt{2}$ **18.2.** $3\sqrt[4]{3}$ **18.3.** $3\sqrt[3]{3}$

18.4. $2\sqrt[5]{3}$ **18.5.** $16\sqrt{2}$

19. Não. $a = 13 - 2\sqrt{3}$.

Página 45

20. Sim.

21.1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **21.2.** $\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ **21.3.** $\frac{4\sqrt{5}}{15}$

21.4. $\sqrt{5} - 2$ **21.5.** $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$ **21.6.** $2\sqrt{3} + 3$

Página 46

Tarefa 5

2, 5, 6, 15, $6 = 2 \times 3$, $15 = 3 \times 3{,}3$
2, 10, 4, 20, $4 = 2 \times 2$, $20 = 10 \times 2$, 2

22.1. $\sqrt[6]{10^4}$ **22.2.** $\sqrt[6]{2^4}$

22.3. $\sqrt[6]{3^3}$ **22.4.** $\sqrt[6]{2^2}$

Página 47

23.1. $\sqrt[8]{3^{10}}$ **23.2.** $\sqrt[4]{5^2}$ **23.3.** $\sqrt[6]{216}$

23.4. $\sqrt{4^{\frac{6}{5}}}$ **23.5.** $4^{\frac{5}{6}}$ **23.6.** $\sqrt[4]{4^3}$

23.7. $3^{\frac{15}{9}}$ **23.8.** $\sqrt[8]{4^2}$ **23.9.** $\sqrt[6]{3^9}$

24.1. $4^{\frac{7}{3}}$ **24.2.** 4

24.3. $2^{\frac{1}{6}}$ **24.4.** $5^{\frac{1}{2}}$

25.1. $\sqrt[2]{6^3}$ **25.2.** $\sqrt[5]{5^2}$ **25.3.** $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

25.4. $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ **25.5.** $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$ **25.6.** $\sqrt[3]{4}$

Página 48

26.1. $10^{\frac{3}{5}}$ **26.2.** $\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$ **26.3.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{6}}$

26.4. $5^{\frac{6}{5}}$ **26.5.** $5^{-\frac{9}{5}}$ **26.6.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

26.7. $2^{\frac{7}{2}}$ **26.8.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$

27.1. $\sqrt[5]{10^3}$ **27.2.** $\sqrt[5]{\left(\frac{10}{3}\right)^3}$ **27.3.** $\sqrt[6]{\frac{1}{2^7}}$

27.4. $\sqrt[5]{5^6}$ **27.5.** $\sqrt[5]{\frac{1}{5^9}}$ **27.6.** $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

27.7. $\sqrt{2^7}$ **27.8.** $\sqrt[5]{\frac{1}{5^3}}$

Página 49

Tarefa 6

6.1. $3^{\frac{1}{4}}$, expoente $\frac{1}{4}$.
6.2. $2^{\frac{1}{2}}$, expoente $\frac{1}{2}$.
6.3. $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.
6.4. $3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$ e $2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{2^2}$
6.5. $\sqrt[4]{3}\times\sqrt{2}=3^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{2}{4}}=\left(3\times 2^2\right)^{\frac{1}{4}}=$
$12^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{12}$

28.1. $\sqrt{6}$ **28.2.** $\sqrt[6]{3072}$

28.3. $\sqrt[6]{\frac{3}{256}}$ **28.4.** $\sqrt[6]{\frac{256}{3}}$

29.1. Exercício de demonstração.
29.2. Exercício de demonstração.

Página 52

30.1. $\sqrt[3]{20}$ dm de aresta.
30.2. $\sqrt[6]{3200}$ dm

31.1. $\sqrt{3}$ cm
31.2. Exercícios de demonstração.

32.1. $\sqrt{7}$ cm **32.2.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$ cm

32.3. $\frac{\sqrt{147}}{2}$ cm^2 **32.4.** $0+\frac{7}{2}\sqrt{3}$ cm^2

33.1. Exercício de demonstração.
33.2. $\sqrt[6]{972}$

Página 53

34.1. **a)** 10 u.
b) $5\sqrt{2}$ u.
c) $5\sqrt{2}$ u.
34.2. O triângulo é retângulo.
34.3. Exercício de demonstração.

35.1. Exercício de demonstração.
35.2. $3\sqrt{3}$

36.1. $24\sqrt{5}$
36.2. $4\sqrt{15}+8\sqrt{3}$

Página 56 – Para aplicar

1.1. $3\sqrt{3}$ **1.2.** $5\sqrt{5}$ **1.3.** $4\sqrt{3}$
1.4. $3\sqrt{7}$ **1.5.** $10\sqrt{2}$ **1.6.** $2\sqrt{71}$

2.1. $3\sqrt{2}$ **2.2.** $6\sqrt{5}$ **2.3.** $5\sqrt{6}$
2.4. $5\sqrt{3}$ **2.5.** $7\sqrt{3}$ **2.6.** $-\sqrt{7}$

3.1. $P=10\sqrt{3}$; $A=18$
3.2. $9\sqrt{2}$; $A=6$

4.1. $\sqrt{10}$ **4.2.** $4+2\sqrt{14}$
4.3. $2\sqrt{5}+5$ **4.4.** $2\sqrt[3]{3}$
4.5. 2 **4.6.** 6
4.7. $\frac{3}{2}$ **4.8.** 9

5.1. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ **5.2.** $4\sqrt{5}$
5.3. $\frac{1}{6}$ **5.4.** $3\sqrt[4]{8}$
5.5. $10-5\sqrt{3}$ **5.6.** $\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{17}$

Página 57

6.1. $20-10\sqrt{3}$ **6.2.** $\sqrt{707-396\sqrt{3}}$

7.1. 30 **7.2.** 600 **7.3.** 20

8. $\frac{40\sqrt{3}-48}{39}$

9.1. $\sqrt[4]{5}$ **9.2.** 2
9.3. 15 **9.4.** $\sqrt[8]{45}$

10. Exercício de demonstração.

Página 59

37. $A(1,0)$; $B(-1,0)$; $C(0,1)$; $D(0,-1)$; $E(1,1)$; $F(2,-1)$.

38. A – Eixo das abcissas
B – Eixo das abcissas
C – Eixo das ordenadas
D – Eixo das ordenadas
E – 1.º Quadrante
F – 4.º Quadrante

Página 60

39.1. Por exemplo, 1.
39.2. Por exemplo, 3.
39.3. Não existe.
39.4. Por exemplo, -2.
39.5. 2
39.6. -1

Página 62

40.1. $y = 2$
40.2. $x = -3$

41.1. **a)** C e E, pois têm a mesma ordenada (3).
b) A e D, pois têm a mesma abcissa e ser perpendicular a Ox corresponde a ser paralela a Oy.
41.2. **a)** -1
b) $-\frac{5}{3}$
c) Não existe.
d) $\frac{1}{2}$
41.3. **a)** $y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$
b) $y = -2x + 1$
c) $y = -x + 3$

Página 64

42.1. $2\sqrt{13}$
42.2. $5\sqrt{2}$
42.3. $2\sqrt{5}$
42.4. $2\sqrt{5}$

43.1. $A(1, 2)$; $B(3, 4)$; $C(4, -1)$
43.2. **a)** $2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{26}$
c) $3\sqrt{2}$
43.3. Sim, a medida dos seus lados satisfaz o Teorema de Pitágoras.

Página 65

44.1. $(-1, 1)$
44.2. $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$
44.3. $(2, 0)$
44.4. $(-1, -2)$

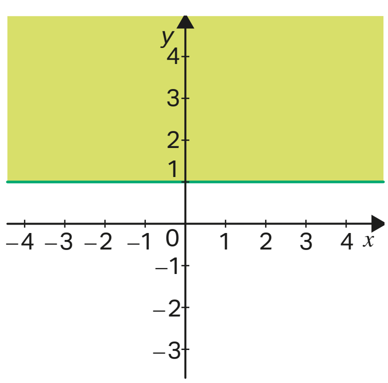
45. $C(5, 10)$

Página 67

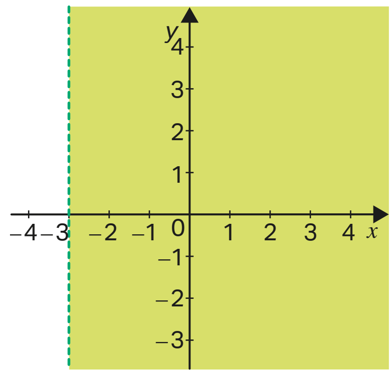
46. $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

Página 69

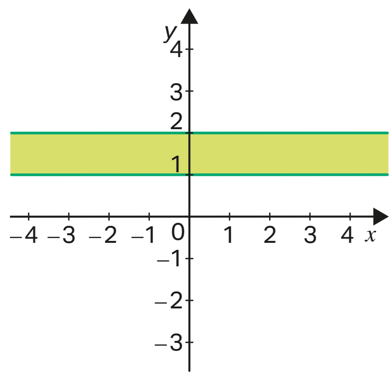
47.1.



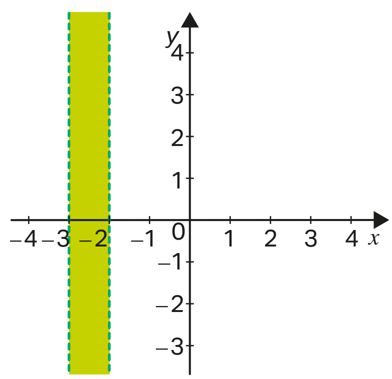
47.2.



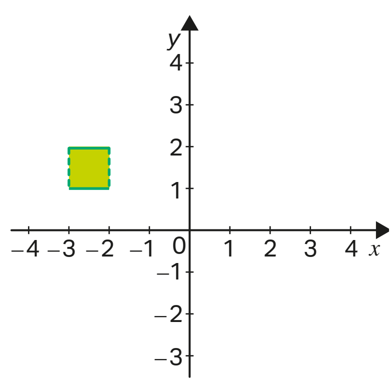
47.3.



47.4.



47.5.



Página 70

48. I – D) II – B) III – B)

Página 71

49. $y \geqslant -x+2 \wedge x<2$

Página 72

50. $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

51.1. $(x+3)^2+(y-1)^2=13$

51.2. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{13}{4}$

Página 73

52.1. (C) **52.2.** (C) **52.3.** (B)

Página 76

53.1. $M(2\,,\,2)$
53.2. $y=x$
53.3. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
53.4. Sim.
53.5. $(0\,,\,0)$, $(0\,,\,2)$ e $(2\,,\,0)$

54.1. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
54.2. $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1 \vee (x-4)^2+(y-1)^2 \leqslant 4$

Página 77

55.1. $x \geqslant 0 \wedge x \leqslant 2 \wedge y \geqslant -x+2 \wedge y \leqslant -x+6$
55.2. 8
55.3. $8+4\sqrt{2}$

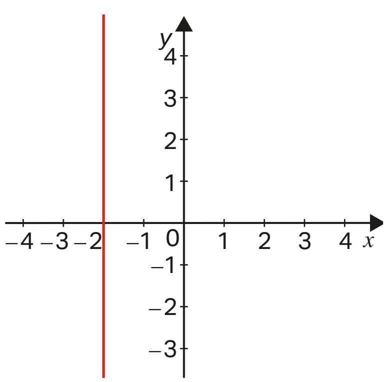
56.1. **a)** Sim. 1 ponto;
b) Não;
c) Sim. 2 pontos;
d) Sim. 2 pontos;
e) Sim. 2 pontos.
56.2. Por exemplo, $x=0$.

Página 80 – Para aplicar

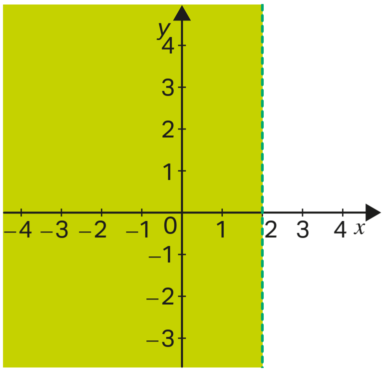
1.1. $A(6\,,\,3)$ e $B(-2\,,\,-1)$
1.2. $(2\,,\,1)$
1.3. $(-2\,,\,9)$

2. 6

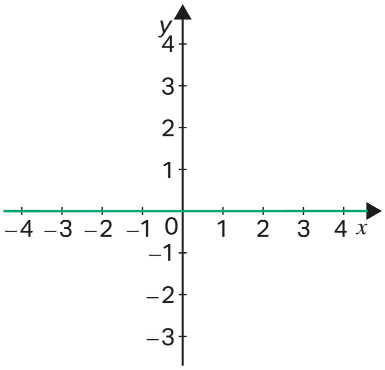
3.1.



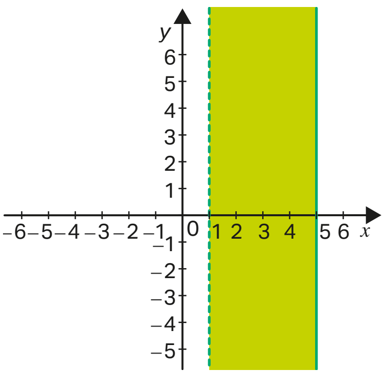
3.2.



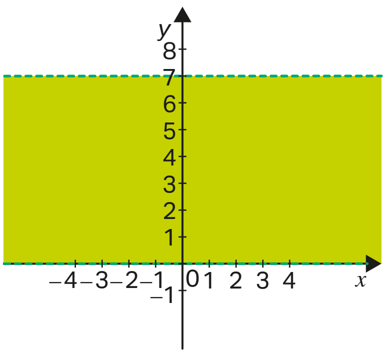
3.3.



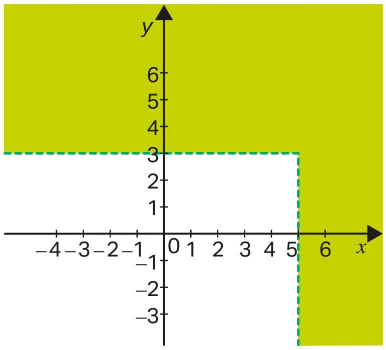
3.4.



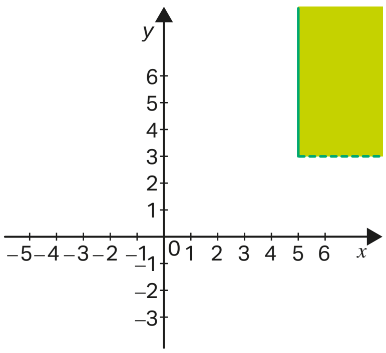
3.5.



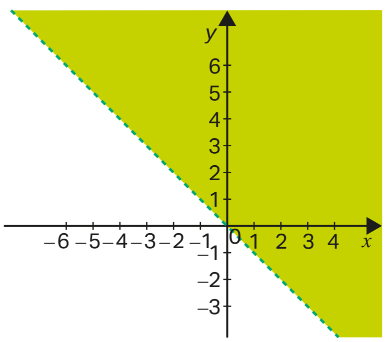
3.6.



3.7.



3.8.



4.1. $y > -1$
4.2. $y \leqslant 2$
4.3. $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1 \wedge x^2 + y^2 \leqslant 4$

Página 81

5. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

6.1. $\sqrt{53}$
6.2. $y = -\frac{2}{7}x + \frac{47}{14}$

7. Centro $(3, -4)$ e raio $\sqrt{2}$.

8.1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
8.2. $-1-\sqrt{3}$

Página 84

57.

(3, 0, 3)	A
(0, 0, 0)	O
(3, 0, 0)	E
(0, 2, 3)	C
(3, 2, 3)	B
(0, 0, 3)	D
(0, 2, 0)	G
(3, 2, 0)	F

58.1. Eixo das cotas.
58.2. Eixo das ordenadas.
58.3. Eixo das abcissas.
58.4. xOz
58.5. yOz
58.6. xOy
58.7. xOz, xOy, yOz

Página 85

59.1. -1
59.2. 1

Página 86

60.1. $A(2, 2, 0)$; $B(-2, 2, 0)$; $C(-2, -2, 0)$; $D(2, -2, 0)$; $E(2, 2, 4)$; $F(-2, 2, 4)$; $G(-2, -2, 4)$; $H(2, -2, 4)$

60.2. **a)** $z = 0$ **b)** $y = 2$ **c)** $z = 4$ **d)** $x = 2$ **e)** $x = -2$ **f)** $y = -2$

Página 88

61.1. $A\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$; $B\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$; $C\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, 0\right)$; $D\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, 0\right)$; $E\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 9\right)$; $F\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 9\right)$; $G\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, 9\right)$; $H\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, 9\right)$

61.2. **a)** $y = \frac{9}{2} \wedge z = 0$
b) $y = -\frac{9}{2} \wedge z = 0$
c) $x = -\frac{9}{2} \wedge y = \frac{9}{2}$

61.3. **a)** $y = \frac{9}{2} \wedge z = 0 \wedge -\frac{9}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}$
b) $y = \frac{9}{2} \wedge z = 9 \wedge -\frac{9}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}$
c) $x = \frac{9}{2} \wedge z = 0 \wedge -\frac{9}{2} \leqslant y \leqslant \frac{9}{2}$
d) $x = \frac{9}{2} \wedge y = \frac{9}{2} \wedge 0 \leqslant z \leqslant 9$

Página 89

62.1. $\sqrt{6}$ **62.2.** $\sqrt{45}$ **62.3.** 7

Página 90

63.1. $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ **63.2.** $\left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{5}{2}\right)$

63.3. $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$

Página 91

64.1. $A(2, 3, 0)$; $B(3, 5, 0)$; $C(0, 5, 0)$; $E(2, 3, 2)$; $F(3, 5, 2)$; $G(0, 5, 2)$; $H(0, 3, 2)$

64.2. **a)** $4y + 2x = 21$
b) $4y - 4x = 12$
c) $4y + 6x = 25$

64.3. Por exemplo, $\left(\frac{5}{2}, 4, 0\right)$.

Página 93

65.1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4$

65.2. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 24$

66.1. Centro $(5, 2, 1)$ e raio $\sqrt{5}$.

66.2. Sim.

Página 95

67.1. $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 \leqslant 25$ e $(x-5)^2 + (y-15)^2 + (z-5)^2 \leqslant 25$

67.2. $(10, 15, 5)$

Página 98 – Para aplicar

1.1. $C(0, 1, 0)$; $D(0, 0, 0)$; $E(0, 0, 1)$; $F(1, 0, 1)$

1.2. $z = 1 \wedge y = 1$

1.3. $y = 1$

2.1. $k = 4{,}5$ ou $k = -3{,}5$

2.2. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$

2.3. O ponto é $(4, 0, 0)$.

3.1. $A(2, 0, 0)$; $B(2, 4, 0)$; $C(2, 4, 3)$; $D(2, 0, 3)$; $E(0, 0, 0)$; $F(0, 4, 0)$; $G(0, 4, 3)$; $H(0, 0, 3)$

3.2. $x = 2 \wedge z = 3$

3.3. $x = 2 \wedge z = 3 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 4$

3.4. $y = 4$

3.5. $C'(-2, 4, 3)$

3.6. $-4x + 8y + 6z = 21$

4.1. R, S, T e U

4.2. O, P, Q, R, S, T, U e V

4.3. $\sqrt{48}$

Página 99

5.1. Centro $(2, 0, -1)$ e raio 5.

5.2. 10

5.3. $z = 4$ ou $z = -6$.

6.1. $A(0, 4, 8)$ ou $A(0, -4, 8)$

6.2. $z = 8 \wedge x^2 + y^2 \leqslant 16$

7.1. $z = 2$ **7.2.** Não. **7.3.** Reta AD.

Página 100

Tarefa 7

7.1. 50 cm **7.2.** 500 kg

7.3. Não. **7.4.** Sim. Não.

Página 101

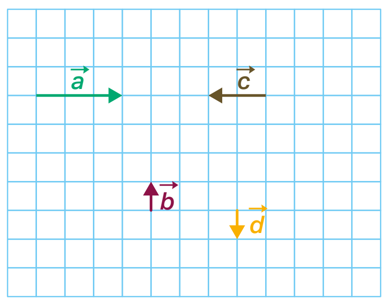
68. **(B)**

Página 103

69.1. $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 8$, $\|\vec{c}\| = 3$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{13}$, $\|\vec{e}\| = 4$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{45}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\|\vec{w}\| = 3$

69.2. **a)** Por exemplo, $\vec{a}$ e $\vec{v}$;
b) Por exemplo, $\vec{a}$ e $\vec{e}$;
c) $\vec{c}$ e $\vec{w}$;
d) $\vec{a}$ e $\vec{e}$;
e) Por exemplo, $\vec{a}$ e $\vec{v}$;
f) Por exemplo, $\vec{w}$ e $\vec{b}$.

70. Por exemplo:



Página 104

71.1. Por exemplo, $\overrightarrow{AC}$.

71.2. Por exemplo, $\overrightarrow{BD}$.

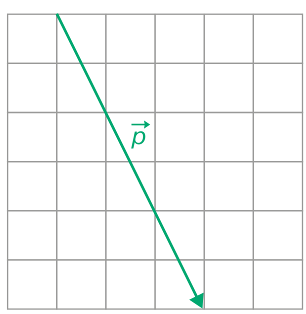
71.3. Por exemplo, $\overrightarrow{DB}$.

71.4. Por exemplo, $\overrightarrow{AF}$.

Página 106

72.1. $\vec{b} = -2\vec{w}$ e $\vec{t} = \frac{3}{2}\vec{u}$

72.2.



Página 108

73. $\vec{a}(-1,2)$; $\vec{b}(0,2)$; $\vec{c}(3,-1)$; $\vec{s}(2,2)$; $\vec{t}(3,0)$; $\vec{u}(-2,0)$; $\vec{v}(-2,-3)$; $\vec{w}(0,-4)$

74. $\vec{u}(1,-2,0)$; $\vec{v}(1,0,-1)$

Página 109

75.1. $\sqrt{8}$
75.2. $\sqrt{10}$
75.3. $\sqrt{10}$

76. $\sqrt{41}$

Página 110

77.1. $(0,-6,4)$
77.2. $(2,0,1)$
77.3. $(2,3,-1)$

Página 111

78.1. $(3,4)$
78.2. $(1,4)$
78.3. $(3,16)$
78.4. $(4,1,-1)$
78.5. $(-16,2,10)$
78.6. $\left(-11,-3,\frac{5}{2}\right)$

Página 113

79.1. $(x,y,z)=(2,1,2)+k(0,4,4),\ k\in\mathbb{R}$
79.2. $(x,y,z)=(2,1,2)+k(-2,4,1),\ k\in\mathbb{R}$
79.3. Sim.

80. $y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

Página 114

81. Todos os pares de retas são paralelos.

Página 116

82.1. 64
82.2. 32
82.3. -32

83.1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

83.2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Página 117

84.1. 6
84.2. 0
84.3. 6
84.4. 1

Página 118

85.1. $6\sqrt{2}$
85.2. $-3{,}74$
85.3. 0
85.4. -12

Página 119

86.1. Agudo, $45°$.
86.2. Raso, $180°$.
86.3. Agudo, $4°$.
86.4. Obtuso, $114°$.

Página 120

87. $b=5a+2$

88. $\vec{u}=\left(\frac{8}{5},-\frac{6}{5}\right)$ ou $\vec{u}=\left(-\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$

Página 121

89. $\begin{cases} x=-4+2k \\ y=1 \\ z=1-k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

Página 124

90.1. Exercício de demonstração.
90.2. $A(-3,-3)$ e $B(3,3)$
90.3. Exercício de demonstração.
90.4. $(0,4)$

Página 125

91.1. 4 cm
91.2. $A(2,-2,0)$; $B(2,2,0)$; $C(-2,2,0)$; $D(-2,-2,0)$
91.3. Por exemplo, $(-2,2,0)$.
91.4. Não.
91.5. 1

92.1. Por exemplo, $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ e $(-1,2)$.

92.2. $\left(\frac{1}{2},3\right)$

93.1. $A(2,-2,5)$; $B(2,2,5)$; $C(-2,2,5)$; $D(-2,-2,5)$
93.2. $(-4,0,0)$
93.3. $x=0$

Página 128 – Para aplicar

1.1. **a)** $(3,1)$
b) $(4,-3)$
c) $(-12,-4)$
1.2. Exercício de demonstração.
1.3. Exercício de demonstração.
1.4. $M_1\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ e $M_2\left(6,\frac{3}{2}\right)$

2.1. Por exemplo, $(-4, 3)$.
2.2. $(0, 3)$
2.3. $b: y = -\frac{3}{4}x - 1$
2.4. 56
2.5. $y = -\frac{3}{4}x$

Página 129

3.1. $(8, 5, 0)$
3.2. $(x, y, x) = (14, -7, 4) + k(-3, 6, -2),\ k \in \mathbb{R}$

4.1. **a)** D **b)** E **c)** $\overrightarrow{DC}$ **d)** $\overrightarrow{AD}$
4.2. 3
4.3. 27
4.4. Por exemplo, $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-3, -1, 7),\ k \in \mathbb{R}$.
4.5. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - k,\ k \in \mathbb{R} \\ z = 7k \end{cases}$
4.6. $(1, 3, -7)$
4.7. $(1, 2, 0)$
4.8. $(-2, 2, 0)$
4.9. $(0, \sqrt{2}, -7\sqrt{2})$ ou $(0, -\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$

Página 130 – Teste

1.1. **(D)**
1.2. **(A)**

2. **(C)**

3. **(D)**

4. **(C)**

5. **(A)**

Página 131

6. **(C)**

7. **(D)**

8. **(B)**

9. $345\ \text{m}^2$

Página 132

10. **(A)** Regular; **(B)** Semirregular; **(C)** Semirregular.

11.1. $198\pi\ \text{cm}^3$
11.2. Embalagem A: $4780\ \text{cm}^3$, Embalagem B: $4752\ \text{cm}^3$ e Embalagem C: $4752\ \text{cm}^3$.
11.3. Embalagem C.

12.1. $3^{\frac{7}{4}}$ **12.2.** $4^{\frac{1}{4}}$ **12.3.** $2^{\frac{1}{10}}$
12.4. $2^{-\frac{19}{8}}$ **12.5.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{4}}$ **12.6.** 1

Página 133

13.1. $3\sqrt{6}$ e $5\sqrt{6}$
13.2. $16\sqrt{6}$

14.1. Por exemplo, -2 e 1.
14.2. Por exemplo, 2 e 1.
14.3. Por exemplo, -2 e 2.

15. $\sqrt{41}$

16.1. $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
16.2. $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

17.1. $(2, -3)$
17.2. $\sqrt{13}$
17.3. $(0, -6)$ e $(0, 0)$
17.4. Sim.

Página 134

18.1. $10\sqrt{3}$
18.2. Exercício de demonstração.

19.1. B
19.2. B
19.3. $\overrightarrow{DC}$
19.4. G
19.5. B
19.6. $\overrightarrow{GE}$

20. Exercício de demonstração.

21.1. **a)** $(x, y) = (0, 1) + k(2, -2),\ k \in \mathbb{R}$
b) $y = -x + 1$
21.2. Não.

Página 135

22. Por exemplo, $\begin{cases} x = -1 + 5k \\ y = 3 - 5k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$

23. $(3, 2)$

24.1. $\sqrt{19}$
24.2. C está mais próximo de B.
24.3. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

25.1. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
25.2. $7\sqrt{5} - 14$
25.3. $\frac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{2}}{5}$

26. **a)** $x + y + z = 12$
b) Sim.

27.1. -5
27.2. Obtuso.
27.3. Falso, porque $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$.

Página 142 – Antes de começar

1.1. S

1.2. $h \longrightarrow y = x + 6$
$p \longrightarrow y = -x + 1$
$g \longrightarrow y = -2x + 1$
$s \longrightarrow x = 3$
$t \longrightarrow y = -2$

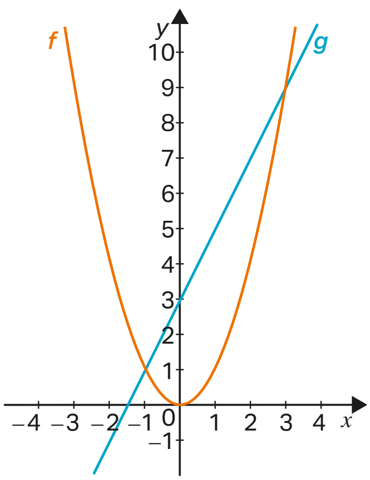
1.3. **a)** $y = -2$
b) $x = 3$
c) $y = x + 6$
d) $y = -2x + 1$

1.4. $y = -x + 5$

Página 143

2.1. 6 horas.
2.2. 12 horas.
2.3. Sim, porque $v \times t$ é constante.
2.4. 120
2.5. A distância percorrida.

3.1.



3.2. $(-1, 1)$ e $(3, 9)$

4.1. $y = 2x$
4.2. $2\sqrt{2}$

Página 144

1. f; g

Página 146

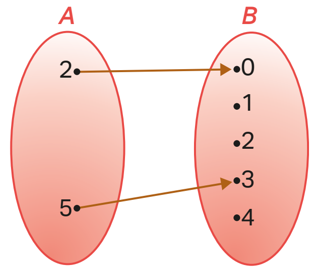
2.1. $f(x) = x - 2$
2.2. $g(x) = 5x$
2.3. $h(x) = x$
2.4. $j(x) = 0$
2.5. $i(x) = x^3$

Página 147

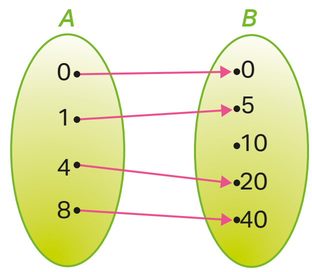
3. A, B, C e E.

Página 148

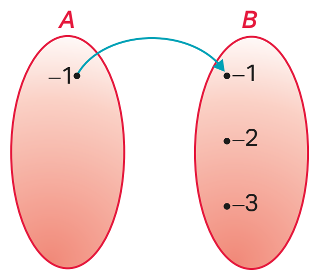
4.1.



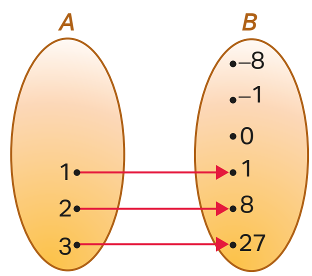
4.2.



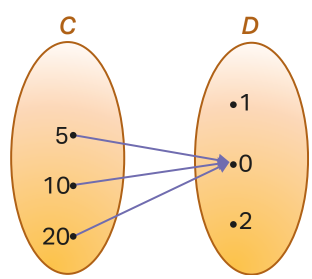
4.3.



4.4.



4.5.



Página 150

5.1. $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$
$CCh_f = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$D'_f = \{0, 1, 2, 3\}$

5.2. $D_g = \{0, 1, 4, 8\}$
$CCh_g = \{0, 5, 10, 20, 40\}$
$D'_g = \{0, 5, 20, 40\}$

5.3. $D_h = \{-1, -2, -3\}$
$CCh_h = \{-1, -2, -3\}$
$D'_g = \{-1, -2, -3\}$

5.4. $D_i = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$CCh_i = \{-8, -1, 0, 1, 8, 27\}$
$D'_g = \{-8, -1, 0, 1, 8, 27\}$

5.5. $D_j = \{2, 5, 10, 20\}$, $CCh_j = \{1, 0, 2\}$
$D'_g = \{0\}$

Página 151

6.1. Injetiva.
6.2. Injetiva.
6.3. Injetiva.
6.4. Injetiva.
6.5. Não injetiva.

Página 152

7.1. Não sobrejetiva.
7.2. Não sobrejetiva.
7.3. Sobrejetiva.
7.4. Sobrejetiva.
7.5. Não sobrejetiva.

Página 153

8. São bijetivas as funções: h e i.

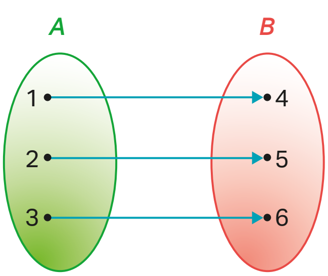
Página 155

9.1. $g \circ f(0) = a$, $g \circ f(1) = a$, $g \circ f(2) = c$
9.2. Não. Não é injetiva: $g \circ f(0) = g \circ f(1) = a$ e também não é sobrejetiva.

10.1. $g \circ f(x) = -2x - 5$
10.2. $f \circ g(x) = -2x + 4$
10.3. $g \circ f(-1) = -3$
10.4. $f \circ g(-1) = 6$

Página 158 – Para aplicar

1. A cada elemento do conjunto A (domínio) corresponde um único elemento de B (conjunto de chegada).

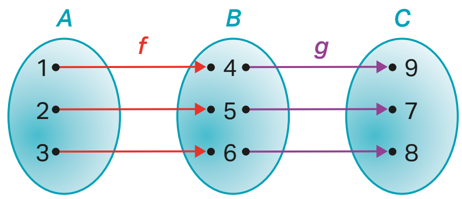


2. **a)**, **c)**, **e)** e **g)**.

Página 159

3.1. $f(1) = 5$; $f(2) = 6$; $f(3) = 7$; $f(4) = 7$
3.2. Não, pois há dois objetos que têm a mesma imagem $(f(3) = f(4) = 7)$.
3.3. Não, pois existe um elemento do conjunto de chegada que não tem correspondente no domínio.
3.4. Não existe porque a função não é bijetiva.

4.1. $g \circ f(1) = 9$; $g \circ f(2) = 7$; $g \circ f(3) = 8$
4.2.



4.3. Sim, todos os elementos do domínio têm imagens diferentes.

5.1. $g \circ f(x) = 4x^2 + 12x + 8$
5.2. $f \circ g(x) = 2x^2 + 1$
5.3. $g \circ f(2) = 48$; $f \circ g(2) = 9$

Página 161

11.1. $D_f = \mathbb{R}$
11.2. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
11.3. $D_h = [-2, +\infty[$
11.4. $D_i = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
11.5. $D_j = [3, +\infty[$
11.6. $D_k = \mathbb{R}$

Página 163

12.1. -3, -1, 2
12.2. 2
12.3. 0
12.4. 0, 2

13.1. $\frac{1}{3}$
13.2. 0, $\frac{3}{2}$
13.3. -2
13.4. $-\frac{1}{3}$
13.5. Não tem zeros.
13.6. 1

Página 164

14.1. Positiva em $]-\infty, -3[$ e $]-1, 2[$; negativa em $]-3, -1[$ e $]-2, +\infty[$.
14.2. Positiva em $]-\infty, 2[$; negativa em $]2, +\infty[$.
14.3. Negativa em $]-\infty, -1[$ e $]0, +\infty[$; positiva em $]-1, 0[$.
14.4. Negativa em $]-\infty, 0[$ e $]2, +\infty[$; positiva em $]0, 2[$.

Página 166

15.1. Negativa em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$;
positiva em $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

15.2. Positiva em $]-\infty, 0[$ e $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$;
negativa em $\left]0, \frac{3}{2}\right[$.

15.3. Positiva em todo o domínio: $]-2, +\infty[$.

15.4. Negativa em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e $]0, 1[$;
positiva em $\left]-\frac{1}{3}, 0\right[$ e $]1, +\infty[$.

15.5. Positiva em todo o domínio: $]3, +\infty[$.

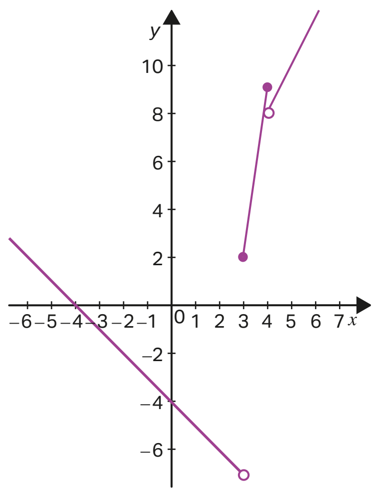
15.6. Negativa em $]-\infty, 1[$;
positiva em $]1, +\infty[$.

Página 171

16.1. **a)** $f(2) = -6$
b) $f(5) = 10$
c) $f(10) = 20$
d) $f(3) = 2$

16.2. Sim, -4.

16.3.



16.4. $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f =]-7, +\infty]$

16.5. Não, porque não é injetiva, uma vez que $f(4) = f(4{,}5) = 9$.

Página 172

17.1. **(B)**

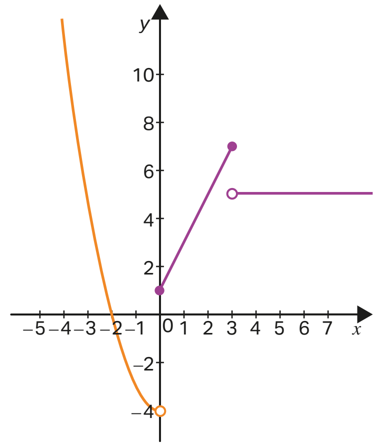
17.2. $D_f = [-4, 7]$

17.3. $D_f = \{-5\} \cup [4, 6[$

18.1. $f(-2) = 0$; $f(0) = 1$; $f(2) = 5$; $f(4) = 5$

18.2. -3242

18.3.



18.4. $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f =]-4, +\infty]$

Página 173

19.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = \lvert x \rvert$
1	1	1
-1	1	1
2	4	2
-2	4	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x	x^2	x
$-x$	x^2	x

Página 174

20.

x	$h(x) = x^3$	$j(x) = x$
1	1	1
-1	-1	-1
2	8	2
-2	-8	-2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$
x	x^3	x
$-x$	$-x^3$	$-x$

Página 175

21. Funções pares: **a)**, **c)** e **g)**.
Funções ímpares: **d)**, **e)**, **h)**, e **i)**.

Página 176

22.1. Par.
22.2. Não é par nem ímpar.
22.3. Não é par nem ímpar.
22.4. Par.

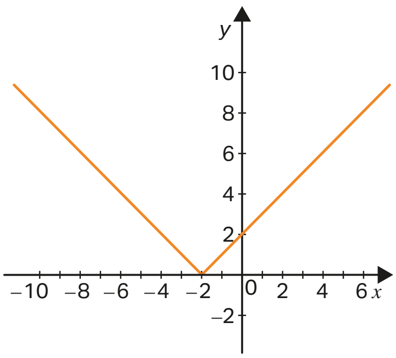
Página 177

23. **(D)**

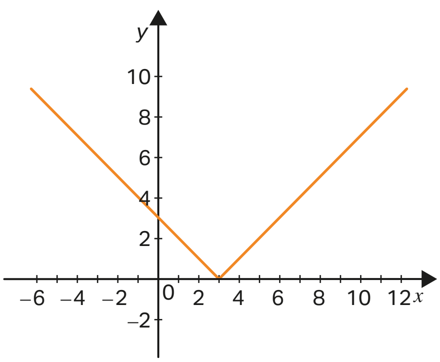
Página 183

24. Deslocou-se uma unidade para baixo e duas unidades para a esquerda. $y=(x+2)^3-1$

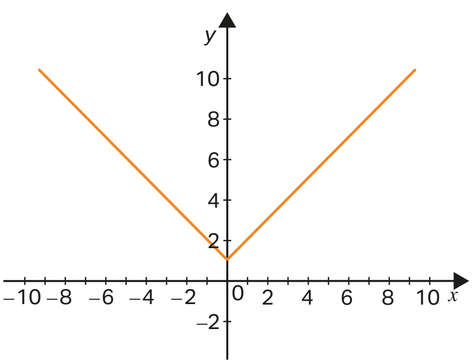
25.1.



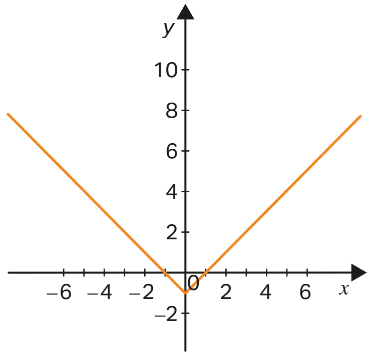
25.2.



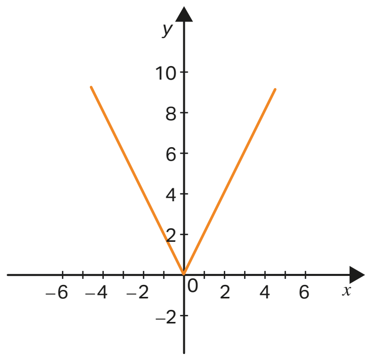
25.3.



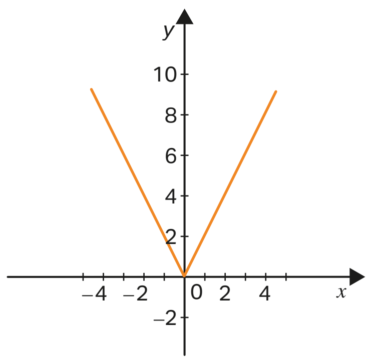
25.4.



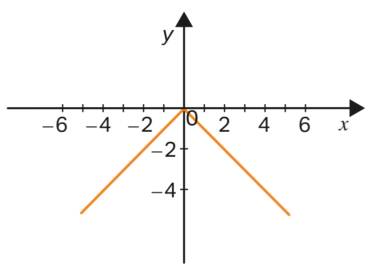
25.5.



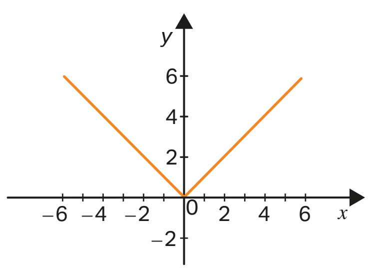
25.6.



25.7.



25.8.



Página 186 – Para aplicar

1.1. $D_f =]-2, 5[\backslash\{0\}$

1.2. Sim. $-\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3}$.

1.3. Negativa em $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[$ e $\left]0, \frac{4}{3}\right[$; positiva em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ e $\left]\frac{4}{3}, 5\right[$.

2.1. $D_f = [-4, +\infty[$

2.2. $D'_f = [-3, +\infty[$

2.3. $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x + \frac{11}{3} & \text{se} \quad -4 \leqslant x < -1 \\ 2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x < 2 \\ 3x - 4 & \text{se} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

2.4. $-\frac{11}{5}$

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

3.2. $D'_f = [0, +\infty[$

3.3. 1

3.4. Positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3.5. Não, porque $f(-x) \neq f(x)$.

3.6. $g(x) = 2x^2 + 2$

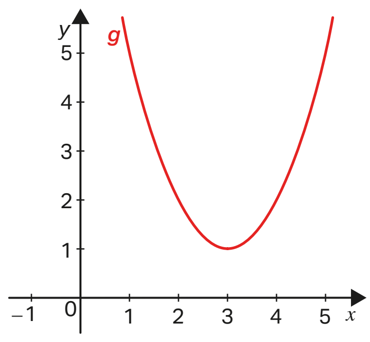
3.7. Função par.

4. $D_f = \mathbb{R}$; $D'_f = [-2, +\infty[$; Zeros: -1 e 1; Função par; positiva em $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$ e negativa em $]-1, 1[$.

Página 187

5. **a)** sem paridade;
b) par;
c) ímpar.

6.



7. $g(x) = f(x+1)$; $h(x) = f(x) + 1$; $j(x) = i(2x)$; $k(x) = 2i(x)$

Página 190

26.1. f: Decrescente em $]-\infty; -2]$ e $[0,5; +\infty[$; crescente em $[-2; 0,5]$.

26.2. g: Decrescente em $\mathbb{R}$.

26.3. h: Decrescente em $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$.

26.4. i: Crescente em $]-\infty, 1]$; decrescente em $[1, +\infty[$.

Página 192

27. **a)** Mínimo absoluto: $-2,5$;
Máximo absoluto: $3,5$; mínimo relativo: 1;
máximo relativo: -1; $2,5$.
b) Mínimo absoluto: -7;
Não tem máximo absoluto; mínimo relativo: -5;
máximo relativo: -1, 2, 0.

Página 193

28.1. Concavidade voltada para cima.

28.2. Concavidade voltada para baixo.

28.3. Concavidade voltada para cima.

28.4. $(-1, -2)$ e $(2, 3)$

Página 194

29.1. Voltada para cima, porque $2 > 0$.

29.2. Voltada para baixo, porque $-1 < 0$.

29.3. Voltada para cima, porque $\frac{2}{5} > 0$.

29.4. Voltada para baixo, porque $-2 < 0$.

29.5. Voltada para baixo, porque $-10 < 0$.

29.6. Voltada para cima, porque $1 > 0$.

Página 196 – Para aplicar

1.1. Crescente em $[-4, -1]$ e $[2, +\infty[$ e constante em $[-1, 2]$.

1.2. Mínimo absoluto: -3.
Máximo e mínimo relativo: 2.

2.1. Crescente em todo o domínio: $]-2, 0[\cup]0, 5[$.

2.2. Não existem.

3.1. Decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

3.2. Mínimo absoluto é -2.

3.3. Concavidade voltada para cima.

4.1. Crescente em $[-5, -2]$ e $[2, 4]$ e decrescente em $[-2, 2]$.

4.2. Mínimo absoluto: -4; máximo absoluto: 4; máximo relativo: 0.

4.3. Concavidade voltada para baixo $[-5, 0]$ e concavidade voltada para cima $[0, 4]$.

Página 199

30.1. $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

30.2. $\{0; 2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\}$

30.3. $\{0; 1\}$

30.4. $\{-2, 0; 1\}$

31.1. $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 4\}$

31.2. $\{-\sqrt{6}; 1; \sqrt{6}\}$

31.3. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$

Página 201

32.1. $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

32.2. $]-\infty, -5[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

32.3. $\left]-\infty, \frac{9-\sqrt{73}}{2}\right[\cup \left]\frac{9+\sqrt{73}}{2}, +\infty\right[$

32.4. $\left]-\frac{1}{3}, 4\right[$

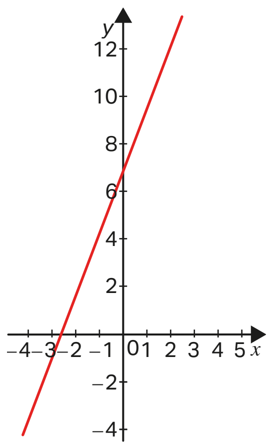
Página 204

33.1. $y = -\frac{4}{3}x + 4$

33.2. 4

33.3. $]-\infty, 2]$

33.4.



34.1. $[1, 5]$
34.2. $[-4, 0]$
34.3. $[-4, 4]$
34.4. $[0, 2]$

Página 207

35.1. $(x + x + 1)^2 = 9$
35.2. -2 e 1

36.1. 0 m
36.2. 80 m
36.3. Aproximadamente, 6,6 segundos.
36.4. 8 segundos.

37.1. 4 horas.
37.2. Aproximadamente, 7 horas.

Página 209 – Para aplicar

1.1. $\left\{\frac{4-2\sqrt{7}}{3}; \frac{4+2\sqrt{7}}{3}\right\}$
1.2. $\{-1; 1\}$
1.3. $\{0\}$

2.1. $\mathbb{R}$
2.2. $]-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup; [2+\sqrt{3}; +\infty[$
2.3. $]0, +\infty[$

3.1. 800 metros.
3.2. Um pouco mais de 14 minutos.
3.3. 400 metros.

4. 20 metros e 40 metros.

5.1. $l = 12 - x$
5.2. $A(x) = 12x - x^2$
5.3. Quadrado de lado 6 metros.

Página 210 – Teste

1. (C) **2.** (B) **3.** (A)

Página 211

4. (A)

5. (D)

Página 212

6. (C) **7.** (A) **8.** (A)

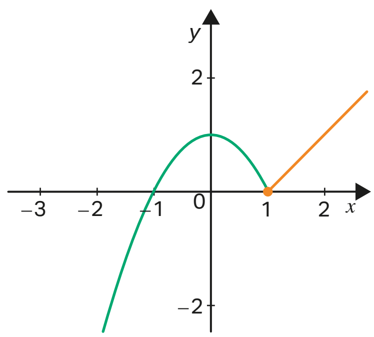
9. Correspondência entre pessoas e o número de irmãos é função, pois a cada pessoa corresponde um e um único número de irmãos.
Correspondência entre países e cidades não é função, porque, por exemplo, a Portugal corresponde duas cidades, Lisboa e Porto.
Correspondência entre um número e a sua raiz quadrada não é função, porque ao número -1 não corresponde nenhum número.

Página 213

10.1. $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
10.2. $D'_f = \{0, 1, 2\}$
10.3. $CCh_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
10.4. 1
10.5. -2 e 2
10.6. $f(0) = 0$ e $f(-1) = f(1) = 1$

11.1. 2
11.2. Concavidade voltada para cima no intervalo $[0; +\infty[$.

12.1. -1 e 1
12.2.



12.3. Negativa em $]-\infty; -1[$ e positiva em $]-1; +\infty[\setminus\{1\}$.

12.4. Concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty\,;\,1[$.
12.5. Máximo relativo: 1 ; mínimo relativo: 0 .

Página 214

13.1. $h(x)=\begin{cases}-\frac{4}{9}(x+5)(x-1) & \text{se} \quad -5\leqslant x<0\\ -2x+1 & \text{se} \quad x\geqslant 0\end{cases}$
13.2. $[-5\,;\,+\infty[$
13.3. -5 e $\frac{1}{2}$
13.4. 4
13.5. Positiva em $\left]-5\,;\,\frac{1}{2}\right[$ e negativa em $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

14.1. Par, porque $f_1(-x)=f_1(x)$.
14.2. Não é par, porque $f_2(-x)\neq f_2(x)$.
14.3. Não é par, porque $f_3(-x)\neq f_3(x)$.
14.4. Par, porque $f_4(-x)=f_4(x)$.

15.1. Sim. Não há objetos com imagens iguais.
15.2. Sim. O contradomínio é igual ao conjunto de chegada.
15.3. Sim. A função é injetiva e sobrejetiva.
15.4. $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$ e $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

16.1. Sim, pois são injetivas e sobrejetivas.
16.2. $f\circ g(x)=-2x+3$
16.3. $f\circ g(3)=-3$
16.4. $g\circ f(x)=-2x+3$
16.5. $g\circ f(3)=-3$
16.6. Por exemplo, $h(x)=-2x$ e $j(x)=-2$.

Página 215

17. $\{0\,,\,2\}$

18. $[0\,,\,2]$

19.1. 500 centímetros.
19.2. $[0\,,\,20]$. Intervalo de tempo desde que a bola foi lançada do chão até atingir novamente o chão.
19.3. $\{10-2\sqrt{5}\,,\,10+2\sqrt{5}\}$ corresponde aos instantes de tempo em que a bola esteve a uma altura de 200 cm .

20.1. $0<x<7{,}5$
20.2. Corrigir o enunciado:
$V(x)=16x^3-480x^2+2700x$
20.3. 2236 cm^3

Página 222 – Antes de começar

1.1. "n.º de horas que os alunos se dedicam a atividades extracurriculares"
1.2. Quantitativa, porque é quantificável.
1.3. 22 alunos.

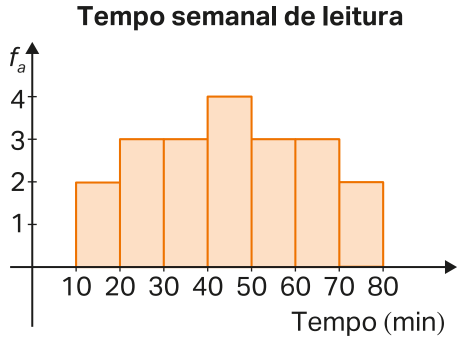
1.4.

Horas	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
0	2	9
1	2	9
2	5	23
3	6	27
4	4	18
5	3	14
Total	22	100

2.1. 20 alunos.
2.2.

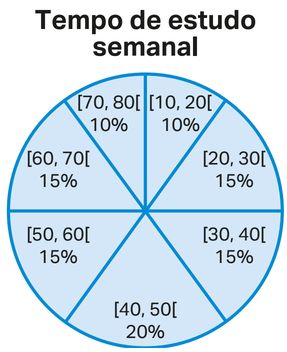
Classes	Frequência Absoluta
[10 , 20[	2
[20 , 30[	3
[30 , 40[	3
[40 , 50[	4
[50 , 60[	3
[60 , 70[	3
[70 , 80[	2
Total	20

2.3.



2.4.

Classes	Frequência Relativa (%)
[10 , 20[	10
[20 , 30[	15
[30 , 40[	15
[40 , 50[	20
[50 , 60[	15
[60 , 70[	15
[70 , 80[	10
Total	100



3.1. A média do número de livros lidos é aproximadamente $1{,}9$.
3.2. A mediana do número de livros lidos é 2.
3.3. A moda do número de livros lidos é 1.
3.4. A amplitude dos dados é 4.

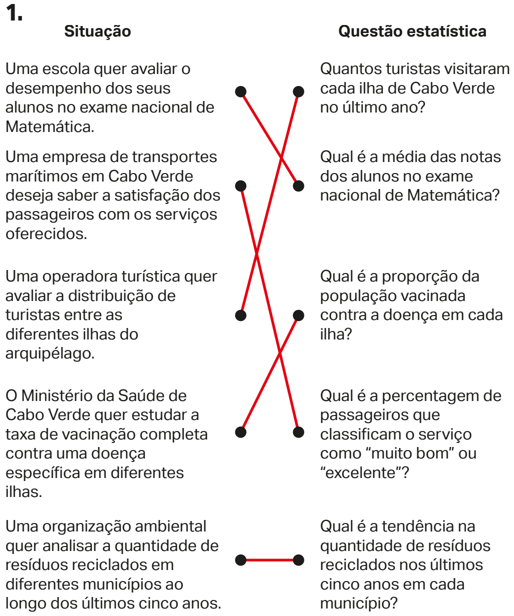
4.1. $Q_1 = 18$, $Q_2 = 21{,}5$. (mediana), $Q_1 = 26$.
4.2. A amplitude interquartil é 8.
4.3. Não, porque o valor máximo é 32 e o que o diagrama assinala apresenta-se mais próximo de 35 do que de 30.

Página 223

5.1. A média da exportação como percentagem do PIB é $22{,}38\%$.
5.2. O ano com menor exportação foi 2020 (16,4%) e o ano com maior exportação foi 2018 (28,0%). A amplitude dos dados de exportação é $11{,}60\%$.
5.3. Por exemplo: em 2020, as exportações diminuíram devido à pandemia Covid-19.

Página 229

1.



Página 230

2. <u>Situação 1</u>: População: Todos os dispositivos fabricados na linha de produção da fábrica.
Indivíduo: Cada dispositivo fabricado.
Amostragem: Não, pois são recolhidos dados dos defeitos encontrados em todos os dispositivos fabricados.
<u>Situação 2</u>: População: Todas as residências do bairro.
Indivíduo: Cada residência no bairro.
Amostragem: Não, pois os dados são coletados de todas as residências do bairro.
<u>Situação 3</u>: População: Todas as faculdades da universidade.
Indivíduo: Cada faculdade da universidade.
Amostragem: Não, pois o estudo abrange todas as faculdades da universidade.
<u>Situação 4</u>: População: Todas as lojas de uma cidade que vendem o produto específico.
Indivíduo: Cada loja que vende o produto.
Amostragem: Sim, pois os dados são recolhidos de diferentes pontos de venda, mas não de todas as lojas da cidade.
<u>Situação 5</u>: População: Todas as mangas produzidas na safra da empresa.
Indivíduo: Cada manga produzida.
Amostragem: Não, pois os dados são recolhidos de todas as mangas colhidas na safra.

Página 232

3.1. **a)** A população estatística é o conjunto completo de todos os trabalhadores da empresa.
b) O indivíduo é cada trabalhador da empresa.
3.2. Sondagem.
3.3. Por exemplo, de todos os 500 funcionários sortear aleatoriamente 100 deles para a pesquisa.

Página 234

4.1. Barlavento: 400 clientes.
Sotavento: 200 clientes.
4.2. A amostragem estratificada proporcional é uma boa escolha porque: garante que cada região esteja devidamente representada na amostra de acordo com seu peso na população total; reduz o risco de enviesamento, assegurando que os resultados reflitam com maior precisão a diversidade das opiniões em todas as regiões; é especialmente útil quando diferentes estratos (no caso, as regiões) têm tamanhos muito desiguais, como neste exercício.
4.3. O total seria 400 clientes entrevistados.
4.4. Alterar o tamanho da amostra de apenas uma região pode gerar os seguintes riscos: Perda

de representatividade; enviesamento nos resultados; conclusões incorretas.

Página 235

5.1. Intervalo de amostragem: 20.
5.2. Os primeiros cinco clientes selecionados são: 8, 28, 48, 68, 88.
5.3. É simples de aplicar, exigindo apenas a definição do intervalo e um ponto de partida aleatório. Garante uma distribuição uniforme da amostra ao longo da lista, evitando concentração de entrevistados em uma parte específica. É eficiente para populações grandes, como neste caso, reduzindo o custo e o tempo em comparação com outros métodos.
5.4. Padrões ocultos na lista; Ordem não aleatória; Representatividade reduzida.

Página 237

6.1. Três conglomerados.
6.2. $150\,000$ turistas.
6.3. Viabilidade prática; Logística simplificada; Representação de características locais.
6.4. Risco de falta de representatividade; Variação entre conglomerados; Dependência do tamanho dos conglomerados; Generalização indevida.

Página 268

7.1. Todos os turistas que visitam Cabo Verde.
7.2. Pode não ser.
7.3. Rapidez; Baixo custo; Facilidade de acesso aos respondentes.
7.4. Enviesamento de localização; Enviesamento de seleção; Generalização inadequada.
7.5. Para melhorar a representatividade, o pesquisador deve incluir turistas de outras ilhas, diversificar os locais e horários de coleta e adotar métodos de amostragem mais amplos, como estratificação ou aleatoriedade.

Página 239

8.1. Conglomerados (três ilhas).
8.2. Estratificada proporcional (faculdades).
8.3. Conveniência (passageiros de *ferries*).
8.4. Aleatória simples (clientes de energia).
8.5. Conglomerados (bairros).

Página 240

9.1. A amostra é enviesada porque considera apenas os simpatizantes de um único partido político, que têm maior probabilidade de apoiar o candidato desse partido. Isso não representa a opinião geral da população, composta por eleitores com diferentes preferências políticas. Para resultados mais adequados, a amostra deveria incluir eleitores de todos os partidos e independentes, escolhidos de forma aleatória ou estratificada.
9.2. Acender todos os fósforos fabricados num dia é ineficiente e desnecessário, pois compromete o produto e os custos de produção sem uma real necessidade estatística. Uma amostragem aleatória de fósforos seria suficiente para avaliar a qualidade de forma representativa, garantindo que a inspeção seja prática e mantenha a maior parte dos produtos intactos.
9.3. Questionar pessoas que saem de um concerto de música *rock* gera uma tendência de seleção, pois elas já têm uma predisposição positiva em relação ao género musical.
A opinião desse grupo não reflete a perceção da população geral, que inclui pessoas com gostos musicais variados. Para resultados mais representativos, a amostra deveria incluir indivíduos de diferentes contextos e com variados interesses musicais.

Página 244

10.

N.º de crias	f_a	F_a	f_r	F_r
1	3	3	0,075	0,075
2	7	10	0,175	0,25
3	8	18	0,2	0,45
4	12	30	0,3	0,75
5	10	40	0,25	1
Total	40		1	

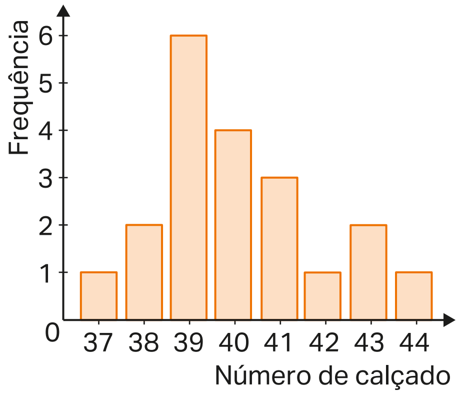
Página 246

11.1.

N.º de calçado	f_a	f_r
37	1	0,05
38	2	0,1
39	6	0,3
40	4	0,2
41	3	0,15
42	1	0,05
43	2	0,1
44	1	0,05
Total	20	1

11.2.

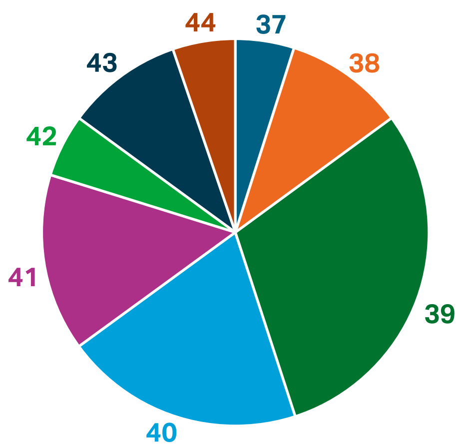
Distribuição do número de calçado



Página 248

12.

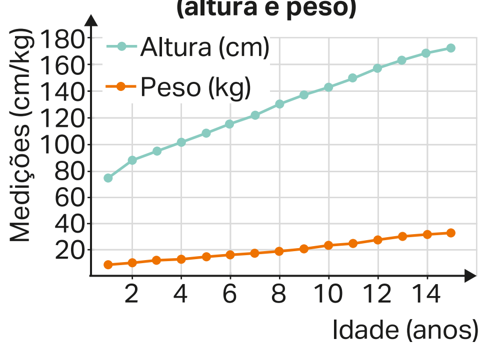
Número de calçado



Página 249

13.

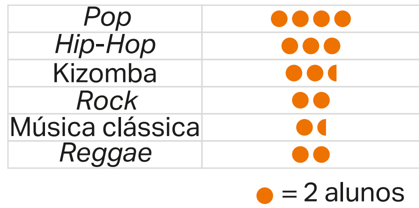
Crescimento da criança (altura e peso)



Página 250

14.

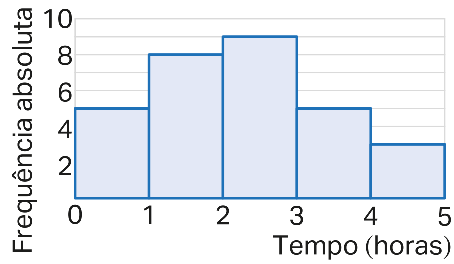
Estilos musicais preferidos



Página 252

15.

Horas de estudo por dia



Página 258

16.1. A proporção total da população pobre é 35,2%.

16.2. **a)** As mulheres têm uma maior incidência de pobreza.

b) 1,4%

16.3. O grupo etário 0-4 anos tem a maior proporção de população pobre. O grupo etário 65 anos ou mais tem a menor proporção de população pobre.

16.4. **a)** Homens empregados: 27,1%; mulheres empregadas: 27,4%.

b) Diferença: 0,3%, que é pequena e, portanto, não significativa.

Página 259

17.1. 62,80%

17.2. 76,11%

17.3. 13,31%

17.4. O aumento de 2015 a 2022 foi mais significativo.

17.5. 2022

17.6. 1,46%

17.7. 44,90%

17.8. Por exemplo: aumentar a educação.

17.9. Sim, há uma clara tendência de crescimento, com a taxa de alfabetização aumentando consistentemente de 62,80% em 1990 para 91,00% em 2022.

17.10. Com base apenas nos dados do gráfico, não é possível determinar que ações devem ser implementadas no futuro.

Página 260

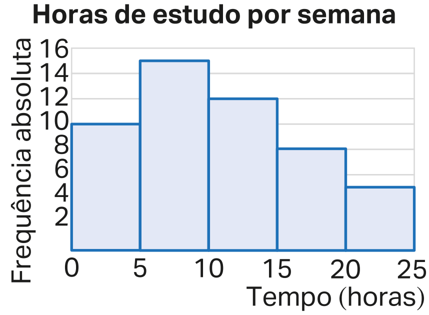
18.1. Temperatura máxima média (°C); Temperatura mínima média (°C) e Precipitação média (mm).
18.2. 28 °C
18.3. setembro.
18.4. 19 °C
18.5. A temperatura máxima média varia entre 25 °C (janeiro, fevereiro, dezembro) e 28-29 °C (agosto e setembro). Há um aumento gradual da temperatura máxima média de janeiro a setembro e uma diminuição a partir de outubro.
18.6. A precipitação aumenta significativamente entre julho (cerca de 20 mm) e setembro (90 mm). Agosto também apresenta um aumento moderado, com cerca de 60 mm .
18.7. A explicação provável é a ocorrência da época das chuvas, em Cabo Verde, influenciada pelas chuvas tropicais típicas dessa época do ano.
18.8. Sim. Durante os meses de maior precipitação (agosto e setembro), as temperaturas máxima e mínima médias estão mais altas (28-29 °C e 24 °C , respetivamente). Isso sugere que o aumento da temperatura contribui para a formação de condições climáticas favoráveis à precipitação.
18.9. 3 °C
18.10. Temperatura máxima média: cerca de 27 °C (levemente inferior a setembro); Temperatura mínima média: cerca de 24 °C (semelhante a setembro); Precipitação: deve diminuir, mas ainda significativa, com níveis moderados (provavelmente inferiores a setembro, cerca de 60-70 mm). Fatores considerados: tendência de queda da precipitação após setembro. Declínio gradual das temperaturas máximas após o pico em setembro. Dados históricos apresentados no gráfico, que mostram transições sazonais consistentes.

Página 261

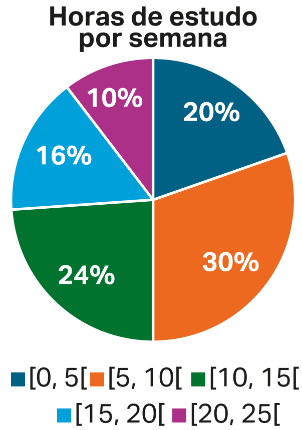
19.1. e **19.2.**

Horas de estudo por semana	f_r	f_r (%)
[0, 5[	0,2	20
[5, 10[	0,3	30
[10, 15[	0,24	24
[15, 20[	0,16	16
[20, 25[	0,1	10
Total	1	100

19.3.



19.4.



19.5. A maioria dos estudantes dedica entre 5 e 10 horas por semana ao estudo. Um número considerável estuda entre 10 e 15 horas por semana, mostrando um esforço maior; apenas uma pequena fração (10%) estuda quase 25 horas por semana, indicando que poucos alunos dedicam muito tempo ao estudo. Cerca de 20% dos estudantes dedicam menos de 5 horas por semana, o que pode sugerir falta de envolvimento ou planeamento nos estudos.

20.1. Tempo de entrega (em minutos).
20.2. Histograma.
20.3. O histograma é ideal para variáveis contínuas, como o tempo de entrega. Também permite visualizar rapidamente a frequência das entregas em cada período específico.
As alturas das barras tornam evidente quais tempos de entrega são mais comuns, ajudando na análise da eficiência do serviço.
20.4. Entre 7 e 9 minutos.

Página 265

21. 29,03 °C
22. 28,4 anos
23. 2,4 irmãos

Página 266

24. 3,7 minutos

Página 268

25. 28 anos

26. 2 irmãos

Página 269

27. [2 , 4[

Página 270

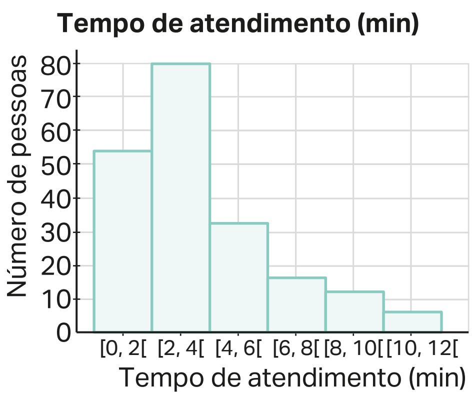
28. 28 anos

29. 2 irmãos

Página 271

30.1. [2, 4[

30.2.



30.3. A moda, calculada geometricamente, é aproximadamente 2,70 minutos.

Página 274

31.1.

"Peso"	f_a	f_r	F_r
55	2	0,10	0,10
57	1	0,05	0,15
60	3	0,15	0,30
62	2	0,10	0,40
65	4	0,20	0,60
68	2	0,10	0,70
70	3	0,15	0,85
72	1	0,05	0,90
75	1	0,05	0,95
78	1	0,05	1
Total	20	1	

31.2. 65 kg

31.3. $Q_1 = 60$ kg ; $Q_3 = 70$ kg

Página 276

32. Terão de fazer a prova prática os alunos com nota igual ou inferior a 13 (ou seja, os primeiros 389).

Página 277

33. A criança situa-se no percentil 25 , o que significa que 25% das crianças com 12 meses têm 70 cm ou menos de altura.

Página 278

34. 10

Página 280

35.1. 10,05 cm

35.2. $\sigma^2 = 0{,}0475$

Este valor da variância indica que os dados estão próximos da média. Assim, não há grande variabilidade nos comprimentos dos fios, pois os valores são consistentes.

Página 281

36.1.

Comprimento dos peixes	f_a
[12,6 ; 16,8[	4
[16,8 ; 21,0[	11
[21,0 ; 25,2[	4
[25,2 ; 29,4[	1
[29,4 ; 33,6[	8
[33,6 ; 37,8[	5
[37,8 ; 42,0[	7
Total	40

36.2. $\sigma \cong 8{,}8$

36.3. O desvio-padrão de 8,8 cm é significativo em relação à média (27,4 cm), indicando alta variabilidade nos comprimentos dos peixes.

Página 286 – Para aplicar

1.1. Amostragem aleatória simples: A universidade deve numerar todos os 10 000 alunos e usar um *software* ou sorteio aleatório para selecionar 500 alunos, garantindo que todos tenham a mesma probabilidade de serem escolhidos.

1.2. Amostragem estratificada: Devem dividir os alunos por faculdade (estratos) e selecionar proporcionalmente cada faculdade com base no número de alunos matriculados em cada uma. Dentro de cada estrato, usar amostragem aleatória simples para selecionar os alunos.

1.3. Amostragem sistemática: Escolha um número inicial aleatório entre 1 e 20 e selecione cada 21.° aluno a partir desse ponto na lista.

1.4. Amostragem por conglomerados: Escolha aleatoriamente algumas faculdades ou turmas (conglomerados). Todos os alunos dentro dos conglomerados selecionados farão parte da amostra.

1.5. Amostragem por conveniência: Selecione alunos em locais de fácil acesso, como bibliotecas, refeitórios ou corredores da universidade, dependendo de quem estiver disponível no momento.

2.1. Média: 31,5%
Mediana: 30%
Moda: 25%

2.2. Variância: 262,8
Desvio-padrão: 16,2

Página 287

3.1. Aproximadamente, 1,2 livros.

3.2. Amplitude interquartil: 2 .

3.3. Aproximadamente, 1,12 .

4.1. **Dados em ordem crescente:** 20 , 21 , 22 , 23 , 25 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 40

4.2. Mediana: 29 ; Q_1 : 23 ; Q_3 : 33

4.3. Variância: 31,8
Desvio-padrão: 5,5

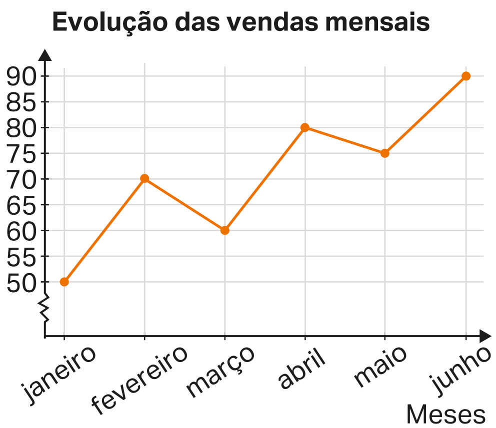
5.1. Grupo A teve médias de 14 no Exame 1 e 16 no Exame 2 (melhora de + 2).
Grupo B teve médias de 12 no Exame 1 e 15 no Exame 2 (melhora de + 3).
Conclusão: o Grupo A obteve melhores médias em ambos os exames, mas o Grupo B apresentou maior progresso.

5.2. Grupo A – Desvio-padrão: 1
Grupo B – Desvio-padrão: 1,5

5.3. O Grupo A foi mais consistente, com menor variabilidade.

Página 288

6.1.



6.2. Aproximadamente, 70,8 vendas.

6.3. O maior aumento foi de 20 vendas, ocorrido nos meses de fevereiro e abril.

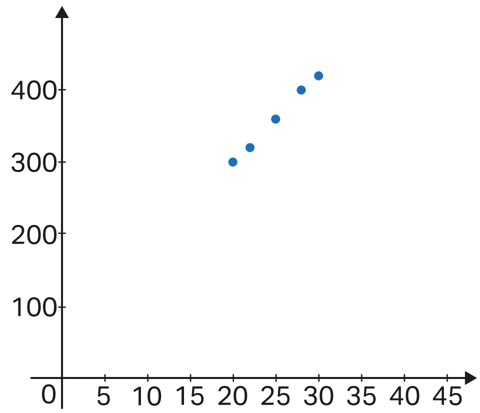
7. **(A)** V
(B) V
(C) V
(D) V
(E) F
(F) V

Página 292

37. A : positiva; B : sem correlação; C : sem correlação; D : negativa.

Página 293

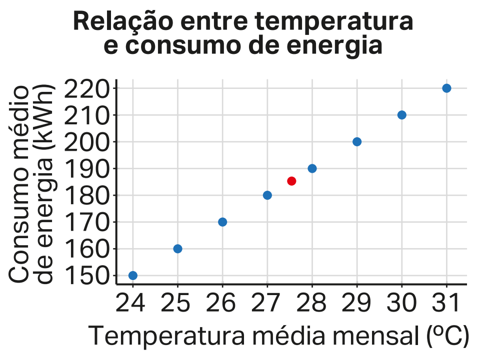
38.



38.1. (25,360)

38.2. Há uma relação positiva entre temperatura e consumo de energia elétrica. À medida que a temperatura aumenta, o consumo de energia também aumenta.

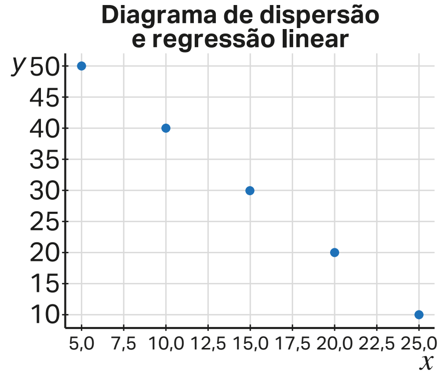
39.



Existe uma relação positiva linear entre temperatura e consumo de energia elétrica. À medida que a temperatura aumenta, o consumo de energia também aumenta.

Página 296

40.1.

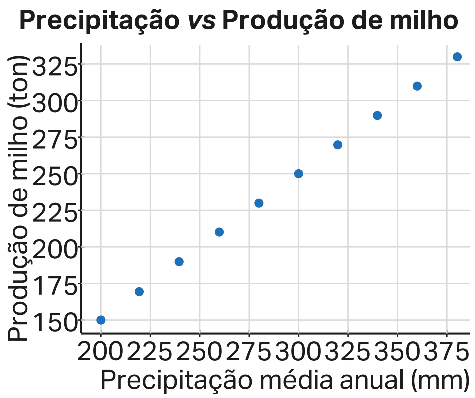


40.2. $y = -2x + 60$

40.3. $y = 36$

40.4. A questão correta deve ser: "Qual o valor de x se $y = 25$?".
$x = 17,5$

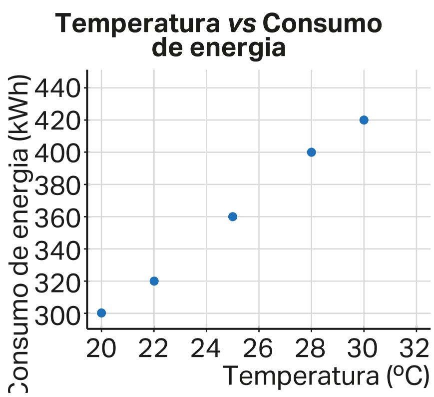
41.1.



41.2. Sim. Existe uma forte correlação positiva entre a precipitação média anual e a produção de milho. Isso é evidente pela tendência linear crescente, em que o aumento na precipitação resulta num aumento na produção de milho.

41.3. Reta: $y = x - 51$. A previsão de produção é 200 toneladas.

42.1.



A equação da reta de regressão é:
$y = 12,35x + 51,18$

42.2. O consumo estimado é, aproximadamente, $446,47$ kWh.

42.3. A relação entre temperatura média e consumo de energia elétrica é fortemente positiva e linear. O aumento na temperatura média resulta num aumento consistente no consumo de energia, como evidenciado pela tendência ascendente no gráfico. Portanto, a afirmação é falsa.

Página 299

43.1. O coeficiente de correlação é $r = -1$. Existe uma correlação negativa perfeita.

43.2. O coeficiente de correlação é $r = -1$. Existe uma correlação negativa perfeita.

44.1. O coeficiente de correlação $r = 1$ indica uma correlação positiva perfeita. Isso significa que o número de escolas aumenta linearmente com o aumento da população.

44.2. 28 escolas.

44.3. 5000 habitantes.

Página 303

45.1. Exercício a realizar com *software.*

45.2. Exercício a realizar com *software.*

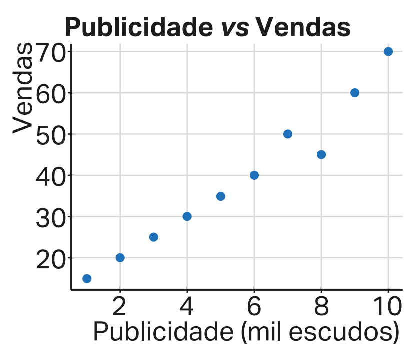
Página 304 – Para aplicar

1.	**(A)** F	**(B)** V	**(C)** F	**(D)** F
	(E) V	**(F)** V	**(G)** V	**(H)** V

2.1. Diagrama I (Correlação Positiva). Por exemplo – Horas de estudo (x) e classificação de uma prova (y). Diagrama II (Correlação Negativa). Por exemplo – Distância percorrida (x) e combustível restante no depósito (y).

2.2. Diagrama I: Este diagrama apresenta uma correlação positiva entre as variáveis. Isso significa que à medida que uma variável aumenta, a outra também aumenta.
Diagrama II: Este diagrama apresenta uma correlação negativa entre as variáveis.
À medida que uma variável aumenta, a outra diminui.

3.1.



3.2. Existe uma tendência geral positiva, indicando que, em geral, o aumento na quantidade de publicidade provoca um aumento no número de vendas.

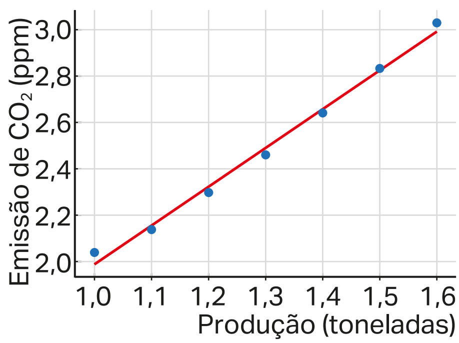
Página 305

4.1. **(A)**

4.2. O coeficiente $r = -0{,}70$ é o mais ajustado porque o gráfico mostra uma correlação negativa moderada a forte, com a satisfação a diminuir com mais dias de atraso.

5.1. e **5.2.**

Produção *vs* Emissão de CO_2



Centro de gravidade $= (1{,}30\,;\,2{,}49)$

5.3. $r = 0{,}996$

6. O coeficiente de correlação $r = 1{,}9946$. Esse valor está muito próximo de 1, o que indica uma forte correlação positiva entre a temperatura e o consumo de gelado. Isso significa que à medida que a temperatura aumenta, o consumo de gelado também tende a aumentar de forma consistente.

Página 306 – Teste

1. **(A)** **2.** **(D)**

3. **(B)** **4.** **(A)**

5. **(C)** **6.** **(B)**

Página 307

7. **(B)** **8.** **(A)**

9. **(C)** **10.** **(B)**

11. 30

Página 308

12.1. Dezembro, 17 livros.

12.2. Abril, 28 livros.

12.3. 136 livros.

13.

i	x_i	F_i	Fac_i
1	2	2	2
2	3	7	9
3	4	12	21
4	5	8	29
5	6	5	34

14.1. 40 alunos.

14.2. 33 alunos.

14.3. 45%

Página 309

15.1. Valores entre 150 cm e 180 cm.

15.2. A afirmação é verdadeira.

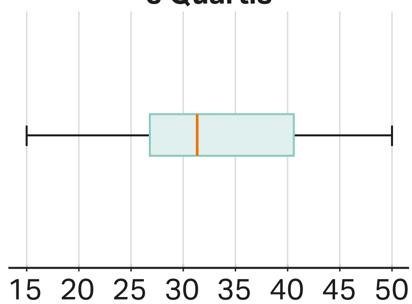
15.3. 24 alunos.

16.1. Mediana: 31.

16.2. Amplitude: 35.

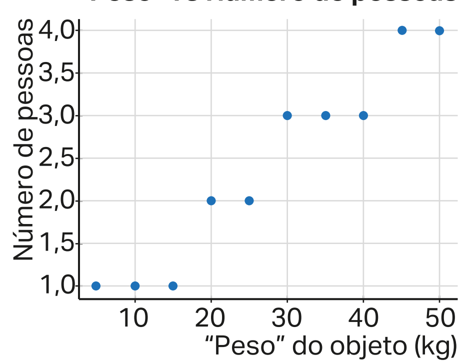
16.3.

Diagrama de Extremos e Quartis



17.1.

"Peso" *vs* Número de pessoas



17.2. $r = 0{,}969$

18. $r = -0{,}837$ indica uma correlação negativa forte. Isso significa que à medida que a idade aumenta, a massa muscular tende a diminuir. Afirmação verdadeira.

Matemática Aplicada às Artes 10.° ano

Criação intelectual
Joana Cunha

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
Shutterstock.com
Porto Editora
© Pedro Moita

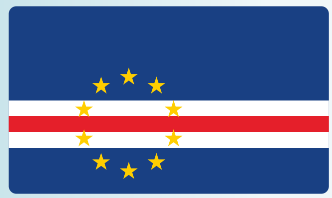
Edição
2025

Este manual segue
o programa experimental
da disciplina, publicado pelo
Ministério da Educação.

Cabo Verde

Brasão

Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!

Este livro foi aprovado pelo Ministério da Educação para utilização obrigatória nas escolas