

Geometria Descritiva

11.º ano



Ministério
da Educação



Manual Digital na app
EV Smart Book e em
www.escolavirtual.cv



Explora o manual digital do teu livro

Exercícios Interativos

Para resolução com *feedback* imediato.



Vídeos e interatividades

Explicam a matéria de forma motivadora.



Jogos

Exploram os conceitos curriculares de forma lúdica.



Áudios

Dão vida aos textos e ajudam a reforçar as competências linguísticas.



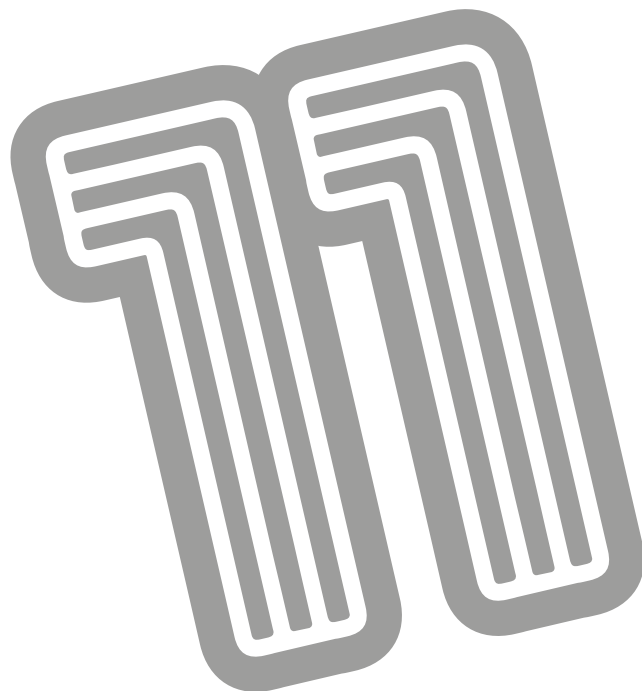
QuizEV

Desafiam-te a mostrares o que sabes.
Podes, também, jogar com os teus amigos.



Geometria Descritiva

11.º ano



Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado
pela Universidade de Cabo Verde.

Explora o teu manual digital



<https://escolavirtual.cv>

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv



**Ministério
da Educação**

Podes também aceder ao teu livro
através da **app EV Smart Book**



Apresentação

Este manual de Geometria Descritiva, vocacionado para o 11.º ano de escolaridade, pretende dar continuidade ao estudo da disciplina, iniciado no 10.º ano.

Por isso, ao longo do manual, são frequentes as referências a conteúdos anteriormente estudados, bem como o aprofundamento de certos conceitos.

Com as bases já consolidadas, neste ano propõe-se a sua aplicação em contextos mais concretos, como a representação de figuras ou sólidos, e uma maior compreensão da representação do espaço, através da relação entre diferentes elementos geométricos.

Sugere-se um estudo com um ritmo equilibrado entre compreensão de temas através de descrições de resoluções de problemas, esquemas tridimensionais e consolidação de conhecimentos através de resumo de ideias-chave e aplicação de conhecimento na rubrica "Para Praticar".

O culminar de uma caminhada de dois anos pela Geometria Descritiva deverá tornar o aluno capaz de entender o espaço tridimensional, visualizar a realidade através da abstração e aplicar os princípios da Geometria nos desafios diários da vida prática e profissional.

Índice

Tema 8

Paralelismo

Paralelismo entre retas	6
Retas paralelas a planos	12
Paralelismo entre planos	21

Perpendicularidade e ortogonalidade

Perpendicularidade e ortogonalidade entre retas	25
Ortogonalidade entre retas e planos	35
Ortogonalidade entre planos	44

Tema 9

Figuras planas I

Projeção de figuras planas em planos horizontais ou frontais	50
--	----

Figuras planas II

Projeção de figuras planas em planos não-paralelos aos planos de projeção	53
---	----

Tema 10

Representação de sólidos I

Representação de pirâmides e prismas com bases contidas em planos horizontais, frontais e de perfil	62
Representação de cones e cilindros com bases contidas em planos horizontais e frontais	65
Noção de contorno aparente e invisibilidades num sólido	67
Representação de linhas e pontos pertencentes a sólidos geométricos	68

Representação de sólidos II

Representação de pirâmides e prismas com bases contidas em planos não paralelos aos planos de projeção	70
Representação de sólidos com bases contidas em planos de topo	70
Representação de sólidos com bases contidas em planos verticais	72

Tema 11

Métodos geométricos auxiliares II

Rebatimento de planos não-projetantes	76
Rebatimento de planos oblíquos	77
Rebatimento de planos de rampa	85
Rebatimento de planos passantes	93

Tema 12

Figuras planas III

Projeção de figuras planas em planos oblíquos	98
Projeção de figuras planas em planos de rampa	105
Projeção de figuras planas em planos passantes	112

Sólidos III

Projeção de poliedros com bases contidas em planos oblíquos	115
Projeção de poliedros com bases contidas em planos de rampa	120
Projeção de poliedros com bases contidas em planos passantes	124

Tema 13

Interseção de retas com planos

Interseção de retas com planos projetantes	128
Interseção de retas com planos não-projetantes	133

Tema 14

Secções planas de sólidos

Secções planas por planos horizontais ou frontais	146
Secções planas por planos de perfil	147
Secções planas por planos verticais e de topo	153
Secções planas por planos projetantes em sólidos com arestas de perfil	155
Pontos problemáticos na determinação de uma secção plana	158
Secções planas por planos não-projetantes	162
Secções planas em cones	163
Secções planas em cilindros	169
Secções planas em esferas	182
Sólidos resultantes de uma truncagem	192
	197

8

Paralelismo

Paralelismo entre retas

Retas paralelas a planos

Paralelismo entre planos

Perpendicularidade e ortogonalidade

Perpendicularidade e ortogonalidade
entre retas

Ortogonalidade entre retas e planos

Ortogonalidade entre planos

Paralelismo

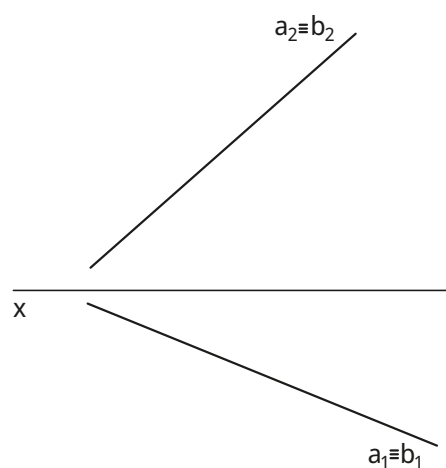
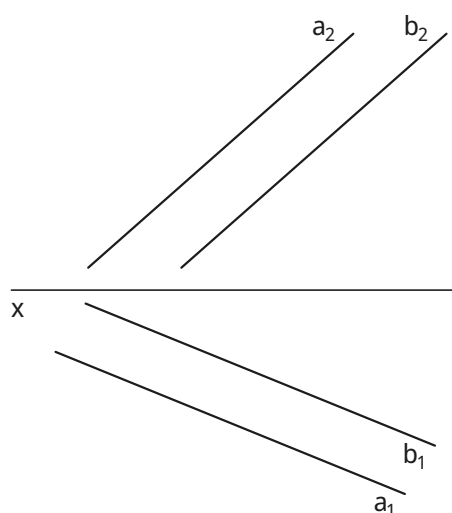
Paralelismo entre retas

Duas retas são paralelas se não possuírem, no espaço geométrico, qualquer ponto comum.

Como já foi estudado anteriormente **duas retas paralelas são sempre coplanares**, ou seja, pertencem a um mesmo plano.

Na verdade, duas retas paralelas podem ser:

- **estritamente paralelas**, caso o seu ponto comum seja um ponto a distância infinita (ponto impróprio), entendendo que não se intersectam;
- **coincidentes** (paralelas em sentido lato), caso todos os seus pontos pertençam, em simultâneo, a ambas.



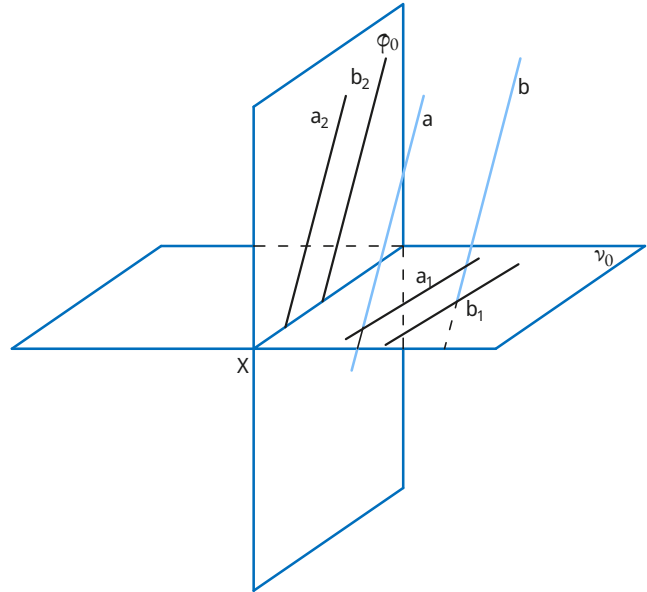
O princípio estudado no 10.º ano desta disciplina indica que retas paralelas (estritamente paralelas) terão sempre as suas projeções paralelas entre si. No entanto, tal não se verifica num caso particular, respeitante a retas de perfil.

Considera as duas retas oblíquas **a** e **b**, na imagem ao lado.

As duas retas são paralelas entre si, no espaço.

As suas projeções homónimas são, também, paralelas entre si:

- **a**₂ e **b**₂ são paralelas entre si;
- **a**₁ e **b**₁ são paralelas entre si.



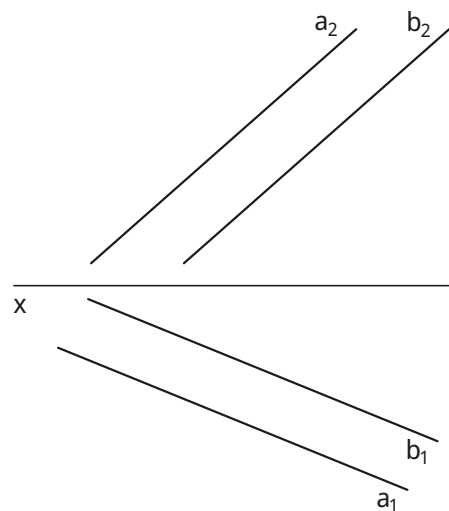
Resumindo

- Duas retas paralelas têm sempre as suas projeções homónimas paralelas entre si.

Observando, agora, o exemplo em dupla projeção ortogonal, é possível verificar que as projeções das retas são paralelas entre si.

É, por isso, possível determinar se duas retas são paralelas com base nas suas projeções.

Contudo, há uma exceção a esta regra: as **retas de perfil**.



Paralelismo entre retas de perfil

No que respeita ao paralelismo entre retas, as retas de perfil são a família de retas que constituem uma exceção ao princípio já enunciado, em que duas retas, cujas projeções homónimas são paralelas entre si, são sempre retas paralelas.

No caso das retas de perfil, dada a sua natureza, as suas projeções serão sempre paralelas entre si, independentemente da posição que as duas retas assumam entre si.

Observa as retas p e p' no espaço.

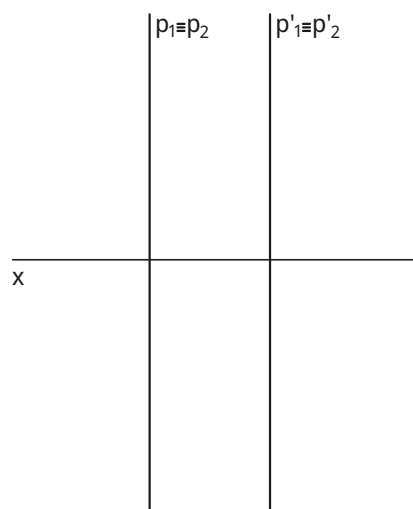
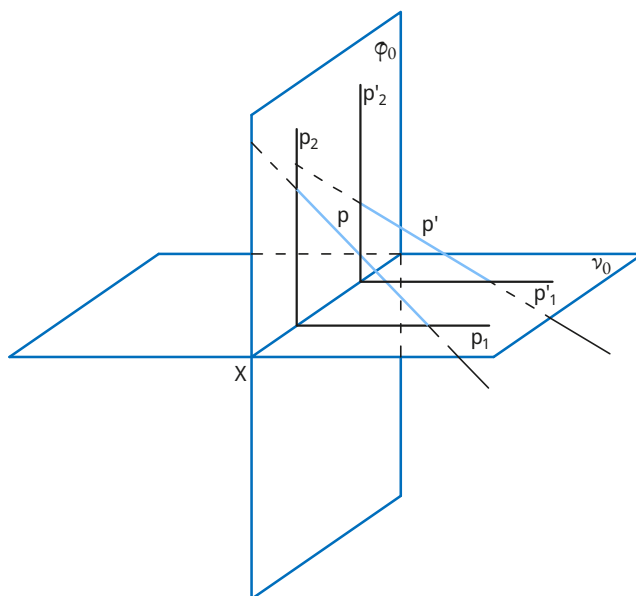
Ambas são retas de perfil, logo, não se interseitam, pois cada uma pertence a um plano de perfil, paralelos entre si. No entanto, as retas não possuem a mesma direção, tratando-se, por isso, de **retas enviesadas**.

Deste modo, conclui-se que as retas p e p' não são paralelas, pois não são coplanares.

Recorda que, para duas retas serem paralelas, estas têm de ser coplanares e não possuir qualquer ponto comum a ambas.

No entanto, em dupla projeção ortogonal, as projeções homónimas das duas retas são paralelas entre si, como podes verificar na representação ao lado.

Em suma, as retas de perfil são o **único caso** em que o paralelismo entre as suas projeções homónimas não é uma condição suficiente para determinar se as retas são paralelas.



Deste modo, impõe-se a necessidade de determinar, a partir das suas projeções, se duas retas de perfil são, ou não, paralelas entre si.

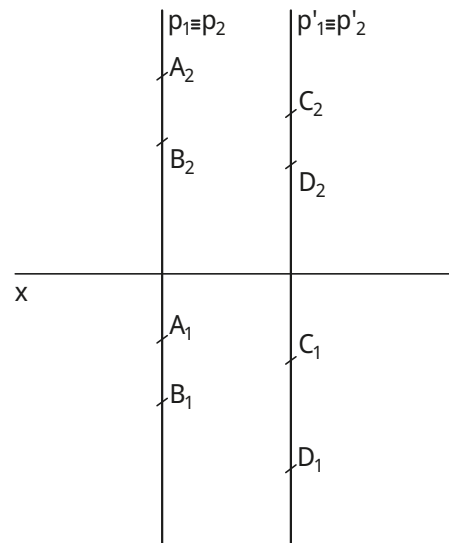
Neste caso, o procedimento poderá consistir em recorrer a métodos geométricos auxiliares. Contudo, existem procedimentos mais simples para a mesma finalidade.

Em dupla projeção ortogonal, uma reta de perfil deverá ser sempre definida por dois pontos, uma vez que a sua direção só será reconhecida através de uma terceira projeção.

Considerando as retas **p** e **p'**, pretende-se determinar se ambas as retas são paralelas entre si.

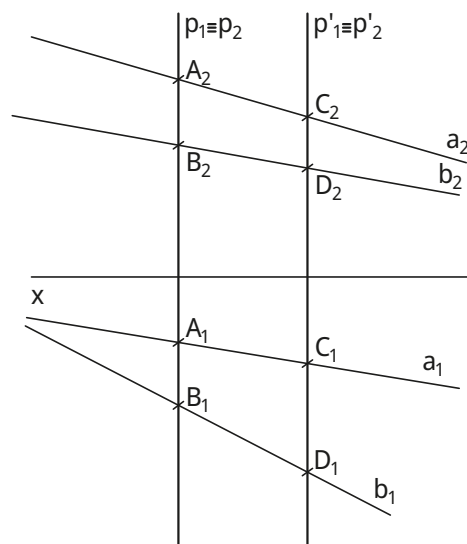
A reta **p**, de perfil, está definida pelos pontos **A** e **B**, e a reta **p'**, também de perfil, está definida pelos pontos **C** e **D**.

A verificação do paralelismo entre as duas retas é feita com recurso a duas retas auxiliares, concorrentes, simultaneamente, com as retas **p** e **p'**.



Assim, considera a reta **a**, concorrente com a reta **p** no ponto **A** e com a reta **p'** no ponto **C**. Por sua vez, uma reta **b**, concorrente com a reta **p** no ponto **B** e com a reta **p'** no ponto **D**.

Representadas ambas as retas auxiliares pelas suas projeções, conclui-se que **a** e **b** não são coplanares nem paralelas (não possuem um ponto de concorrência e não são paralelas). Desta forma, verifica-se que as retas de perfil **p** e **p'** **não são paralelas**.

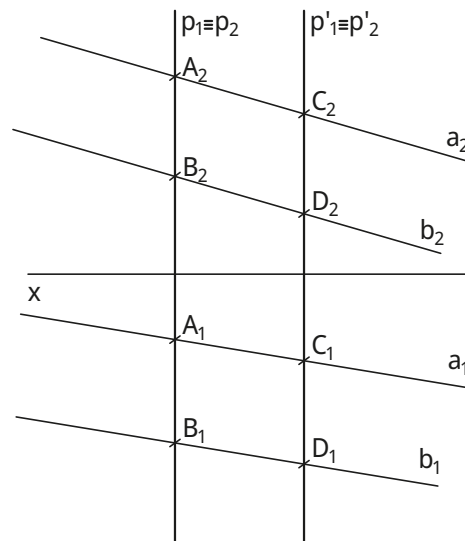


Em oposição, considerando o exemplo ao lado, em que se traçaram duas retas auxiliares, também concorrentes com as retas **p** e **p'**, verifica-se que as retas **a** e **b** são paralelas, e por isso, complanares, uma vez que as suas projeções homónimas são paralelas entre si.

Este facto permite comprovar que as retas **p** e **p'** são paralelas entre si.

Resumindo

- Para comprovar o paralelismo entre duas retas de perfil, devem traçar-se duas retas auxiliares, que devem ser complanares, concorrentes com ambas as retas de perfil.



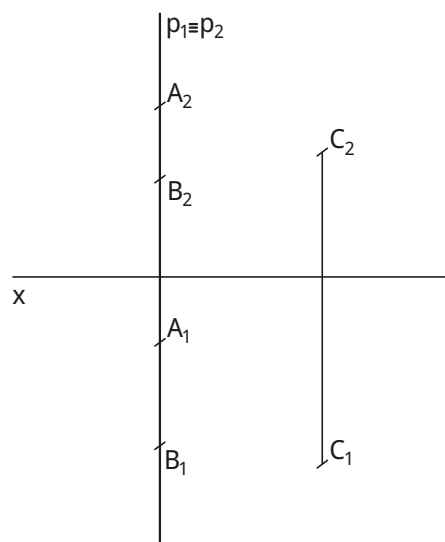
Tendo sido enunciado o procedimento para verificar o paralelismo, sendo dadas duas retas de perfil, torna-se imperativo abordar o procedimento a seguir para traçar uma reta de perfil paralela a uma reta dada, também de perfil, não recorrendo a métodos geométricos auxiliares.

Sendo dada uma reta **p**, de perfil, definida pelos pontos **A** e **B**, pretende-se a determinação de uma outra reta de perfil, **p'**, paralela à reta **p**, e que contenha o ponto **C**.

Esta determinação poderia ser feita através de um rebatimento. Contudo, existem outros processos gráficos que possibilitam atingir o objetivo pretendido.

Assim, à semelhança do processo de verificação de paralelismo entre retas de perfil, abordado anteriormente, será necessário recorrer a retas auxiliares, concorrentes com as retas de perfil em estudo.

Neste caso, o procedimento começará por fazer passar uma reta que contenha, em simultâneo, o ponto **C** e outro qualquer ponto da reta dada (reta **p**).



Neste caso, optou-se por determinar as projeções de uma reta **a**, que contém os pontos **A** e **C**. Desta forma, antevê-se que a reta **a** será uma reta oblíqua, concorrente com a reta **p** e com a reta pretendida, **p'**.

Nessa reta **a**, deverá ser determinado um ponto que lhe pertença, externo às duas retas de perfil – ponto **P**.

Esse ponto será o ponto de concorrência das duas retas auxiliares que irão conduzir à determinação da reta **p'**, paralela à reta **p**.

Deste modo, traçar-se-á uma outra reta auxiliar, concorrente com a reta **p** no ponto **B**, e que contenha o ponto **P**.

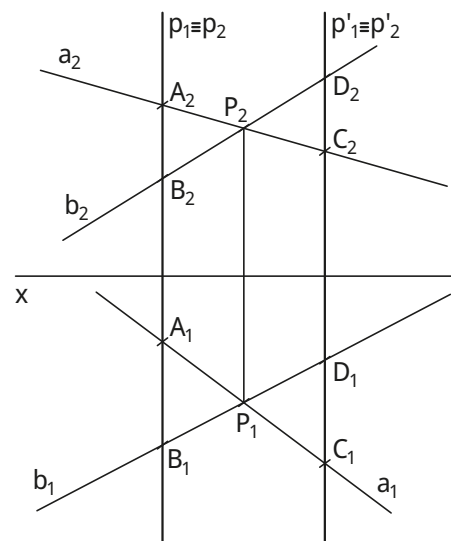
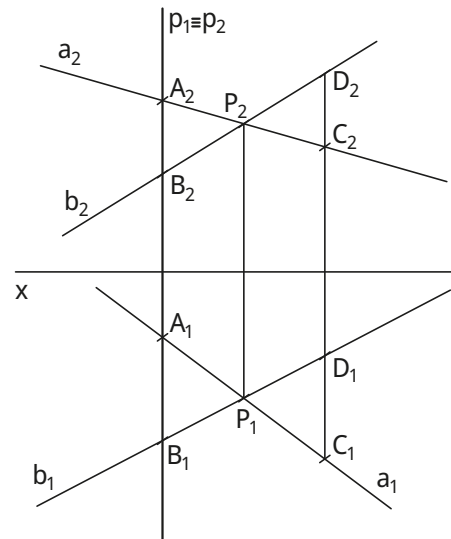
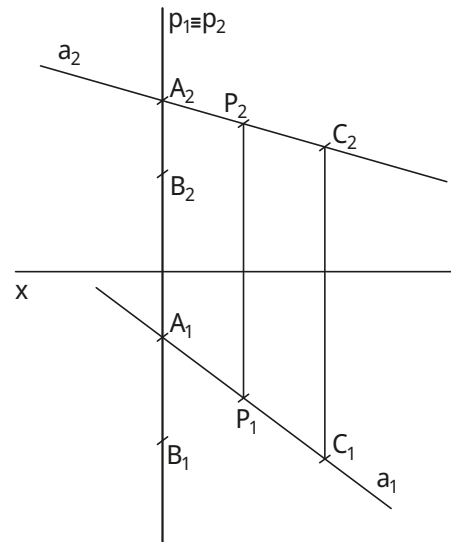
As retas **a** e **b** são retas oblíquas e são complanares, pois possuem um ponto comum – ponto **P** – ponto de concorrência.

Como foi abordado anteriormente, duas retas de perfil são paralelas se for possível traçar duas retas com estas concorrentes, e que sejam complanares.

Uma vez que as retas **a** e **b** são complanares, a determinação da reta **p'** poderá ser feita imediatamente.

Sabendo de antemão a direção das projeções da nova reta, uma vez que se trata de uma reta de perfil, resta determinar a interseção entre as projeções da reta **b** e a abscissa do ponto **C**. Aí ter-se-á o ponto **D**.

A reta **p'** está, assim, definida por dois pontos – pontos **C** e **D**, e é paralela à reta **p**.



Para praticar

- 1 Determina as projeções de uma reta p' , paralela a uma reta p , de perfil, definida pelos pontos $A(1; 3; 4)$ e $B(5; 6)$. Sobre a reta p' , sabe-se que contém o ponto $C(-2; 1; 3)$.
- 2 Determina as projeções de duas retas de perfil paralelas, p e p' , sendo dados os seguintes pontos:
 - $A(0; 4; 2)$; ▪ $B(0; 6; 3)$; ▪ $C(-3; 2; 6)$.
- 3 Determina as projeções de uma reta de perfil p' , paralela a uma reta p também de perfil. Sabe-se que a reta p está definida pelos pontos $A(0; 4; 2)$ e $B(6; 4)$. A reta p' localiza-se na abcissa -3 e o ponto de concorrência de duas retas concorrentes com ambas as retas de perfil é o ponto $P(-2; 3; 3)$.

Retas paralelas a planos

Relembrando o critério de paralelismo entre retas e planos, sabe-se que:

Para que uma reta seja paralela a um plano, este deve conter uma reta paralela à reta dada.

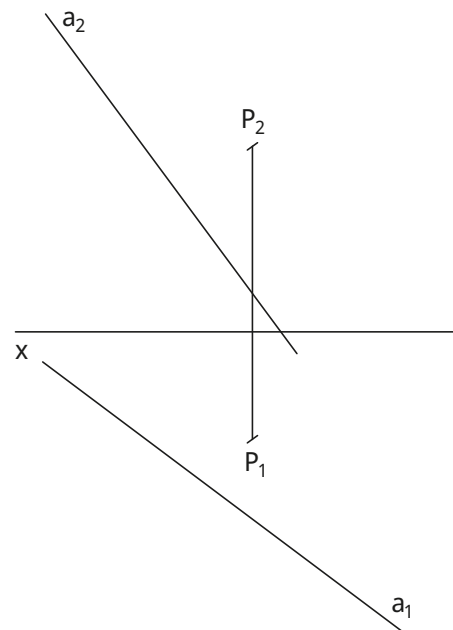
Com base neste princípio, a determinação de um plano paralelo a uma determinada reta deverá ser feita através de uma reta, paralela à reta dada.

Considera o seguinte exemplo:

Sendo dada uma reta a , representada pelas suas projeções, pretende-se representar pelos seus traços um plano α , paralelo à reta a e que contenha o ponto P .

Uma vez que, para um plano ser paralelo a uma reta, terá de conter uma reta paralela à reta dada, o procedimento passará por traçar, pelo ponto P , uma reta paralela à reta a .

Dado que a reta a não é uma reta de perfil, a determinação de uma reta que lhe seja paralela é imediata.



Deste modo, por P , é traçada a projeção de uma reta r , paralela à reta a :

- r_2 contém P_2 e é paralela a a_2 ;
- r_1 contém P_1 e é paralela a a_1 .

Determinada a reta r , paralela à reta a , basta determinar os traços de um plano que contenha a reta r . Esse plano será, obrigatoriamente, paralelo à reta a .

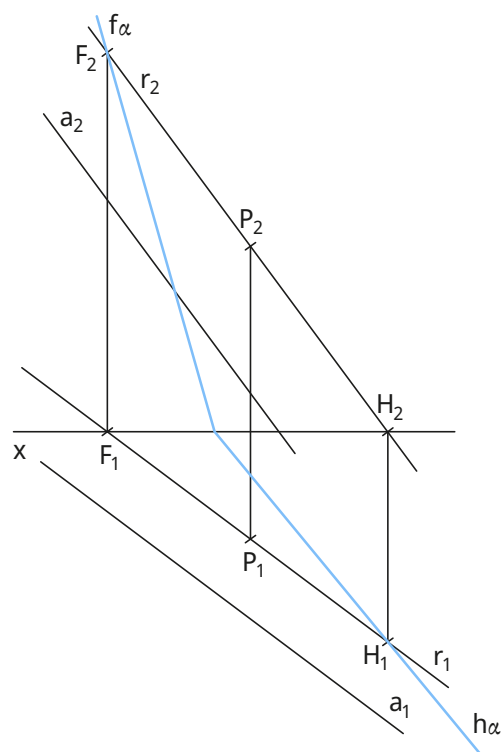
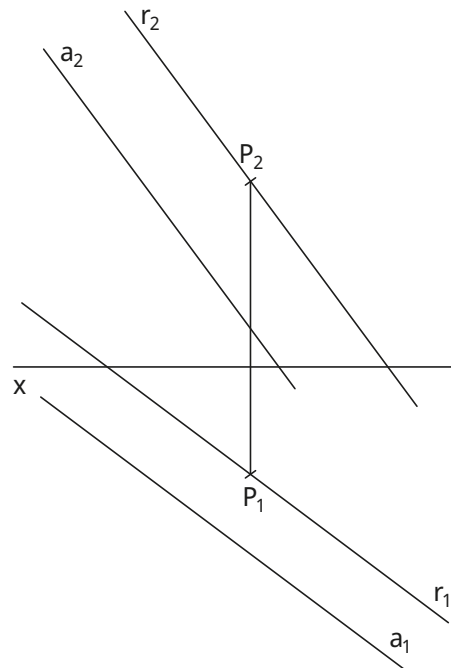
Para a determinação dos traços do plano, é necessário, em primeiro lugar, determinar os traços da reta r – para que uma reta pertença a um plano, deverá ter os seus traços sobre os traços do plano – para, de seguida, determinar os traços do plano.

Tendo os pontos H e F da reta r , poderão ser traçados os traços do plano. Neste caso concreto, não são necessários mais dados, e o ponto de concorrência dos traços do plano no eixo x poderá ser qualquer ponto desse mesmo eixo, uma vez que poderá ser qualquer plano, desde que contenha a reta r .

Assim, está o plano α definido pelos seus traços, paralelo à reta a .

Resumindo

- Para que um plano seja paralelo a uma reta, deverá conter uma reta paralela à reta dada.



Para praticar

- 1 Determina os traços de um plano α , paralelo a uma reta r , definida pelos pontos A (3; 1; 5) e B (0; 4; 2). O ponto P (-4; 3; 5) pertence ao plano.
- 2 Determina os traços de um plano α , paralelo a uma reta r , definida pelos pontos A (2; 2; 6) e B (-2; 5; 2). O ponto de concorrência dos traços do plano é um ponto com -5 cm de abscissa.

Retas paralelas a planos bissetores

Existem três famílias de retas que poderão ser paralelas aos planos bissetores:

- retas oblíquas;
- retas de perfil;
- retas fronto-horizontais.

Na verdade, as retas fronto-horizontais, dada a sua natureza, são sempre paralelas aos planos bissetores. Contudo, as retas oblíquas e de perfil não apresentam sempre essa relação de paralelismo com estes planos. Para que uma reta destas duas famílias seja paralela a um plano bisetor, terá de ser paralela a uma reta desse mesmo plano.

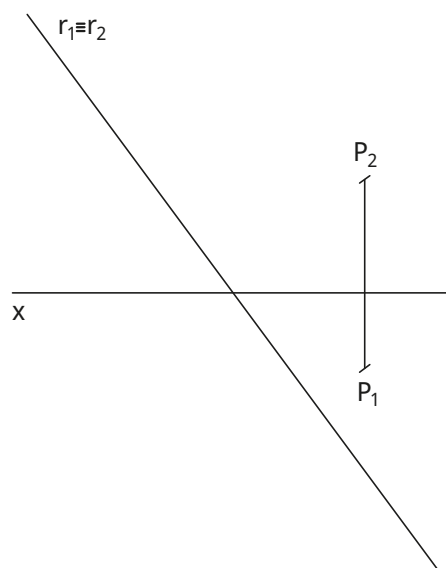
Retas oblíquas paralelas ao $\beta_{2/4}$

Sendo o plano $\beta_{2/4}$ um plano de rampa passante, sabe-se que as retas que lhe podem pertencer são:

- retas oblíquas passantes;
- retas de perfil passantes;
- retas fronto-horizontais.

Considera o seguinte exemplo:

Sendo dado um ponto **P**, pretende-se determinar, pelas suas projeções, uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ que contenha o ponto.

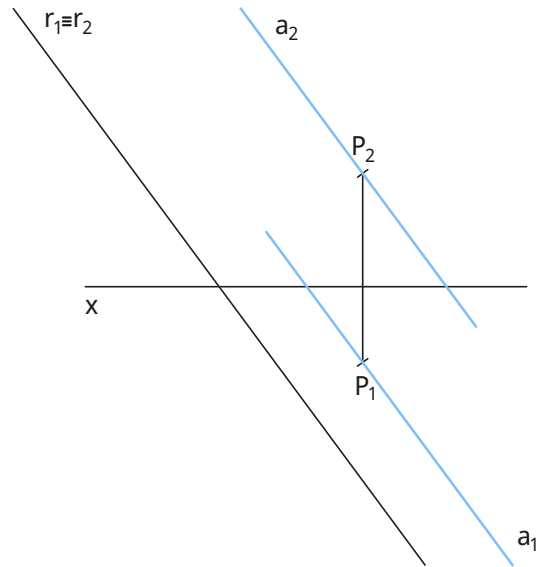


Relembrando o princípio de que, para que uma reta seja paralela a um plano, terá de ser paralela a uma reta desse plano, representou-se uma qualquer reta oblíqua passante do plano $\beta_{2/4}$.

A reta r tem as suas projeções coincidentes sendo, por isso, uma reta do plano $\beta_{2/4}$.

Uma vez que retas paralelas têm as suas projeções homónimas paralelas entre si, a determinação de uma reta que contenha o ponto P e que seja paralela ao plano $\beta_{2/4}$ é imediata, consistindo em fazer passar, por P_2 , uma projeção paralela a r_2 e por P_1 uma projeção paralela a r_1 .

A reta a é uma reta paralela à reta r , e, por isso, paralela ao plano $\beta_{2/4}$.



Retas oblíquas paralelas ao $\beta_{1/3}$

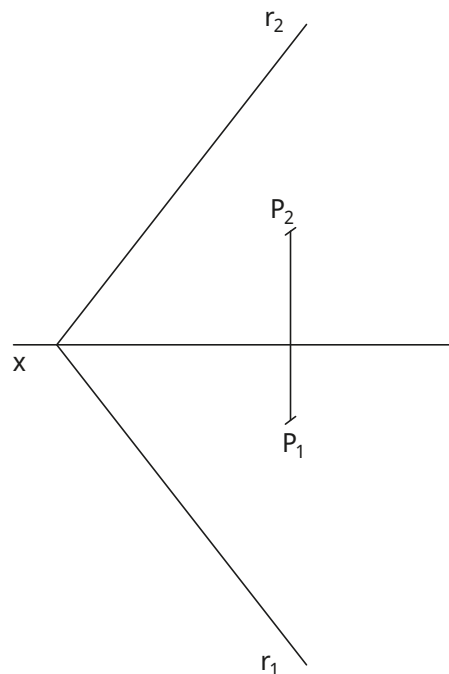
Sendo o plano $\beta_{1/3}$ um plano de rampa passante, sabe-se que as retas que lhe podem pertencer são:

- retas oblíquas passantes;
- retas de perfil passantes;
- retas fronto-horizontais.

Considera o seguinte exemplo:

Sendo dado um ponto P , pretende-se determinar, pelas suas projeções, uma reta paralela ao $\beta_{1/3}$ que contenha o ponto.

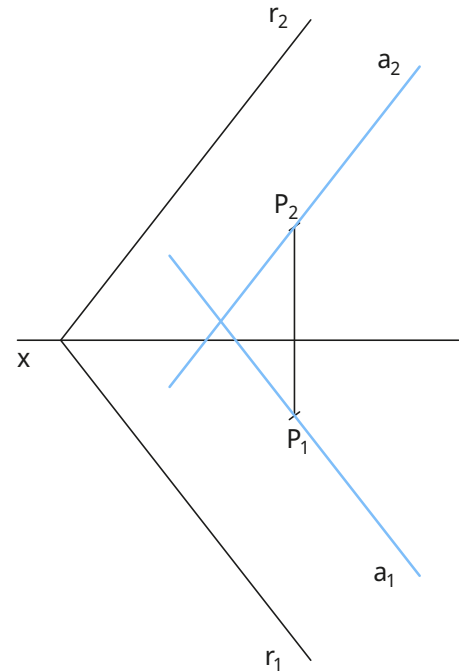
Relembrando o princípio de que, para que uma reta seja paralela a um plano, terá de ser paralela a uma reta desse plano, representou-se uma qualquer reta oblíqua passante do plano $\beta_{1/3}$.



A reta r tem as suas projeções simétricas sendo, por isso, uma reta do plano $\beta_{1/3}$.

Uma vez que retas paralelas têm as suas projeções homónimas paralelas entre si, a determinação de uma reta que contenha o ponto P e que seja paralela ao plano $\beta_{1/3}$ é imediata, consistindo em fazer passar, por P_2 , uma projeção paralela a r_2 e por P_1 uma projeção paralela a r_1 .

A reta a é uma reta paralela à reta r , e, por isso, paralela ao plano $\beta_{1/3}$.



Retas de perfil paralelas ao $\beta_{2/4}$

Como já verificámos, as retas de perfil são a única família de retas em que o paralelismo entre si não pode ser verificado com base apenas nas suas projeções, uma vez que as projeções de uma reta de perfil são sempre idênticas, qualquer que seja a sua posição relativa no espaço.

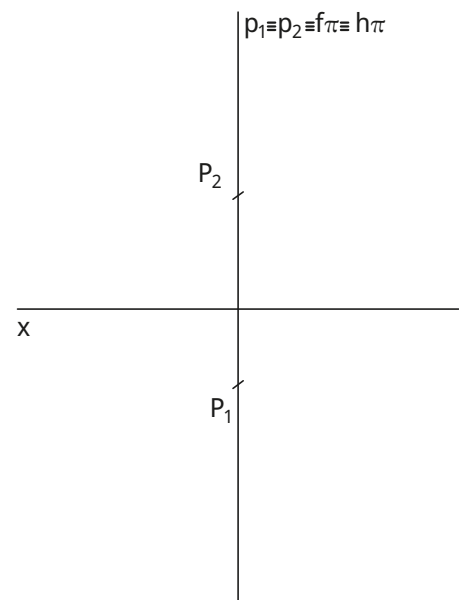
Assim, a determinação de uma reta de perfil paralela a um plano bisetor terá sempre de ser feita com recurso a um método auxiliar.

Este pode ser um método geométrico auxiliar: rebatimento do plano de perfil que contém a reta; ou através do método de paralelismo entre retas de perfil enunciado nas páginas 9, 10 e 11.

Considerando o exemplo ao lado, em que se tem um ponto P , pretende-se conduzir, pelo mesmo, uma reta de perfil, paralela ao plano $\beta_{2/4}$.

Uma vez que as projeções de uma reta de perfil são sempre coincidentes, perpendiculares ao eixo x , estas podem ser representadas imediatamente.

Dado que uma reta de perfil necessita de ser definida por dois pontos, torna-se necessário determinar um outro ponto da reta.

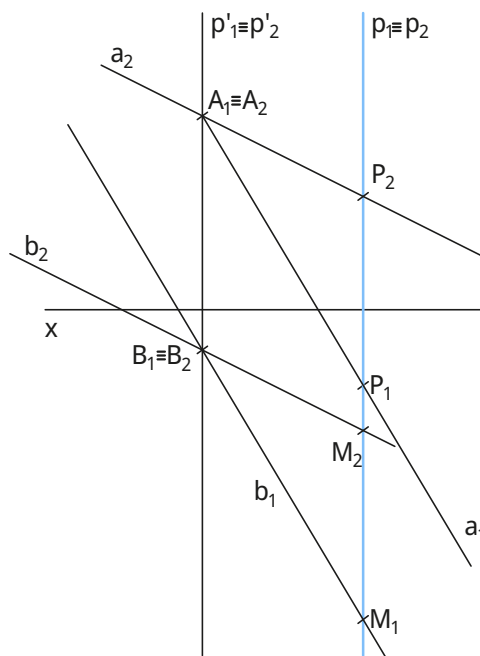


Considerando o mesmo ponto **P**, pretende-se traçar, pelo mesmo, uma reta de perfil paralela ao $\beta_{2/4}$.

Uma vez que, para uma reta ser paralela a um plano terá de ser paralela a uma reta desse plano, traçou-se uma outra reta de perfil – **p'**, pertencente ao plano $\beta_{2/4}$.

Nota que a reta **p'** pertence ao plano $\beta_{2/4}$, pois está definida por dois pontos cujas projeções são coincidentes em ambos.

Traçando as projeções da reta **p**, passando pelo ponto **P**, recorre-se a duas retas auxiliares, **a** e **b**, paralelas entre si. A reta **a** é concorrente com **p'** no ponto **A** e com a reta **p** no ponto **P**. A reta **b** é paralela à reta **a** e concorre com a reta **p'** no ponto **B**. Onde interseeta as projeções homónimas da reta **p**, tem-se o segundo ponto, que define a reta **p**, paralela ao plano $\beta_{2/4}$.



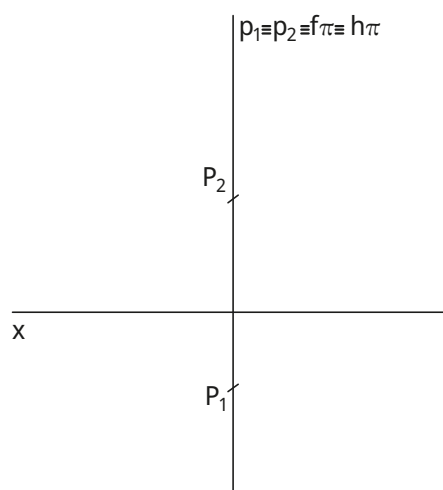
Retas de perfil paralelas ao $\beta_{1/3}$

À semelhança do que já foi ilustrado anteriormente, para determinar uma reta de perfil paralela a um plano bissetor, é necessário recorrer a métodos auxiliares, sendo estes:

- rebatimento do plano de perfil;
- critério de reversibilidade.

Verificando o exemplo ao lado, tem-se um ponto **P**, pelo qual se pretende traçar uma reta de perfil, paralela ao plano $\beta_{1/3}$.

Uma vez que uma reta de perfil, em dupla projeção ortogonal, tem de estar sempre definida por dois pontos, torna-se necessário determinar um outro ponto da reta **p**.



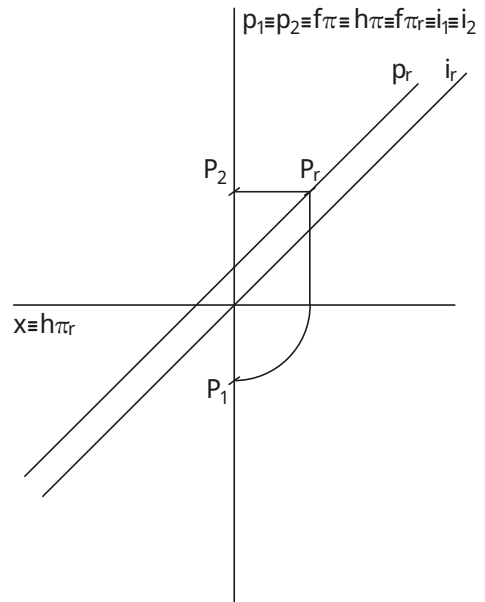
Essa determinação será feita com recurso a um método geométrico auxiliar, através do rebatimento do plano de perfil sobre o Plano Frontal de Projeção.

Rebatido o plano de perfil, é possível traçar a reta **i**, de interseção do plano de perfil com o plano $\beta_{1/3}$. Rebatendo, também, o ponto **P**, é possível traçar, pelo mesmo, a reta **p** rebatida, paralela à reta **i** rebatida.

Nota que todos os pontos da reta **i** terão projeções simétricas, verificando-se que a reta pertence ao plano bisetor dos diedros ímpares.

Recordando que uma reta só é paralela a um plano se for paralela a uma reta desse plano, pode concluir-se que a reta **p** será paralela ao plano $\beta_{1/3}$.

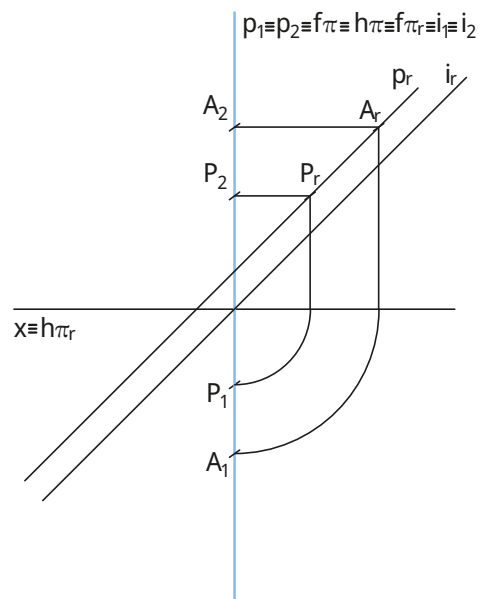
Assim, a reta **p** poderá ficar definida por dois pontos.



Determinado um segundo ponto da reta **p** – ponto **A** –, este será representado, em primeira instância, no rebatimento.

Após o seu contrarrebatemento, o ponto **A** é assinalado sobre as projeções da reta **p**.

Assim, é determinada, a partir de um ponto, uma reta de perfil paralela ao plano $\beta_{1/3}$, com recurso a um rebatimento.



À semelhança do que foi enunciado no exemplo do plano $\beta_{2/4}$, é possível aplicar o critério da reversibilidade.

Assim, sendo dado o mesmo ponto **P**, é traçada uma reta de perfil passando pelo ponto.

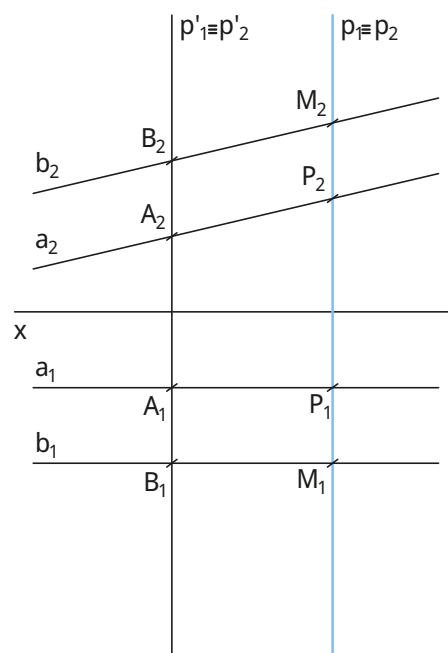
A reta **p'**, situada num outro plano de perfil, é uma reta do plano $\beta_{1/3}$ – os seus pontos têm projeções simétricas.

Recorrendo a duas retas auxiliares, paralelas entre si, tem-se:

- A reta **a**, que é concorrente com a reta **p'** no ponto **A** e com a reta **p** no ponto **P**;
- A reta **b**, que é concorrente com a reta **p'** no ponto **B** e é paralela à reta **a**.

A interseção da reta **b** com a reta **p** dá-se no ponto **M**.

A reta **p**, definida pelos pontos **P** e **M** é paralela ao plano $\beta_{1/3}$.



Para praticar

- 1 Sendo dado um ponto **P** (4; 6), determina as projeções de uma reta **p**, de perfil, que contém o ponto **P**, e que é paralela ao plano $\beta_{2/4}$.
- 2 Sendo dado um ponto **P** (3; 5), determina as projeções de uma reta **p**, de perfil, que contém o ponto **P**, e que é paralela ao plano $\beta_{1/3}$.
- 3 Considera a reta **p**, de perfil, definida pelos pontos **A** (6; 3) e **B** (4; 1). Verifica se a reta **p** é paralela a algum dos planos bissetores.

Paralelismo entre planos

Planos paralelos são planos que se intersectam no espaço a distância infinita, segundo uma reta denominada **reta imprópria**.

Assim, **planos paralelos** são planos que **possuem a mesma orientação**.

Resumindo

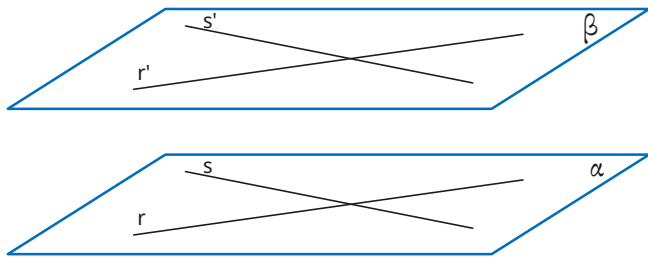
- Dois planos são paralelos entre si apenas se duas retas concorrentes desse plano forem paralelas a outras duas retas concorrentes, do outro plano.

Considerando a representação ao lado, de dois planos α e β , estes contêm retas concorrentes paralelas entre si.

As retas r e s pertencem ao plano α .

As retas r' e s' pertencem ao plano β .

- r e r' são paralelas entre si;
- s e s' são paralelas entre si.



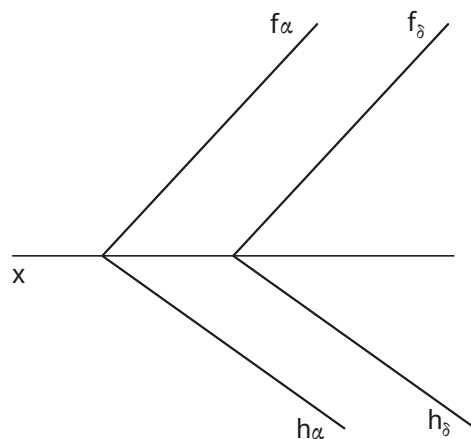
Deste modo, conclui-se que os dois planos são paralelos entre si, porque:

Dois planos são paralelos entre si se tiverem duas famílias de retas comuns entre si.

Na generalidade dos planos, o seu paralelismo reflete-se nos seus traços. Isto é, planos paralelos têm os seus traços paralelos entre si.

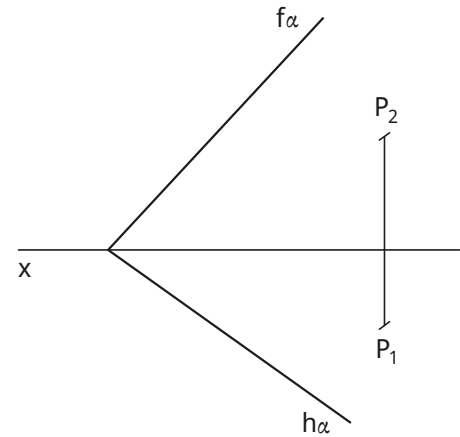
Esta condição não se verifica em planos de rampa, como irá ser abordado mais adiante.

No caso dos planos α e β , os traços homónimos são paralelos entre si. Sendo os traços de ambos os planos retas frontais e horizontais dos planos, respetivamente com afastamento e cota nulos, concorrentes num ponto situado no eixo x , então, conclui-se que um dos planos possui duas retas concorrentes, paralelas a outras duas retas concorrentes do outro plano.



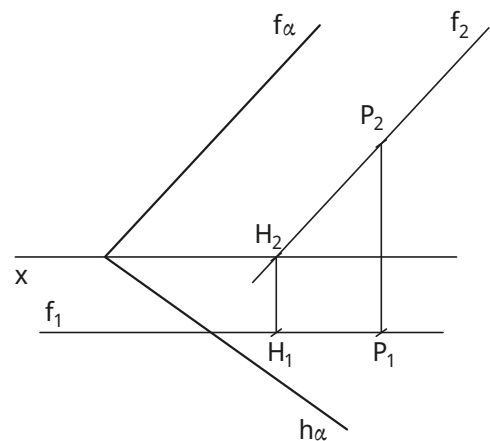
Deste modo, sendo dado um plano definido pelos seus traços, e um ponto exterior ao plano, pretende-se determinar os traços de um plano, que contenha o ponto e seja paralelo ao plano dado.

Sabendo que, à exceção dos planos de rampa, os planos paralelos têm os seus traços paralelos entre si, é já conhecida a direção dos traços do plano pretendido. No entanto, é necessário que esse plano contenha, neste caso, o ponto **P**.



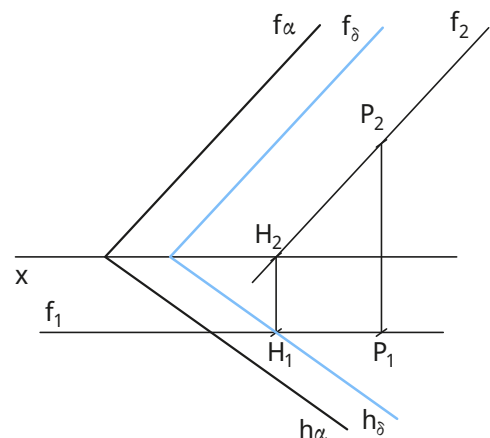
O procedimento passará, então, por representar, pelas suas projeções, uma reta que contenha o ponto **P** e que seja paralela a uma reta do plano dado.

Neste caso, optou-se por uma reta frontal. A partir do traço frontal do plano α , é conhecida a direção das retas frontais desse plano. Assim, é possível representar a reta **f**, que contém o ponto **P**, e que é paralela às retas frontais do plano α .



Determinado o traço horizontal da reta – ponto **H** –, haverá elementos suficientes para determinar os traços do plano pretendido, pois já é conhecida a direção dos mesmos.

Assim, é determinado um plano, pelos seus traços, paralelo a um plano dado, que contém um dado ponto.

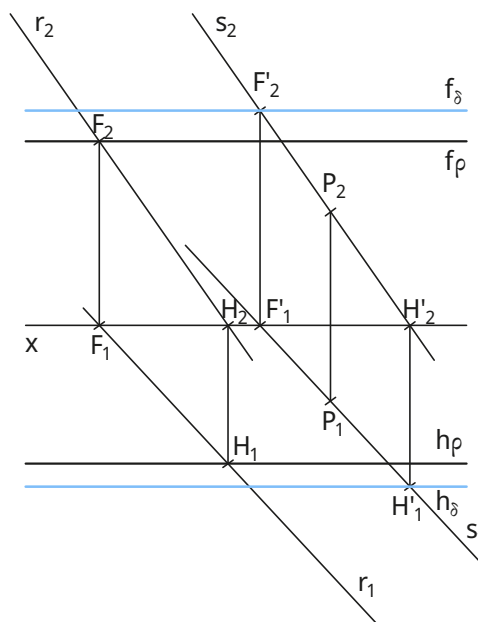


Representada a reta r pelas suas projeções, é agora necessário fazer passar pelo ponto P uma reta paralela à reta r .

Determinados os traços dessa reta, são imediatamente determinados os traços do plano de rampa que a contém.

Essa reta s , paralela a r , é concorrente com retas fronto-horizontais paralelas às do plano dado (retas fronto-horizontais são sempre paralelas).

Assim, conclui-se que ambos os planos contêm retas concorrentes paralelas entre si, ficando provado o paralelismo entre os dois planos.



Para praticar

- 1 Sendo dado um plano α , cujos traços horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de 30° (a.d.) e de 45° (a.d.), determina os traços de um plano β , paralelo ao plano α , cujos pontos do eixo x distem 4 cm entre si.
- 2 Sendo dado um plano α cujos traços horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de 40° (a.e.) e de 35° (a.e.), determina os traços de um plano β , paralelo ao plano α , que contenha o ponto $P(2; 4; 3)$. O plano α contém o ponto de abscissa -3 no eixo x .
- 3 Considera um plano de rampa ρ , cujo traço frontal tem 4 cm de cota e o traço horizontal 3 cm de afastamento. Determina os traços de um qualquer plano de rampa, paralelo ao plano dado.

Resumindo

- Planos paralelos têm sempre os seus traços paralelos, exceto no caso dos planos de rampa.
- Planos de rampa terão sempre os seus traços paralelos, sendo estes, ou não, paralelos entre si.

Perpendicularidade e ortogonalidade

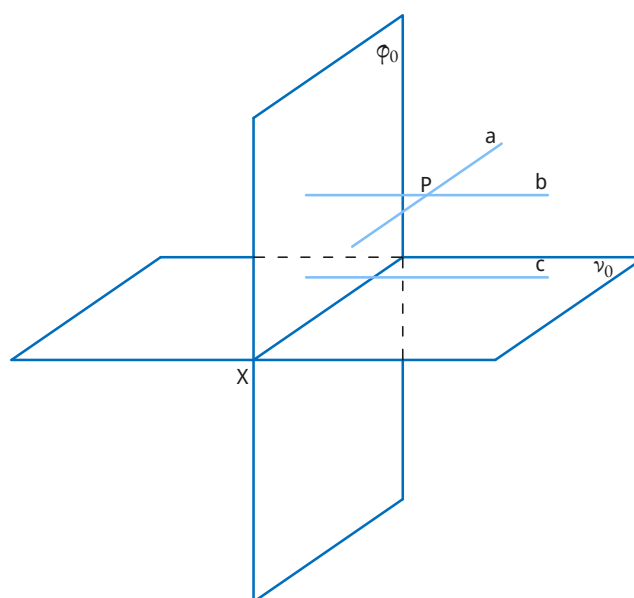
A distinção entre perpendicularidade e ortogonalidade já foi abordada no programa do 10.º ano de escolaridade. Contudo, considera-se importante relembrar os conceitos:

- Duas retas concorrentes cujas direções formem um ângulo reto (90°) **são perpendiculares**;
- Duas retas não-complanares cujas direções formem um ângulo reto (90°) **são ortogonais**.

Assim, duas retas perpendiculares são sempre coplanares. Retas ortogonais deverão ser paralelas a duas retas perpendiculares.

Desta forma, o conceito de ortogonalidade revela-se mais abrangente.

Observando o exemplo ao lado, verifica-se que as retas **a** e **b** são perpendiculares, pois são concorrentes no ponto **P** e formam um ângulo de 90° entre si. No entanto, as retas **a** e **c** são ortogonais, uma vez que não possuem qualquer ponto de concorrência. Sendo a reta **c** paralela à reta **b**, conclui-se que as direções das retas **a** e **c** são ortogonais.



Em suma:

- As retas **a** e **b** são perpendiculares;
- As retas **a** e **c** são ortogonais.

Perpendicularidade e ortogonalidade entre retas

Ao contrário do que sucede com o paralelismo entre retas, que pode ser verificado através das projeções das mesmas, na perpendicularidade e ortogonalidade o mesmo já não acontece. Na verdade, retas perpendiculares ou ortogonais podem não evidenciar essa relação nas suas projeções, devido à deformação que pode ocorrer, consoante a sua relação com os planos de projeção.

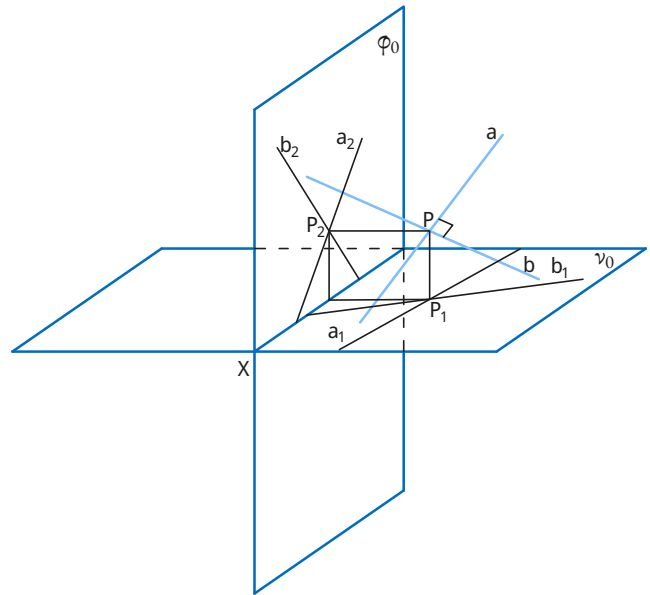
Observando as retas **a** e **b**, verifica-se que ambas são concorrentes entre si no ponto **P**, e formam um ângulo de 90° . As retas **a** e **b** são, por isso, perpendiculares.

Contudo, nas suas projeções, essa perpendicularidade não se verifica.

Naturalmente, as projeções horizontais e frontais de ambas as retas continuam a ser concorrentes nas projeções homónimas do ponto **P**. No entanto, as projeções não formam ângulos de 90° entre si, devido à deformação própria da projeção.

Em suma:

- **a**₁ e **b**₁ não são perpendiculares;
- **a**₂ e **b**₂ não são perpendiculares.



Esta deformação ocorre por se tratar, neste caso, de retas oblíquas, em que nenhuma das suas projeções se encontra em verdadeira grandeza.

Deste modo, no caso particular de perpendicularidade entre retas oblíquas, é necessário o recurso a processos auxiliares, que irão ser abordados mais adiante.

Uma vez que esse caso particular se deve ao facto de nenhuma das retas oblíquas se projetar em verdadeira grandeza nos planos de projeção, conclui-se que, tratando-se de retas paralelas aos planos de projeção, a situação será diferente.

Retas paralelas aos planos de projeção: perpendicularidade e ortogonalidade

Retas horizontais (de nível)

Retas horizontais projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Deste modo, a sua perpendicularidade ou ortogonalidade poderá ser verificada em projeção horizontal.

Verifica o seguinte exemplo:

Sendo dada uma reta h , horizontal, pretende-se determinar as projeções de uma outra reta horizontal, concorrente com a reta h no ponto P e perpendicular a esta.

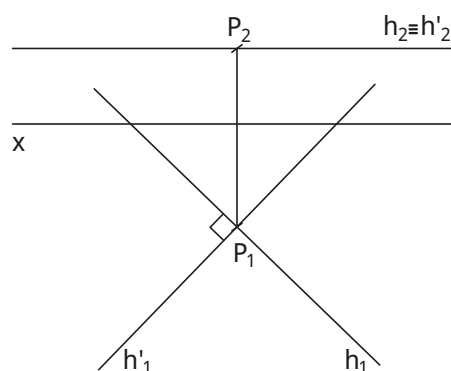
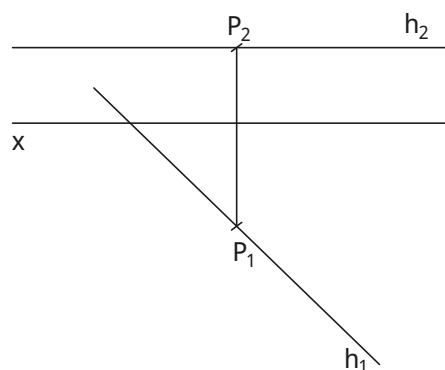
Por se tratar de retas horizontais, sabe-se que as suas projeções horizontais se encontram em verdadeira grandeza.

Esse facto implica que o ângulo por estas formado também se verifique em projeção horizontal.

Deste modo, a determinação da reta h' , horizontal e perpendicular à reta h far-se-á traçando uma perpendicular a h_1 , passando por P_1 (pois pretende-se que ambas as retas sejam concorrentes no ponto P).

Assim, obtém-se a projeção horizontal da reta h' .

A sua projeção frontal será, naturalmente, coincidente com a projeção frontal da reta h .

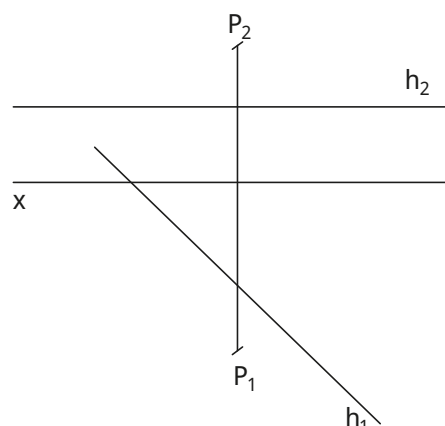


As retas h e h' são perpendiculares:

- h_1 e h'_1 são perpendiculares.

Por sua vez, se se pretender a determinação de duas retas horizontais ortogonais entre si, estas não poderão ser concorrentes.

Considerando a reta h , pretende-se determinar uma outra reta horizontal que contenha o ponto P e seja ortogonal à reta h .



O procedimento é, em tudo, semelhante ao anterior, com a exceção do ponto **P** não ser um ponto de concorrência entre ambas as retas, mas pertencer apenas à reta **h'**.

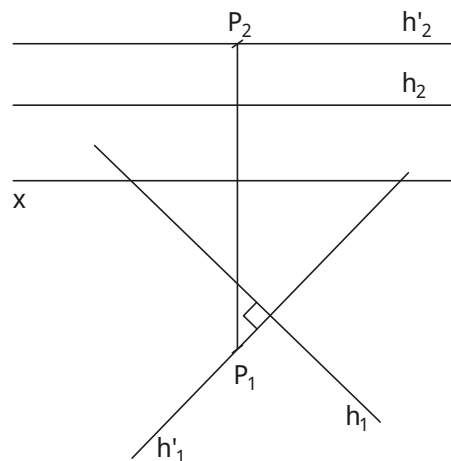
Assim, por **P₁** traça-se uma perpendicular à projeção horizontal da reta **h**.

Determinada a projeção horizontal da reta **h'**, segue-se a determinação da sua projeção frontal.

A projeção **h'₂** contém **P₂** e é paralela ao eixo **x**, sendo uma reta horizontal.

As retas **h** e **h'** são ortogonais:

- não possuem nenhum ponto de concorrência;
- as suas projeções horizontais são perpendiculares.



Retas de topo (projetante frontal)

As retas de topo são um caso particular das retas horizontais. À semelhança destas últimas, as retas de topo são paralelas ao Plano Horizontal de Projeção. Contudo, ao contrário das retas horizontais, cuja relação com o Plano Frontal de Projeção abrange uma infinidade de opções, as retas de topo são sempre ortogonais ao Plano Frontal de Projeção (são retas projetantes frontais). Deste modo, duas retas de topo são sempre paralelas entre si.

Com base neste pressuposto, ao contrário do que acontece com as retas horizontais, em que uma reta horizontal pode ser perpendicular a uma outra reta, também, horizontal, no caso de uma reta de topo, esta nunca poderá ser perpendicular a uma outra reta de topo.

Considerando o exemplo ao lado, tem-se uma reta t , de topo, e um ponto P .

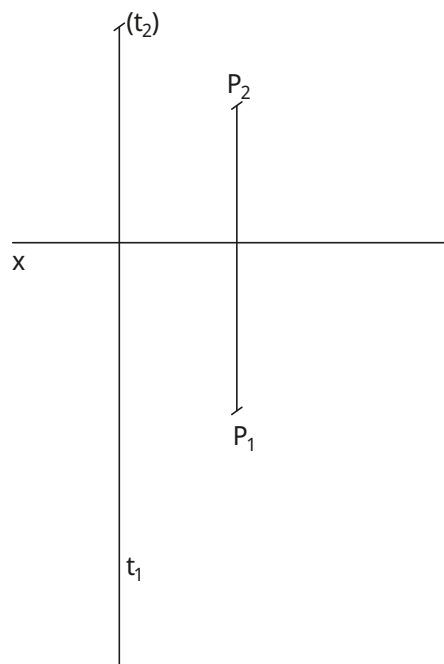
Pretende-se, pelo ponto P , traçar uma reta ortogonal à reta t .

Uma vez que a reta t tem a sua projeção horizontal em verdadeira grandeza, é suficiente traçar, por P_1 , uma perpendicular a t_1 .

Neste caso, trata-se de uma reta frontal, dado que a projeção horizontal, sendo perpendicular a t_1 , será, obrigatoriamente, paralela ao eixo x .

Estando a reta f já representada pela sua projeção horizontal, resta a sua projeção frontal, para que o processo seja concluído.

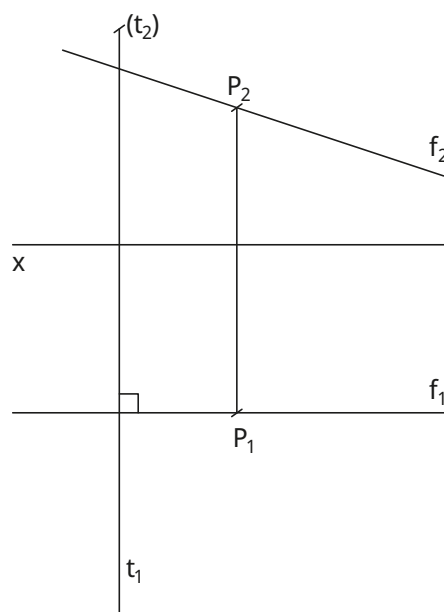
Neste caso, a projeção frontal poderá ser qualquer uma, desde que contenha o ponto P , que se quer como pertencente à reta f .



Assim, por P_2 , traça-se uma projeção, oblíqua ao eixo x , de forma arbitrária, visto que a ortogonalidade já está assegurada em projeção horizontal.

Nota que ambas as retas não possuem qualquer ponto em comum.

São, assim, **retas ortogonais**.



Reta perpendicular ou ortogonal a uma reta frontal (de frente)

Uma reta frontal é uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção.

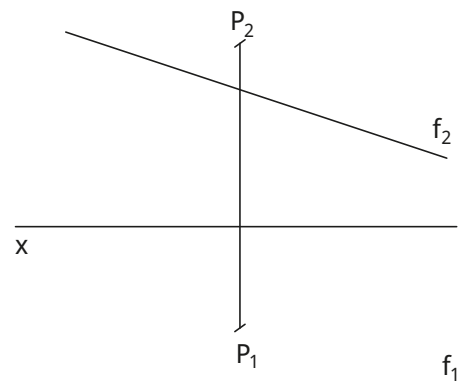
Deste modo, é uma reta cuja projeção frontal está projetada em verdadeira grandeza.

Esse facto permite concluir que qualquer reta perpendicular ou ortogonal a uma reta frontal terá a sua projeção frontal perpendicular à projeção da reta frontal em questão.

Observa o exemplo:

Sendo dada uma reta **f**, frontal, e um ponto **P**, exterior à reta, pretende-se determinar uma outra reta, ortogonal à reta **f**, que contenha o ponto **P**.

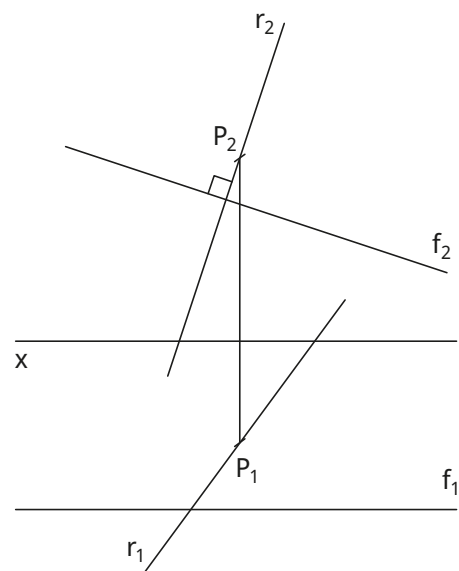
Por se tratar de uma reta frontal, a sua projeção frontal está em verdadeira grandeza, uma vez que a reta **f** é paralela ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a perpendicularidade ou ortogonalidade com qualquer outra reta será representada em projeção frontal.



Assim, determina-se a projeção frontal de uma reta **r**, ortogonal à reta **f**. Por **P₂** passará a projeção frontal da reta **r**, fazendo um ângulo reto com a projeção frontal da reta **f**.

No caso da projeção horizontal, esta pode assumir qualquer direção, desde que contenha o ponto **P**, uma vez que a ortogonalidade entre ambas as retas está assegurada em projeção frontal.

As retas **f** (reta frontal) e **r** (reta oblíqua) **são ortogonais**.

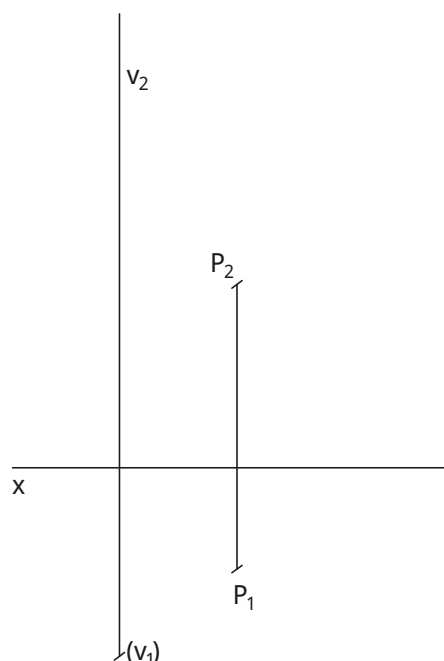


No caso de se tratar de uma reta vertical, sendo este um tipo de reta específico das retas frontais, uma vez que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção, o raciocínio é idêntico.

Sendo dada uma reta $\mathbf{v}$, vertical, e um ponto $\mathbf{P}$, exterior à reta, pretende-se determinar as projeções de uma qualquer reta, ortogonal à reta $\mathbf{v}$ e que passe pelo ponto $\mathbf{P}$.

Sendo a reta $\mathbf{v}$ uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção, a perpendicularidade das projeções será verificada em projeção frontal.

Assim, por $\mathbf{P}_2$ deverá traçar-se uma projeção que forme um ângulo reto (90°) com a projeção frontal da reta $\mathbf{v}$.

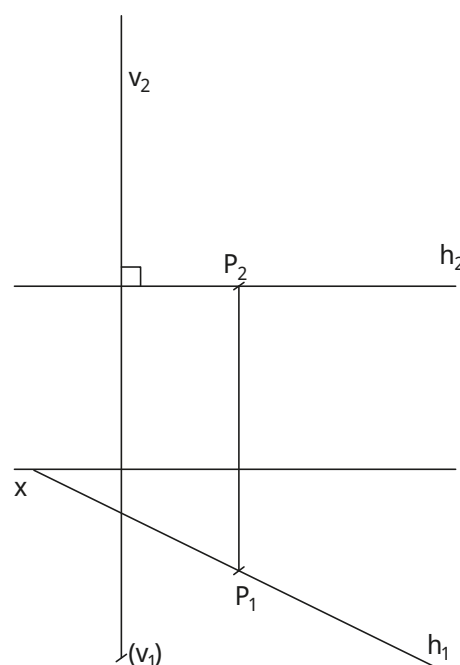


Deste modo, fica desde já assegurada a ortogonalidade, uma vez que as projeções frontais de ambas as retas são perpendiculares.

Determinando $\mathbf{h}_2$, fica apenas a faltar determinar a projeção horizontal da reta $\mathbf{h}$.

À semelhança dos exemplos anteriores, a determinação desta projeção poderá ser arbitrária, desde que contenha a projeção horizontal do ponto $\mathbf{P}$, sendo que a ortogonalidade está assegurada em projeção frontal.

As retas $\mathbf{v}$ (reta vertical) e $\mathbf{h}$ (reta horizontal) **são ortogonais**.



Reta perpendicular ou ortogonal a uma reta fronto-horizontal

Até agora foram abordados exemplos de retas perpendiculares ou ortogonais a retas paralelas a um dos planos de projeção.

No caso das retas fronto-horizontais, estas são paralelas a ambos os planos de projeção.

Observa o exemplo ao lado:

Sendo dada uma reta **g**, fronto-horizontal, pretende-se determinar as projeções de uma reta ortogonal à reta dada que contenha o ponto **P**.

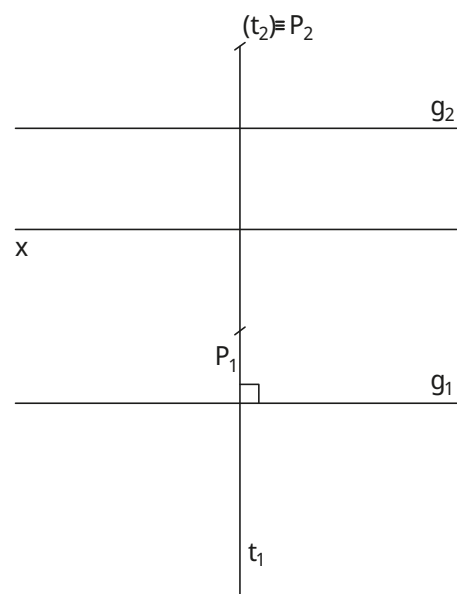
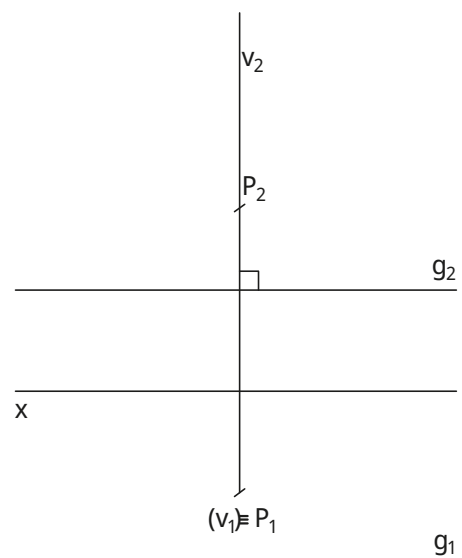
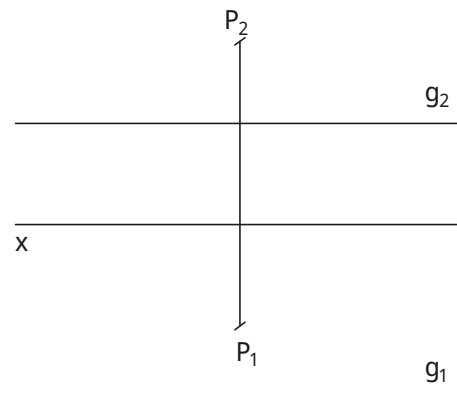
Uma vez que a reta **g** é paralela a ambos os planos de projeção, conclui-se que qualquer reta que seja ortogonal a um dos planos de projeção será, forçosamente, ortogonal à reta **g**.

Deste modo, considerou-se uma reta **v**, vertical.

Uma vez que retas verticais são retas projetantes horizontais, a sua projeção horizontal estará coincidente com a projeção horizontal do ponto **P**. A sua projeção frontal, passando por **P₂**, estará em verdadeira grandeza e será perpendicular a **g₂**, atestando a ortogonalidade entre ambas as retas.

O mesmo seria possível optando por uma reta de topo (reta **t**).

Neste caso, a ortogonalidade entre ambas seria verificada em projeção horizontal, como se pode verificar no exemplo.



Resumindo

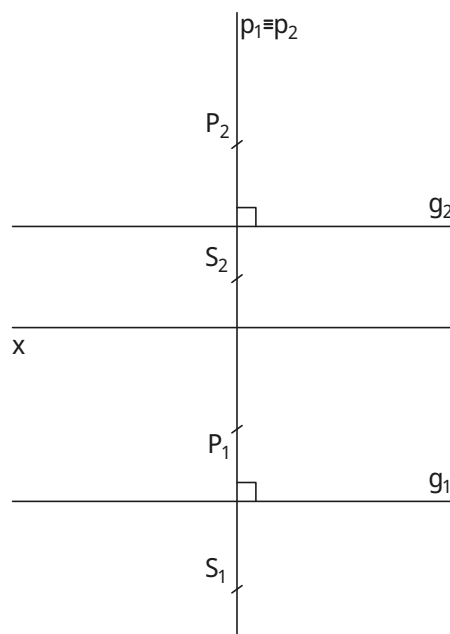
- Retas fronto-horizontais serão sempre ortogonais ou perpendiculares a retas verticais e de topo.

Outro tipo de retas que será sempre perpendicular ou ortogonal a uma reta fronto-horizontal são as retas de perfil.

Uma vez que uma reta fronto-horizontal é sempre ortogonal a qualquer plano de perfil, será sempre ortogonal ou perpendicular a uma reta que pertença a um plano dessa natureza.

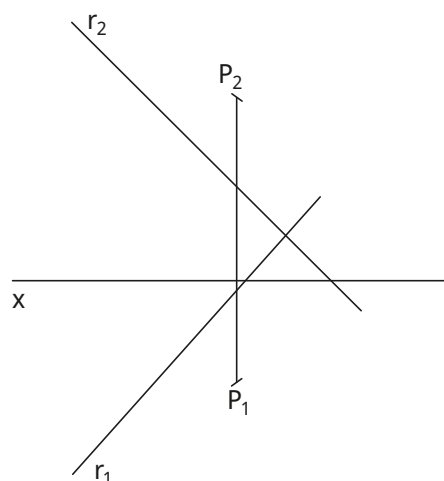
Deste modo, qualquer projeção de reta de perfil que passe pelo ponto **P** é ortogonal à reta **g**.

A definição da reta **p** só estará completa com dois pontos. A determinação do ponto **S** poderá ser arbitrária, sendo que a reta **p** será sempre ortogonal à reta **g**, qualquer que seja a sua relação com os planos de projeção.



Reta perpendicular ou ortogonal a uma reta oblíqua

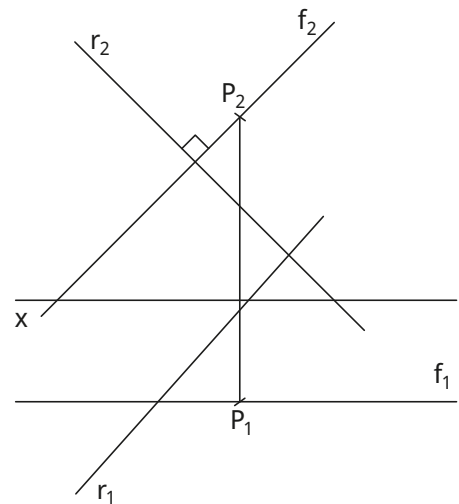
Como já foi estudado anteriormente, uma reta oblíqua é, tal como o nome indica, uma reta oblíqua a ambos os planos de projeção. Nesse sentido, conclui-se que nenhuma das suas projeções estará em verdadeira grandeza. Assim, sendo dada uma reta oblíqua e um ponto exterior à reta, pelo qual se pretende passar uma reta ortogonal à reta dada, é importante recorrer a retas que sejam paralelas a algum dos planos de projeção. Só assim, em dupla projeção ortogonal, sem recorrer a métodos geométricos auxiliares, é possível verificar a ortogonalidade, estando uma das retas projetada em verdadeira grandeza num dos planos de projeção.



Deste modo, tendo uma reta r , oblíqua, e um ponto P , exterior a essa reta, pretende-se determinar, pelas suas projeções, uma reta que contenha o ponto P e que seja ortogonal à reta r .

Uma vez que essa reta deverá ser paralela a um dos planos de projeção, e que a sua projeção em verdadeira grandeza deverá formar um ângulo reto com a projeção homónima da reta dada, optou-se, neste caso, por uma reta frontal. Assim, a projeção horizontal é imediata, pois deve ser paralela ao eixo x e conter a projeção horizontal do ponto P . Já f_2 deverá ser perpendicular a r_2 e conter P_2 .

As retas r (reta oblíqua) e f (reta frontal) são ortogonais.

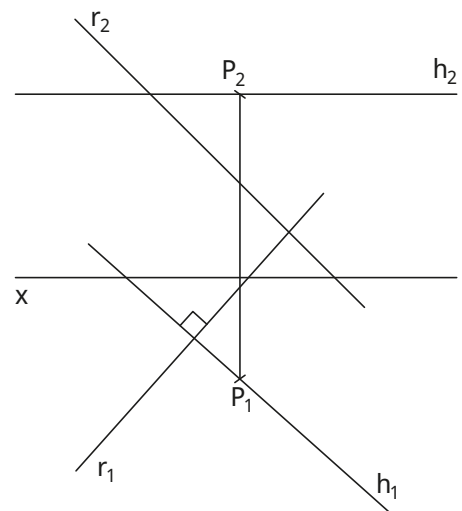


No entanto, também seria possível recorrer a uma reta horizontal.

Neste caso, a ortogonalidade é assegurada em projeção horizontal, pois uma reta horizontal projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Deste modo, a projeção frontal da reta h será imediata, passando por P_2 e sendo paralela ao eixo x . A projeção horizontal da reta h deverá passar por P_1 e formar um ângulo de 90° com r_1 .

As retas r (reta oblíqua) e h (reta horizontal) são ortogonais.



Ortogonalidade entre retas e planos

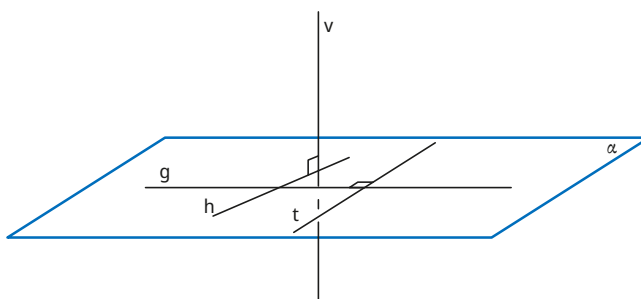
Relembrando os conteúdos abordados no 10.º ano, sabe-se que uma reta é ortogonal a um plano se, e apenas se, for ortogonal a duas retas concorrentes desse plano.

Em síntese, **uma reta é ortogonal a um plano se a sua direção for ortogonal à orientação desse plano.**

Observando a ilustração ao lado, verificamos que o plano α contém as retas **g**, **h** e **t**.

As retas **g** e **t** são perpendiculares entre si e concorrentes com a reta **h**.

A reta **v**, exterior ao plano, é perpendicular à reta **h**, pois é concorrente com esta e ortogonal face às retas **g** e **t**.



Em suma, conclui-se que a reta **v** é ortogonal ao plano α e, por conseguinte, ortogonal a qualquer reta pertencente ao plano α .

Critério de ortogonalidade entre retas e planos

- uma reta é ortogonal a um plano se for ortogonal a duas retas concorrentes desse plano;
- um plano é ortogonal a uma reta se contiver duas retas concorrentes ortogonais à reta dada.

Retas ortogonais a planos – caso geral

O estudo que se segue irá incidir sobre retas ortogonais a planos definidos pelos seus traços, sendo estes concorrentes num qualquer ponto do eixo x , excetuando, assim, o caso particular dos planos de rampa, cujos traços não se interseitam, e que será abordado mais à frente.

Deste modo, serão elencados exemplos de determinação de uma reta ortogonal a um dado plano.

Considera o plano oblíquo α e o ponto P , exterior ao plano.

Pretende-se determinar as projeções de uma reta que contenha o ponto P e que seja ortogonal ao plano dado.

Uma vez que os traços do plano são sempre retas do plano que pertencem, simultaneamente, aos planos de projeção, considera-se que estas são retas que se encontram projetadas em verdadeira grandeza (neste caso, coincidentes com a sua projeção).

Relembrando

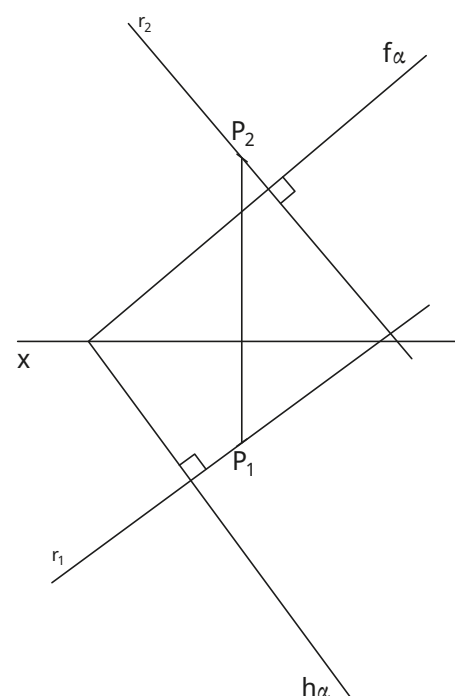
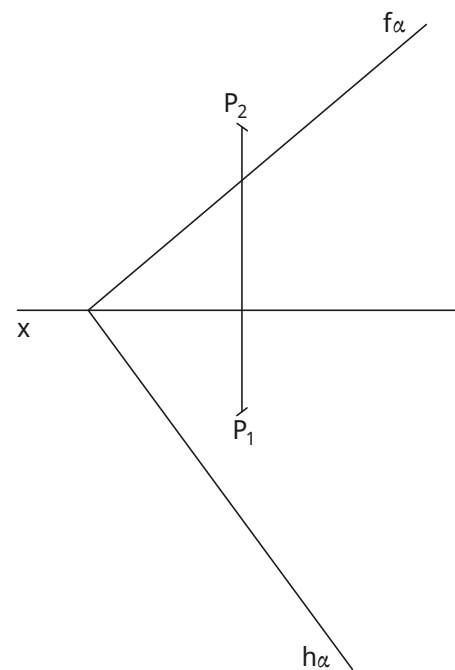
- O traço frontal de um plano é uma **reta frontal** do plano de afastamento nulo;
- O traço horizontal de um plano é uma **reta horizontal** do plano de cota nula.

Deste modo, a ortogonalidade é verificada em ambas as projeções.

Ou seja, a determinação de uma reta ortogonal ao plano deve ser feita através de projeções perpendiculares aos traços homónimos do plano contendo o ponto P .

Assim, por P_2 traça-se uma perpendicular a f_α , e por P_1 uma perpendicular a h_α .

Assim, é determinada uma reta ortogonal a um dado plano oblíquo, definido pelos seus traços.



Retas ortogonais a planos projetantes

No caso dos planos projetantes, o processo é, em tudo, semelhante ao dos planos oblíquos.

Na verdade, **uma reta ortogonal a um plano terá sempre as suas projeções perpendiculares aos traços do plano dado.**

Observa o exemplo:

Sendo dado um plano de topo, e um ponto exterior ao plano que se quer pertencente à reta pretendida, deverão traçar-se ambas as projeções perpendiculares aos traços do plano dado.

Deste modo, considera-se uma reta **f**, frontal, que contém o ponto **P**:

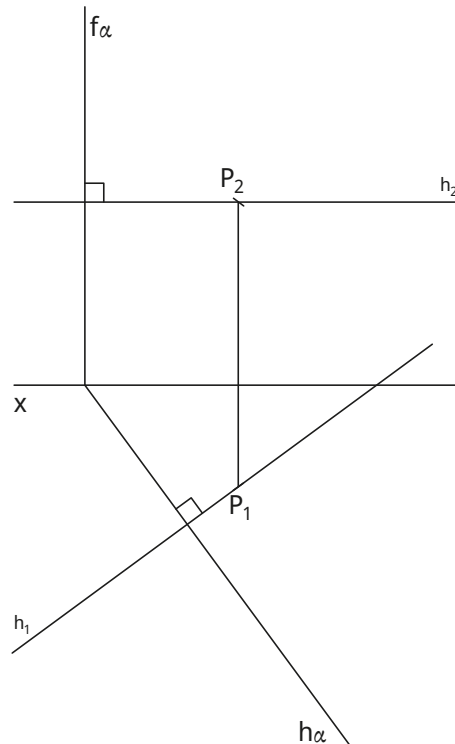
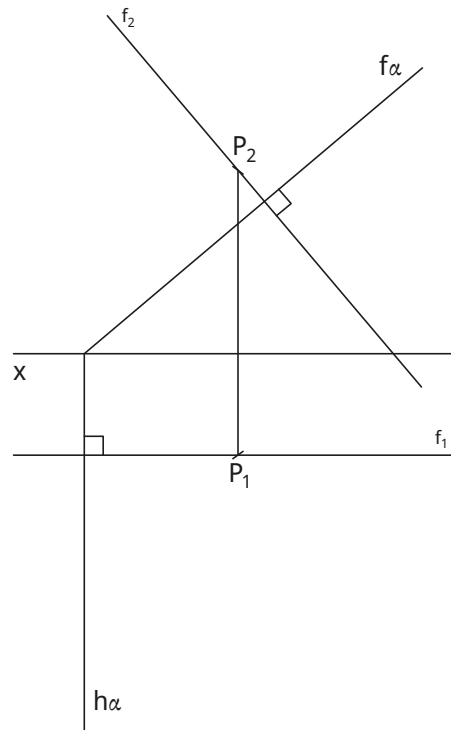
- **f₁** faz um ângulo de 90° com **h_α**;
- **f₂** faz um ângulo de 90° com **f_α**.

Atenta, agora, no exemplo de um plano vertical.

Pretende-se determinar uma reta que contenha o ponto **P** e seja ortogonal ao plano dado.

O procedimento é idêntico ao que foi descrito acima. Neste caso, por se tratar de um plano vertical, a reta em questão será uma reta horizontal cuja projeção horizontal seja perpendicular ao traço horizontal do plano.

Esse procedimento será válido para qualquer caso em que se pretenda a determinação de uma reta ortogonal a qualquer plano projetante.



Para praticar

- 1 Considera um plano oblíquo α , cujos traços concorrem no eixo x num ponto com 3 cm de abscissa. O traço frontal forma um ângulo de 45° (a.d.) com o eixo x e o traço horizontal um ângulo de 35° (a.d.). Determina as projeções de uma reta r , ortogonal ao plano dado, que contenha o ponto $P(-1; 2; 5)$.
- 2 Considera um plano de topo α , cujos traços concorrem no eixo x num ponto com 2 cm de abscissa. O traço frontal do plano forma um ângulo, com o eixo x , de 40° (a.d.). Determina as projeções de uma qualquer reta ortogonal ao plano.
- 3 Considera um plano horizontal, com 3 cm de cota. Determina as projeções de uma reta ortogonal ao plano que contenha o ponto $P(-1; 3; 5)$.

Retas ortogonais a planos de rampa

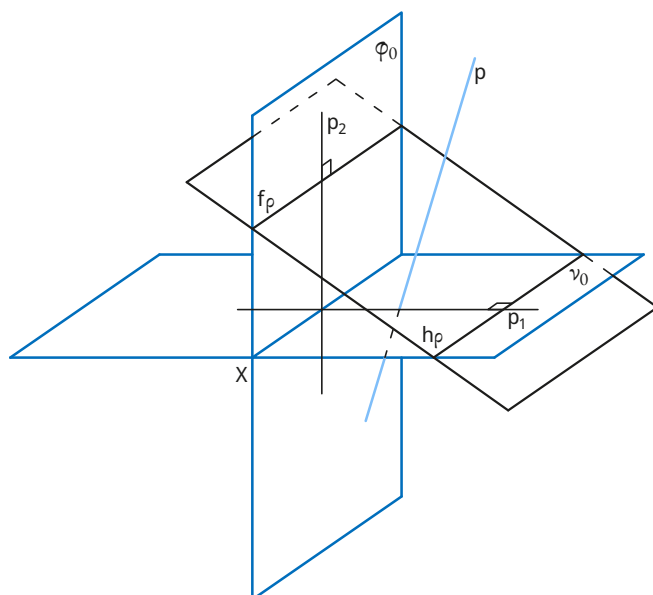
Como já foi referido anteriormente, o caso de retas ortogonais a planos de rampa constitui um caso particular no que respeita à ortogonalidade entre retas e planos. Isso deve-se ao facto de os traços de um plano de rampa serem paralelos entre si. Desse modo, uma reta que tenha a sua projeção frontal perpendicular ao traço frontal do plano terá, forçosamente, a sua projeção perpendicular ao traço horizontal do plano.

Assim, aplicando o caso geral, só é possível garantir que a reta determinada é ortogonal a uma família de retas do plano. Uma vez que o **critério de ortogonalidade entre retas e planos** dita que **para uma reta ser ortogonal a um plano terá de ser ortogonal a duas retas concorrentes desse plano**, conclui-se que o método de traçar projeções perpendiculares aos traços de um plano, no caso dos planos de rampa, é insuficiente para verificar a ortogonalidade.

Observando a representação tridimensional ao lado, tem-se um plano de rampa e uma reta de perfil cujas projeções são perpendiculares aos traços do plano.

No entanto, a reta p não é ortogonal ao plano, pois não forma um ângulo reto com este.

Nesse sentido, fica claro que, em dupla projeção ortogonal, não é suficiente determinar uma reta pelas suas projeções, sendo estas perpendiculares aos traços de um plano de rampa, para ser possível afirmar que a reta é ortogonal ao plano em questão.



Tomando, agora, em consideração a representação ao lado, verifica-se que a reta **p** já forma um ângulo de 90° com o plano de rampa dado. No entanto, as projeções dessa reta **p** são semelhantes às do exemplo anterior.

Relembrando o que já foi estudado anteriormente, sabe-se que uma reta de perfil nunca está suficientemente representada pelas suas projeções, mesmo conhecendo um ponto da reta, uma vez que, em dupla projeção ortogonal, não é possível conhecer a direção de uma reta de perfil, sendo necessário recorrer a métodos geométricos auxiliares.

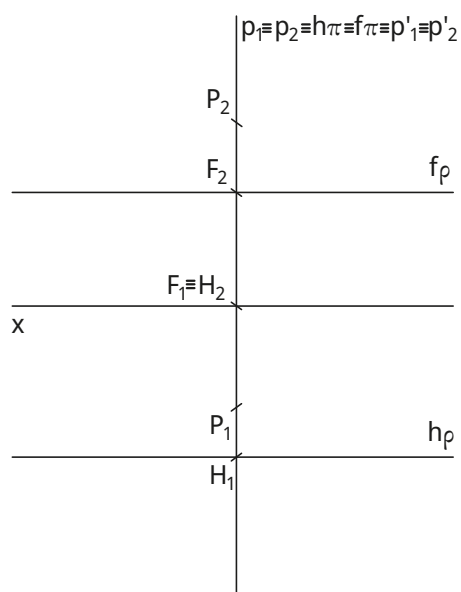
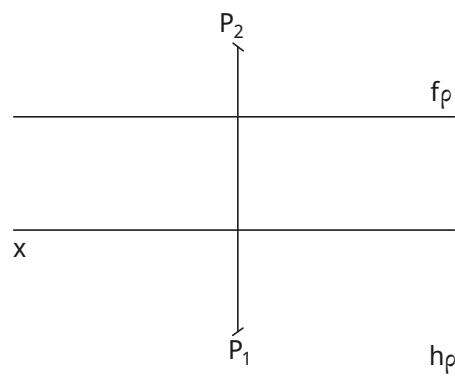
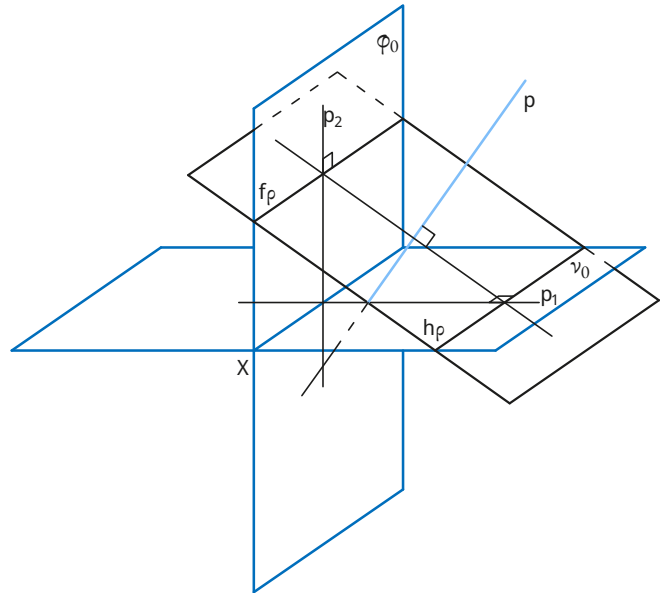
Nesse sentido, e analisando a situação acima descrita em dupla projeção ortogonal, tem-se:

- um plano de rampa definido pelos seus traços;
- um ponto exterior ao plano (ponto **P**).

Pretendendo-se determinar as projeções de uma reta ortogonal ao plano de rampa que contenha o ponto **P**, começa-se por traçar as suas projeções, através de uma perpendicular a ambos os traços do plano, que contenha **P**₁ e **P**₂.

Nesta etapa, não é possível atestar a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano **p**, uma vez que a reta **p** não está suficientemente representada, sendo necessário outro ponto da reta.

Para tal, deverá recorrer-se a um rebatimento do plano de perfil que contém a reta **p**, determinando, também, a reta de interseção entre o plano de rampa e esse plano de perfil (reta **p'**).



Determinando os traços da reta p' sobre os traços do plano de rampa e rebatendo-os, determina-se a reta p' rebatida (p'_r).

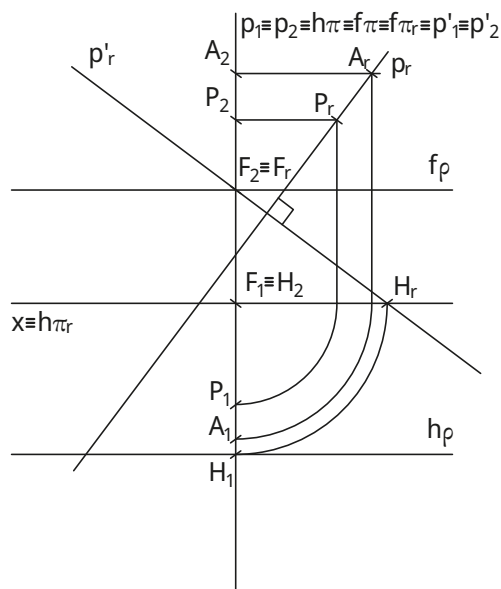
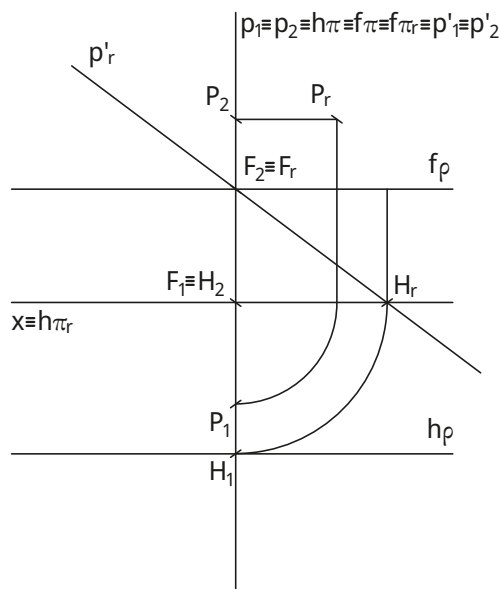
Deste modo, consegue-se o equivalente a uma vista de perfil do plano de rampa, sendo possível traçar, diretamente, uma reta ortogonal a este.

Rebatendo o ponto P , tem-se P_r , que pertencerá a p_r .

Posteriormente, por P_r deverá traçar-se uma perpendicular a p'_r . Uma vez determinada a reta p rebatida, é possível determinar qualquer ponto da reta, ficando esta definida por dois pontos.

Optou-se por um ponto A , determinado na reta p rebatida. Efetuando o seu contrarrebatimento, tem-se o ponto A em dupla projeção ortogonal.

Deste modo, a reta p é comprovadamente ortogonal ao plano ρ e está definida pelos pontos P e A .



Para praticar

- 1 Sendo dado um plano de rampa ρ , cujos traços horizontal e frontal têm, respectivamente, 3 cm de afastamento e 4 cm de cota, determina as projeções de uma reta p , ortogonal ao plano dado, que contém o ponto $P(0; 5; 2)$.
- 2 Sendo dado um plano de rampa ρ , cujos traços horizontal e frontal têm, respectivamente, 5 cm de afastamento e 2 cm de cota, determina as projeções de uma reta p , ortogonal ao plano dado, que contém um ponto P , do plano, com 3 cm de afastamento.
- 3 Sendo dado um plano de rampa ρ ortogonal ao plano bisetor dos diedros ímpares, cujo traço frontal tem 4 cm de cota, determina as projeções de uma reta p , ortogonal ao plano, de abscissa nula e que contém o ponto $P(3; 6)$.

Planos ortogonais a retas

Até agora foram abordados os casos em que é dado um plano e se pretende a determinação de uma reta ortogonal a este. No entanto, o contrário também pode suceder, ou seja: a partir de uma reta, determina-se um plano ortogonal a esta.

Observa o exemplo:

Sendo dada uma reta r , oblíqua, pretende-se determinar os traços de um plano ortogonal à reta dada e que contenha o ponto P .

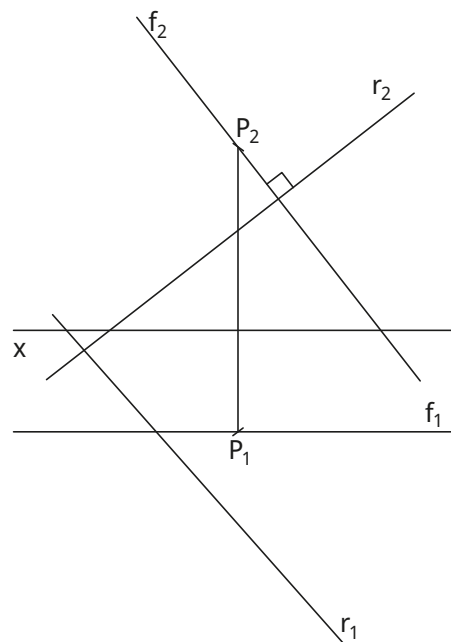
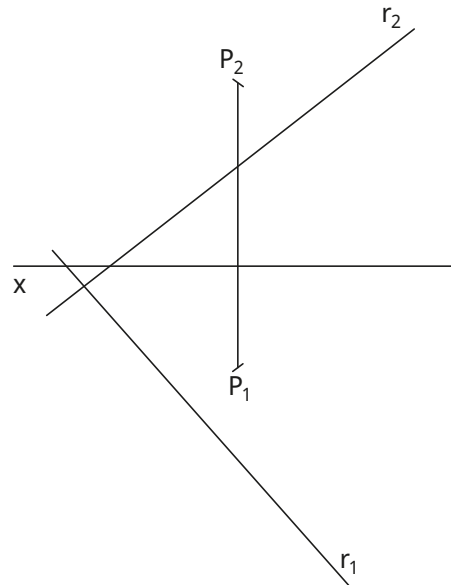
Nestes casos, o raciocínio é inverso ao praticado no caso de retas ortogonais a planos.

Os traços do plano devem ser perpendiculares às projeções homónimas da reta dada, pelo que o procedimento passará por traçar uma reta horizontal ou frontal, que contenha o ponto P , e cuja projeção frontal, no caso de se tratar de uma reta frontal, seja perpendicular à projeção frontal da reta dada (no caso de se optar por uma reta horizontal, deveriam considerar-se as projeções horizontais).

Neste caso, optou-se por uma reta frontal f , traçando a sua projeção horizontal por P_1 . Perpendicularmente a r_2 e também contendo P_2 , tem-se f_2 .

A reta f é uma reta ortogonal à reta r que contém o ponto P . Assim, procede-se à determinação dos traços de um plano que contenha a reta f e que contenha retas concorrentes com a reta f e igualmente ortogonais à reta r .

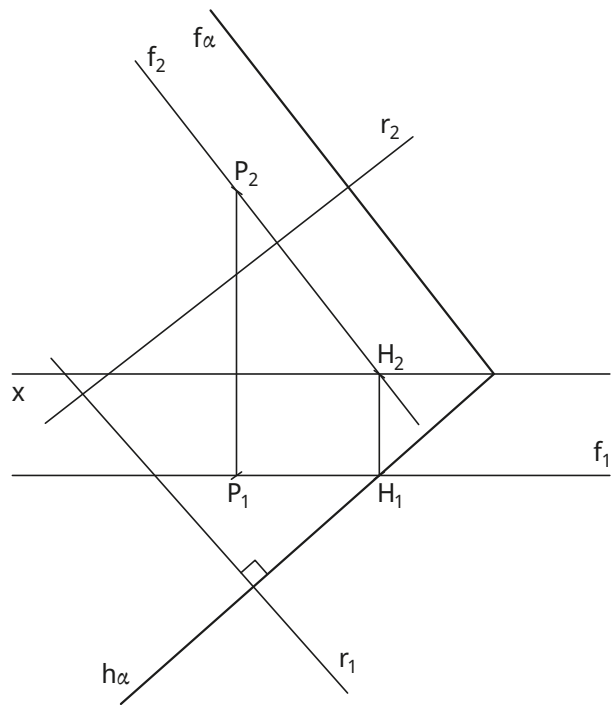
Determinando o traço horizontal da reta f , obtém-se um dos pontos dos traços do plano e conhece-se a direção do seu traço frontal (paralelo à projeção frontal da reta f).



O traço horizontal do plano deverá conter o traço horizontal da reta f e ser perpendicular à projeção horizontal da reta r .

Com esses elementos, é possível traçar o traço horizontal do plano e, assim, determinar o ponto de concorrência dos traços no eixo x . A partir daí, basta traçar uma paralela a f_2 para que o plano fique definido pelos seus traços.

O plano α é ortogonal à reta r .



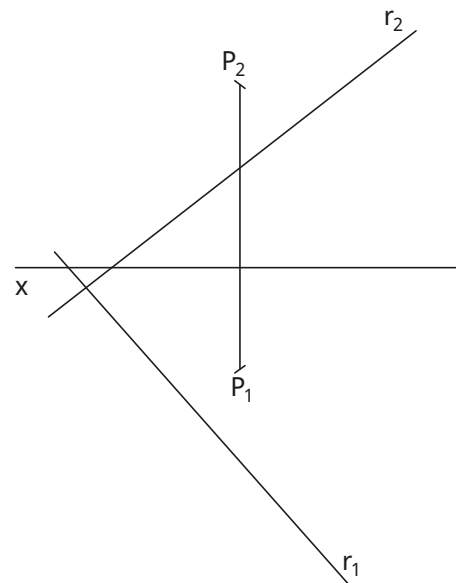
Para praticar

- 1 Determina os traços de um plano α ortogonal a uma reta r , definida pelos pontos $A(2; 4; 5)$ e $B(-2; 2; 3)$.
- 2 Determina os traços de um plano α ortogonal a uma reta r , definida pelo ponto $A(0; 3; 5)$ e cujas projeções horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de 35° (a.d.) e de 40° (a.e.).

Ortogonalidade entre retas não-paralelas aos planos de projeção

Uma reta ortogonal a um plano é ortogonal a todas as retas desse plano (ver página 35).

Quando se trata de retas não paralelas aos planos de projeção, a ortogonalidade com outras retas não pode ser verificada pelas suas projeções, uma vez que nenhuma destas estará em verdadeira grandeza. Deste modo, o procedimento passará por determinar um plano ortogonal à reta dada e, de seguida, determinar uma qualquer reta do plano. Essa reta será sempre ortogonal à reta dada.

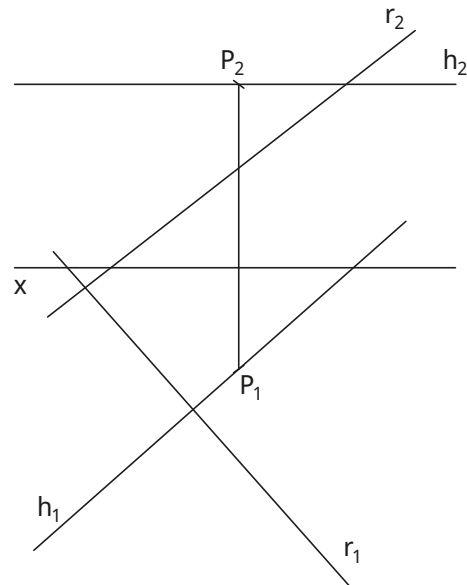


Deste modo, aplica-se o procedimento de determinação de um plano ortogonal a uma reta dada, tal como já foi abordado.

Sendo dado um ponto da reta pretendida, esse ponto pertencerá ao plano. Como tal, conduz-se, pelo ponto **P**, uma reta que seja ortogonal à reta dada. Essa reta deve ser paralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre ambas possa ser verificada.

Optando por uma reta **h**, horizontal, conduz-se a projeção frontal da reta **h** por **P₂** e a projeção horizontal da reta **h** perpendicularmente a **r₁** e passando por **P₁**.

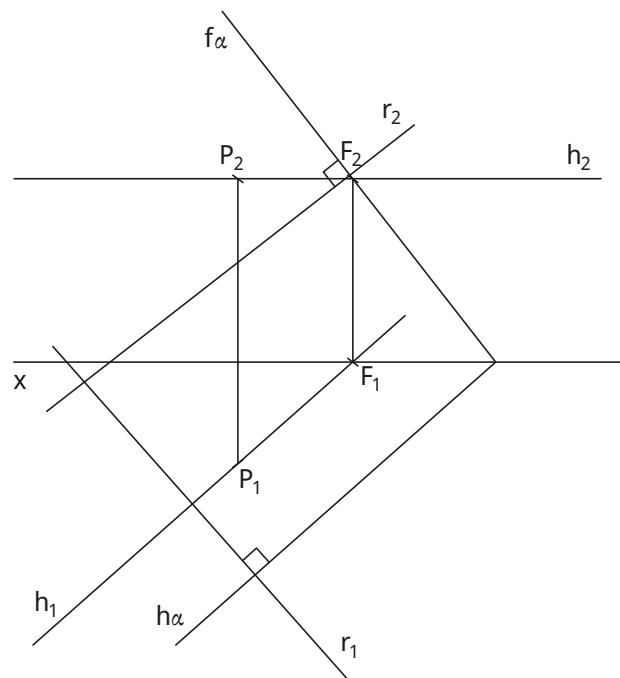
A reta **h** é ortogonal à reta **r**. Determinados os pontos notáveis da reta **h**, é possível traçar os traços de um plano que a contém e que é ortogonal à reta **r**.



Sabendo que os traços do plano deverão ser perpendiculares às projeções homónimas da reta **r**, conduz-se por **F₂** uma perpendicular a **r₂**, obtendo o traço frontal do plano. Pelo seu ponto de concorrência com o eixo **x**, traça-se, também, uma perpendicular a **r₁** e obtém-se o traço horizontal do plano.

O plano α é ortogonal à reta **r**. Ou seja, todas as retas pertencentes ao plano α serão ortogonais à reta **r**.

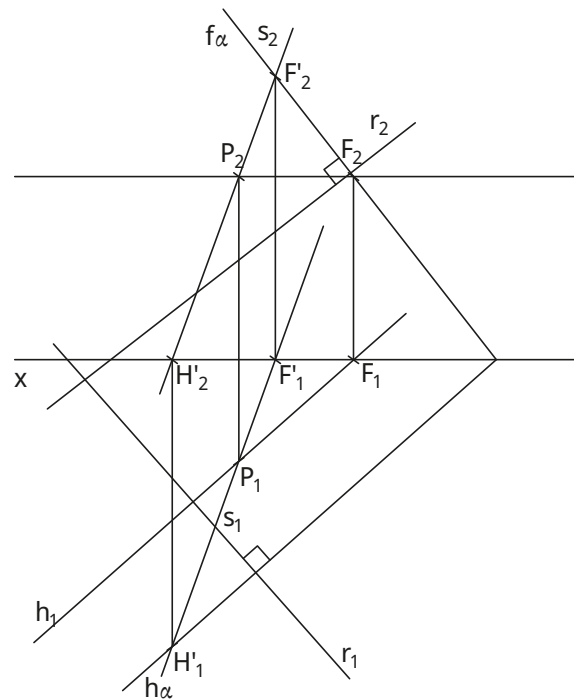
Como tal, a determinação de uma qualquer reta pertencente ao plano α garantirá a ortogonalidade entre essa mesma reta e a reta dada.



Assim, por P_2 conduz-se uma qualquer projeção, que corresponderá à projeção frontal da reta pretendida – reta s .

Determinando os traços da reta s sobre os traços homónimos do plano que a contém, é possível determinar ambas as projeções da reta s .

A reta s pertence a um plano ortogonal à reta r , logo, é ortogonal à reta r .



Resumindo

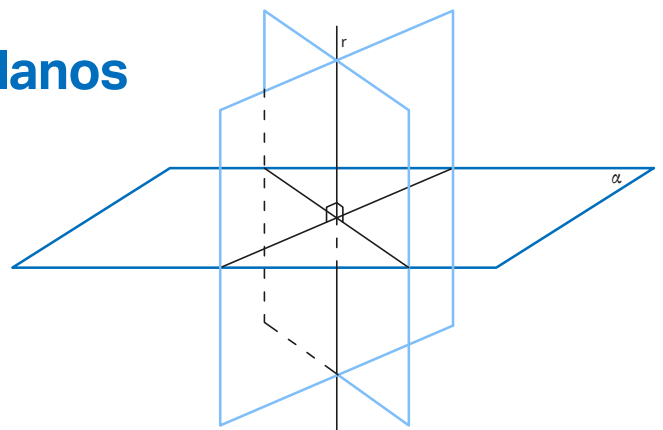
- Quando uma reta é ortogonal a um plano, é ortogonal a todas as retas desse plano.
- Quando um plano é ortogonal a uma reta, todas as retas contidas nesse plano são ortogonais a essa reta.

Para praticar

- 1 Sendo dada uma reta r , definida pelos pontos $A(2; 4; 5)$ e $B(-2; 2; 3)$, determina as projeções de uma reta s , ortogonal à reta r , cuja projeção frontal forme um ângulo de 35° (a.e.) e contenha o ponto $P(0; 2; 2)$.
- 2 Sendo dada uma reta r , definida pelos pontos $A(1; 3; 6)$ e $B(-2; 1; 2)$, determina as projeções de uma reta s , ortogonal à reta r , cujo traço frontal tem abcissa nula.

Ortogonalidade entre planos

Os planos ortogonais, ao contrário das retas ortogonais, que não possuem qualquer ponto de concorrência, têm sempre uma reta de interseção. São planos secantes que formam, entre si, diedros de 90° .



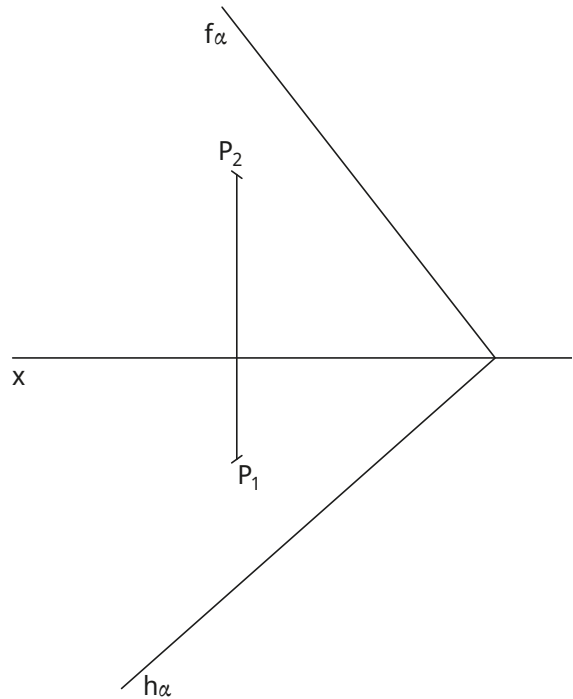
Deste modo, um plano é ortogonal a outro apenas se contiver uma reta ortogonal a esse plano.

Nota o exemplo ao lado.

A reta r é ortogonal ao plano α e qualquer plano que contenha a reta r é ortogonal ao plano α .

Em dupla projeção ortogonal, sendo dado um plano α , pretende-se determinar um outro plano que contenha o ponto P e seja ortogonal a α .

Aplicando o princípio de que, para um plano ser ortogonal a outro, terá de conter uma reta ortogonal ao outro plano, o procedimento começará por conduzir, pelo ponto P , uma reta ortogonal ao plano α .



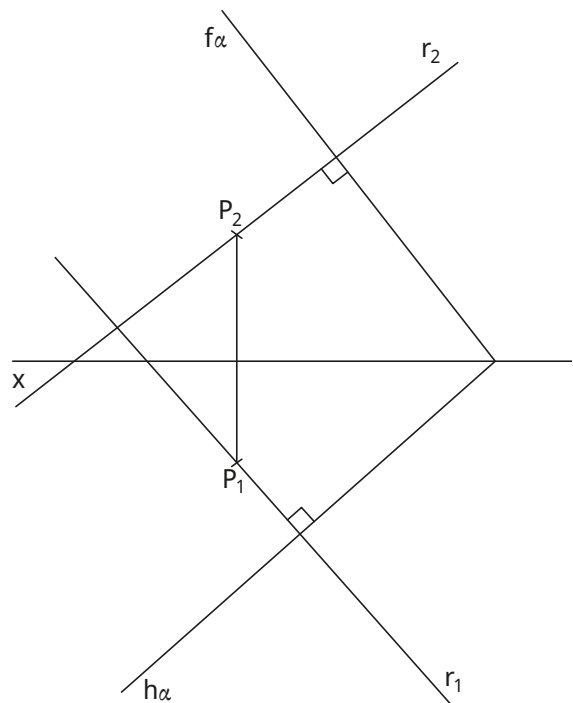
Assim, por P_2 conduz-se uma perpendicular ao traço frontal do plano α , obtendo r_2 , e por P_1 conduz-se, igualmente, uma perpendicular ao traço horizontal do plano α , obtendo r_1 .

A reta r é uma reta ortogonal ao plano α .

Qualquer plano que contenha a reta r será ortogonal ao plano α , pois contém uma reta ortogonal a este.

Finalmente, resta determinar os traços de um qualquer plano.

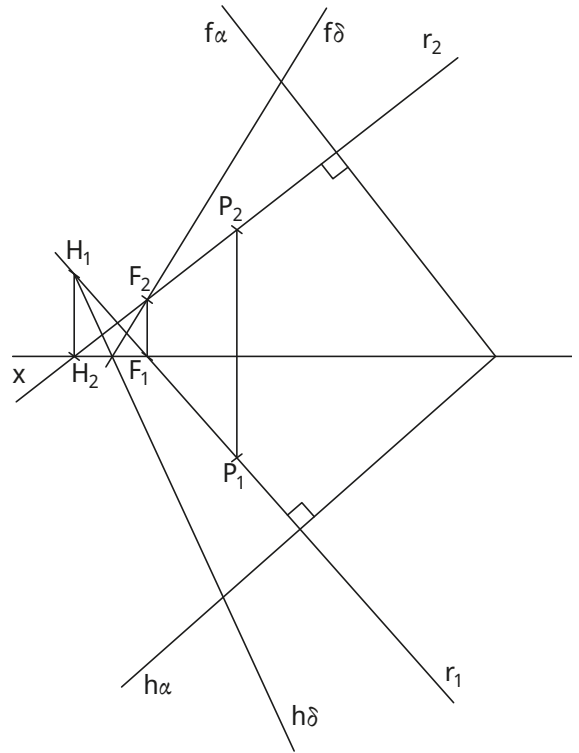
Esse plano será sempre ortogonal ao plano α .



Nota que, por vezes, poderão ser fornecidos dados adicionais acerca do plano pretendido, nomeadamente, ângulos dos seus traços. Nesse caso, o traçado dos mesmos não será arbitrário.

Irá conter, naturalmente, os traços da reta que se traçou, ortogonal à reta dada, e respeitará, simultaneamente, as condições elencadas nessa situação concreta.

Os planos α e δ são ortogonais entre si.



Planos ortogonais aos planos bissetores

No caso de planos ortogonais aos planos bissetores, aplica-se o **caso geral de ortogonalidade entre planos**.

Sabe-se que os planos bissetores são planos de rampa passantes. Desse modo, sabe-se que qualquer plano de perfil será sempre ortogonal a um plano bissetor, tornando o seu estudo irrelevante, pois é uma situação que se verifica sempre.

Assim, será dada especial ênfase aos casos em que um outro plano será ortogonal a um plano bissetor.

Planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$

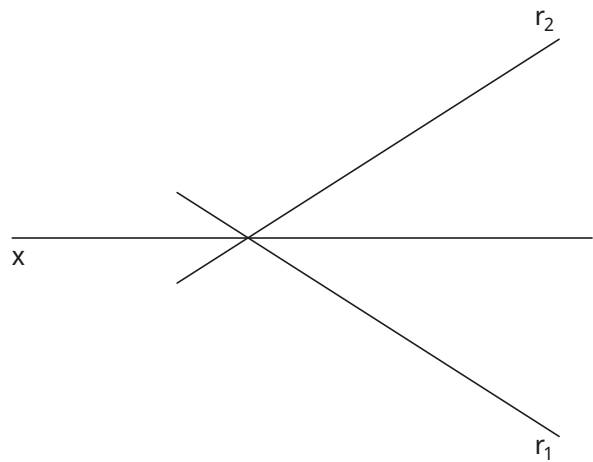
Para que um plano seja ortogonal a um outro plano, deverá ser ortogonal a uma reta desse plano.

Desse modo, sendo dada uma reta pertencente ao $\beta_{1/3}$, pretende-se determinar os traços de um plano ortogonal a este plano bissetor.

Observa a reta r .

Sabe-se que a reta r pertence ao plano $\beta_{1/3}$, porque:

- é uma reta oblíqua passante (as suas projeções concorrem sobre o eixo x);
- as suas projeções são simétricas relativamente ao eixo x .

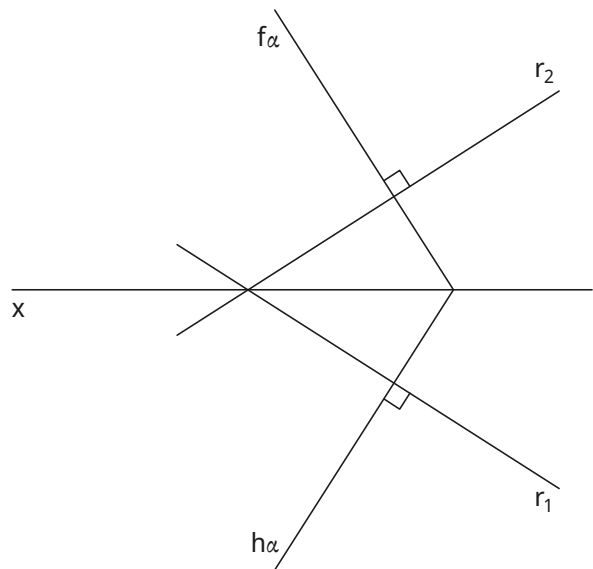


Pretende-se definir, pelos seus traços, um plano ortogonal ao plano $\beta_{1/3}$.

Sendo a reta r uma reta do plano bisetor $\beta_{1/3}$, esta deverá ser ortogonal a qualquer plano que seja ortogonal ao plano $\beta_{1/3}$.

Aplicando o método geral de ortogonalidade entre retas e planos, conduz-se perpendicularmente a r_2 o traço frontal do plano α . Onde o traço cruza o eixo x , conduz-se o traço horizontal do plano α , perpendicularmente a r_1 .

O plano α é ortogonal à reta r , logo, é ortogonal ao plano $\beta_{1/3}$.



Resumindo

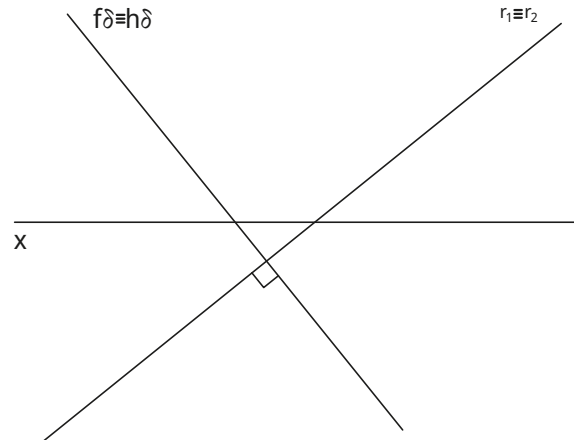
- Planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos entre si.

Planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$

O mesmo princípio deverá ser aplicado no caso de planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$.

Neste caso, sabe-se que a reta r é uma reta pertencente ao plano bissetor $\beta_{2/4}$, pois:

- é uma reta oblíqua passante;
- as suas projeções são coincidentes.



Aplicando o método geral, deverá traçar-se os traços de um plano ortogonal à reta r . Os seus traços deverão ser perpendiculares às projeções homónimas da reta. Neste caso, os traços do plano serão, também, coincidentes.

O plano δ é ortogonal à reta r , logo é ortogonal ao plano $\beta_{2/4}$.

Resumindo

- Planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes entre si.

Para praticar

- 1 Sendo dado um plano δ , cujos traços horizontal e frontal fazem, respetivamente, ângulos de 45° (a.d.) e 35° (a.d.) com o eixo x , determina os traços de um plano ortogonal a este, cujo traço frontal forme um ângulo de 50° (a.e.) com o eixo x .
- 2 Considerando o plano δ do enunciado anterior, determina os traços de um plano de topo, ortogonal a este.
- 3 Considerando uma reta r , cuja projeção frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.d.), e sabendo que se trata de uma reta pertencente ao plano $\beta_{1/3}$, determina os traços de um plano ortogonal a este plano bissetor.
- 4 Considerando uma reta r , cuja projeção frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.e.), e sabendo que se trata de uma reta pertencente ao plano $\beta_{2/4}$, determina os traços de um plano ortogonal a este plano bissetor.

9

Figuras planas I

Projeção de figuras planas
em planos horizontais ou frontais

Figuras planas II

Projeção de figuras planas em planos
não-paralelos aos planos de projeção

Figuras planas I

Projeção de figuras planas em planos horizontais ou frontais

Relembrando os conceitos já estudados, os planos horizontais e frontais são planos projetantes e, portanto, ortogonais a um dos planos de projeção. O que os distingue dos demais planos projetantes é o facto de estes serem, simultaneamente, paralelos ao outro plano de projeção.

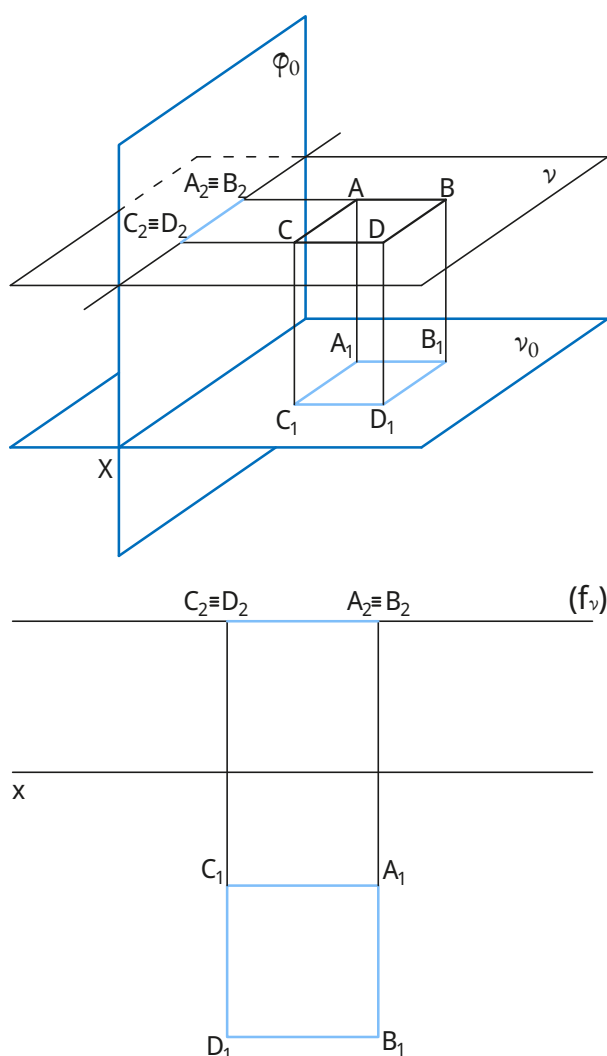
Deste modo, qualquer elemento constante num plano horizontal ou frontal terá uma das suas projeções em **deformação máxima** e a outra em **verdadeira grandeza**.

Observando a representação ao lado, verifica-se que o quadrado **[ABCD]**, contido no plano horizontal ν , se projeta, em projeção frontal, através de uma linha – está em **deformação máxima**.

Já em projeção horizontal, a sua projeção é geometricamente igual ao quadrado **[ABCD]** – está em **verdadeira grandeza**.

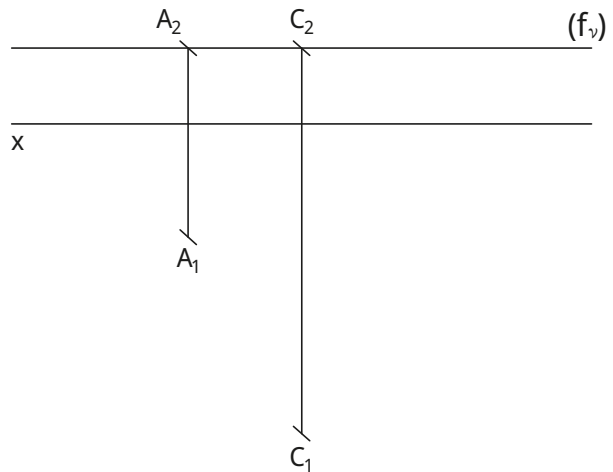
Em dupla projeção ortogonal, os vértices **C** e **D** estão coincidentes na projeção frontal, bem como os vértices **A** e **B**. Conclui-se que os lados **[CD]** e **[AB]** são segmentos contidos em **retas de topo**. Já os lados **[CA]** e **[DB]** são segmentos contidos em **retas fronto-horizontais**, uma vez que ambas as suas projeções são paralelas ao eixo **x**.

A projeção horizontal do quadrado **[ABCD]** está em **verdadeira grandeza**.



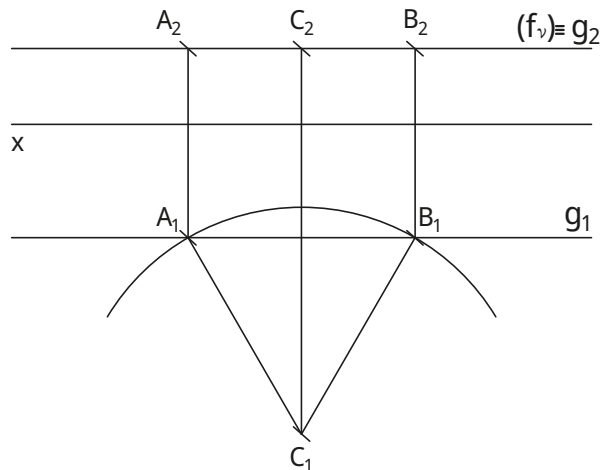
Analisando, agora, em dupla projeção ortogonal um caso em que são dados dois pontos de uma figura geométrica contida num plano horizontal ν , da qual se pretende determinar as suas projeções, considera:

- os pontos **A** e **C** correspondem a dois vértices de um triângulo equilátero **[ABC]**;
- o lado **[AB]** está contido numa reta fronto-horizontal.



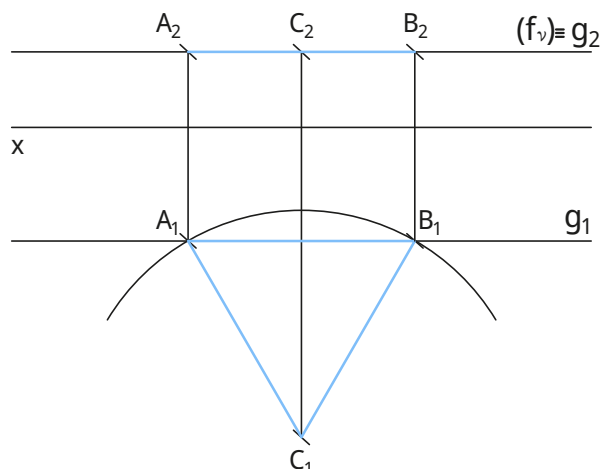
Deste modo, unindo as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, tem-se um dos lados do triângulo.

Sabendo que o lado **[AB]** é fronto-horizontal, traçou-se uma reta paralela ao eixo **x**, passando por **A1**. Com o auxílio de um compasso, coloca-se a ponta seca sobre a projeção horizontal do ponto **C**, abrindo até à projeção horizontal do ponto **A**. Traçando um arco, este interseeta a linha paralela ao eixo **x**, que contém **A1** em dois pontos: **A1** e **B1**, uma vez que se trata de um triângulo equilátero.



A projeção frontal do ponto **B** está sobre o traço frontal do plano ν .

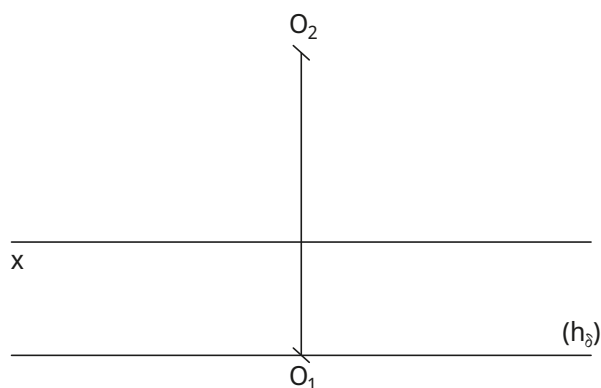
Assim, são determinadas as projeções de um triângulo equilátero contido num plano horizontal, sendo dados dois dos seus pontos.



Considerando, agora, um outro exemplo:

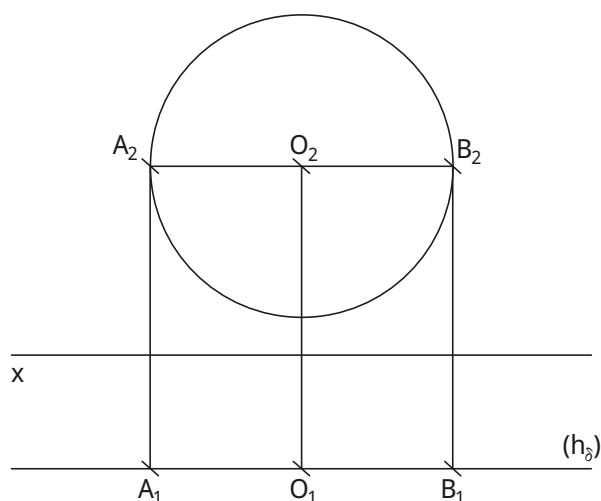
Sabe-se que o ponto **O** corresponde ao centro de uma circunferência de 2 cm de raio, contida num plano frontal.

Tratando-se de um plano frontal, antevê-se que a sua projeção frontal estará em verdadeira grandeza, visto este ser paralelo ao Plano Frontal de Projeção.



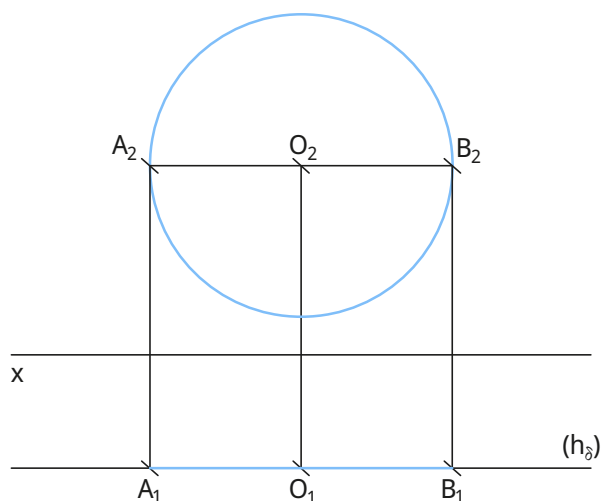
Assim, com o auxílio de um compasso, coloca-se a ponta seca sobre a projeção frontal do ponto **O**, abrindo o mesmo em 2 cm.

Traçando uma circunferência de 2 cm de raio com centro em **O₂**, tem-se a projeção frontal da circunferência.



Para definir a circunferência em projeção horizontal, traçou-se um diâmetro, paralelo ao eixo **x**, determinando, assim, os pontos extremos da circunferência **A** e **B**.

Deste modo, são determinadas as projeções de uma circunferência contida num plano frontal, sendo dado o seu centro e a medida do seu raio.



Para praticar

- 1 Determina as projeções de um quadrado **[ABCD]**, sabendo que o quadrado está contido num plano horizontal ν . Os pontos **A** e **C** definem a diagonal do quadrado e têm as seguintes coordenadas: **A** (-2; 2; 3) e **C** (0; 6; 3).
- 2 Determina as projeções de um triângulo equilátero **[ABC]** contido num plano frontal, sabendo que o triângulo está inscrito numa circunferência de 3 cm de raio, cujo centro é o ponto **O** (0; 3; 4). O vértice **C** é o vértice de maior cota do triângulo e o lado **[AB]** está contido numa reta fronto-horizontal pertencente ao plano.
- 3 Determina as projeções de um quadrado **[ABCD]**, sabendo que o quadrado está contido num plano horizontal ν . O quadrado está inscrito numa circunferência com 3 cm de raio, cujo centro é o ponto **O** (0; 6; 3) e uma das suas diagonais pertence a uma reta horizontal que forma um ângulo de 35° (a.d.) com o Plano Frontal de Projeção.

Figuras planas II

Projeção de figuras planas em planos não-paralelos aos planos de projeção

Projeção de figuras planas em planos verticais ou de topo

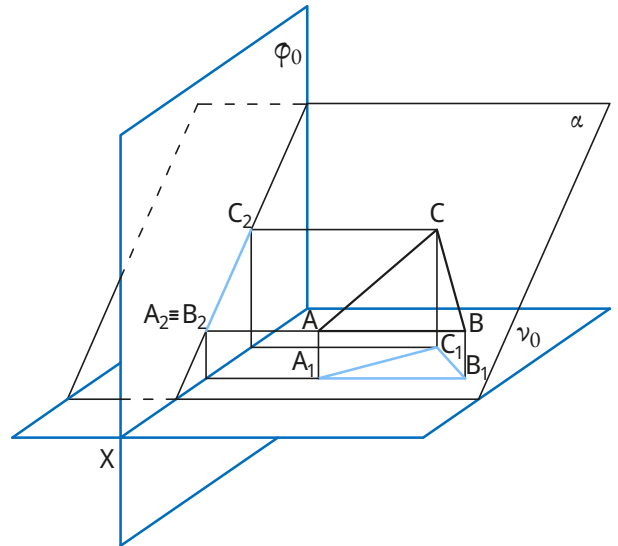
Os planos verticais e de topo são planos projetantes, tal como os planos horizontais e frontais. Contudo, ao contrário dos dois últimos, que são paralelos a planos de projeção, os planos verticais e de topo não estabelecem esse paralelismo com nenhum dos planos de projeção. Assim, nenhuma das projeções de figuras contidas neste tipo de planos estará em verdadeira grandeza. Deste modo, poderá ser necessário recorrer a métodos geométricos auxiliares para a resolução de alguns enunciados.

O exemplo da página seguinte ilustra o que foi referido acima.

Considerando um triângulo **[ABC]**, contido num plano α , de topo, verifica-se que a projeção frontal do triângulo estará em **deformação máxima**, uma vez que um plano de topo é um plano projetante frontal. Já a projeção horizontal não está nem em deformação máxima, nem em verdadeira grandeza, encontrando-se, apenas, **deformada**.

Nota que o lado **[AB]** corresponde a um segmento de topo. Por isso, apesar de a projeção horizontal do triângulo não estar em verdadeira grandeza, é possível medir o segmento em questão diretamente em projeção horizontal, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

Já os lados **[AC]** e **[BC]** estão contidos em retas oblíquas, pelo que nenhuma das medidas das suas projeções corresponde à realidade.

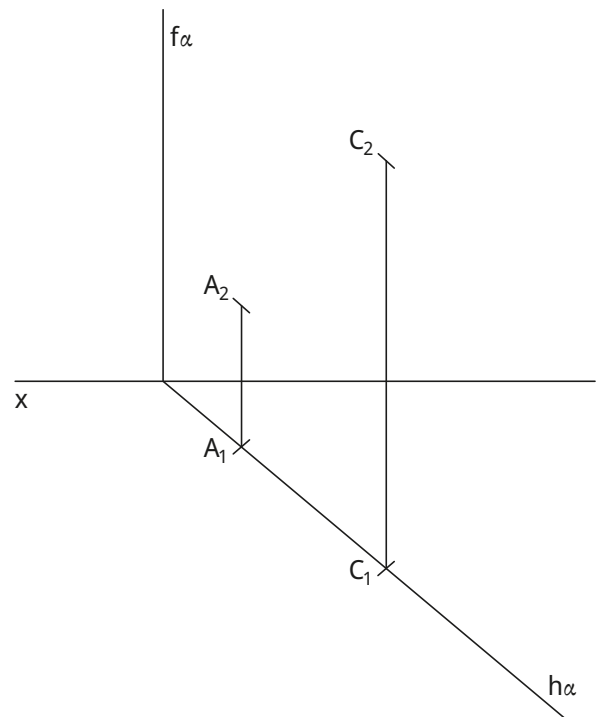


Analisa o seguinte exemplo:

Considerando um plano vertical α , sabe-se que este contém um quadrado **[ABCD]**. A sua diagonal **[AC]** pertence a uma reta oblíqua do plano e a sua projeção frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 45° (a.d.).

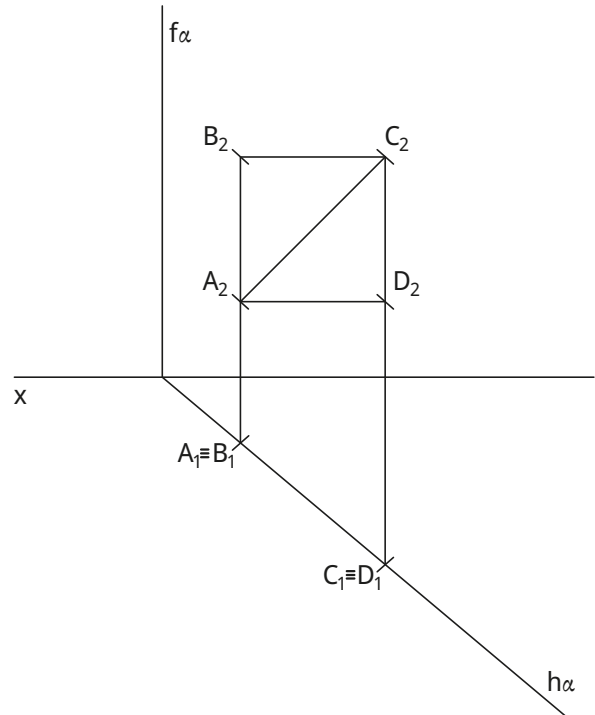
Pretende-se determinar os vértices **B** e **D** do quadrado, ficando este representado pelas suas projeções.

Uma vez que se sabe que a diagonal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 45° , isso permite antever que os lados do quadrado estarão contidos em retas horizontais e verticais.



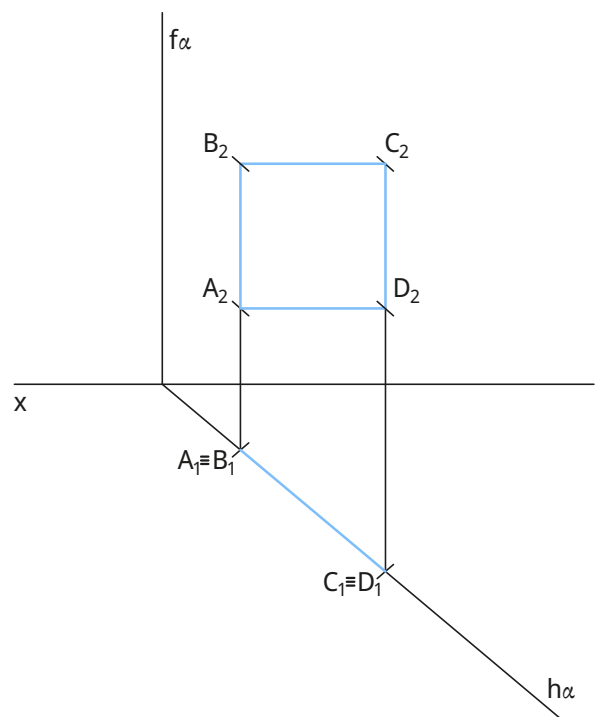
Deste modo, são determinadas as projeções dos pontos **B** e **D**.

Nota que, se a direção da diagonal fosse diferente, a solução seria determinar, a partir do seu ponto médio, uma perpendicular, e inscrever o quadrado numa circunferência, de modo a determinar os pontos em falta.



Assim, os lados **[BC]** e **[AD]** são segmentos horizontais, e os lados **[AB]** e **[CD]** são segmentos verticais.

Neste caso, embora o quadrado não tenha nenhuma das suas projeções em verdadeira grandeza, os seus lados estão contidos em retas paralelas aos planos de projeção. Deste modo, é possível medir os seus lados **[AB]** e **[CD]** em projeção frontal e os seus lados **[BC]** e **[AD]** em projeção horizontal.



Considera, agora, o exemplo de um plano de topo que contém os pontos **A** e **O**.

Relativamente a **O**, sabe-se que corresponde ao centro de uma circunferência na qual se inscreve um triângulo equilátero **[ABC]**.

Pretende-se determinar as projeções do triângulo.

Uma vez que se trata de uma figura contida num plano de topo, e não especificando a direção de nenhum dos seus lados, torna-se essencial recorrer a um método geométrico auxiliar, de forma a poder desenhar o triângulo em verdadeira grandeza.

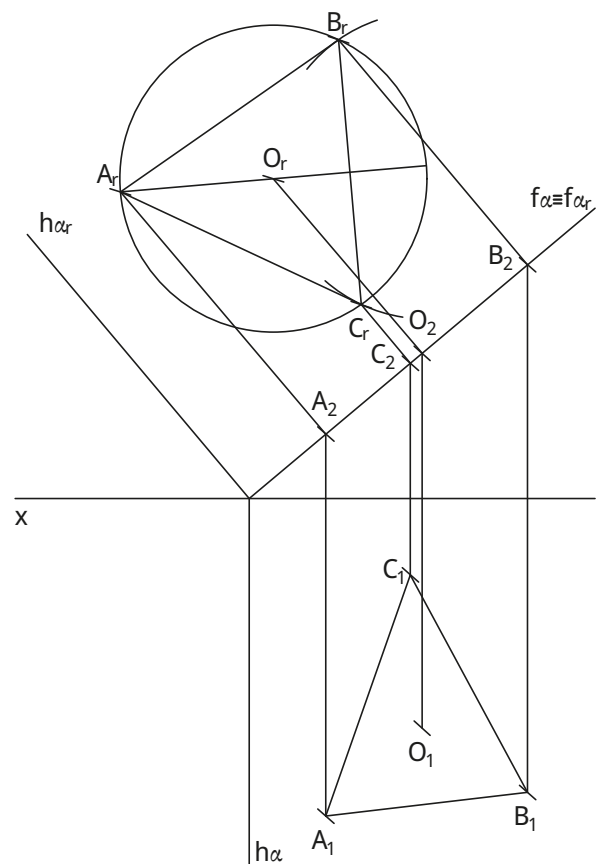
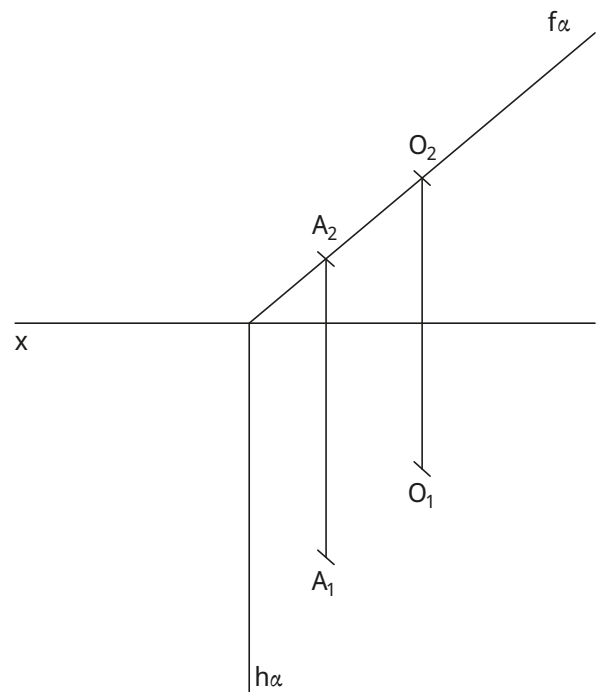
Neste caso, optou-se por rebater o plano de topo α sobre o Plano Frontal de Projeção.

Rebatidos os pontos **O** e **A**, com centro em **O**, até ao ponto **A**, traça-se a circunferência na qual o triângulo estará inscrito. Unindo **A_r** a **O_r**, prolonga-se a linha até à outra extremidade da circunferência, achando o diâmetro desta.

Tratando-se de um triângulo equilátero, com o auxílio de um compasso, coloca-se a sua ponta seca sobre o ponto oposto a **A_r** nesse diâmetro, e marca-se uma semicircunferência. Nos dois pontos de interseção desta com a circunferência com centro em **O**, estão os dois vértices do triângulo rebatidos – **B_r** e **C_r**.

Estando o triângulo **[ABC]** representado em verdadeira grandeza, no rebatimento, segue-se o contrarrebato dos pontos **B** e **C**.

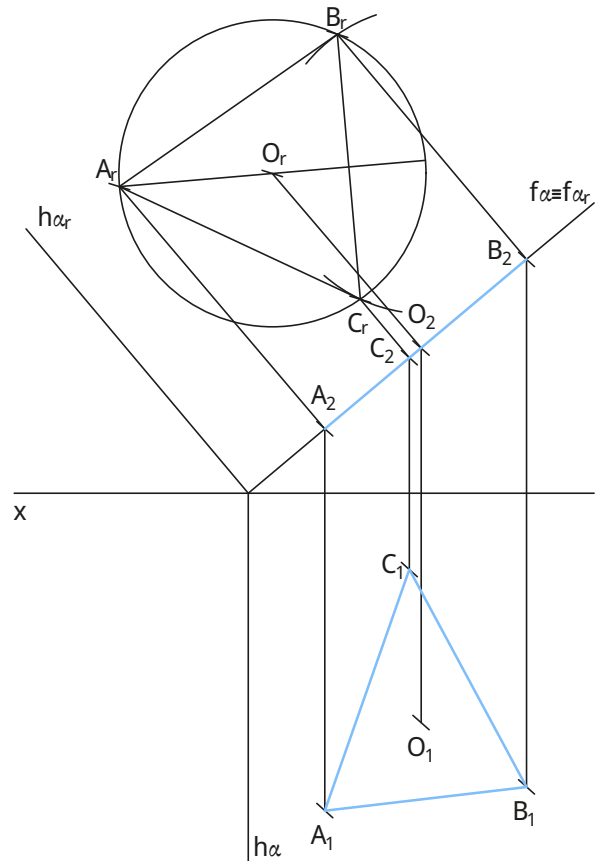
Deste modo, obtêm-se as projeções do triângulo **[ABC]**.



Nota que, estando o triângulo contido num plano de topo, este terá a sua projeção frontal em **deformação máxima**.

Neste caso, nenhum dos segmentos correspondentes aos lados do triângulo está contido em retas paralelas aos planos de projeção, pelo que nenhuma das projeções permite, por si só, conhecer a verdadeira dimensão dos seus lados.

Como tal, neste caso, foi necessário recorrer ao rebatimento para determinar as projeções do triângulo **[ABC]**.



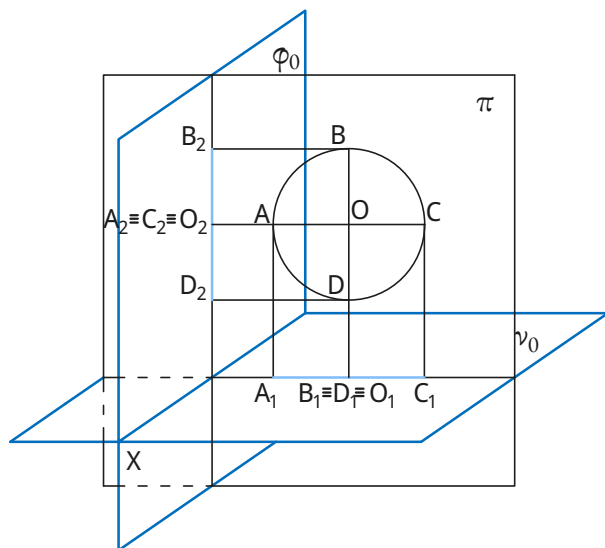
Projeção de figuras planas em planos de perfil

Os planos de perfil são um caso particular dos planos projetantes, uma vez que são duplamente projetantes, isto é: são ortogonais a ambos os planos de projeção. Assim, qualquer figura contida num plano de perfil terá ambas as suas projeções em deformação máxima.

Observa a representação ao lado:

O plano de perfil π contém uma circunferência, cujo centro é o ponto **O** e cujos segmentos **[AC]** e **[BD]** são diâmetros da circunferência perpendiculares entre si.

Ambas as suas projeções estão em deformação máxima, reduzidas a um segmento, em projeção frontal e em projeção horizontal.



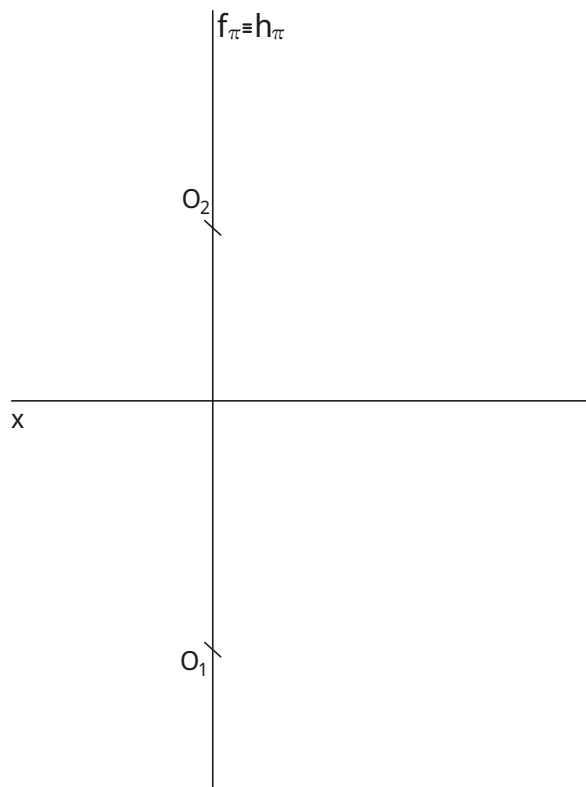
Verifica o exemplo em dupla projeção ortogonal.

Sendo dado um plano de perfil π e o ponto **O**, sabe-se que:

- o ponto **O** é o centro da circunferência;
- a medida do raio da circunferência é 3 cm. Considera o desenho a uma escala 1/2.

Para a resolução deste problema, é necessário desenhar a circunferência em verdadeira grandeza, de forma a determinar mais pontos para que esta fique definida em dupla projeção.

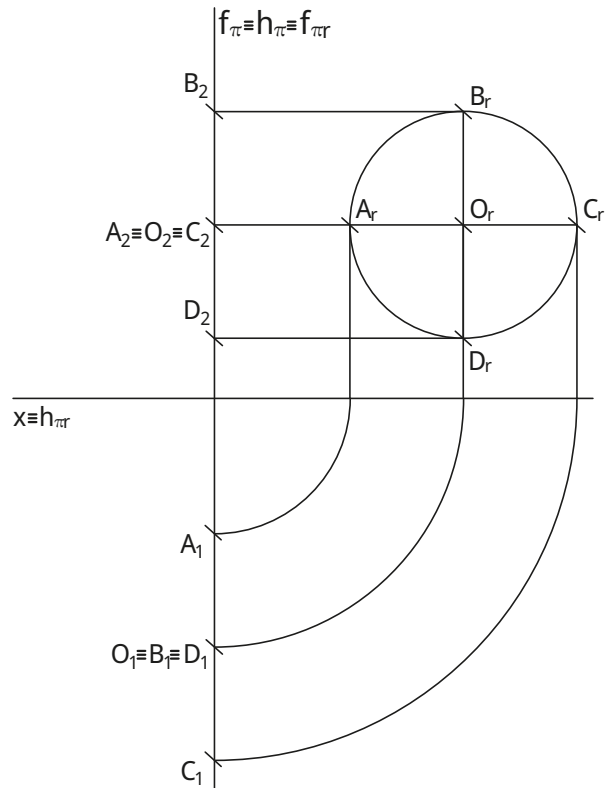
Deste modo, recorreu-se a um rebatimento.



Rebatendo o plano de perfil sobre o Plano Frontal de Projeção, obteve-se O_r . Com o auxílio de um compasso e tendo O_r como centro, traçou-se uma circunferência com 3 cm de raio.

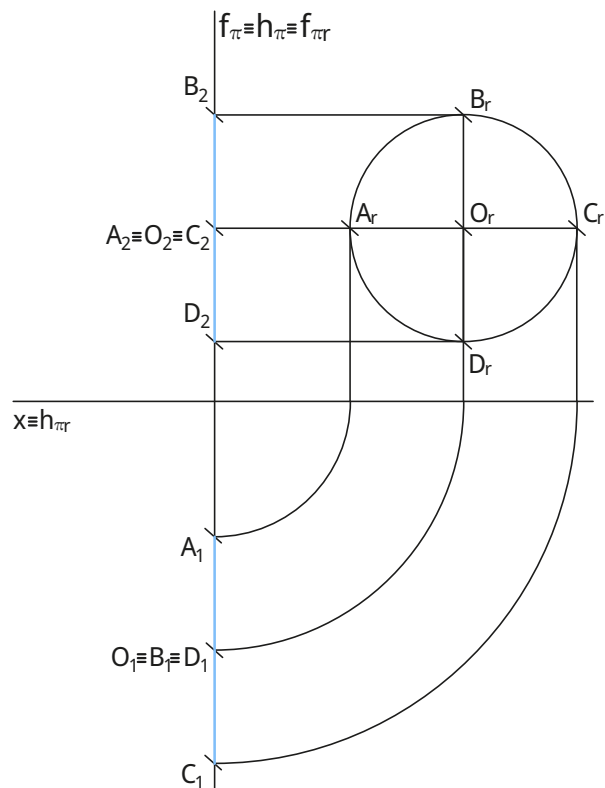
Estando a circunferência representada em verdadeira grandeza, determinaram-se quatro pontos, referentes a opostos dos diâmetros da circunferência, e efetuou-se o seu contrarrebatemento.

Deste modo, sobre os traços do plano de perfil estão delimitados os segmentos que correspondem às projeções horizontal e frontal da circunferência.



Assim, está representada a circunferência em dupla projeção ortogonal, evidenciando que qualquer figura plana que esteja contida num plano de perfil tem ambas as suas projeções em **deformação máxima**, uma vez que **planos de perfil** são **duplamente projetantes**.

Este é o único caso em que, observando apenas a representação em dupla projeção ortogonal, não é possível determinar de que tipo de figura plana se trata.



Para praticar

- 1 Considera um plano α de topo, cujo traço frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.d.). Sabe-se que o plano contém um retângulo, cujos lados de maior dimensão são segmentos de retas de topo. Um desses segmentos é definido pelos pontos A e B , tem 2 cm de cota e mede 6 cm. O ponto C tem 3 cm de afastamento, sendo que o segmento $[AC]$ é frontal e mede 3 cm. O lado $[CD]$ do retângulo é o seu lado de maior cota.
- 2 Sendo dado um ponto A de um triângulo equilátero, contido num plano vertical α , determina as projeções do triângulo $[ABC]$, sabendo que:
 - o traço horizontal do plano faz, com o eixo x , um ângulo de 45° (a.e.);
 - $A(3; 4)$;
 - o segmento $[AB]$ é horizontal e mede 4 cm, sendo B o ponto de maior afastamento;
 - o ponto C é o ponto de menor cota do triângulo.
- 3 Sendo dado um ponto $O(4; 6)$, determina as projeções de uma circunferência, cujo raio mede 3 cm e que tem o ponto O como centro. Sabe-se que a circunferência está contida num plano de perfil π .

Resumindo

Figuras planas **contidas em planos horizontais**:

- projeção frontal em deformação máxima;
- projeção horizontal em verdadeira grandeza.

Figuras planas **contidas em planos frontais**:

- projeção frontal em verdadeira grandeza;
- projeção horizontal em deformação máxima.

Figuras planas **contidas em planos de topo**:

- projeção frontal em deformação máxima;
- projeção horizontal em deformação.

Figuras planas **contidas em planos verticais**:

- projeção frontal em deformação;
- projeção horizontal em deformação máxima.

Figuras planas **contidas em planos de perfil**:

- projeção frontal em deformação máxima;
- projeção horizontal em deformação máxima.

10

Representação de sólidos I

Representação de pirâmides e prismas com bases contidas em planos horizontais, frontais e de perfil

Representação de cones e cilindros com bases contidas em planos horizontais e frontais

Noção de contorno aparente e invisibilidades num sólido

Representação de linhas e pontos pertencentes a sólidos geométricos

Representação de sólidos II

Representação de pirâmides e prismas com bases contidas em planos não-paralelos aos planos de projeção

Representação de sólidos com bases contidas em planos de topo

Representação de sólidos com bases contidas em planos verticais

Representação de sólidos I

Representação de pirâmides e prismas com bases contidas em planos horizontais, frontais e de perfil

A representação de sólidos resulta da interligação entre a representação de figuras planas e de retas ortogonais ou oblíquas aos planos que contêm essas figuras, tratando-se respectivamente de sólidos retos ou oblíquos.

Abordando o estudo de uma pirâmide reta, cuja base está contida num plano horizontal (de nível), obtém-se o seguinte exemplo:

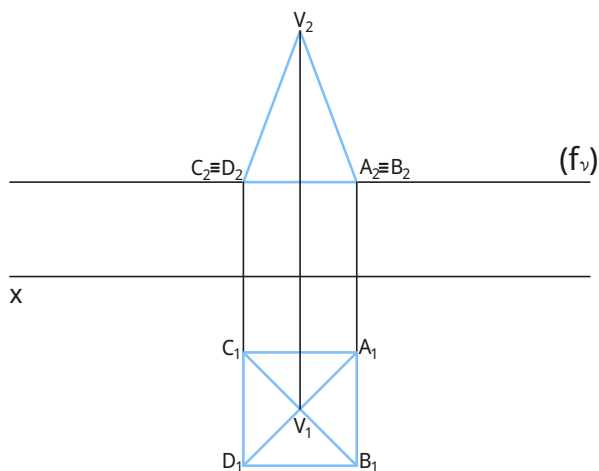
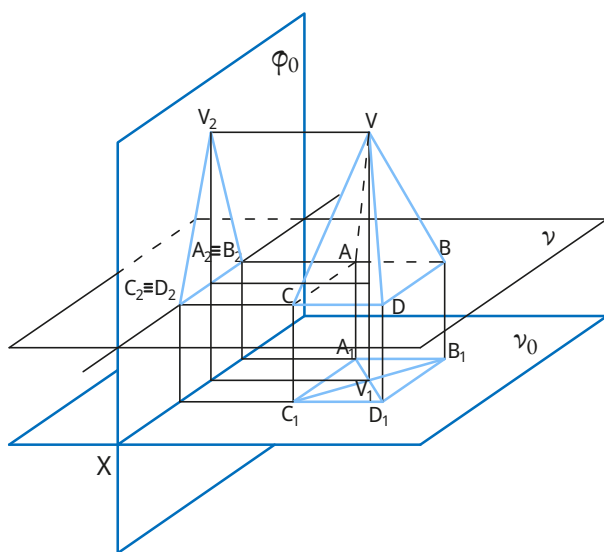
O quadrado **[ABCD]** é a base de uma pirâmide quadrangular regular, pertencente a um plano horizontal ν .

O seu vértice **V** não pertence, naturalmente, ao plano da base, estando contido numa reta ortogonal a esse plano.

Deste modo, a altura da pirâmide pode ser medida diretamente em projeção frontal, uma vez que o segmento compreendido entre a interseção da reta que contém o vértice e o plano da base e o ponto **V** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

Visualizando em dupla projeção ortogonal:
Sendo o plano ν um plano projetante frontal, a base da pirâmide, contida nesse plano, tem a sua projeção frontal em deformação máxima. Tratando-se de uma pirâmide reta, em que o seu vértice está contido numa reta ortogonal à base, intersectando a mesma no seu centro geométrico, é possível medir a sua altura em projeção frontal.

A altura da pirâmide é medida sobre o seu eixo, que é uma reta vertical.



Considerando, agora, a mesma base **[ABCD]**, e sendo dado o ponto **V**, representado pelas suas projeções, sabe-se que este é o vértice de uma pirâmide oblíqua cuja base é o quadrado **[ABCD]**.

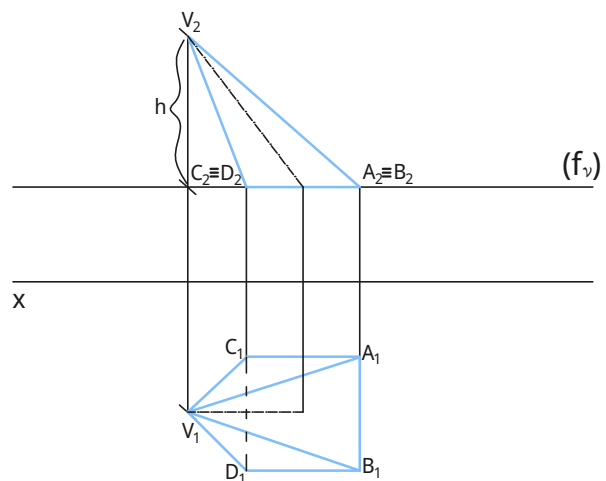
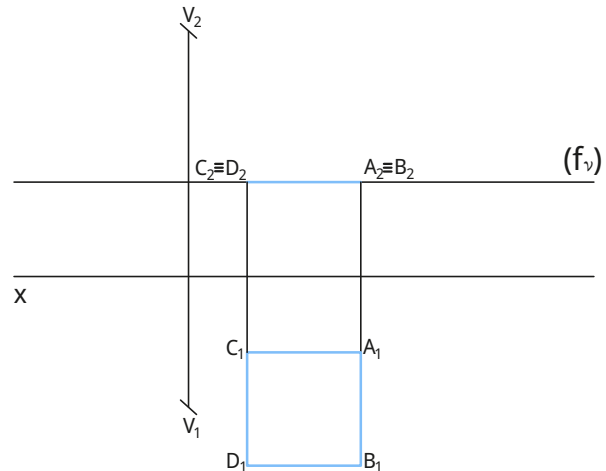
Nota que a projeção horizontal do ponto **V** não coincide com o centro geométrico da base. Assim, conclui-se que se trata de uma pirâmide oblíqua.

Neste caso, o eixo da pirâmide é uma reta frontal, uma vez que a sua projeção horizontal é paralela ao eixo **x**.

Ao contrário do que acontece com uma pirâmide reta, a altura da pirâmide oblíqua é medida perpendicularmente ao plano da base, não correspondendo à medida do seu eixo.

Nota que o eixo da pirâmide poderia não ser frontal, mas sim oblíquo. Na verdade, qualquer reta que seja oblíqua face ao plano da base poderá ser uma reta de suporte do eixo da pirâmide.

A reta de suporte do segmento que traduz a altura do sólido, neste caso, será sempre paralela ao Plano Frontal de Projeção, uma vez que a base pertence a um plano horizontal (de nível), e a reta deve ser ortogonal a esse plano.



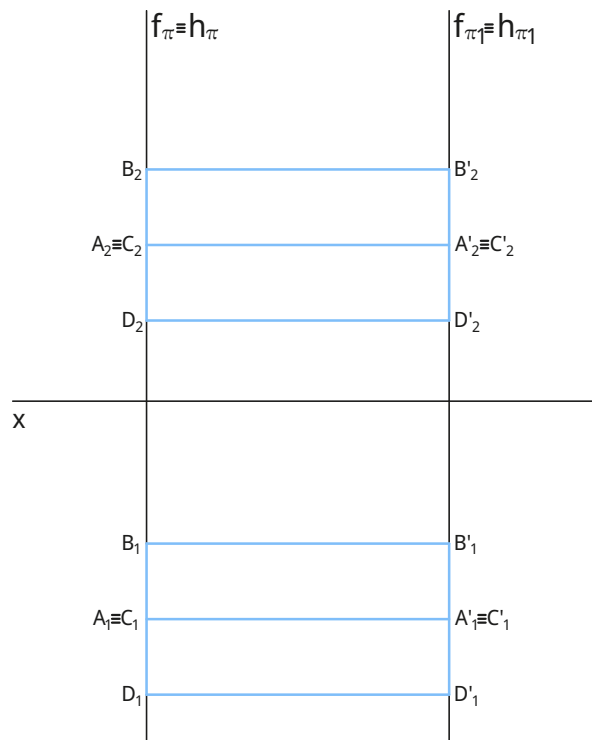
Observa o exemplo seguinte.

Sendo dados dois planos de perfil, que contêm dois quadrados, sabe-se que esses quadrados são bases de um prisma quadrangular regular.

Nota que se trata de um prisma regular, uma vez que, em ambas as projeções, as arestas são sempre ortogonais face aos planos das bases.

Neste caso, o eixo do prisma é um segmento fronto-horizontal, estando projetado em verdadeira grandeza em ambas as projeções.

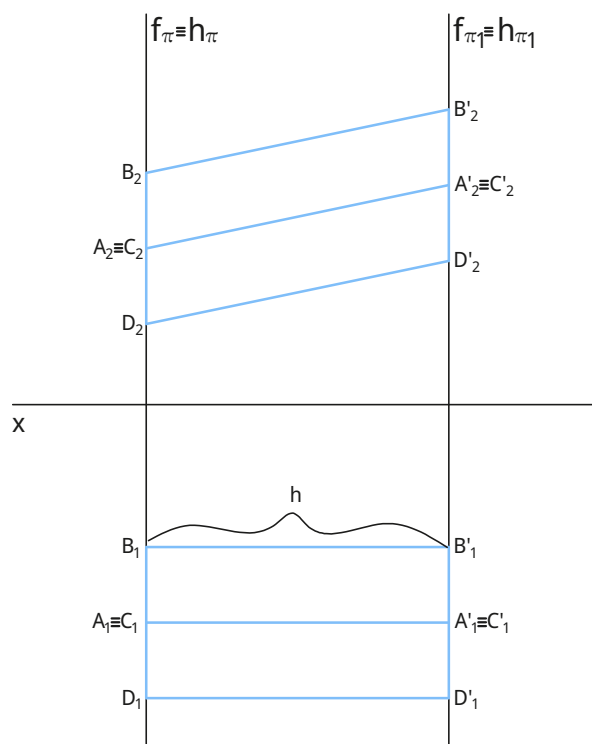
Uma vez que as bases pertencem a planos de perfil, estas não se projetam em verdadeira grandeza em nenhuma das projeções, mas sim em deformação máxima.



Observando, agora, um exemplo em que as arestas laterais não são ortogonais aos planos das bases, conclui-se que se trata de um prisma oblíquo.

Nota que, em projeção horizontal, as projeções das arestas são ortogonais aos planos de perfil, mas em projeção frontal isso não se verifica. Tal deve-se ao facto de, neste caso, as arestas corresponderem a segmentos frontais. Na verdade, tridimensionalmente, estas são oblíquas face aos planos das bases. Assim, a altura do prisma, neste caso, não se mede sobre o eixo do mesmo, mas sim aferindo a distância entre ambos os planos das bases.

A altura do sólido (**h**) é medida sobre um segmento fronto-horizontal compreendido entre os planos das bases.



Para praticar

- 1 Sendo dados os pontos **A** (-2; 3; 5) e **B** (1; 3; 2), e sabendo que estes são vértices de um triângulo equilátero contido num plano frontal, correspondente à base de uma pirâmide reta do 1.º diedro, cujo vértice **V** tem 7 cm de afastamento e que o vértice **C** é o ponto de maior cota da base, determina as projeções da pirâmide.
- 2 Considerando o triângulo **[ABC]** do enunciado anterior, e sendo esse uma das bases de um prisma triangular oblíquo com 5 cm de altura, determina as projeções do prisma sabendo que **A'** (0; 8; 8) é um dos vértices da outra base do prisma.
- 3 Sendo dados os pontos **A** (-1; 2; 5) e **C** (3; 4; 5), e sabendo que estes são vértices opostos de um quadrado **[ABCD]** horizontal, determina as projeções de uma pirâmide oblíqua, cuja base é o quadrado **[ABCD]**, sabendo que o seu eixo está contido numa reta frontal que forma, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 45° (a.d.) e que mede 6 cm.

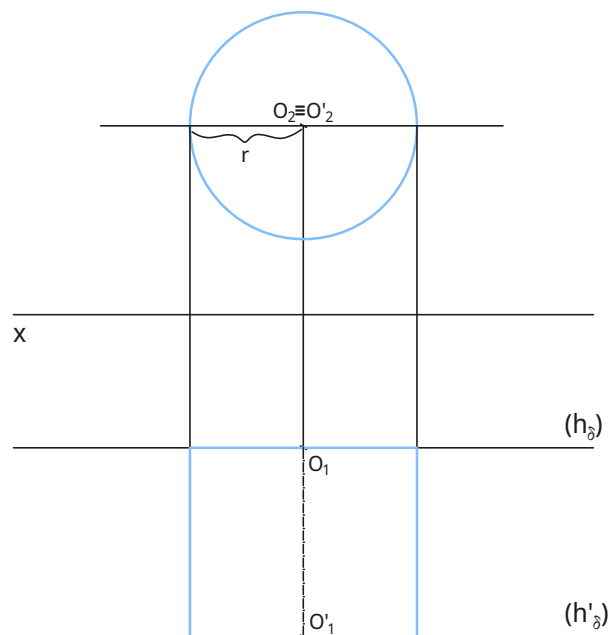
Representação de cones e cilindros com bases contidas em planos horizontais e frontais

Observa o exemplo ao lado.

Sendo dado um ponto **O**, centro de uma circunferência correspondente à base de um cilindro reto, contida num plano frontal, e sendo dado o seu raio **r**, a base do cilindro estará representada em verdadeira grandeza em projeção frontal.

Tratando-se de um cilindro reto, as bases estarão coincidentes em projeção frontal, e o seu eixo estará contido numa reta de topo.

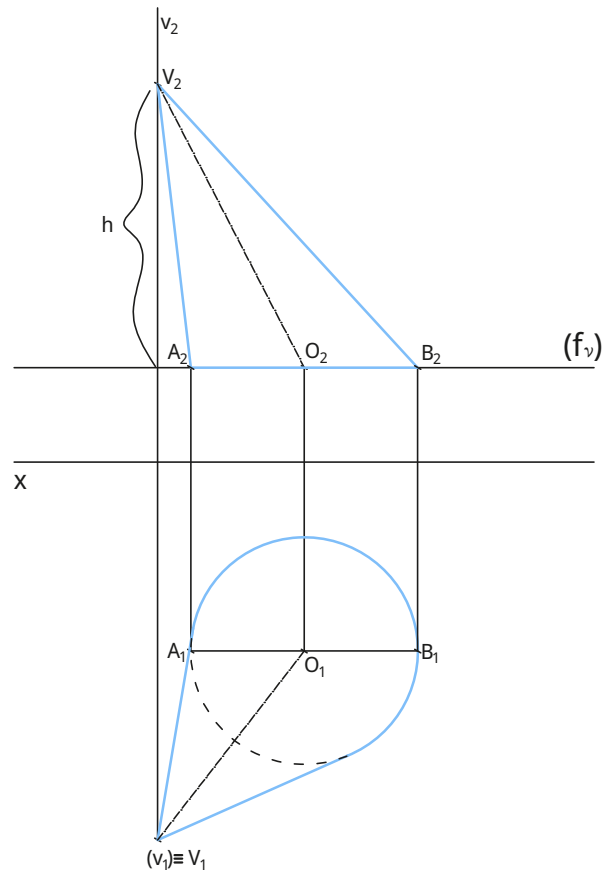
A altura do cilindro poderá ser medida em projeção horizontal e corresponde à distância entre os planos das bases.



Neste exemplo, tem-se uma circunferência contida num plano horizontal, que é a base de um cone oblíquo. Neste caso, é dado o vértice do cone (ponto **V**). Em projeção horizontal (verdadeira grandeza da base), unem-se os extremos da base à projeção horizontal do ponto **V**. Em projeção frontal, o processo é semelhante, unindo os extremos da projeção frontal da base a **V₂**.

Conforme se pode observar, neste caso, o eixo é oblíquo, pois ambas as projeções são oblíquas face ao eixo **x**.

Embora o eixo, sendo oblíquo, não possa ser medido diretamente em dupla projeção ortogonal, a altura do cone poderá ser medida através de uma reta vertical que contém o ponto **V** e que é, por conseguinte, ortogonal ao plano da base do cone.



A altura do cone é medida em projeção frontal.

Para praticar

- 1 Considera um ponto **O** (0; 2; 5), correspondente ao centro de uma circunferência horizontal que é a base de um cone de revolução, com 2 cm de raio. Sobre o cone, sabe-se que tem 5 cm de altura e que o vértice é um ponto do Plano Horizontal de Projeção. Determina as projeções do cone.
- 2 Considera um ponto **O** (0; 3; 3), correspondente ao centro de uma circunferência tangente ao Plano Horizontal de Projeção. Sendo esta uma das bases de um cilindro oblíquo, cujo eixo está contido numa reta horizontal, que faz com o Plano Frontal de Projeção um ângulo de 50° (a.d.) e mede 6 cm, determina as projeções do cilindro.

Noção de contorno aparente e invisibilidades num sólido

Experimenta observar um qualquer objeto que tenhas à tua disposição a partir de um determinado ângulo. Regista essa imagem.

Mantendo a localização do mesmo, move-te e observa-o a partir de um outro ponto. Regista essa imagem.

Comparando ambos os registos, pode concluir-se que, a partir de um ponto de observação, não é possível visualizar todas as partes de um dado objeto. Assim, há um lado visível e outro invisível, uma vez que um objeto, ou sólido, são feitos de matéria.

Na verdade, quando observamos um dado objeto, visualizamos apenas uma das suas partes, delimitada por uma silhueta a que se dá o nome de **contorno aparente do sólido**.

Em Geometria Descritiva, por **contorno aparente do sólido** entende-se o seguinte:

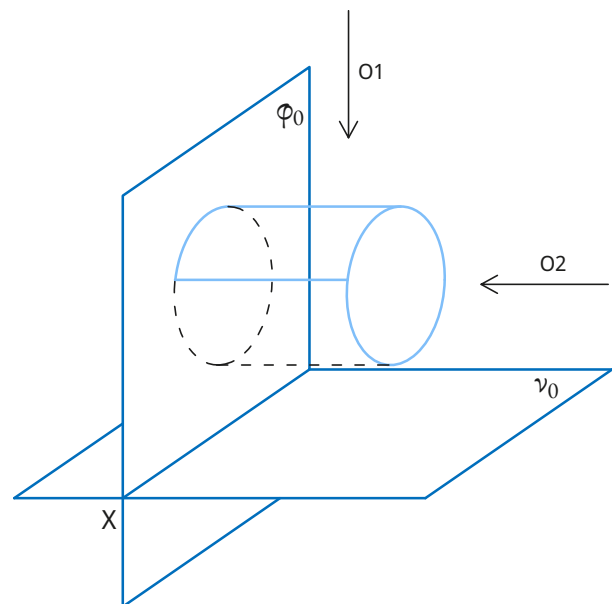
- Linha fechada (pode ser quebrada, curva ou mista) que separa as partes visíveis do sólido das não-visíveis.

Observa o exemplo ao lado.

O cilindro representado, de bases frontais, tem, delimitado a azul, o seu contorno aparente, tendo em conta as duas posições do observador quando se trata de dupla projeção ortogonal.

O_1 – corresponde à posição relativa do observador na projeção horizontal do cilindro.

O_2 – corresponde à posição relativa do observador na projeção frontal do cilindro.



Com base na observação do exemplo, conclui-se que, em caso de sobreposição de elementos:

- Em projeção frontal, prevalecem os pontos e arestas de **maior afastamento**;
- Em projeção horizontal, prevalecem os pontos e arestas de **maior cota**.

Representação de linhas e pontos pertencentes a sólidos geométricos

Das considerações anteriores, sabe-se que as **faces** de um poliedro correspondem a porções de planos e que as suas **arestas** são segmentos de reta cujas retas de suporte são retas pertencentes aos planos das faces do sólido.

Observa a pirâmide quadrangular.

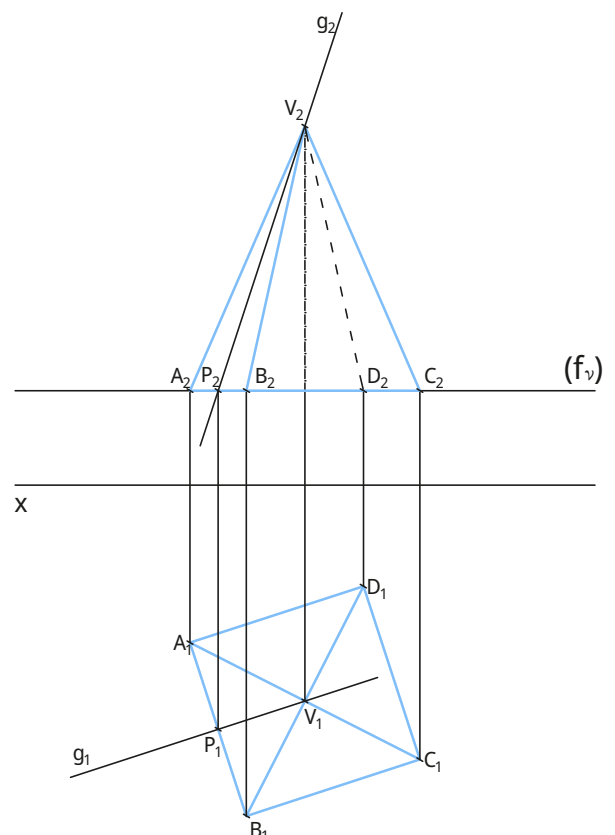
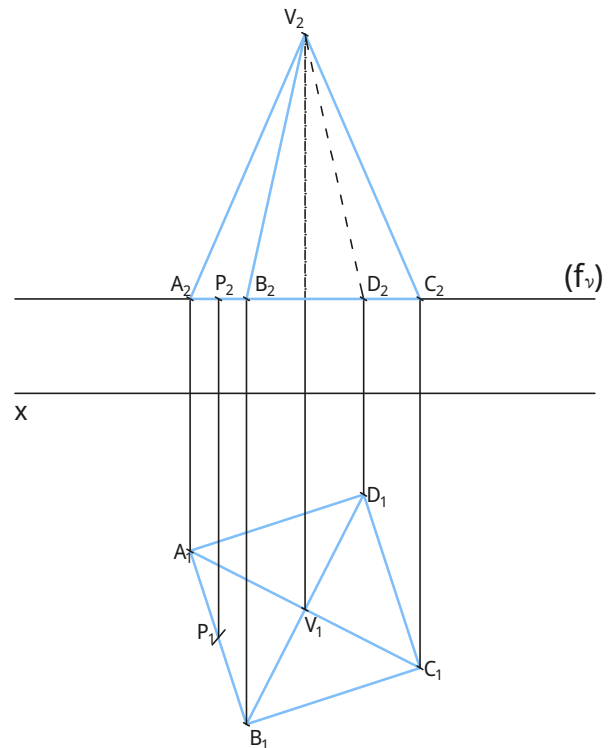
O ponto **P** é um ponto contido na aresta **[AB]**.

Pelo ponto **P**, pretende-se traçar um segmento que pertença à face **[AVB]**.

Para que esse segmento pertença à face pretendida, deve conter dois pontos dessa face.

Neste caso, optou-se por considerar uma geratriz do sólido e, por isso, uniram-se as projeções do ponto **P** às projeções homónimas do ponto **V**.

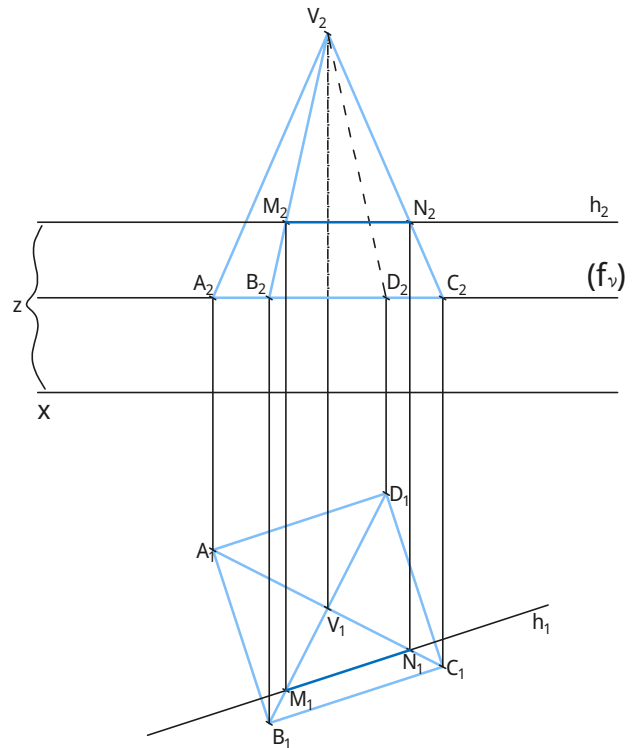
A reta **g** é a reta de suporte de um segmento de reta **[VP]** que pertence à face **[AVB]** e, por conseguinte, à pirâmide quadrangular.



Considerando a mesma pirâmide, pretende-se, agora, a determinação de um ponto que pertença à face **[BVC]**, cuja cota assuma o valor z .

Para tal, recorre-se a uma reta **h**, horizontal, com a cota pretendida. Onde a projeção frontal da reta **h** interseitar as arestas da face do sólido, tem-se dois pontos da reta: **M** e **N**. Através das projeções horizontais dos pontos, é possível determinar a projeção horizontal da reta **h**.

Tendo o segmento **[MN]**, sabe-se que qualquer ponto da face **[BVC]** com a cota pretendida estará sobre o segmento **[MN]**.



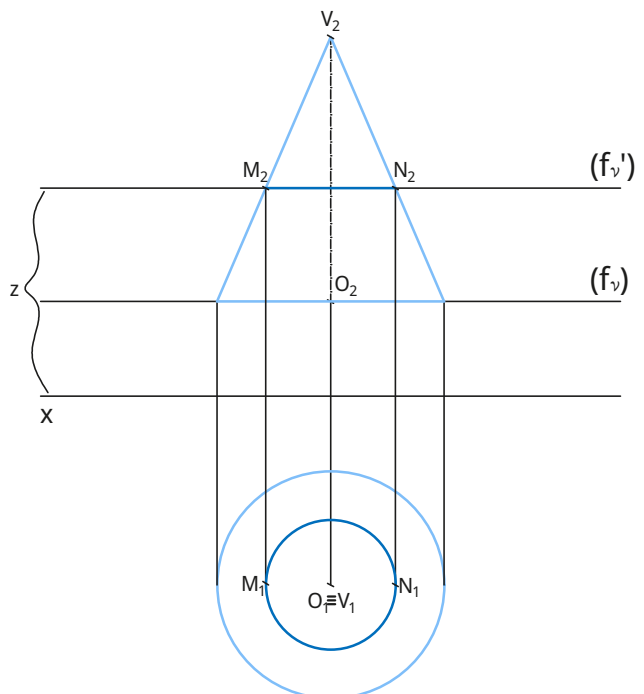
Abordando, agora, o caso de um cone de revolução, pretende-se determinar um ponto com cota z , que pertença à superfície do cone.

Para tal, considera-se um plano horizontal cuja cota corresponda à cota do ponto pretendido.

Em projeção frontal, o plano intersecta o contorno aparente do cone em dois pontos: **M** e **N**.

Em projeção horizontal, os pontos assumem o mesmo afastamento do centro da base, uma vez que marcam os extremos de uma circunferência paralela à base.

Está, assim, determinado o lugar geométrico onde se encontram todos os pontos da superfície cônica com a cota pretendida.



Representação de sólidos II

Representação de pirâmides e prismas com bases contidas em planos projetantes não-paralelos aos planos de projeção

A representação de sólidos com bases contidas em planos projetantes não paralelos aos planos de projeção, isto é, planos verticais e de topo, resulta da conjugação de dois temas:

- representação de figuras planas contidas em planos verticais e de topo;
- ortogonalidade entre retas e planos verticais ou de topo (tratando-se de sólidos regulares).

Uma vez que os planos verticais e de topo não são paralelos aos planos de projeção, nenhuma das bases dos sólidos contidas nestes planos está representada em verdadeira grandeza em dupla projeção ortogonal, sendo necessário recorrer a **métodos geométricos auxiliares**.

Dada a sua natureza, destacam-se como **retas ortogonais a planos de topo** as **retas frontais**; e como **retas ortogonais a planos verticais** as **retas horizontais**.

Assim, tratando-se de sólidos regulares, pode concluir-se que:

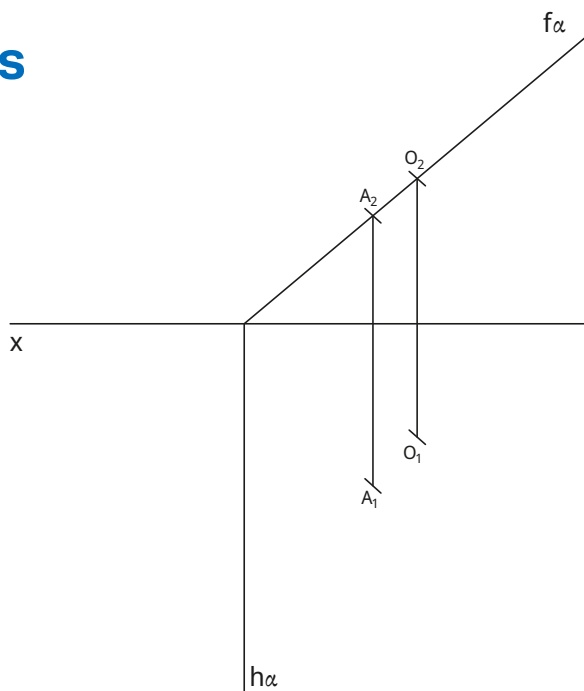
- sólidos regulares com **bases** em planos de **topo** têm o seu **eixo** numa **reta frontal**;
- sólidos regulares com **bases** em planos **verticais** têm o seu **eixo** numa **reta horizontal**.

Representação de sólidos com bases contidas em planos de topo

Observa o plano de topo α , que contém os pontos **A** e **O**.

Sabe-se que o ponto **O** corresponde ao centro de um quadrado **[ABCD]**. Sobre esse quadrado é dado o ponto **A**, que é um dos seus vértices.

O quadrado é a base de uma pirâmide regular, cujo vértice **V** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção.



Para representar o sólido em dupla projeção ortogonal, é necessário, em primeiro lugar, determinar as projeções da sua base.

Uma vez que se trata de uma base contida num plano de topo, nenhuma das suas projeções se encontra em verdadeira grandeza.

Como tal, é necessário recorrer a um rebatimento para proceder à construção do quadrado, partindo dos pontos **O** e **A**.

Rebatendo o plano de topo α sobre o Plano Frontal de Projeção, tendo como charneira o traço frontal do plano de topo, tem-se o centro do quadrado **[ABCD]** rebatido, bem como o seu vértice **A**. Com centro em **O**, até **A**, tem-se o raio da circunferência que circunscreve o quadrado.

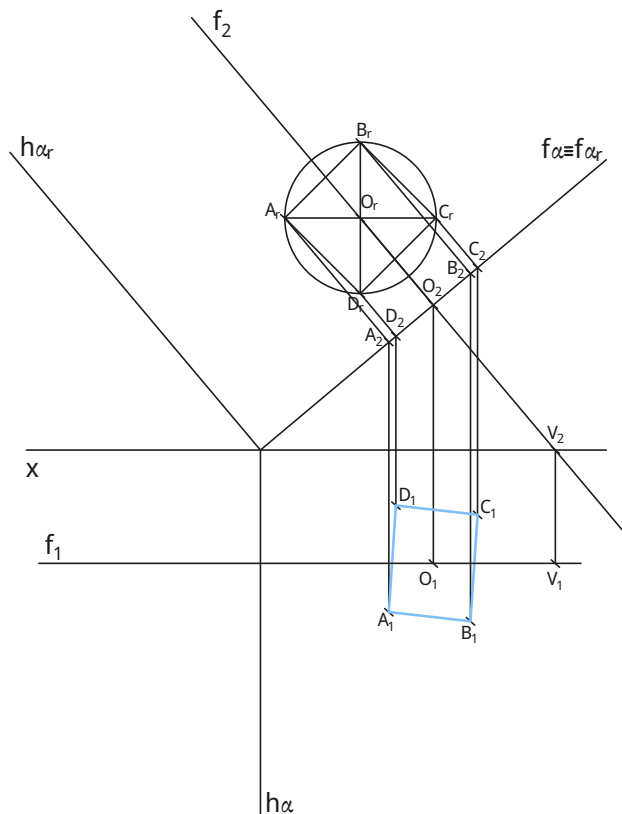
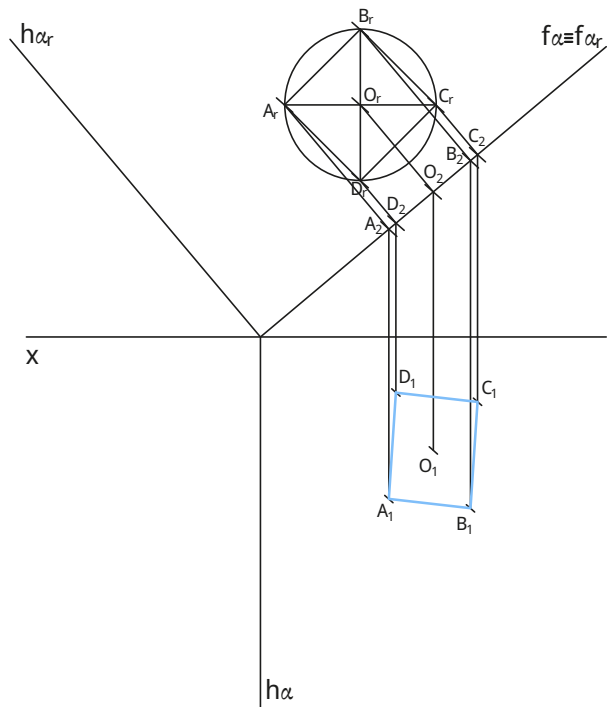
Prolongando esse raio, encontra-se o diâmetro dessa circunferência e, conseqüentemente, a diagonal do quadrado. No extremo da diagonal que contém **A**, encontra-se o ponto **C**.

Perpendicularmente a esta diagonal, passando por **O**, tem-se a outra diagonal e os restantes dois vértices do quadrado: **B** e **D**.

Efetuada o contrarrebato dos pontos **B**, **C** e **D**, tem-se o quadrado **[ABCD]** representado em dupla projeção ortogonal.

Sabendo que se trata de uma pirâmide regular, cujo vértice é um ponto **V**, pertencente ao Plano Horizontal de Projeção, recorre-se a uma reta **f**, ortogonal ao plano α , que será a reta de suporte do eixo da pirâmide.

A reta **f** deverá conter o ponto **O**, e a sua projeção frontal fará um ângulo de 90° com o traço frontal do plano.



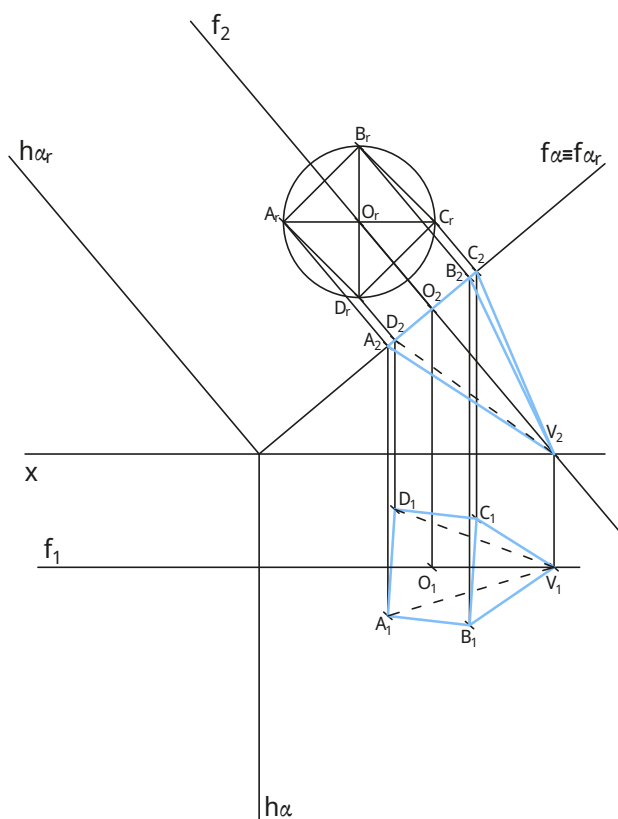
Neste caso, uma vez que o ponto **V** pertence à reta **f** e ao Plano Horizontal de Projeção, este corresponde ao traço horizontal da reta **f**.

Nota que, caso fosse especificada a altura da pirâmide, essa medida poderia ser marcada, diretamente, sobre a projeção frontal da reta **f**, uma vez que se encontra em verdadeira grandeza.

Determinadas as projeções do ponto **V**, é possível unir os vértices da base ao ponto **V**, determinando as projeções das arestas laterais da pirâmide.

Nota que as arestas **[VD]** e **[VA]** são invisíveis em projeção horizontal, por serem as arestas de menor cota, e não constituem o contorno aparente do sólido.

A aresta **[DV]** também é invisível em projeção frontal, por não ser parte do contorno aparente do sólido e por ser a aresta de menor afastamento.



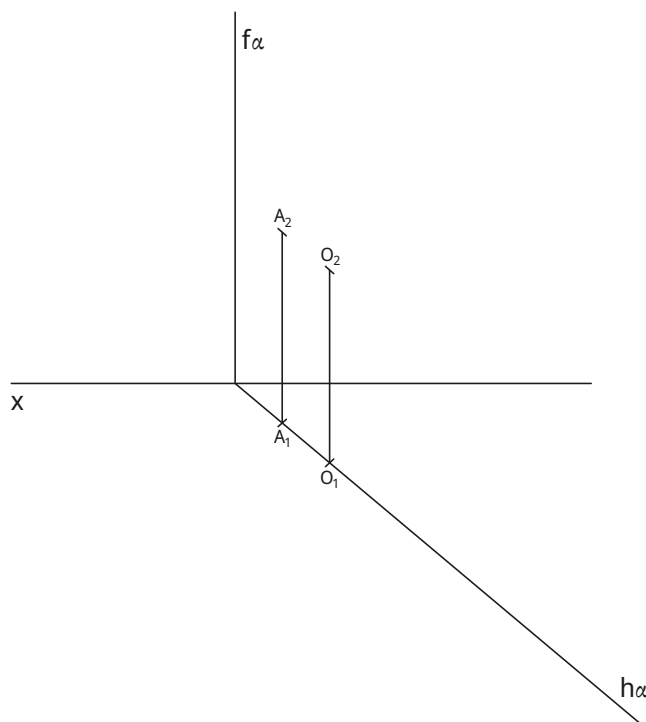
Representação de sólidos com bases contidas em planos verticais

Considera, agora, um plano vertical que contém os pontos **A** e **O**.

Sobre o ponto **O**, sabe-se que corresponde ao centro de uma circunferência na qual se inscreve um triângulo equilátero.

O ponto **A** é um dos vértices desse triângulo e é o ponto de maior cota e menor afastamento do triângulo.

O triângulo **[ABC]** corresponde a uma das bases de um prisma triangular regular com 3 cm de altura.



A outra base do prisma, o triângulo **[A'B'C']**, é a base de maior afastamento do prisma.

Para determinar as projeções do prisma triangular de bases verticais, é necessário, primeiramente, representar uma das suas bases em dupla projeção ortogonal.

Como as bases estão contidas em planos verticais e, por isso, nenhuma das suas projeções se encontra em verdadeira grandeza, é necessário recorrer a um rebatimento.

Neste caso, optou-se por rebater o plano vertical sobre o Plano Frontal de Projeção, utilizando como charneira o traço frontal do plano vertical.

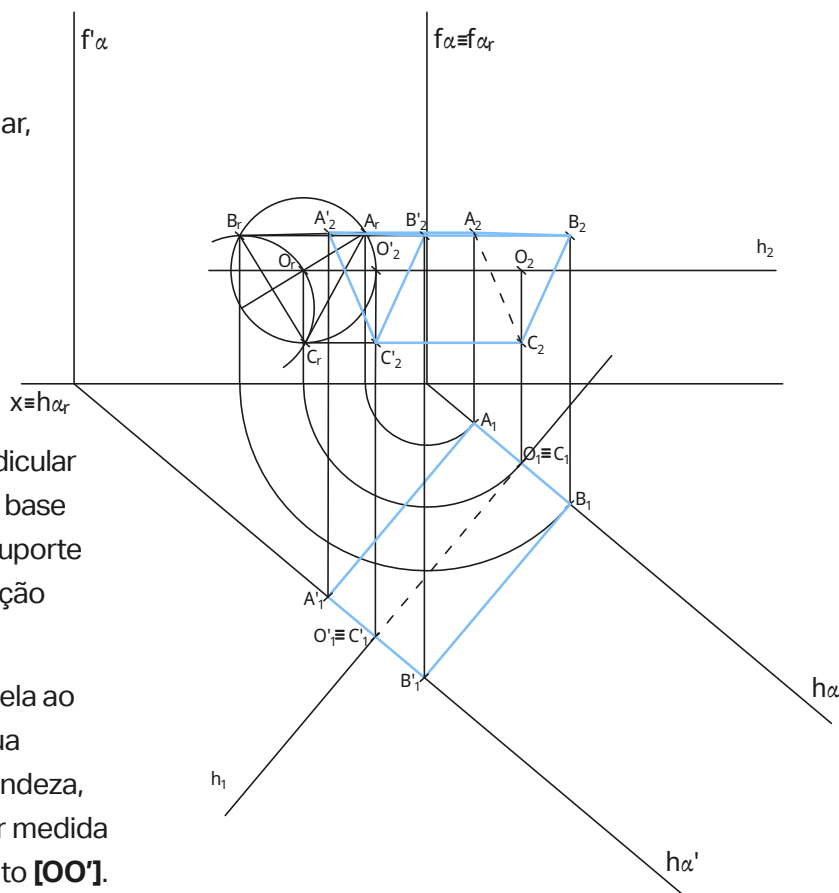
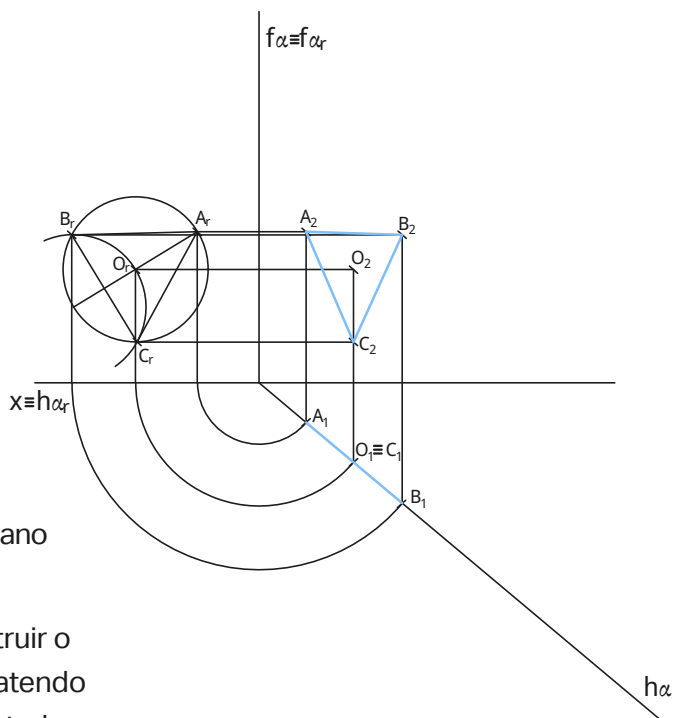
Rebatidos os pontos **A** e **O**, é possível construir o triângulo **[ABC]** no rebatimento. Contrarrebateando os seus pontos, tem-se o triângulo representado em dupla projeção ortogonal.

Tratando-se de bases contidas em planos verticais e de um prisma regular, sabe-se que o eixo do mesmo será ortogonal à base e, portanto, deverá estar sobre uma reta ortogonal a um plano vertical.

Assim, o eixo do sólido estará sobre uma reta horizontal.

Passando por **O**, traça-se uma perpendicular ao traço horizontal do plano vertical da base **[ABC]** (projeção horizontal da reta de suporte do eixo) e uma paralela ao eixo **x** (projeção frontal da reta de suporte do eixo).

Sendo a reta horizontal uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção, tem a sua projeção horizontal em verdadeira grandeza, pelo que a altura do prisma poderá ser medida sobre **h₁**, correspondendo ao segmento **[OO']**.



Uma vez que, num prisma, ambas as bases são sempre paralelas, é possível determinar imediatamente as projeções da base **[A'B'C']**.

Está, assim, representado em dupla projeção ortogonal um prisma regular de bases verticais.

Resumindo

- Sólidos regulares com bases em planos de topo têm o seu eixo numa reta frontal. A altura de sólidos de bases de topo é medida em projeção frontal.
- Sólidos regulares com bases em planos verticais têm o seu eixo numa reta horizontal. A altura de sólidos de bases verticais é medida em projeção horizontal.

Para praticar

1 Determina as projeções de um cubo sabendo que:

- a sua face **[ABCD]** é de topo e está inscrita numa circunferência, cujo centro é o ponto **O** (-1; 5; 4) com 3 cm de raio;
- o plano da base faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 40° (a.d.);
- os lados do quadrado **[AB]** e **[CD]** são segmentos de topo;
- a face oposta ao quadrado **[ABCD]** é a face de maior cota do cubo.

Representa o sólido em dupla projeção ortogonal, evidenciando as suas faces visíveis e invisíveis.

2 Determina as projeções de uma pirâmide triangular regular sabendo que:

- a sua base **[ABC]** é um triângulo equilátero contido num plano vertical que faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 65° (a.e.);
- o ponto **A** (2; 1) é um dos vértices da base e o ponto **B** tem afastamento nulo e cota 6.
- a altura da pirâmide é de 5 cm;
- o sólido localiza-se inteiramente no 1.º diedro.

3 Determina as projeções de uma pirâmide quadrangular regular sabendo que:

- o quadrado **[ABCD]** é de perfil e é a base da pirâmide;
- o ponto **O** (4; 4) é o centro da circunferência circunscrita ao quadrado;
- o ponto **A** (1; 5) é um dos vértices do quadrado;
- o ponto **V**, vértice da pirâmide, tem abcissa inferior à base;
- a pirâmide tem 6 cm de altura.

11

Métodos geométricos auxiliares II

Rebatimento de planos não-projetantes

Rebatimento de planos oblíquos

Rebatimento de planos de rampa

Rebatimento de planos passantes

Métodos geométricos auxiliares II

Rebatimento de planos não-projetantes

Os métodos geométricos auxiliares têm como propósito permitir a determinação da verdadeira grandeza de elementos geométricos que, em dupla projeção ortogonal, se encontram deformados.

Assim, estes consistem em alterar a posição do objeto, para que este se posicione paralelamente a um dos planos de projeção, e assim determinar a sua verdadeira grandeza.

Anteriormente, foram abordados três métodos:

- mudança do diedro de projeção;
- rotação;
- rebatimento.

O método aplicável a planos é o do rebatimento, consistindo numa rotação do mesmo em torno de um eixo, correspondendo este, normalmente, a uma das retas notáveis desse plano considerado como charneira.

Assim, na maioria das vezes, a charneira do rebatimento de um plano é um dos seus traços, consoante se trate de um rebatimento sobre o Plano Frontal de Projeção ou sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Os rebatimentos só se aplicam em planos não paralelos aos planos de projeção, uma vez que, quando o são, não é necessário recorrer a métodos geométricos auxiliares, pois uma das projeções já se encontra em verdadeira grandeza.

Tendo sido já abordado o rebatimento de planos projetantes não paralelos aos planos de projeção, é agora o momento de estudar o rebatimento de planos não-projetantes e não paralelos aos planos de projeção: **planos oblíquos, planos de rampa e planos passantes.**

Uma vez que os arcos de rebatimento constam sempre de um plano ortogonal à charneira do rebatimento, no caso de planos projetantes, estes coincidiam com os planos de projeção.

No caso de planos não-projetantes, esse princípio já não se aplica.

Nestes casos, há dois aspetos-chave a considerar:

- seleccionar sobre que plano se dará o rebatimento;
- seleccionar e identificar a charneira do rebatimento e a identificação dos planos ortogonais a esta, onde constarão os arcos do rebatimento.

Rebatimento de planos oblíquos

Num rebatimento, o que é rebatido é sempre um plano, e não pontos ou retas isolados. Na verdade, esses elementos que constam de um plano são transportados aquando do rebatimento do próprio plano.

Assim, o rebatimento de um plano oblíquo pode seguir dois processos:

- o rebatimento dos seus traços;
- o rebatimento dos pontos que o definem (triângulo do rebatimento).

De facto, quando se trata de rebatimento de planos projetantes, como estes são ortogonais a, pelo menos, um dos planos de projeção, os arcos do rebatimento estão em verdadeira grandeza. Tal não acontece com o rebatimento de planos não-projetantes.

Observa o exemplo:

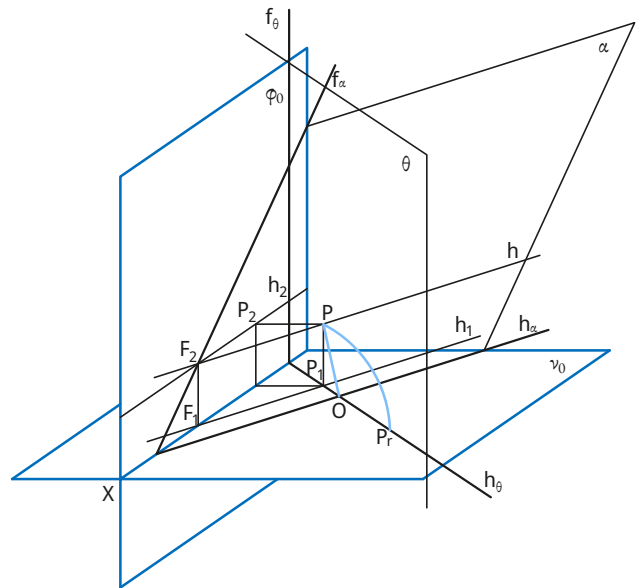
Considerando um plano α , oblíquo, do qual faz parte o ponto P , pretende-se rebater o plano sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Para tal, proceder-se-á ao rebatimento do ponto P .

O arco do rebatimento estará contido num plano ortogonal a α que contenha o ponto P .

Como tal, recorre-se a um plano auxiliar, θ , que contenha o ponto P .

Tratando-se de um plano vertical, traça-se, por P_1 , uma perpendicular ao traço horizontal do plano oblíquo.



Considerando a interseção dos traços horizontais de ambos os planos, encontra-se o centro do arco do rebatimento – O . Com centro em O , até ao ponto P , transporta-se a medida até ao Plano Horizontal de Projeção, isto é, até ao traço horizontal do plano θ .

Assim, a distância que permite rebater o ponto P é $[OP]$.

Nota que o arco de rebatimento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, sendo esse o problema a ultrapassar no processo de rebatimento de planos oblíquos.

Rebatimento de planos oblíquos – rebatimento pelos seus traços

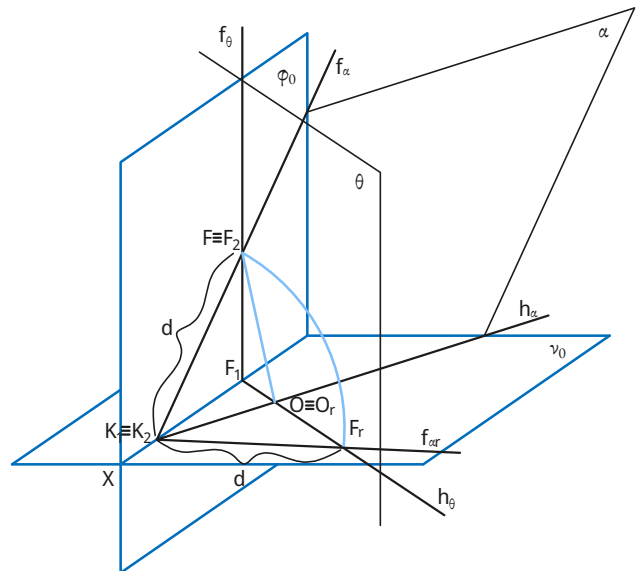
Uma forma de contornar a questão da determinação da verdadeira grandeza do arco do rebatimento de um plano oblíquo é proceder ao rebatimento dos seus traços.

Deste modo, após o rebatimento dos traços do plano, dá-se o rebatimento sucessivo de retas e pontos pertencentes ao plano.

Visualizando o rebatimento de um plano oblíquo sobre o Plano Horizontal de Projeção, considera-se como charneira do rebatimento o traço horizontal do plano oblíquo.

Assim, uma vez que o plano oblíquo não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, é necessário recorrer a um plano auxiliar, que lhe seja ortogonal, onde se irão desenvolver os arcos do rebatimento.

Assim, uma vez que a charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano oblíquo, **o plano auxiliar deve ter o seu traço horizontal perpendicular à charneira.** Desse modo, **considera-se um plano vertical.**



Para rebater o traço frontal do plano, considera-se o ponto **F**, ponto de interseção dos traços frontais de ambos os planos.

O centro do arco do rebatimento é o ponto **O**, ponto de interseção dos traços horizontais dos planos.

O ponto **K**, ponto de concorrência dos traços do plano oblíquo no eixo **x**, é um ponto que pertence a ambos os traços e que roda sobre si mesmo. Assim, com centro em **K**, até **F**, transporta-se essa medida até ao traço horizontal do plano vertical. **OF** corresponde ao arco do rebatimento. Onde o arco intersesta o traço horizontal do plano vertical tem-se o ponto **F** rebatido – **F_r**.

A partir daí, unindo **K** a **F_r**, tem-se o traço frontal do plano oblíquo rebatido.

Observa o exemplo:

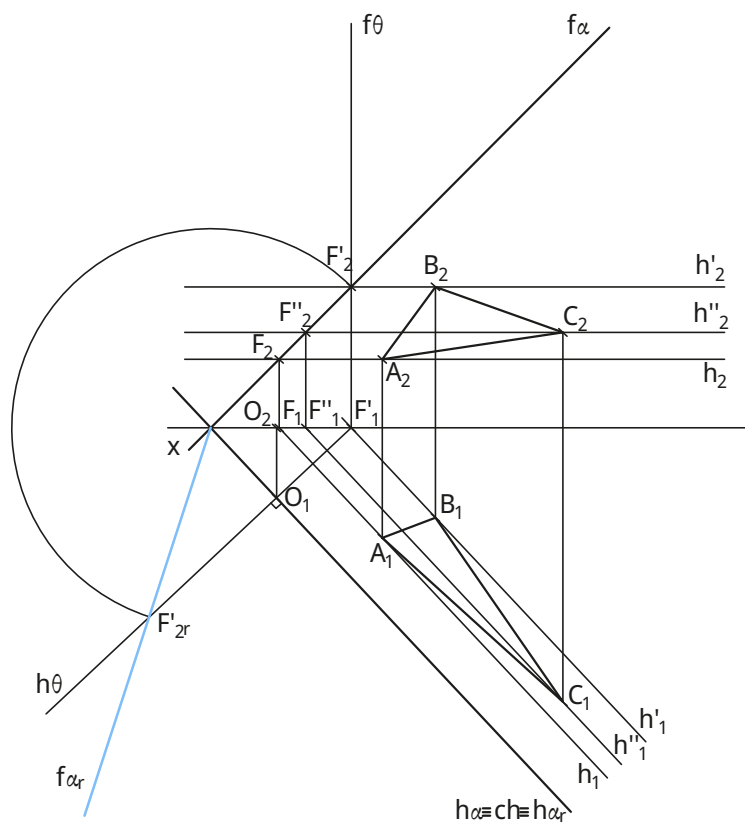
Considerando um plano oblíquo α ao qual pertence o triângulo **[ABC]**, pretende-se determinar a verdadeira grandeza do triângulo.

Para tal, é necessário rebater o plano que o contém, para, posteriormente, rebater as retas que contêm os vértices da figura.

Uma vez que o plano α não é ortogonal a nenhum dos planos de projeção, os arcos do rebatimento não se projetam em verdadeira grandeza em nenhuma das projeções. Neste caso, optou-se por rebater o plano α sobre o Plano Horizontal de Projeção, usando como charneira o traço horizontal do plano.

Assim, o traço a ser rebatido será o seu traço frontal.

Para tal, começa-se por rebater um dos pontos do traço frontal. Rebatido esse ponto, é possível determinar o traço rebatido, dado que o ponto de concorrência dos traços do plano no eixo x se manterá, também, no rebatimento.



Assim, recorrendo a um plano auxiliar, ortogonal ao plano α , a partir do traço frontal da reta que contém o ponto **B** (nota que poderia ser escolhida uma qualquer outra reta do plano), traça-se uma perpendicular ao traço horizontal do plano α , passando pela projeção horizontal do traço frontal da reta que contém o ponto **B**.

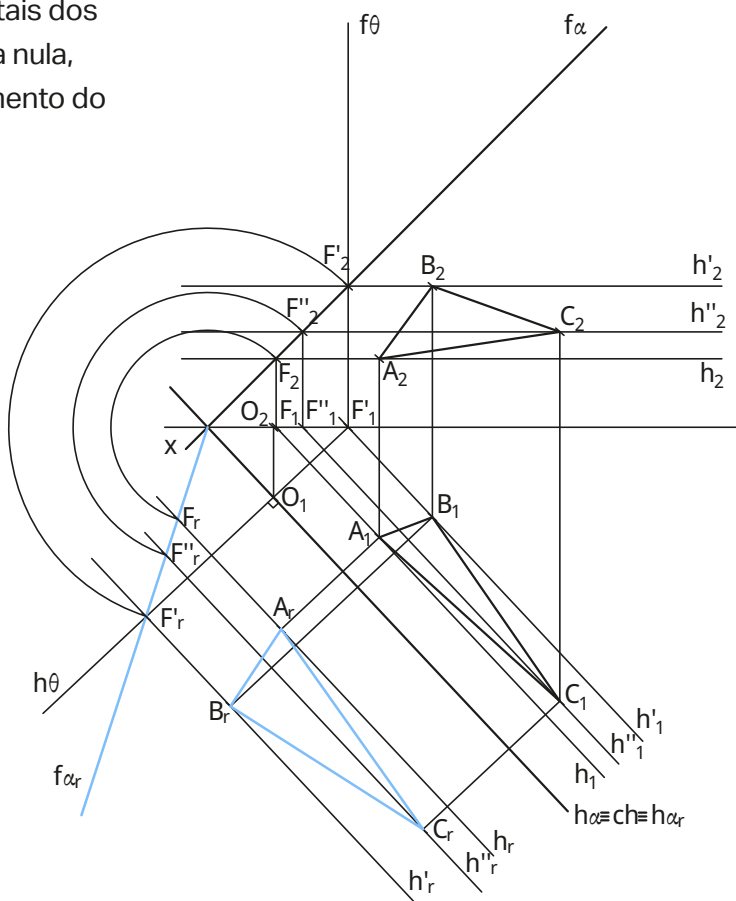
Tratando-se de um plano vertical, a determinação do seu traço frontal é imediata.

Na interseção dos traços horizontais dos planos, tem-se o ponto **O**, de cota nula, que é o centro do arco do rebatimento do ponto **F'**.

Onde o arco cruza o traço horizontal de α rebatido, tem-se o ponto rebatido.

Rebatendo os traços das outras retas que contêm os restantes vértices do triângulo, determinam-se as retas rebatidas, paralelas ao traço horizontal rebatido, tratando-se de retas horizontais.

A partir das projeções horizontais dos pontos, perpendicularmente ao traço horizontal rebatido do plano, tem-se os pontos rebatidos, assim que essas perpendiculares intersetem as paralelas provenientes dos traços frontais rebatidos das retas.



Rebatimento de planos oblíquos – triângulo do rebatimento

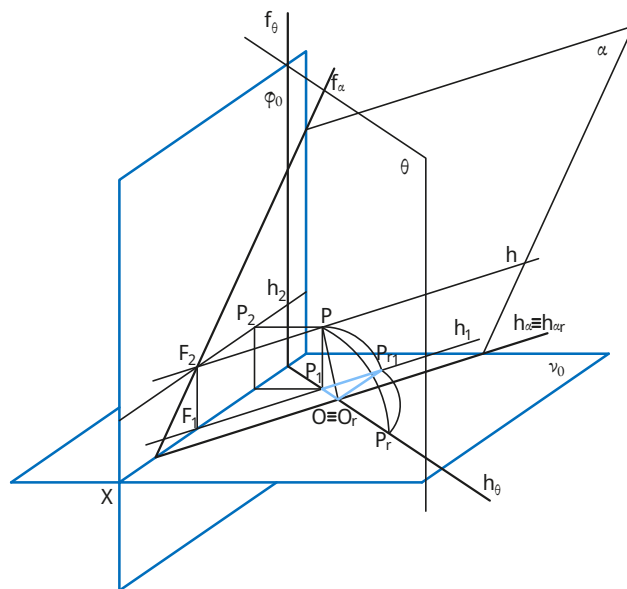
Contrariamente ao método de rebatimento de um plano oblíquo, através do rebatimento dos seus traços, que permite contornar a questão da não-existência de uma projeção em verdadeira grandeza do arco do rebatimento, o método do triângulo do rebatimento permite, precisamente, determinar a verdadeira grandeza desse arco, como veremos.

No caso do rebatimento de um plano oblíquo através do triângulo do rebatimento, este é feito ponto a ponto.

No caso do rebatimento do ponto **P**, pela sua projeção horizontal dever-se-á fazer passar um plano vertical (nota que, neste caso, se optou por um rebatimento sobre o Plano Horizontal de Projeção; se fosse sobre o Plano Frontal de Projeção, o plano auxiliar deveria conter a projeção frontal de **P** e ser um plano de topo).

Na interseção dos traços horizontais dos planos, tem-se o ponto **O**, centro do arco do rebatimento.

[OP] corresponde ao raio do arco do rebatimento.



Neste caso, o triângulo do rebatimento é o triângulo **[OPP_r]**. Esse triângulo está contido no plano vertical, pelo que, para conhecer a sua verdadeira grandeza, é necessário rebater o plano vertical. Assim, uma vez que **O** e **P₁** estão contidos na charneira do rebatimento do plano vertical, rebate-se apenas a cota do ponto **P – P_{r1}**.

Com centro em **O_r** e abertura até **P_{r1}**, transporta-se esse arco até ao traço horizontal do plano auxiliar vertical. Aí tem-se o ponto **P** rebatido – **P_r**.

Considerando o mesmo plano oblíquo **α** (ver página 79), ao qual pertence o triângulo **[ABC]**, pretende-se determinar a verdadeira grandeza da figura geométrica recorrendo ao triângulo do rebatimento.

Como tal, o procedimento a seguir deverá seguir uma sucessão de passos.

Considerando, novamente, o traço horizontal do plano oblíquo como charneira, deve traçar-se, perpendicularmente a este, o traço horizontal de um plano vertical que contenha a projeção horizontal do ponto a rebater.

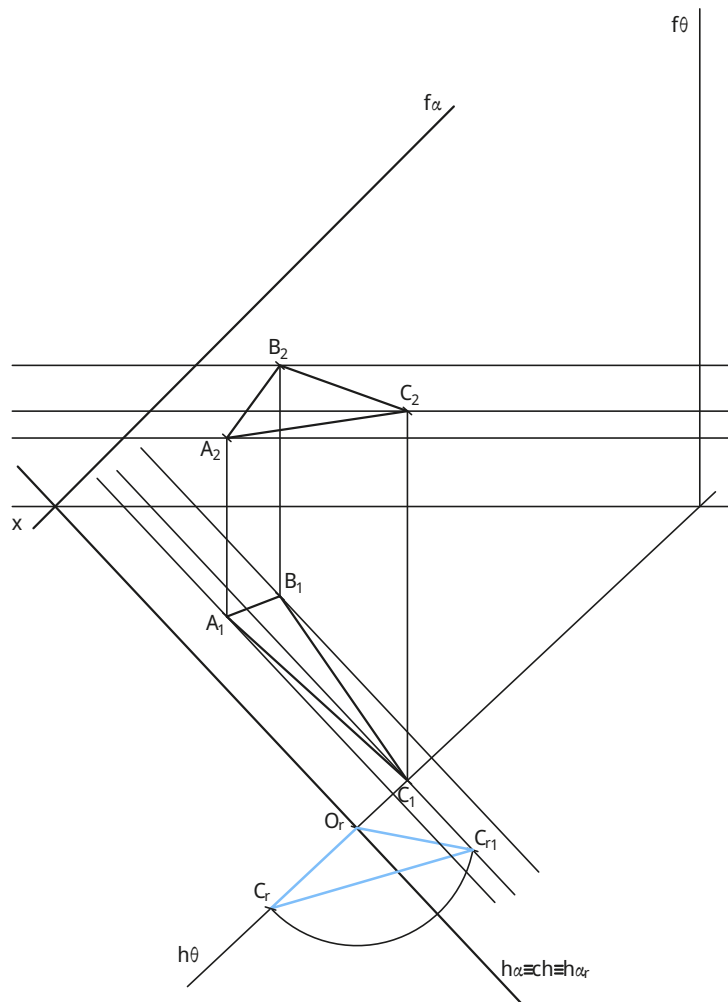
O processo inicia-se com o rebatimento do ponto **C**. Assim, por **C₁** traça-se uma perpendicular ao traço horizontal do plano α que é a charneira do rebatimento.

Essa perpendicular corresponde ao traço horizontal de um plano ortogonal ao plano oblíquo – plano θ . O ponto **C** é um ponto que pertence, em simultâneo, a ambos os planos.

Na interseção dos traços horizontais de ambos os planos – **O_r** –, tem-se o centro do arco do rebatimento do ponto **C**.

Fazendo passar por **C** uma reta horizontal, pertencente ao plano α , marca-se sobre esta a cota do ponto **C**, determinando **C_{r1}**.

Nota que, tratando-se de uma reta horizontal, a sua projeção horizontal está em verdadeira grandeza, pelo que a cota do ponto pode ser marcada diretamente sobre a projeção horizontal da reta que o contém.

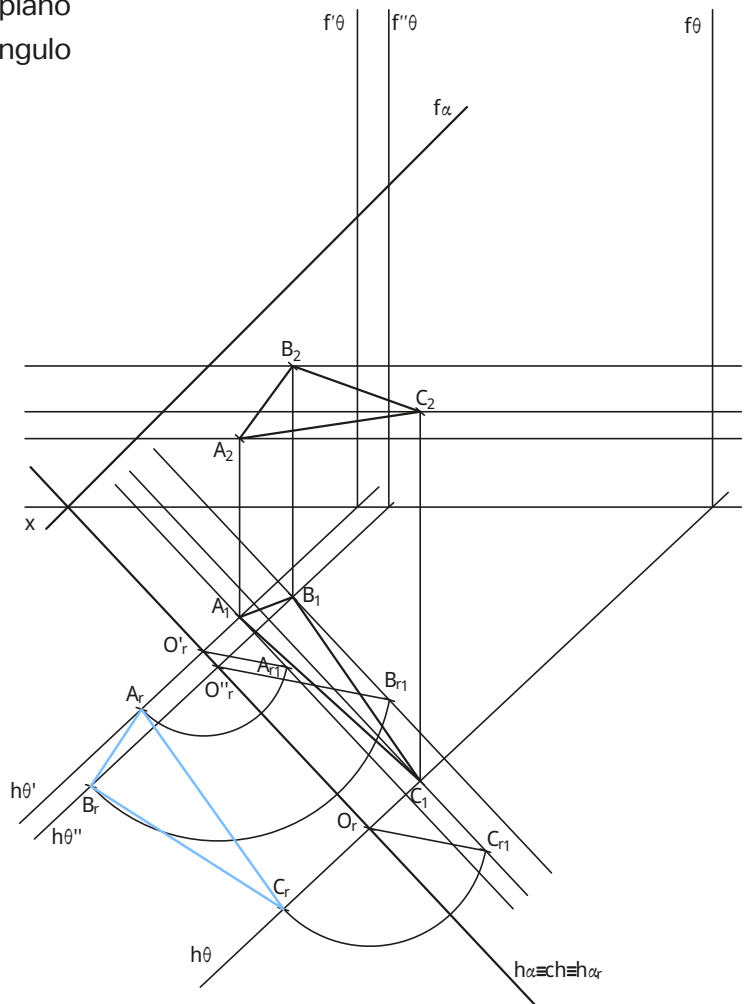


O processo deverá ser repetido para o ponto **B**, através de um terceiro plano vertical, determinando o novo triângulo do rebatimento, e consequente rebatimento do ponto **B**.

Unindo os pontos **A**, **B** e **C** rebatidos, tem-se a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**.

Comparando a figura rebatida com a que foi determinada no exemplo da página 80, recorrendo ao rebatimento dos traços do plano oblíquo, podes verificar que resultam na mesma solução gráfica.

Isso prova que, independentemente do método utilizado, o propósito da determinação da verdadeira grandeza é alcançado em ambos os casos.



Para praticar

- 1 Determina a verdadeira grandeza de um triângulo **[ABC]** contido num plano oblíquo, sabendo que **A** (-2; 3; 5), **B** (0; 4; 3) e **C** (1; 6; 4).
- 2 Sendo dado um plano oblíquo cujos traços horizontal e frontal fazem, respetivamente, ângulos de 45° (a.d.) e 40° (a.d.) com os planos de projeção, determina as projeções de um quadrado **[ABCD]**, sabendo que:
 - **A** (2; 5);
 - a diagonal **[AC]** está contida numa reta horizontal do plano e mede 5 cm.
 - o quadrado situa-se no 1.º diedro.

Rebatimento de planos de rampa

O rebatimento de planos de rampa, à semelhança dos planos oblíquos, pode ser feito de duas formas:

- através do rebatimento dos traços do plano e consequente rebatimento dos seus pontos, pelas retas do plano;
- através do triângulo do rebatimento.

Neste exemplo, considera-se um plano de rampa ρ que contém o ponto P .

O plano auxiliar a ter em consideração é um plano de perfil π , que também contém o ponto P .

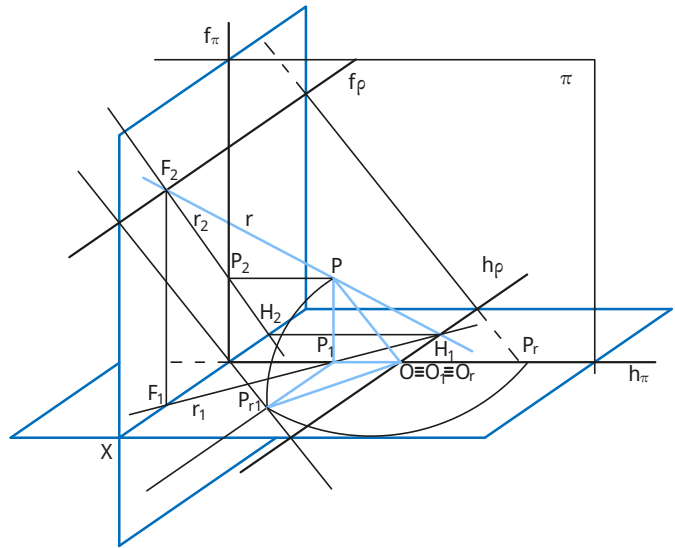
O ponto O é o centro do arco do rebatimento e situa-se na interseção dos traços horizontais de ambos os planos (uma vez que se opta por rebater o plano sobre o Plano Horizontal de Projeção).

A cota do ponto P deverá ser transportada, paralelamente ao eixo x , no mesmo alinhamento de P_1 . Assim, o raio do arco do rebatimento será: $[OP_{r1}]$.

Onde o arco intersesta o traço horizontal do plano de perfil tem-se P_r .

O triângulo do rebatimento é o triângulo $[P_{r1}P_1O]$.

Este é o rebatimento de um plano de rampa segundo o método do triângulo do rebatimento. Na verdade, o método do rebatimento pelo rebatimento dos traços recorre, de igual modo, ao triângulo do rebatimento, mas considerando um ponto do traço a rebater.



Rebatimento de planos de rampa – triângulo do rebatimento

Considerando o triângulo $[ABC]$, contido num plano de rampa ρ , pretende-se determinar a sua verdadeira grandeza.

Para tal, recorre-se a um rebatimento do plano de rampa sobre o Plano Horizontal de Projeção através do método do triângulo do rebatimento. Nota que o rebatimento poderia, igualmente, ser feito sobre o Plano Frontal de Projeção.

Assim, o traço horizontal do plano corresponderá à charneira do rebatimento.

À semelhança do que se passa com o rebatimento de planos oblíquos, também aqui são considerados planos auxiliares, ortogonais ao plano a rebater. Neste caso, **sendo o plano a rebater um plano de rampa, os planos auxiliares a considerar serão planos de perfil.**

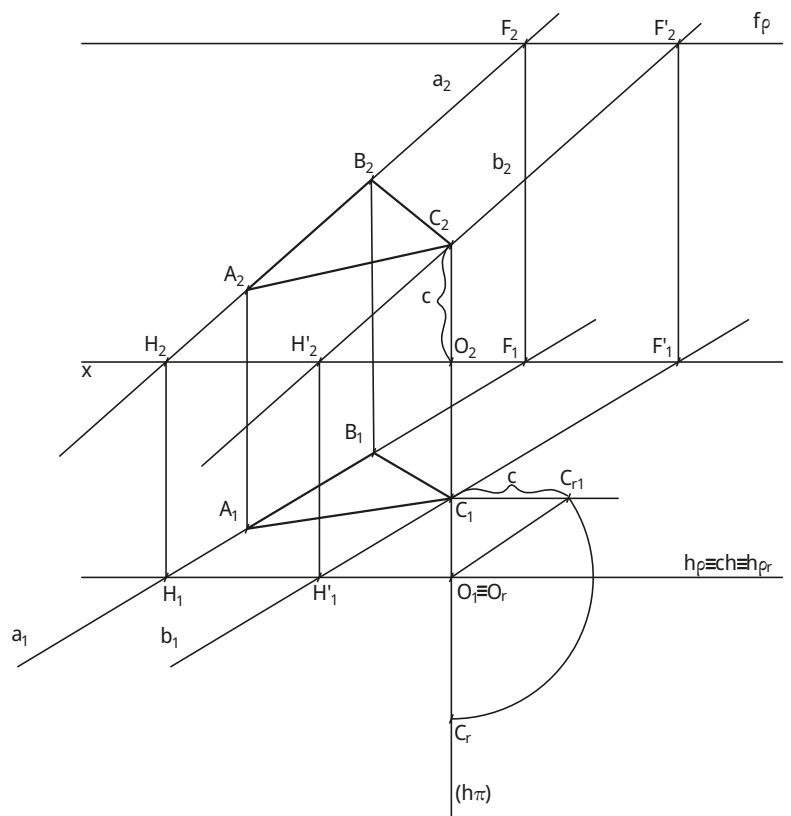
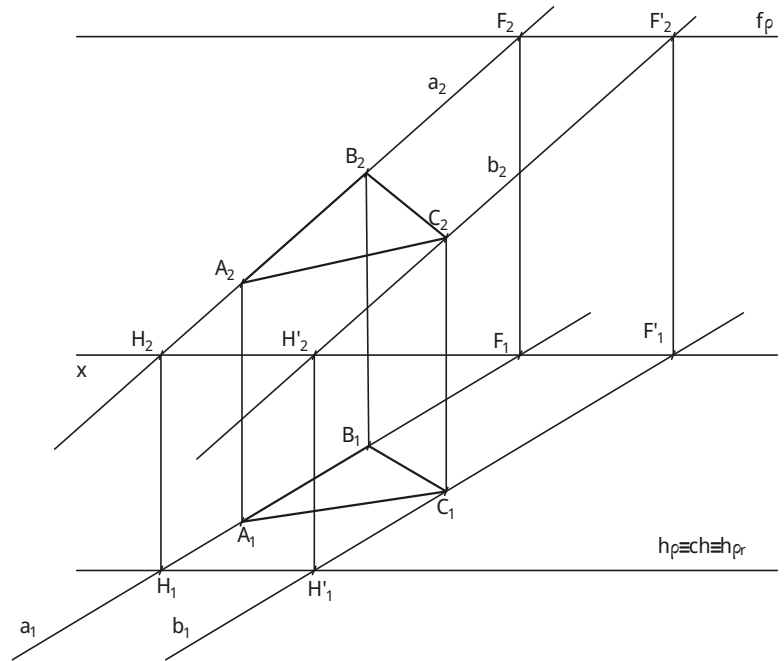
Deste modo, pelas projeções horizontais dos pontos a rebater, deverão passar os traços horizontais dos planos de perfil, auxiliares, onde se irão desenvolver os arcos de rebatimento.

Na interseção dos traços horizontais do plano de rampa e do plano de perfil em questão, estará o ponto **O**, que corresponde ao centro do arco do rebatimento.

Paralelamente ao traço do plano de rampa, e partindo da projeção horizontal de cada um dos pontos, deverá ser anotada a sua cota.

Considerando o rebatimento do ponto **C**, com centro em **O_r**, e abertura até **C_{r1}**, tem-se o raio do arco do rebatimento, que corresponde à hipotenusa do triângulo do rebatimento.

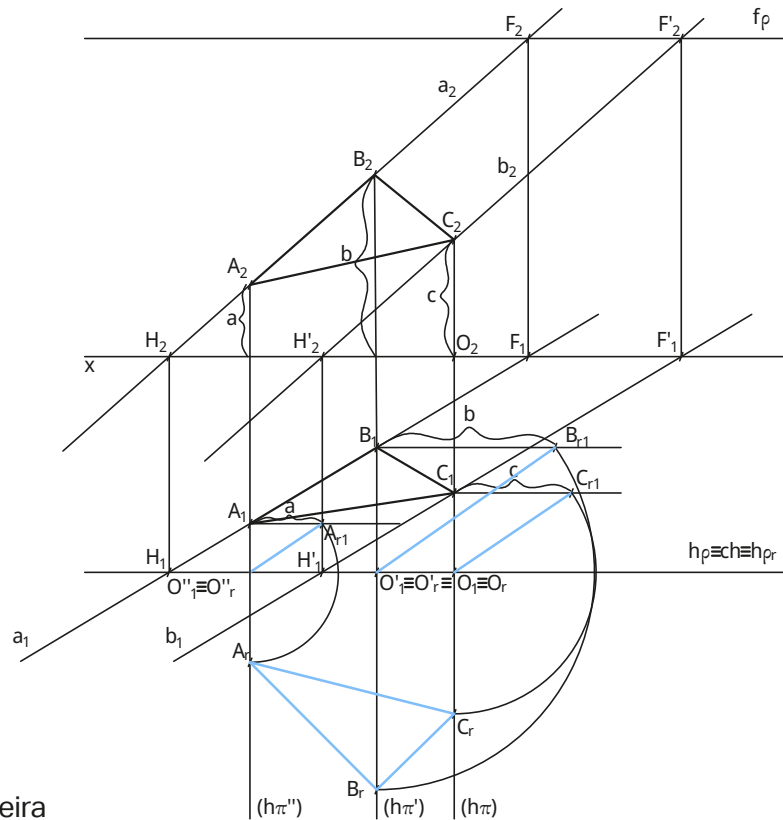
Onde o arco interseeta o traço horizontal do plano de perfil tem-se o ponto **C** rebatido.



O processo deverá ser repetido para os restantes vértices do triângulo, conforme evidenciado no desenho.

Nota que as hipotenusas dos três triângulos de rebatimento representados são paralelas entre si. Estas estão contidas em retas de perfil, paralelas entre si.

O triângulo **[A_rB_rC_r]** é a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**.



Rebatimento de planos de rampa através dos seus traços

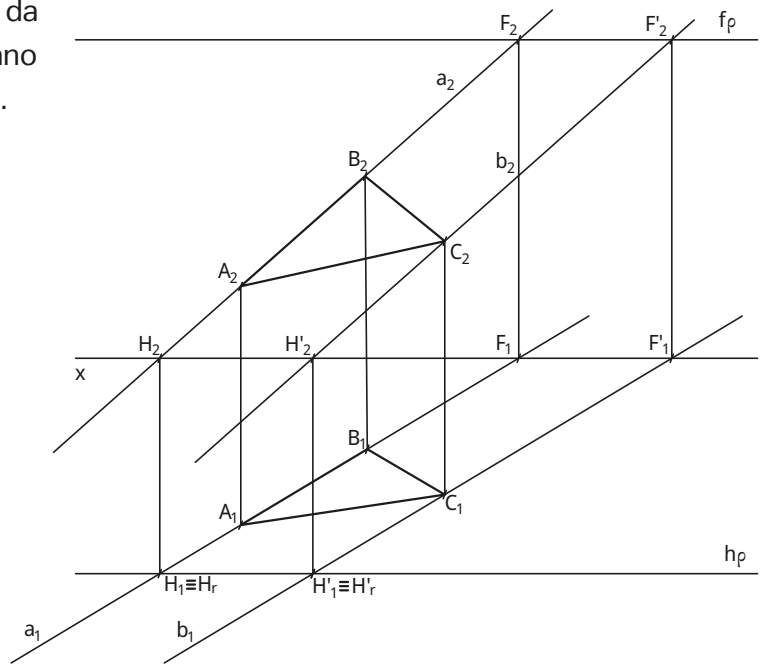
À semelhança do que sucede com os planos oblíquos, também os planos de rampa podem ser rebatidos recorrendo ao método do triângulo do rebatimento, assim como ao rebatimento dos seus traços.

Uma vez que já foi abordado o rebatimento de um plano de rampa recorrendo ao triângulo do rebatimento, estudaremos agora o rebatimento de um plano de rampa através dos seus traços.

Considerando o mesmo plano de rampa e o mesmo triângulo **[ABC]** do exemplo anterior, pretende-se determinar a verdadeira grandeza da figura geométrica rebatendo o plano de rampa através dos seus traços.

Neste caso, nenhum dos vértices do triângulo pertence aos planos de projeção. Assim, não há nenhum fator preferencial que dite para que plano de projeção deve ser feito o rebatimento.

Se um dos vértices pertencesse ao Plano Frontal de Projeção, de acordo com o princípio de economia de meios, o plano deveria ser rebatido sobre o Plano Frontal de Projeção, e sobre o Plano Horizontal de Projeção, caso um dos vértices tivesse cota nula.



O rebatimento do plano ρ é feito com recurso a um plano ortogonal, neste caso, um plano de perfil.

Uma vez que o rebatimento se fará sobre o Plano Horizontal de Projeção, apenas se representa o traço horizontal do plano π .

Esse plano de perfil deverá estar na mesma abcissa do ponto do traço frontal de ρ que irá constar do rebatimento.

Neste caso, considera-se o traço frontal da reta **b**.

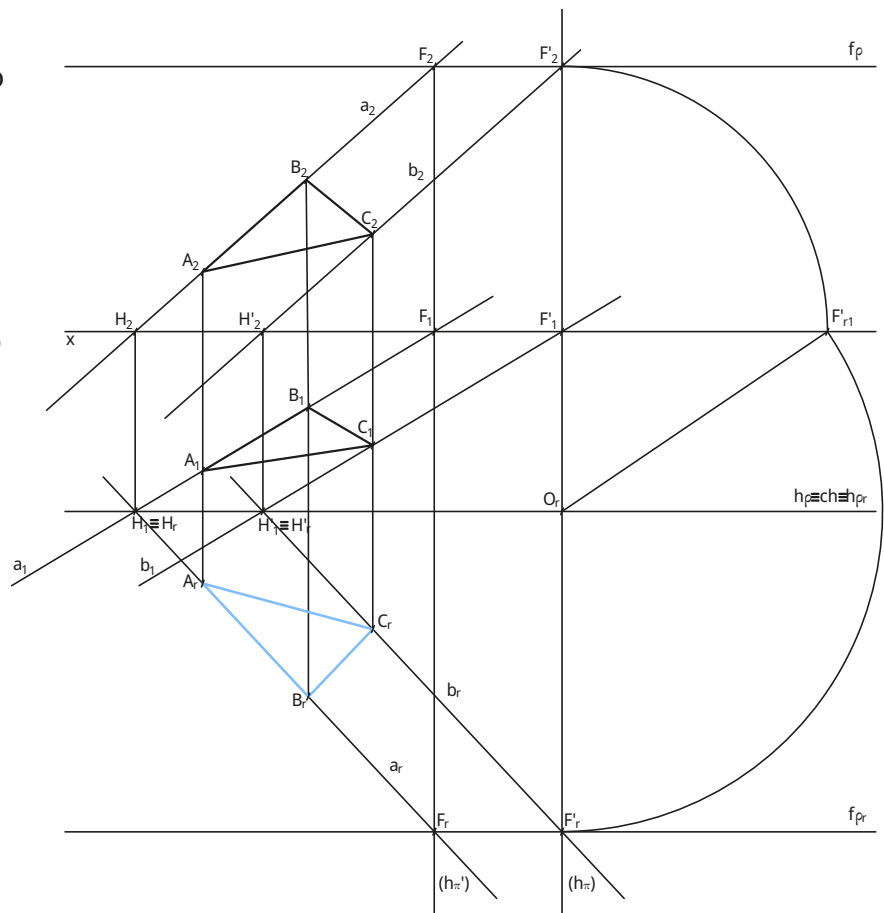
Onde os traços horizontais dos planos se interseitam tem-se o ponto **O_r**, que é o ponto de origem do rebatimento.

Tendo em conta o ponto **F'**, este deve ver a sua cota transposta sobre o eixo **x**. Assim, com centro em **F'₁** e abertura até **F'₂**, transpõe-se essa medida para o eixo **x**, originando **F'_{r1}**.

Para tal, o procedimento passa por transportar linhas de chamada, perpendiculares ao eixo x e aos traços do plano, a partir das projeções dos pontos, culminando nas retas que os contêm no rebatimento.

Sobre a_r estarão A_r e B_r ; e sobre b_r estará C_r .

Através da união dos três pontos rebatidos, tem-se a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**.

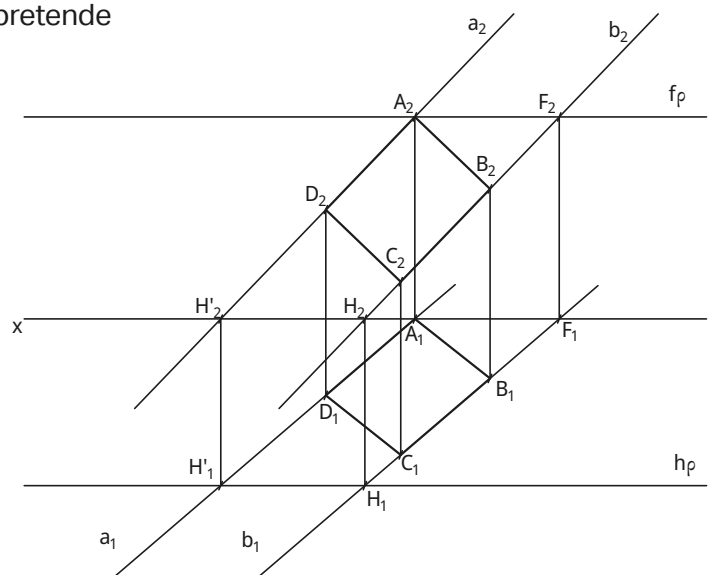


O rebatimento de planos de rampa recorrendo ao rebatimento dos seus traços pode ser o método indicado em casos de grande complexidade dos elementos a determinar, dada a sua simplicidade de traçado.

Considera agora o exemplo de uma figura plana contida num plano de rampa, da qual se pretende determinar a sua verdadeira grandeza.

Observa o plano ρ ao qual pertence o paralelogramo **[ABCD]**.

O vértice **A** da figura é um ponto do traço frontal do plano de rampa. Neste caso, para determinar a verdadeira grandeza do paralelogramo, justifica-se rebater o plano de rampa sobre o Plano Frontal de Projeção, uma vez que um dos vértices, pertencendo à charneira, fica automaticamente rebatido, contribuindo para alguma economia de traçado.



A partir das projeções dos pontos, as linhas de chamada culminam nas retas rebatidas que os contêm, obtendo-se os pontos rebatidos.

Resumindo

Um plano de rampa pode ser rebatido segundo dois métodos:

- triângulo do rebatimento;
- rebatimento dos seus traços.

Em ambos os casos, são utilizados planos auxiliares, ortogonais aos planos de rampa – planos de perfil.

Quando a charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano de rampa, considera-se o traço horizontal do plano de perfil.

Quando a charneira do rebatimento é o traço frontal do plano de rampa, considera-se o traço frontal do plano de perfil.

Para praticar

1 Considera um plano de rampa ρ definido pelos seus traços:

- o traço frontal tem 4 cm de cota;
- o traço horizontal tem 3 cm de afastamento.

Efetua o rebatimento do plano de rampa através do rebatimento dos seus traços, sobre o Plano Frontal de Projeção.

2 Considera o triângulo **[ABC]**, contido num plano de rampa ρ , sendo que:

- o triângulo é isósceles, e o lado **[AB]** é fronto-horizontal, com 2 cm de cota e mede 8 cm;
- o vértice **C** é o ponto de concorrência de duas retas oblíquas, que contêm, cada uma, os pontos **A** e **B**, respetivamente;
- o vértice **C** tem 5 cm de cota e 2 cm de afastamento;
- os lados **[AC]** e **[BC]** são geometricamente iguais;
- o traço horizontal do plano tem 5 cm de afastamento.

Determina a verdadeira grandeza do triângulo.

3 Considerando o lado **[AB]** do exercício anterior, contido no mesmo plano de rampa, considera que este é o lado de um quadrado **[ABCD]**. Determina as projeções do mesmo.

Rebatimento de planos passantes

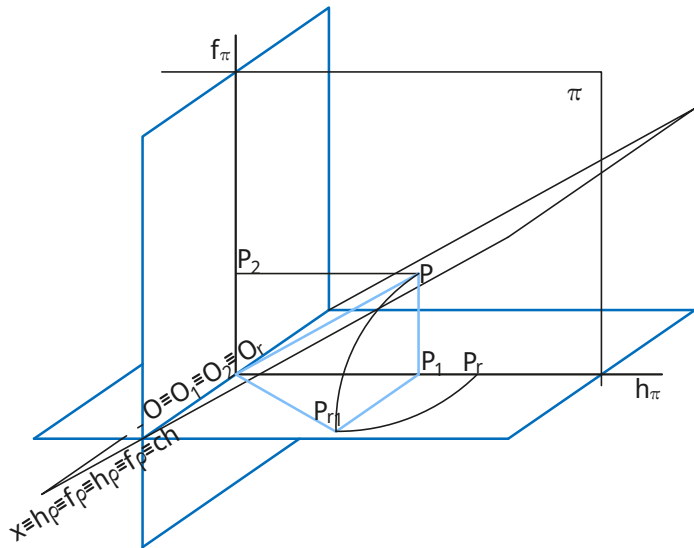
Um plano passante é um caso particular dos planos de rampa, em que os seus traços coincidem com o eixo x . Deste modo, o rebatimento de um plano passante não poderá ser feito através do rebatimento dos seus traços. Contudo, existem dois métodos que podem ser adotados:

- rebatimento através do triângulo do rebatimento;
- rebatimento através das suas retas.

Considerando um plano passante ρ , que contém um ponto P , pretende-se proceder ao rebatimento do mesmo sobre o Plano Horizontal de Projeção.

À semelhança do rebatimento de um plano de rampa, também aqui existe o recurso a um plano auxiliar, de perfil, ortogonal ao plano passante.

Neste caso, assim como os traços do plano passante estão sobre o eixo x , qualquer que seja o rebatimento a executar, estes manter-se-ão sempre coincidentes sobre o eixo x . Assim, o ponto O é, também, um ponto do eixo x , resultado da interseção dos traços do plano passante com os traços do plano de perfil.



A cota do ponto P deverá ser transposta sobre uma linha horizontal, paralela a x e que contenha P_1 . O segmento $[OP_r]$ corresponde ao raio do arco do rebatimento. O ponto de interseção do arco com o traço horizontal do plano de perfil é o ponto P rebatido – P_r .

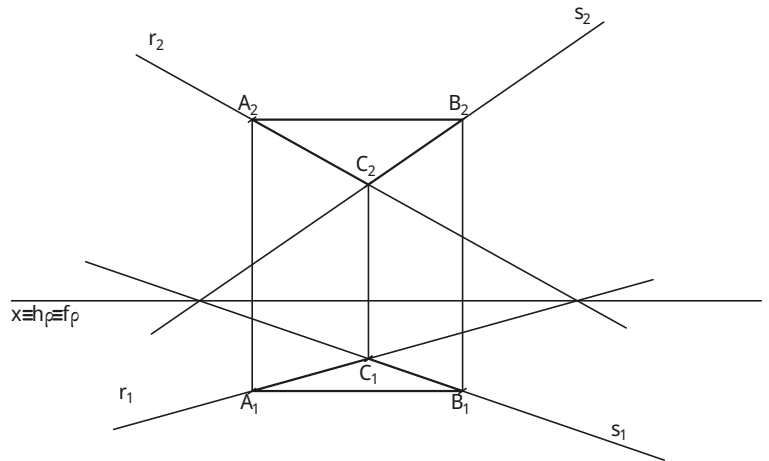
O triângulo do rebatimento é o triângulo $[OP_rP_1]$.

Observa o exemplo:

O plano ρ , passante, contém o triângulo **[ABC]**, do qual se pretende determinar a sua verdadeira grandeza.

Neste caso, um dos lados do triângulo já se encontra em verdadeira grandeza, uma vez que corresponde a um segmento de reta fronto-horizontal **[AB]**.

No entanto, os segmentos **[AC]** e **[BC]** estão sobre retas oblíquas passantes, não se projetando em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.



As retas de suporte destes segmentos são as retas **r** e **s**, pertencentes ao plano passante.

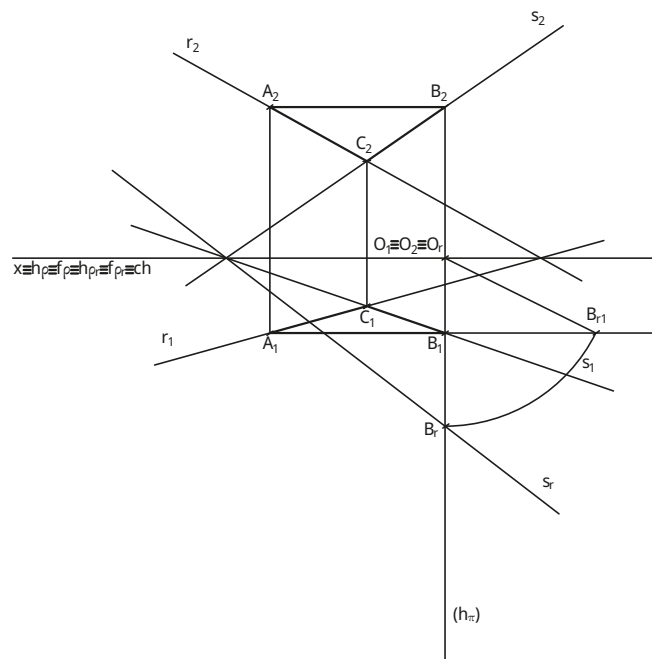
Procede-se, então, ao rebatimento do plano sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Estando os seus traços coincidentes no eixo **x**, também a charneira do rebatimento do plano estará sobre o eixo **x**, coincidente com os traços rebatidos.

Também neste caso se recorre a um plano auxiliar, ortogonal ao plano passante – plano de perfil.

Começando por rebater o ponto **B**, faz-se passar, por este, um plano de perfil, e transpõe-se a cota do mesmo – **B_{r1}**.

Onde os traços de ambos os planos se interseitam tem-se o centro do arco do rebatimento – **O**.



Para praticar

- 1 Determina a verdadeira grandeza de um triângulo **[ABC]**, sendo que:
 - o vértice **A** tem 2 cm de abcissa e 4 cm de cota e o vértice **B** tem -2 cm de abcissa e 4 cm de cota;
 - o triângulo pertence a um plano de rampa passante ρ .
- 2 Considerando um plano de rampa passante ρ definido pelo eixo x e pelo ponto **P** (-3; 6), efetua o rebatimento do mesmo sobre o Plano Horizontal de Projeção.
- 3 Considerando o plano do enunciado anterior, rebate-o, agora, sobre o Plano Frontal de Projeção.
- 4 Considerando o segmento **[BD]**, que corresponde à diagonal de um quadrado **[ABCD]**, sabendo que este pertence a um plano de rampa passante ρ e que:
 - **B** (1; 5; 2) e **D** tem 1 cm de afastamento e -4 cm de abcissa.
 Determina as projeções do quadrado.
- 5 Considera um retângulo **[ABCD]** situado num plano passante, em que:
 - **A** (2; 4; 4), **B** (-2; 4; 4), **C** (2; 2; 2) e **D** (-2; 2; 2)
 Determina a verdadeira grandeza do retângulo, recorrendo ao rebatimento do plano de rampa sobre o Plano Frontal de Projeção.
- 6 Sobre um plano passante, sabe-se que está definido pelos seus traços e por uma reta fronto-horizontal, pertencente ao plano bisetor dos diedros ímpares, que tem 3 cm de afastamento. Essa reta suporta o segmento **[AB]**, com 4 cm, lado de maior cota de um triângulo cujo ponto **C** é um ponto do eixo x , com a mesma abcissa do ponto **B**.

 Determina a verdadeira grandeza do triângulo rebatendo-o sobre qualquer um dos planos de projeção.

Resumindo

Planos não-projetantes podem ser rebatidos segundo dois métodos:

- Triângulo do rebatimento;
- Rebatimento dos seus traços (à exceção dos planos passantes, cujos traços são coincidentes, no eixo x).

No método do triângulo do rebatimento, as diferentes hipotenusas do triângulo do rebatimento de pontos coplanares serão sempre paralelas entre si.

12

Figuras planas III

Projeção de figuras planas em planos oblíquos

Projeção de figuras planas em planos de rampa

Projeção de figuras planas em planos passantes

Sólidos III

Projeção de poliedros com bases contidas em planos oblíquos

Projeção de poliedros com bases contidas em planos de rampa

Projeção de poliedros com bases contidas em planos passantes

Figuras planas III

Projeção de figuras planas em planos oblíquos

Até ao momento, foi abordada a representação de figuras planas em planos projetantes, sendo estes paralelos, ou não, aos planos de projeção.

Quando estes são paralelos aos planos de projeção, uma das projeções da figura plana está em verdadeira grandeza. No caso de planos projetantes não-paralelos a planos de projeção, nenhuma das projeções da figura está em verdadeira grandeza, pelo que é necessário recorrer ao rebatimento do plano projetante que a contém (ver página 53).

Na verdade, no caso de figuras planas contidas em planos oblíquos, é também necessário recorrer a métodos geométricos auxiliares, através do rebatimento do plano oblíquo que o contém. Este pode ser feito com recurso a um dos dois métodos abordados no tema anterior:

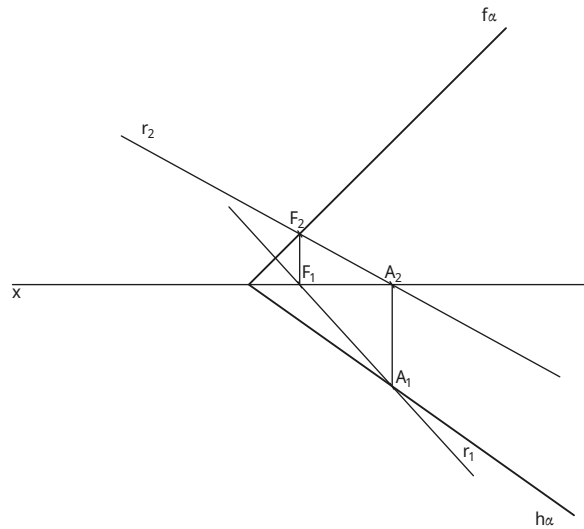
- rebatimento de um plano oblíquo pelo rebatimento dos seus traços;
- rebatimento de um plano oblíquo pelo triângulo do rebatimento.

Projeção de figuras planas a partir do rebatimento dos traços do plano oblíquo que as contém

Num caso em que sejam fornecidos, por exemplo, dois vértices de um quadrado pertencente a um plano oblíquo, a sua representação será feita através do rebatimento do plano, de forma que o quadrado possa ser desenhado em verdadeira grandeza, contrarreatando o plano de seguida, determinando as projeções do quadrado em dupla projeção ortogonal.

Observa o seguinte exemplo:

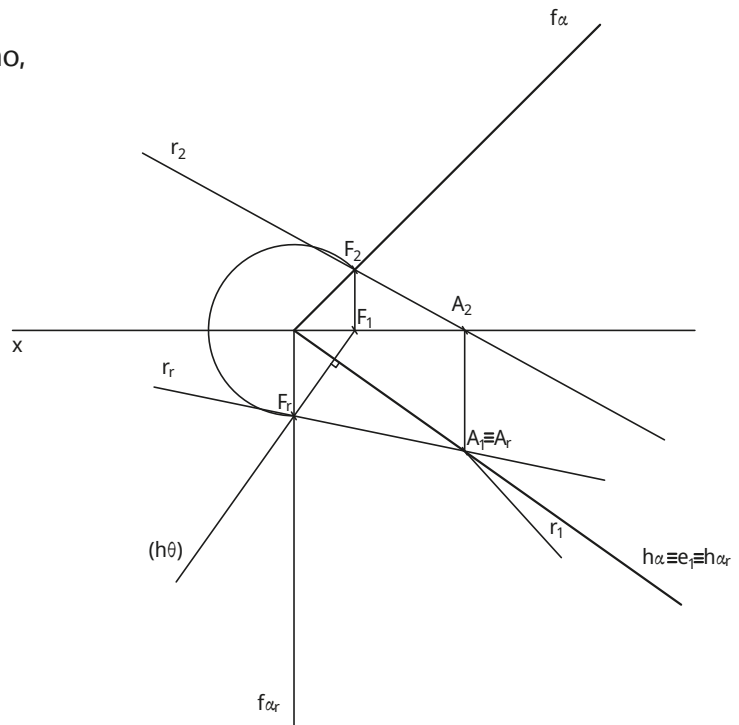
Sendo dado um plano oblíquo α , cujo traço frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 45° (a.d.) e o traço horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.d.), sabe-se que este contém um quadrado **[ABCD]**, situado no 1.º diedro. Sobre o quadrado, sabe-se que o lado **[AB]** pertence a uma reta do plano cujo traço frontal tem 2 cm de cota, e o traço horizontal, 4 cm de afastamento. O vértice **A** corresponde ao traço horizontal da reta r , de suporte do segmento **[AB]**. O quadrado tem 3 cm de lado.



Neste caso, uma vez que um dos vértices do quadrado é um ponto do traço do plano, sugere-se a resolução do problema com recurso ao rebatimento dos traços do plano oblíquo.

Sendo o ponto **A** um ponto do traço horizontal do plano e, por conseguinte, do Plano Horizontal de Projeção, sugere-se que o rebatimento do plano oblíquo tenha como charneira o seu traço horizontal, sendo rebatido sobre o Plano Horizontal de Projeção. Deste modo, o ponto **A** rebatido ficará coincidente com o ponto em si.

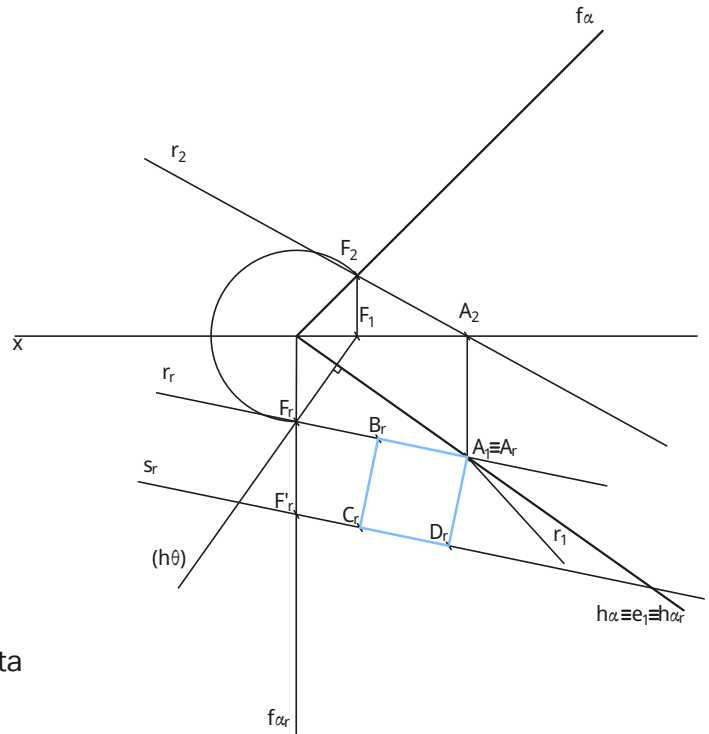
Recorrendo a um plano auxiliar θ , vertical, ortogonal ao plano oblíquo α , efetua-se o rebatimento do ponto **F**, traço frontal da reta r , que contém o ponto **A**, sendo **F** um ponto do traço que se pretende rebater.



Com centro no ponto de concorrência dos traços do plano oblíquo, traça-se um arco, transportando F_2 para o traço horizontal do plano auxiliar, obtendo F_r .

Uma vez que o ponto de concorrência dos traços do plano oblíquo fica sobre si próprio após o rebatimento, é possível determinar o traço frontal do plano sobre o Plano Horizontal de Projeção. Assim, unindo F_r ao ponto de concorrência dos traços de α , tem-se f_{α_r} .

Dado que F e A são pontos da reta r , esta pode ser representada no rebatimento, visto que ambos os pontos já se encontram rebatidos.



Sabendo que o quadrado **[ABCD]** está situado no 1.º diedro, sabe-se que, no rebatimento, este deve estar compreendido entre os traços do plano rebatido.

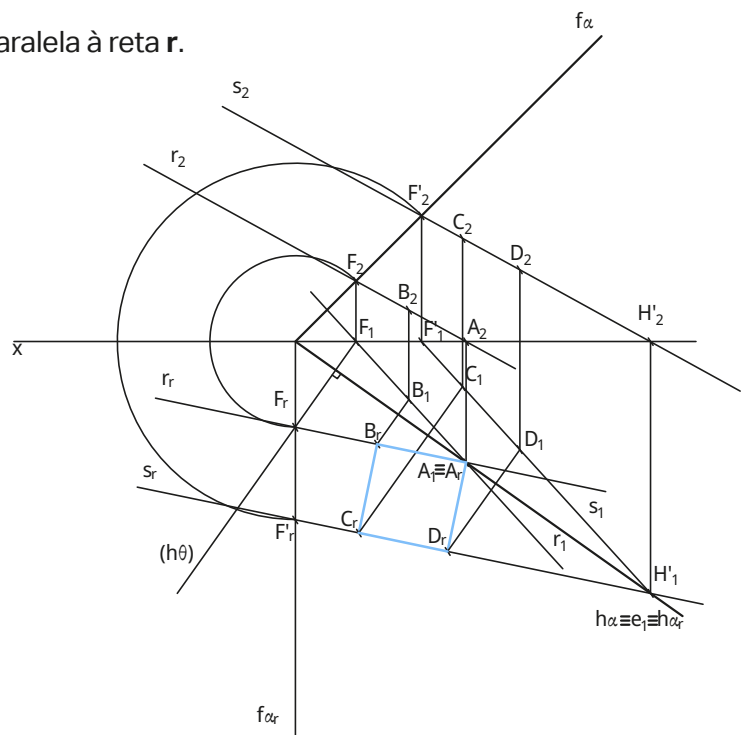
Assim, sobre r_r , marca-se a medida do lado do quadrado em verdadeira grandeza, uma vez que se sabe que o lado **[AB]** está sobre a reta r .

A partir daí, é feita a construção do quadrado no plano rebatido.

O lado **[CD]** está contido numa reta s , paralela à reta r .

Tendo o quadrado representado no rebatimento, é necessário contrarrebater os pontos **B**, **C** e **D**, de forma a determinar as suas projeções em dupla projeção ortogonal.

Para tal, é feito o procedimento inverso do rebatimento, transportando F'_r – traço frontal rebatido da reta s – para o traço frontal do plano oblíquo.



Sabendo que as retas r e s são paralelas, sabe-se que as suas projeções serão, também, paralelas. Deste modo, não é necessário mais nenhum ponto da reta s para determinar as suas projeções.

Por F'_2 , traça-se uma projeção paralela a $r_2 - s_2$.

Determinando o traço horizontal dessa reta, é possível determinar a sua projeção horizontal, paralela a r_1 .

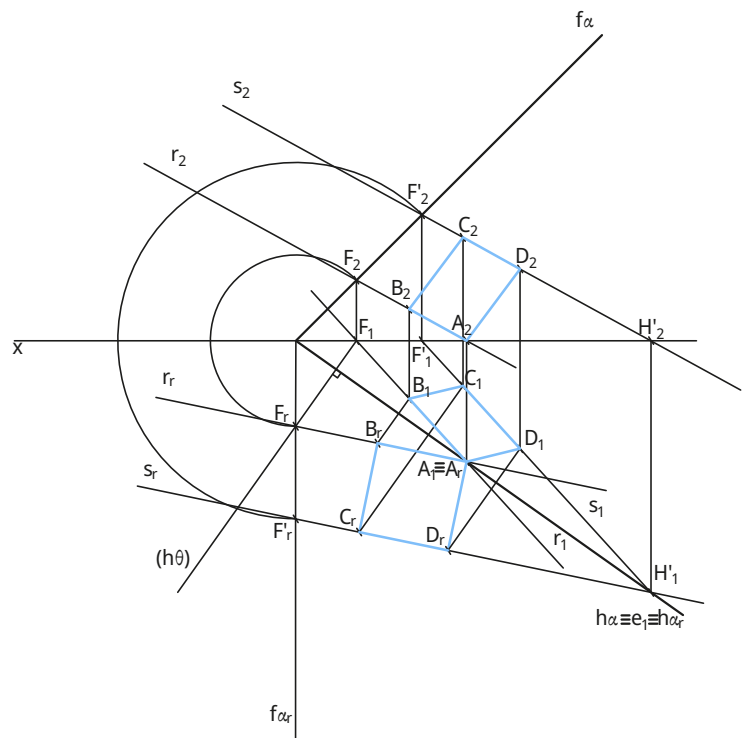
Estando as retas que contêm os vértices do quadrado representadas pelas suas projeções, é possível contrarrebater esses pontos, transportando-os, desde o rebatimento, perpendicularmente à charneira do rebatimento até à projeção horizontal da reta que os contém.

As projeções dos pontos deverão estar sobre as projeções das retas que os contém.

Unindo as projeções frontais dos pontos, tem-se a projeção frontal do quadrado **[ABCD]**.

Unindo as projeções horizontais dos pontos, tem-se a projeção horizontal do quadrado **[ABCD]**.

É, assim, feita a representação, pelas suas projeções, de um quadrado contido num plano oblíquo.



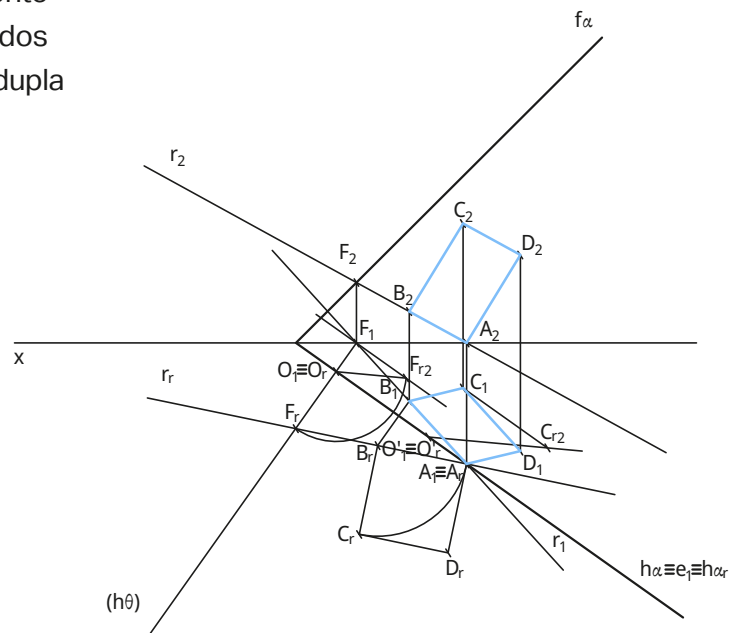
Estando os pontos **A** e **C** representados pelas suas projeções, apenas é necessário determinar a projeção de mais um ponto do quadrado, uma vez que os seus lados serão sempre paralelos, mesmo em dupla projeção ortogonal.

O ponto **B**, estando sobre a reta r , não necessita do método do triângulo do rebatimento, bastando, a partir de B_r , traçar uma perpendicular à charneira, e conduzi-la até r_1 . Aí tem-se a projeção horizontal do ponto **B**. A projeção frontal deverá estar sobre r_2 .

Estando os pontos **A** e **B** representados pelas suas projeções, tem-se o lado **AB** do quadrado em dupla projeção ortogonal. O lado **CD** deverá ser paralelo a **AB**. Assim, será determinada a dupla projeção do ponto **D**.

A determinação das projeções do ponto **D** poderia ser feita com recurso, novamente, ao triângulo do rebatimento. Contudo, dada a complexidade do desenho, opta-se por um processo que permita economizar algum traçado.

Compara o resultado de ambos os enunciados, utilizando o rebatimento dos traços ou o triângulo do rebatimento. Verifica que as projeções do quadrado são exatamente iguais, independentemente do método escolhido.



Resumindo

A projeção de figuras planas contidas em planos oblíquos, não sendo dadas as coordenadas de todos os seus vértices, recorre a métodos geométricos auxiliares:

- rebatimento dos traços do plano;
- rebatimento através do triângulo do rebatimento.

No método do triângulo do rebatimento, as hipotenusas de todos os triângulos de rebatimento dos vértices de uma mesma figura são sempre paralelas entre si.

Para praticar

- 1 Considera um plano oblíquo α , cujo traço frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.d.), e cujo traço horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 45° (a.d.). Sabe-se que esse plano contém um triângulo equilátero do 1.º diedro, cujo vértice **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção com 3 cm de cota. Sabendo que o segmento **[AB]** com 4 cm, corresponde a um dos lados do triângulo e que se encontra sobre uma reta horizontal de plano, representa o triângulo pelas suas projeções.
- 2 Considera um plano oblíquo α , ortogonal ao plano $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 50° (a.e.). Determina as projeções de um quadrado **[ABCD]**, pertencente a esse plano, sabendo que o lado **[AB]** é frontal, mede 4 cm e o ponto **B** tem 3 cm de afastamento e 2 cm de cota e está à direita de **A**.
- 3 Determina as projeções de um triângulo equilátero **[ABC]**, sabendo que **A** (-3; 2; 5) e **B** (0; 4; 3) são dois vértices do triângulo que pertencem a uma reta i , de maior inclinação do plano oblíquo α no qual se insere o triângulo. O ponto **C** é o ponto de maior cota do triângulo.

Projeção de figuras planas em planos de rampa

À semelhança do que acontece com os planos oblíquos, também a projeção de figuras planas em planos de rampa recorre a métodos geométricos auxiliares, uma vez que nenhuma das projeções de uma figura contida num plano de rampa se encontra em verdadeira grandeza.

Como tal, o processo poderá seguir um de dois procedimentos:

- rebatimento de um plano de rampa pelo rebatimento dos seus traços;
- rebatimento de um plano de rampa pelo triângulo do rebatimento.

Projeção de figuras planas a partir do rebatimento dos traços do plano de rampa que as contém

Considerando uma reta r , definida pelos pontos **A** (2; 3; 2) e **B** (-1; 1; 5), pertencente a um plano de rampa ρ , e sabendo que os pontos **A** e **B** correspondem a dois vértices de um triângulo equilátero **[ABC]**, pertencente ao plano de rampa, pretende-se determinar as projeções do triângulo.

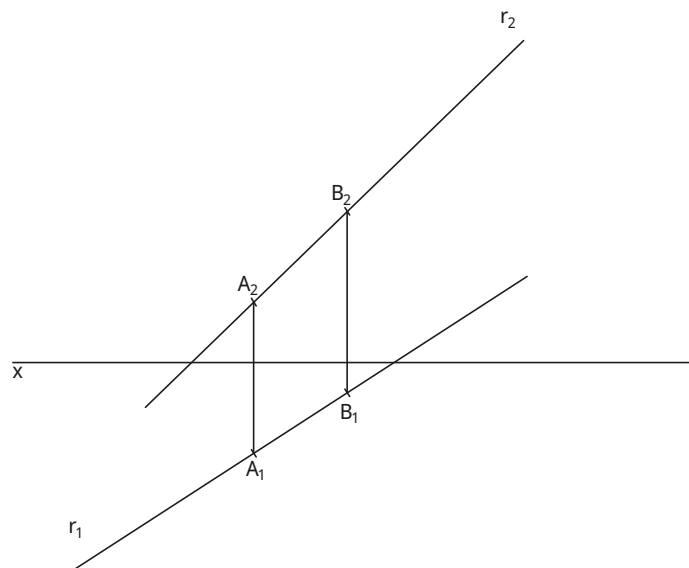
Uma vez que, em dupla projeção ortogonal, nenhuma das projeções se encontra em verdadeira grandeza, é necessário recorrer a um método auxiliar.

Neste caso, optou-se pelo rebatimento do plano de rampa através do rebatimento dos seus traços.

Observa o exemplo:

Inicialmente, começa-se por representar os pontos **A** e **B** pelas suas coordenadas. Representados os pontos, é possível determinar as projeções da reta **r**, do plano **p**.

Uma vez que a orientação dos traços de um plano de rampa é sempre a mesma, ou seja, são sempre paralelos ao eixo **x**, basta uma reta do plano para que seja possível determinar os traços do plano.

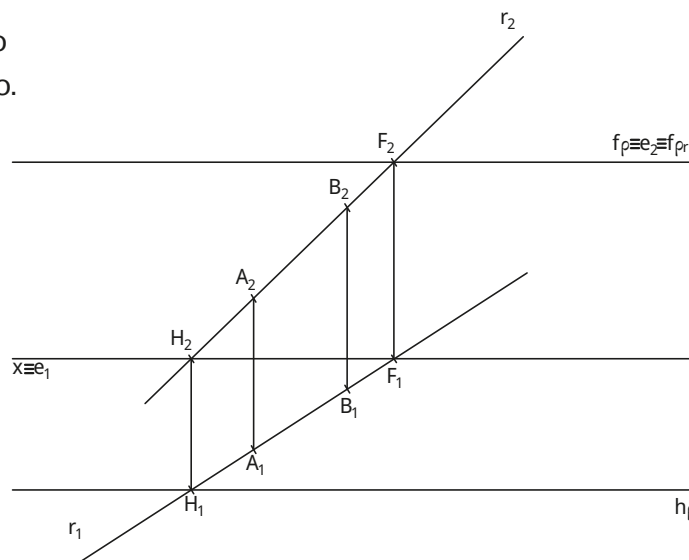


Para tal, devem determinar-se os traços da reta **r**, que serão pontos dos traços do plano.

Assim, por **F₂** conduz-se o traço frontal do plano, e por **H₁**, o traço horizontal do plano.

Determinados os traços do plano, existem elementos suficientes para proceder ao rebatimento do plano de rampa, através do rebatimento dos seus traços.

Neste caso, nenhum dos pontos dados pertence a um plano de projeção. Como tal, a escolha do plano de projeção para o qual deverá ser rebatido o plano é arbitrária.



Optou-se, neste exemplo, por rebater o plano sobre o Plano Frontal de Projeção, usando o traço frontal do plano de rampa como charneira do rebatimento.

Tratando-se de um triângulo equilátero, e sabendo que o segmento **[AB]** corresponde a um dos lados do triângulo, procede-se, no rebatimento, à construção do triângulo a partir do segmento **[A_rB_r]**. Com centro em **B_r**, e abertura até **A_r**, marca-se um arco, e depois, no sentido contrário, o outro arco. Onde ambos se interseitam, tem-se **C_r**.

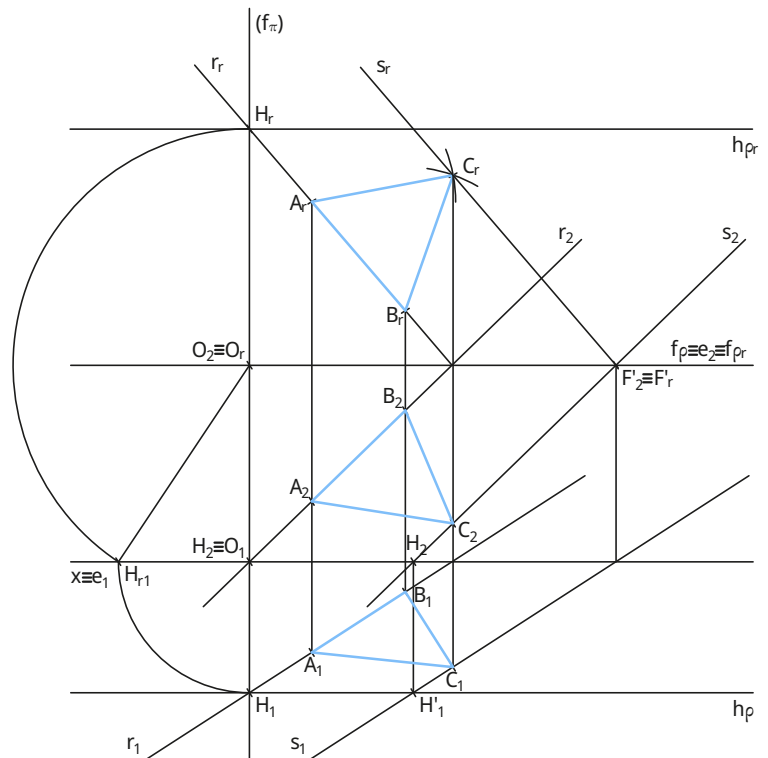
Estando o triângulo representado no rebatimento, é necessário contrarrebater o ponto **C**, para que se possa ter o triângulo representado em dupla projeção ortogonal.

Para tal, optou-se por fazer passar por **C_r** uma paralela a **r_r – s_r**.

A reta **s** é uma reta do plano **p** que contém o ponto **C**.

Onde a reta **s_r** interseita o traço frontal de **p** tem-se o traço frontal da reta **s**, e onde esta interseita o traço horizontal rebatido de **p** tem-se o seu traço horizontal rebatido.

Uma vez que **r** e **s** são paralelas, não é necessário contrarrebater o traço horizontal rebatido da reta **s**, pois ela já está definida por um ponto e uma direção – ponto **F'** e paralelismo com a reta **r**.



Assim, por **F'₂** traça-se uma paralela a **r₂**, e onde essa projeção interseitar o eixo **x** tem-se **H'₂**.

H'₁ deverá estar sobre **h_p**.

Determinada a reta **s** pelas suas projeções, através de uma linha de chamada a partir de **C_r**, determinam-se as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta **s**.

Unindo as projeções dos pontos **A**, **B** e **C**, tem-se o triângulo **[ABC]** representado pelas suas projeções.

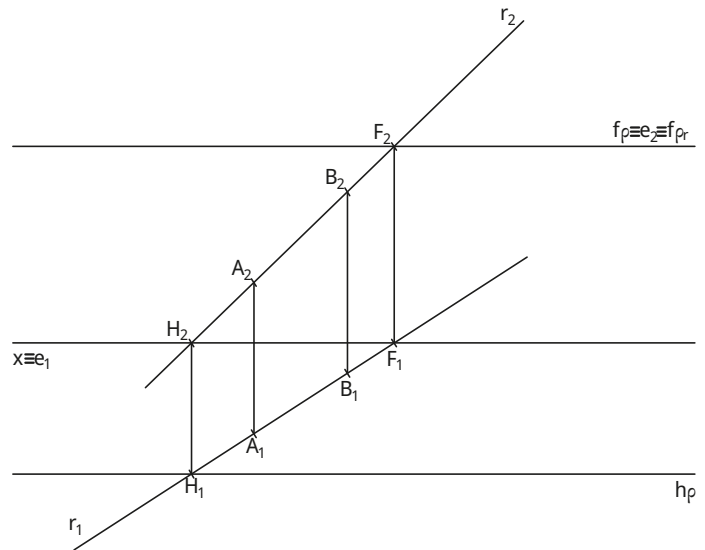
Projeção de figuras planas a partir do método do triângulo do rebatimento do plano de rampa que as contém

Considerando o enunciado anterior, pretende-se determinar as projeções do mesmo triângulo **[ABC]**, recorrendo, porém, ao método do triângulo do rebatimento.

Observa o exemplo:

Considerando a mesma reta **r**, que contém os vértices **A** e **B** de um triângulo equilátero contido num plano de rampa **p**, para determinar as suas projeções é necessário rebater os dois vértices conhecidos do triângulo.

Usando o método do triângulo do rebatimento, o plano auxiliar a que se recorre deve conter o ponto a rebater – o rebatimento é feito ponto a ponto.

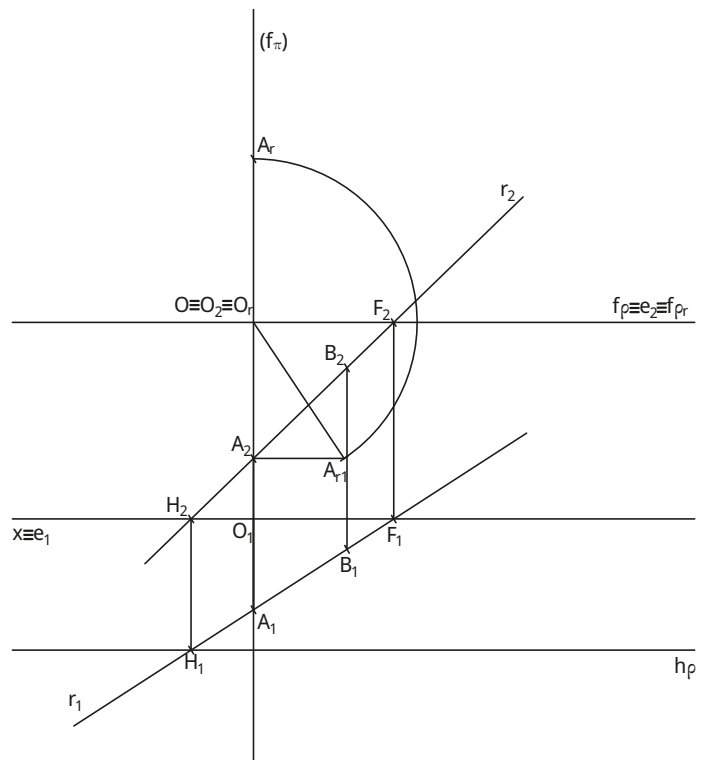


Assim, começando pelo ponto **A**, deve fazer-se passar por **A** um plano auxiliar, de perfil, ortogonal ao plano de rampa.

Perpendicularmente ao traço do plano auxiliar, por **A₂**, marca-se o afastamento do ponto **A** – **[A₂A_{r1}]** corresponde ao afastamento do ponto **A**.

O ponto **O** – origem do arco do rebatimento – situa-se na interseção dos traços frontais dos planos de rampa e de perfil. O triângulo do rebatimento é **[O₂A₂A_{r1}]**.

A hipotenusa do triângulo – **[O₂A_{r1}]** – corresponde ao raio do arco do rebatimento. Assim, com centro em **O**, traça-se o arco até este interseccionar o traço do plano auxiliar, obtendo **A_r**.



O processo deverá ser repetido para o ponto **B**, desta vez com um plano auxiliar, também de perfil, que contenha o ponto **B**.

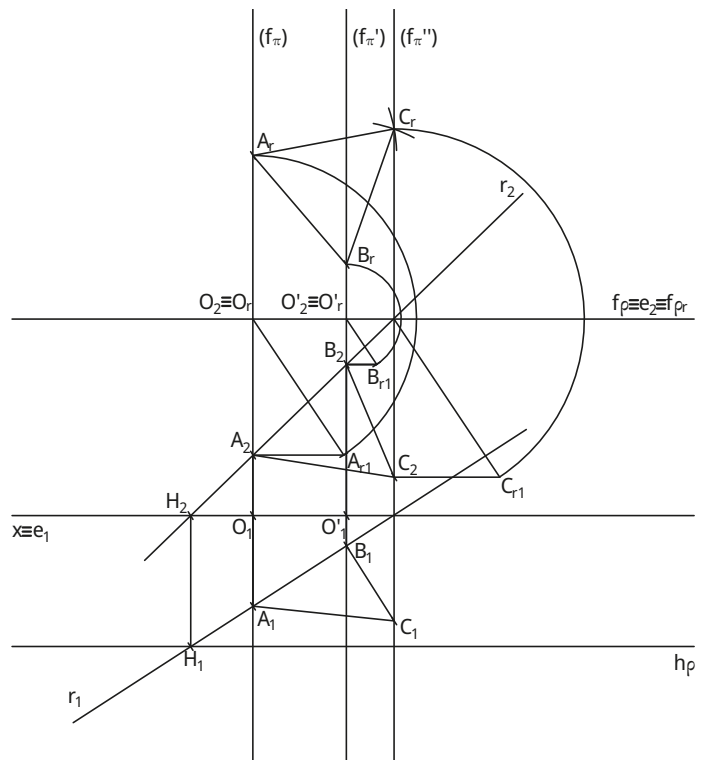
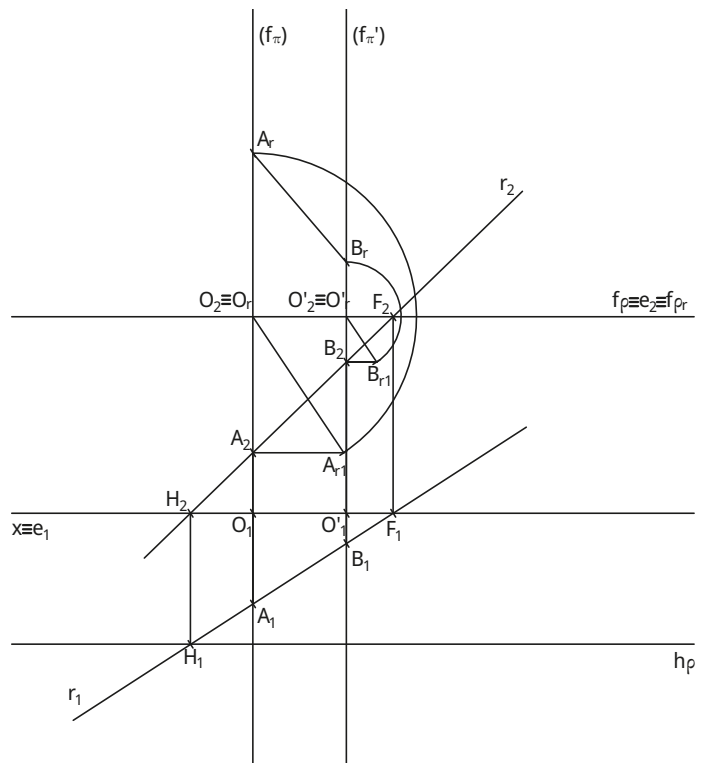
Nota que as hipotenusas dos triângulos de rebatimento de ambos os pontos são paralelas entre si, por se tratar de pontos contidos no mesmo plano.

Rebatidos os pontos **A** e **B**, tem-se o lado **[AB]** do triângulo em verdadeira grandeza, sendo possível proceder ao desenho do triângulo no plano rebatido, em verdadeira grandeza, obtendo **C_r**.

De seguida, é necessário contrarrebater o ponto **C**, fazendo o inverso do que foi feito com os pontos **A** e **B**. Assim, com base num novo plano auxiliar, por **C_r**, determina-se a interseção desse plano com o eixo **x**, e traça-se uma paralela às hipotenusas dos outros triângulos de rebatimento. Com centro na interseção de **f π ''** com a charneira do rebatimento e abertura até **C_r**, traça-se um arco até interseção a hipotenusa do triângulo de rebatimento do ponto **C**, originando **C_{r1}**.

Por **C_{r1}**, perpendicularmente ao plano auxiliar, traça-se uma linha de chamada, que conduzirá à projeção frontal do ponto **C**.

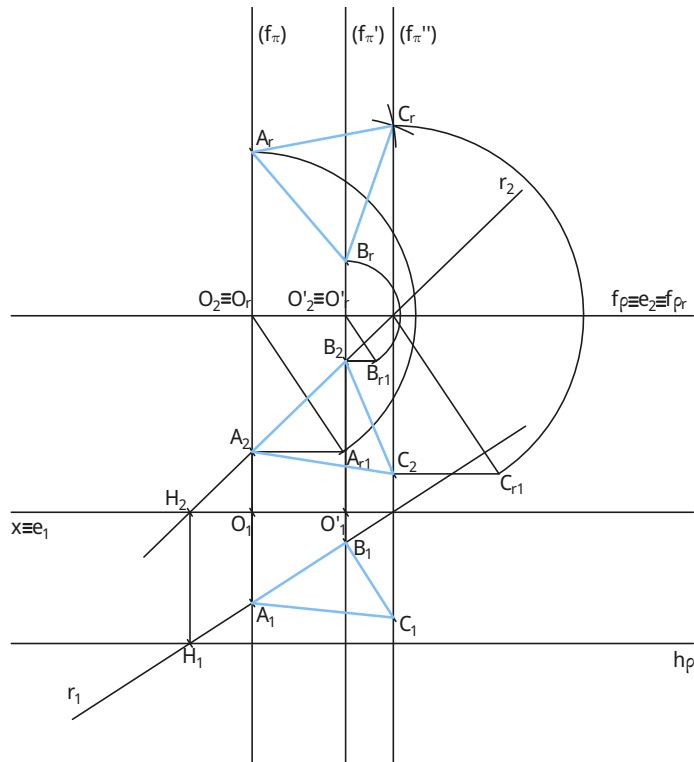
Sabendo que **[C₂C_{r1}]** corresponde ao afastamento do ponto **C**, é possível determinar a sua projeção horizontal.



Assim, os vértices do triângulo encontram-se representados em dupla projeção ortogonal, sendo possível, então, determinar as projeções do triângulo **[ABC]**.

Nota que a solução gráfica é em tudo semelhante àquela que resulta do rebatimento dos traços do plano de rampa.

Na verdade, o método de rebatimento dos traços do plano e o método do triângulo do rebatimento são dois caminhos distintos para o mesmo objetivo, com o mesmo resultado.



Para praticar

- 1 Considerando os pontos **A** e **C**, extremos da diagonal de um quadrado **[ABCD]**, pertencente a um plano de rampa ρ , situado no 1.º diedro, sendo que **A** (-2; 5; 2) e **C** (1; 2; 4), determina as projeções do quadrado, recorrendo ao método do rebatimento dos traços do plano.
- 2 Considera o quadrado do enunciado anterior. Determina as suas projeções recorrendo ao método do triângulo do rebatimento.
- 3 Considera um triângulo equilátero **[ABC]**, contido num plano de rampa ρ . Do triângulo, sabe-se que o lado **[AB]** é de perfil. O ponto **C** (0; 4; 3) é o vértice mais à direita do triângulo e o ponto **O** (3; 4; 3) é o centro da circunferência na qual se inscreve o triângulo. O traço frontal de ρ tem 7 cm de cota e o plano é ortogonal ao $\beta_{1/3}$. Determina as suas projeções recorrendo a um dos métodos à tua escolha.

Projeção de figuras planas em planos passantes

À semelhança do que acontece com as figuras planas contidas em planos de rampa, também as figuras contidas em planos passantes não se projetam em verdadeira grandeza nos planos de projeção. Assim, é necessário recorrer a métodos geométricos auxiliares.

Uma vez que o plano passante tem os seus traços coincidentes no eixo x , não se aplica o método de rebatimento dos traços dos planos, pois iriam sofrer uma rotação sobre si mesmos.

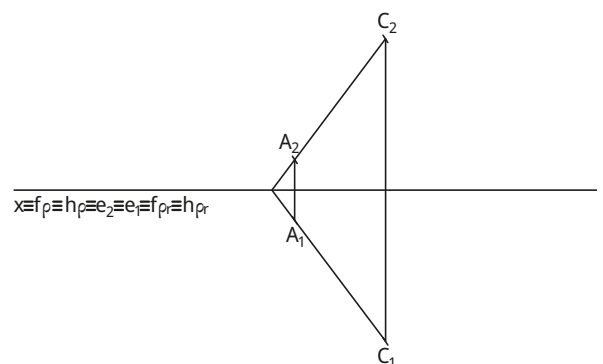
Assim, o método que se impõe é o método do triângulo do rebatimento.

À semelhança dos exemplos anteriores, irá abordar-se este tema a partir de um exemplo concreto.

Considerando um quadrado **[ABCD]**, em que os pontos **A** e **C** são extremos de uma das diagonais do quadrado, sendo que os pontos **A** e **C** pertencem, simultaneamente, ao plano $\beta_{1/3}$ e os planos das abcissas em que se inserem distam 3 cm entre si. O ponto **A** tem 1 cm de cota e o ponto **C** tem 5 cm de cota. Pretende-se determinar as projeções do quadrado, pertencente a um plano passante ρ .

Transpondo os dados para o plano do desenho, tem-se o ponto **A**, representado pelas suas projeções. Sabe-se que o ponto **C** dista, no eixo x , 3 cm da abcissa do ponto **A**. Uma vez que se trata de pontos que pertencem, simultaneamente, ao plano ρ ao plano do plano $\beta_{1/3}$, as suas projeções serão simétricas relativamente ao eixo x .

Os traços do plano passante estarão coincidentes no eixo x , bem como as projeções do eixo de rotação para o rebatimento do plano e dos respetivos traços rebatidos.



Como já foi referido, neste caso, impõe-se o método do triângulo do rebatimento. Proceda-se, então, ao rebatimento dos pontos **A** e **C**.

Começando por **A**, a origem do arco estará sobre o eixo **x**. Desse modo, paralelamente ao eixo **x**, passando por **A₁**, marca-se a cota do ponto **A** – **A_{r1}**.

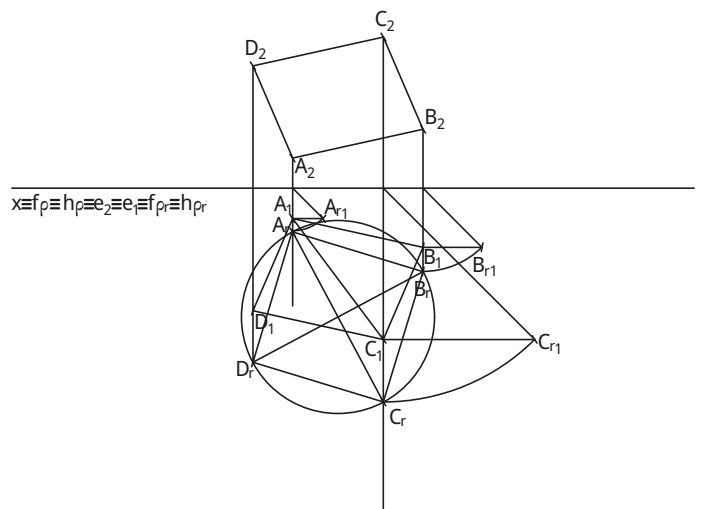
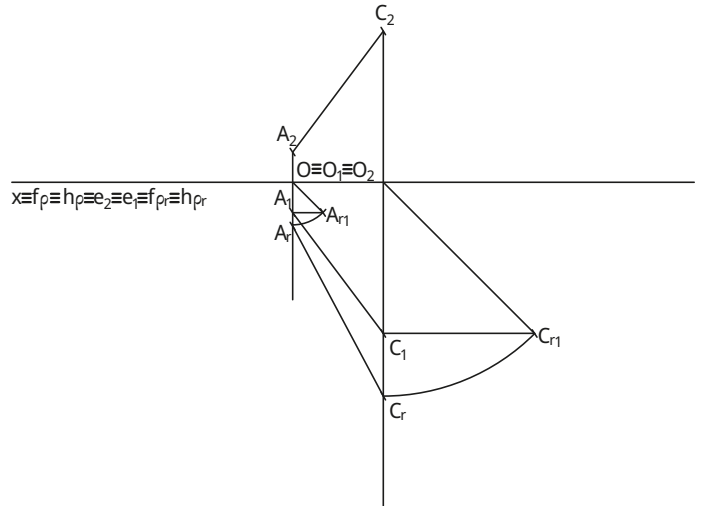
Com centro na origem do rebatimento, e abertura até **A_{r1}**, traça-se o arco do rebatimento até este interseccionar a perpendicular ao eixo que passa pelas projeções do ponto **A**, originando **A_r**. A hipotenusa do triângulo é **[OA_{r1}]**.

Aplicando o mesmo procedimento ao ponto **C**, tem-se ambos os pontos, definidores da diagonal do quadrado, rebatidos, sendo possível desenhar o quadrado em verdadeira grandeza.

No centro geométrico da diagonal **[A_rC_r]**, tem-se o centro da circunferência na qual se inscreve o quadrado. Desenhado o quadrado em verdadeira grandeza, é necessário contrarrebater os pontos **B** e **D**.

Contrarrebate um dos pontos, recorrendo ao triângulo do rebatimento, no seu sentido inverso, têm-se as projeções desse ponto – neste caso optou-se pelo ponto **B**.

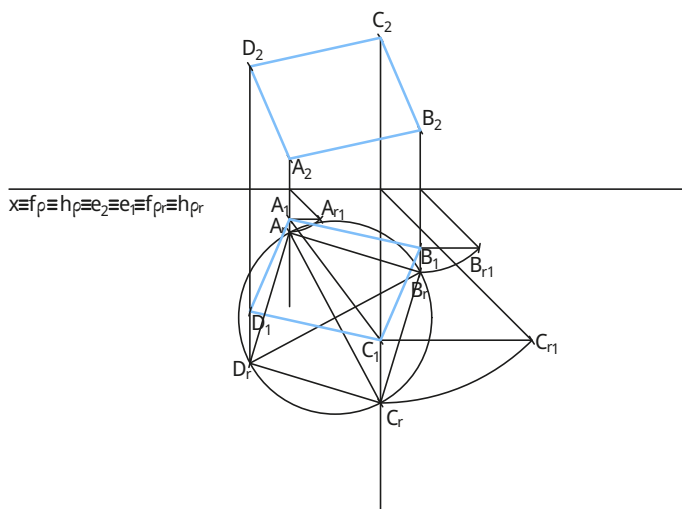
Nota que as hipotenusas dos triângulos de rebatimento são paralelas entre si.



Assim, ficando a faltar o ponto **D**, não é necessário efetuar o seu contrarrebatimento do mesmo modo, uma vez que se trata de um quadrado, tendo os seus lados paralelos dois a dois, mesmo quando não se encontram em verdadeira grandeza.

Desse modo, unindo, em dupla projeção ortogonal, os vértices do quadrado, com o princípio do paralelismo, é possível determinar as projeções do ponto **D**. **[AB]** e **[CD]** são paralelos entre si, e **[AD]** e **[BC]** são paralelos entre si.

Assim, unindo os pontos **A** e **B**, e traçando uma paralela a esse lado, passando por **C**, tem-se uma semirreta à qual pertence o ponto **D**. A sua determinação é concluída traçando uma paralela ao lado **[BC]**, passando por **A**. Deste modo, são determinadas as projeções de um quadrado contido num plano passante.



Para praticar

- 1 Determina as projeções de um triângulo equilátero **[ABC]**, contido num plano passante ρ , cujo lado **[AB]** é fronto-horizontal, com 4 cm de cota e 5 cm de afastamento. O lado do triângulo mede 4 cm. O seu vértice **A** é o vértice mais à esquerda e o vértice **C** é o ponto de menor cota do triângulo.
- 2 Considera um quadrado **[ABCD]** pertencente ao plano $\beta_{1/3}$. Sabe-se que o lado **[AB]** é de perfil e que o lado do quadrado mede 5 cm. O ponto **A** é um ponto do eixo **x**. Determina as suas projeções.
- 3 Considera um plano passante ρ no qual consta um triângulo equilátero, situado no 1.º diedro, cujo vértice **C** (0; 3; 2) é o vértice de menor cota do triângulo. Sabe-se que cada lado do triângulo mede 4 cm e que o lado **[AB]** é fronto-horizontal. Determina as suas projeções.

Sólidos III

Projeção de poliedros com bases contidas em planos oblíquos

A projeção de poliedros resulta da combinação entre o tema de representação de figuras planas e a ortogonalidade entre retas e planos. Na verdade, tratando-se de poliedros regulares, o seu vértice estará sobre uma reta ortogonal ao plano da base, que contém o seu centro geométrico. No caso de poliedros irregulares, o seu eixo não estará sobre uma reta ortogonal ao plano da base. Contudo, a sua altura é medida numa reta com essas características.

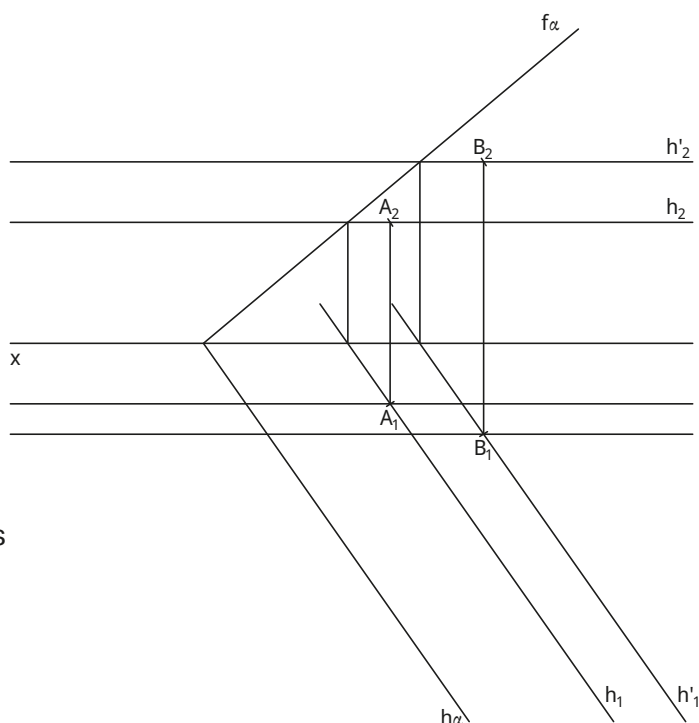
Projeção de pirâmides com bases contidas em planos oblíquos

Considera um plano α oblíquo cujos traços frontal e horizontal fazem, respetivamente, ângulos de 40° (a.d.) e 55° (a.d.). Pretende-se a representação das projeções de uma pirâmide quadrangular regular, cuja base **[ABCD]** está contida no plano α , sendo que o ponto **A** (2; 4) e **B** (3; 6) são vértices de um dos lados do quadrado, localizado no 1.º diedro.

O vértice **V**, da pirâmide, é o vértice de maior cota do sólido, cuja altura é 6 cm.

Começando por transpor para o plano do desenho os dados enunciados, através da marcação dos traços do plano e da determinação de retas de nível, que lhe pertençam, com as cotas dos pontos **A** e **B**, de forma a determinar as suas projeções, tem-se os dois vértices consecutivos do quadrado **[ABCD]**, representados em dupla projeção ortogonal.

Uma vez que o quadrado se insere num plano oblíquo, nenhuma das suas projeções estará em verdadeira grandeza, pelo que será necessário recorrer a um método geométrico auxiliar, de forma a poder representar o quadrado – base da pirâmide.

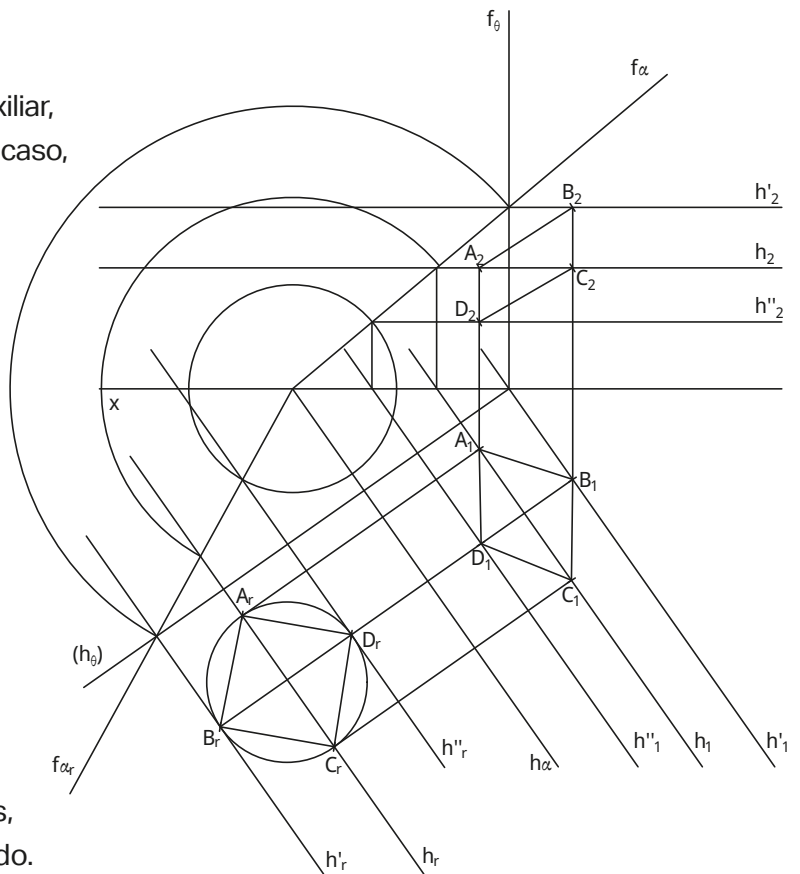


Assim, procede-se ao rebatimento dos traços do plano oblíquo α , rebatendo-o sobre o Plano Horizontal de Projeção (ver página 79).

Como tal, recorre-se a um plano auxiliar, ortogonal ao plano a rebater. Neste caso, optou-se por um **plano vertical**.

Desenhando o quadrado **[ABCD]** no rebatimento, segue-se o contrarrebatimento dos seus pontos, de forma que este fique representado em dupla projeção ortogonal.

Neste caso, optou-se por conduzir, pelos pontos, retas horizontais do plano. A partir dos seus traços frontais rebatidos, determina-se os mesmos em dupla projeção ortogonal e, por conseguinte, as projeções dessas mesmas retas, que contêm os vértices do quadrado.

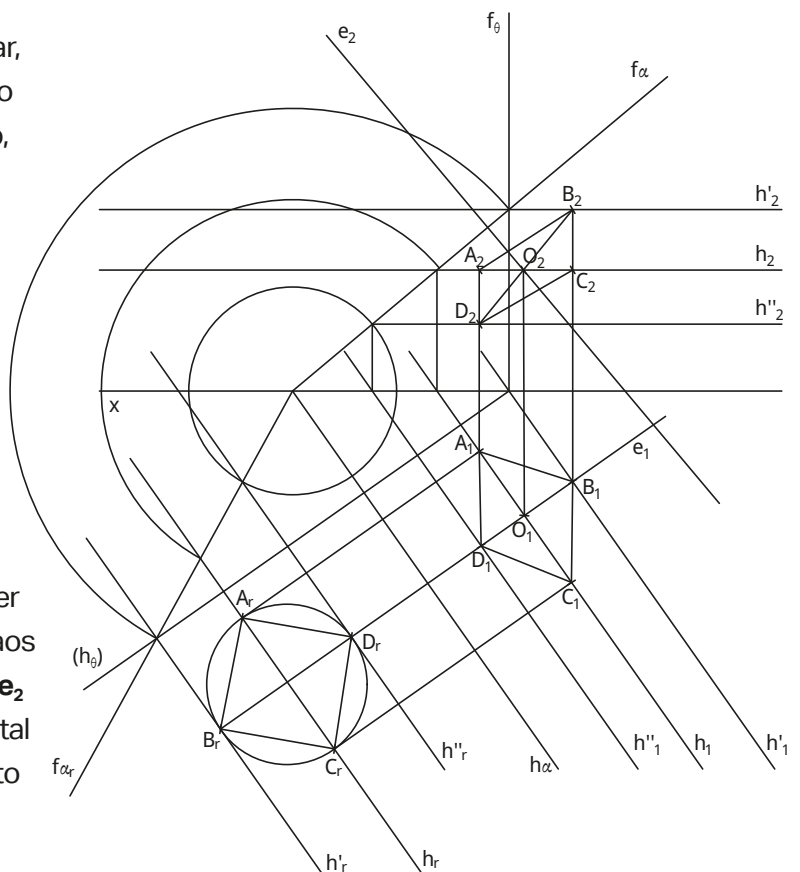


Estando representada a base da pirâmide, resta determinar as projeções do ponto **V**, vértice do sólido, sabendo que tem 6 cm de altura.

Tratando-se de uma pirâmide regular, o seu eixo coincide com o segmento que define a sua altura. Deste modo, determina-se o centro geométrico da base – ponto **O**, que será um ponto do eixo da pirâmide.

O segmento **[OV]** corresponderá à altura da pirâmide. O eixo da pirâmide estará, necessariamente, sobre uma reta ortogonal ao plano da base.

Neste caso, para uma reta ser ortogonal ao plano oblíquo, deverá ter as suas projeções perpendiculares aos traços do plano em questão. Assim, **e₂** fará um ângulo reto com o traço frontal de α , e **e₁** fará também um ângulo reto com o traço horizontal de α .



Uma vez que a reta **e**, sobre a qual se mede a altura da pirâmide, é uma reta oblíqua, esta não tem as suas projeções em verdadeira grandeza.

De forma a conseguir uma maior clareza gráfica, optou-se por omitir o traçado decorrente da representação do quadrado da base.

A medida da altura da pirâmide será medida sobre a reta **e**, pelo que é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar, para que esta possa estar representada em verdadeira grandeza.

Para tal, conduziu-se pela reta **e** um plano que a contém e que é ortogonal ao plano da base do sólido.

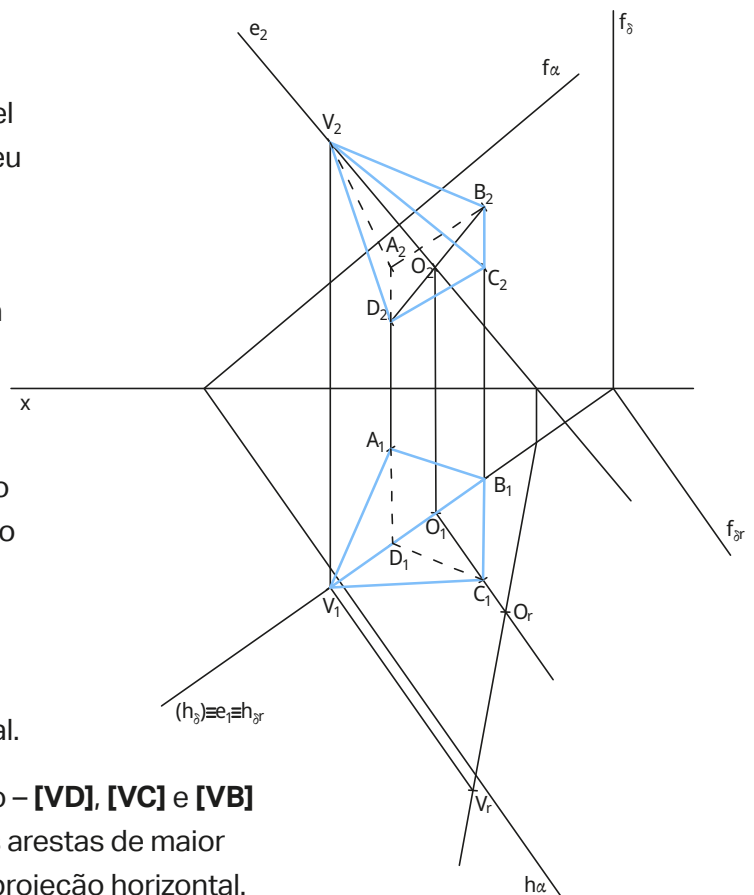
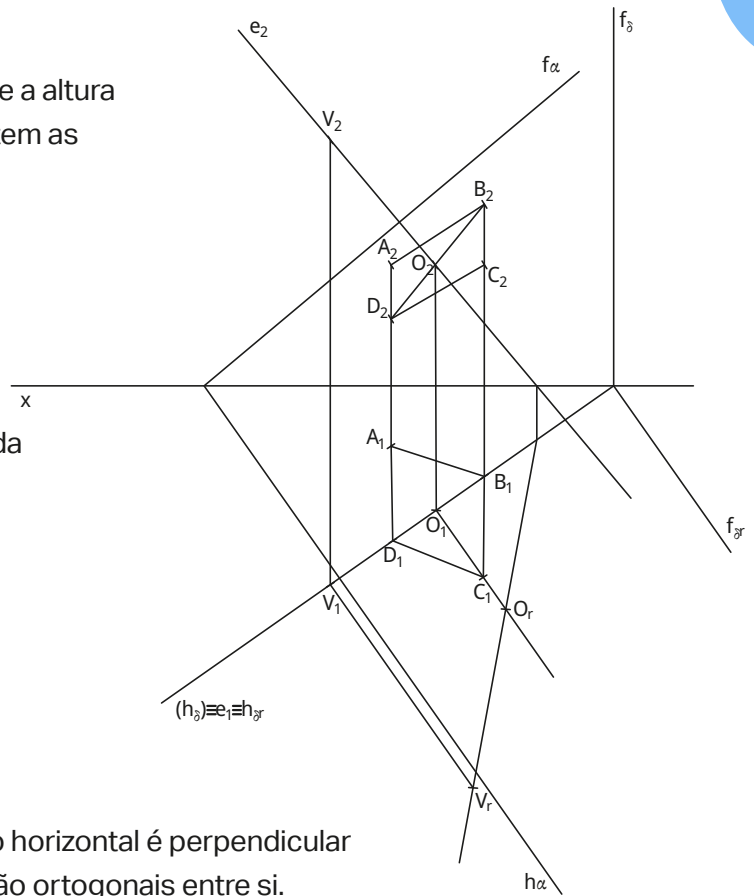
O plano δ é um **plano vertical**. O seu traço horizontal é perpendicular ao traço horizontal de α , logo, os planos são ortogonais entre si.

Rebatendo o plano δ sobre o Plano Horizontal de Projeção, utilizando o seu traço horizontal como charneira, é possível representar a reta **e** rebatida através do seu ponto **O** e do seu traço horizontal (ponto pertencente à charneira do rebatimento).

Assim, sabendo que a pirâmide se localiza totalmente no 1.º diedro, os seus centímetros devem ser marcados na cota ascendente, a partir de **O_r**, originando **V_r** (vértice da pirâmide rebatido). Procedendo ao seu contrarrebatimento, tem-se o ponto **V** representado pelas suas projeções.

Unindo as projeções homónimas dos pontos da base até **V**, tem-se a pirâmide representada em dupla projeção ortogonal.

Nota que as arestas de maior afastamento – **[VD]**, **[VC]** e **[VB]** – são visíveis em projeção frontal e que as arestas de maior cota – **[VA]**, **[VB]** e **[VC]** – são visíveis em projeção horizontal.



Projeção de prismas com bases contidas em planos oblíquos

Considerando o mesmo quadrado **[ABCD]** do enunciado anterior, este é agora a base de menor cota de um prisma quadrangular reto, cuja altura é 7 cm.

Tratando-se de um prisma reto, isso significa que as arestas que unem os vértices correspondentes de ambas as bases são ortogonais a estas. Nesse sentido, deverão ser traçadas retas ortogonais ao plano da base, que contenham os vértices da mesma.

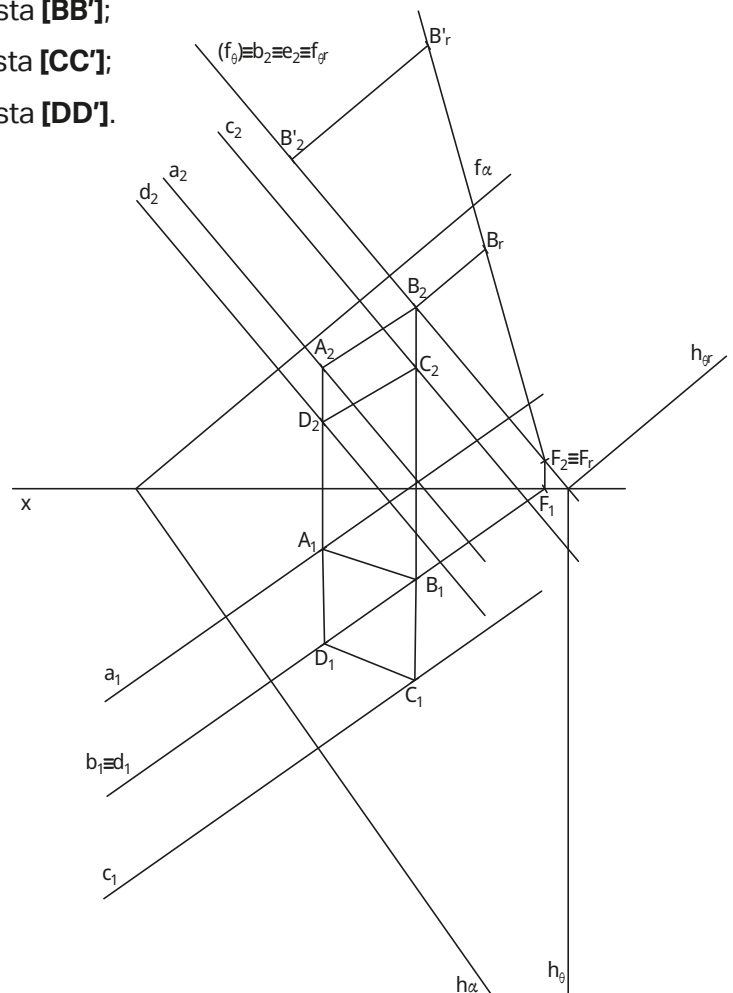
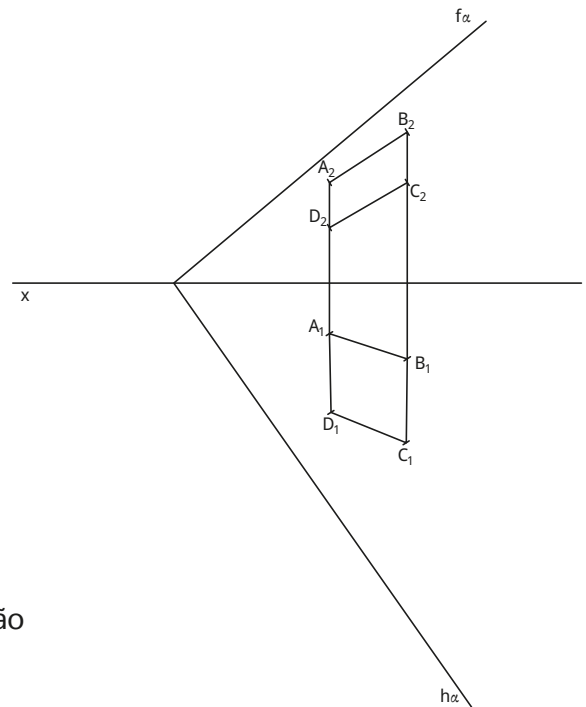
Neste caso, as arestas laterais do prisma estarão sobre retas oblíquas, ortogonais ao plano α .

- A reta **a** será a reta de suporte da aresta **[AA']**;
- A reta **b** será a reta de suporte da aresta **[BB']**;
- A reta **c** será a reta de suporte da aresta **[CC']**;
- A reta **d** será a reta de suporte da aresta **[DD']**.

Uma vez que todas as arestas laterais do prisma são paralelas, basta determinar as projeções de uma destas.

Neste caso, considerou-se a aresta **[BB']**, e, por isso, procedeu-se ao rebatimento de um plano auxiliar, de topo, ortogonal ao plano da base, que contém a reta **b**.

Utilizando o traço frontal de θ como charneira do rebatimento, o plano é rebatido sobre o Plano Frontal de Projeção.



Determinado o ponto **B** no rebatimento, a altura é marcada a partir deste, no sentido ascendente da cota, sobre a reta de suporte da aresta (reta **b**).

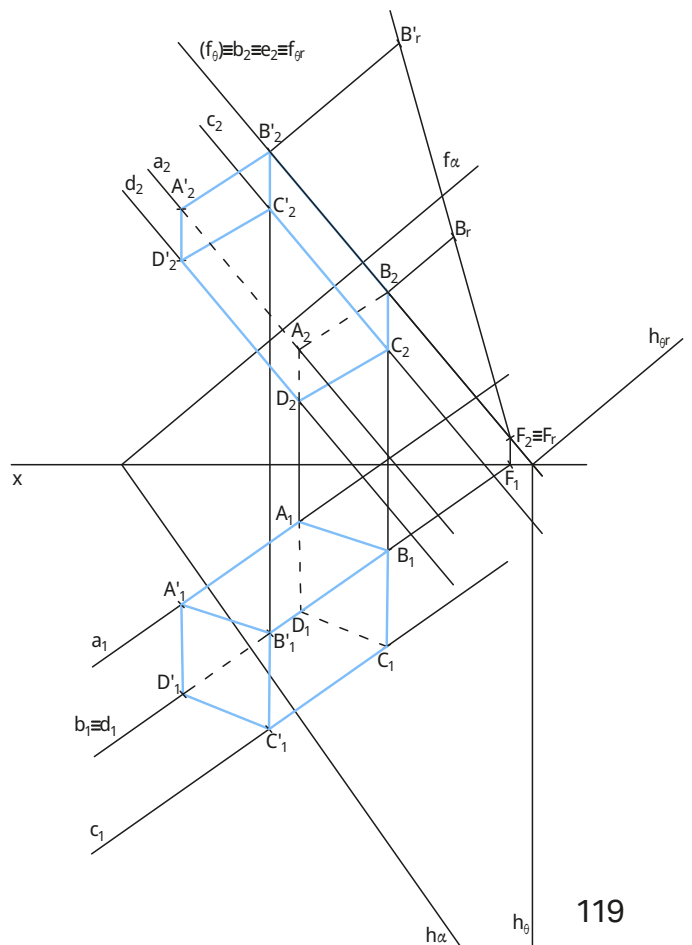
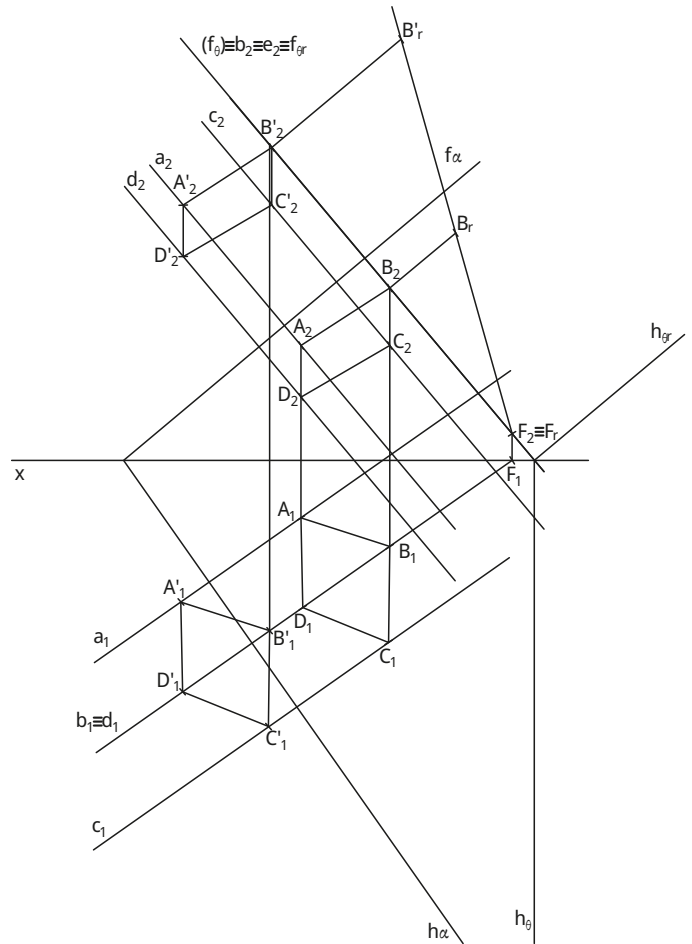
Assim, contrarrebatao o ponto **B**, tem-se uma das arestas do sólido em dupla projeção ortogonal. Visto tratar-se de um prisma, as bases são paralelas entre si, pelo que não é necessário determinar, pelo rebatimento, os restantes vértices da base **[A'B'C'D']**, uma vez que estes serão determinados através de paralelas às arestas da base **[ABCD]**:

- **[AB]** é paralela a **[A'B']**;
- **[BC]** é paralela a **[B'C']**;
- **[CD]** é paralela a **[C'D']**;
- **[DA]** é paralela a **[D'A']**.

Deste modo, o prisma de bases contidas em planos oblíquos fica representado pelas suas projeções.

Nota que as suas arestas **[AA']**, **[BB']** e **[CC']** são as arestas de maior cota, estando, por isso, visíveis em projeção horizontal.

Já as arestas **[BB']**, **[CC']** e **[DD']** são as arestas de maior afastamento, estando, por isso, visíveis em projeção frontal.



Para praticar

- 1 Considera um plano oblíquo α , cujo traço frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.d.), e cujo traço horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 45° (a.d.). Sabe-se que esse plano contém um triângulo equilátero com 4 cm de lado, base de uma pirâmide triangular regular, com 5 cm de altura, cujo vértice A é um ponto do Plano Frontal de Projeção, com 3 cm de cota. Sabendo que o segmento $[AB]$ corresponde a um dos lados do triângulo e que se encontra sobre uma reta horizontal de plano, representa a pirâmide pelas suas projeções, sabendo que o vértice V é o ponto de maior cota do sólido.
- 2 Considera um plano oblíquo α , ortogonal ao plano $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 45° (a.e.). Determina as projeções de um cubo em que uma das suas faces é o quadrado $[ABCD]$, pertencente a esse plano, sabendo que o lado $[AB]$ é frontal e mede 4 cm. O ponto A tem 3 cm de afastamento e 2 cm de cota. A face oposta à $[ABCD]$ é a face de maior cota do cubo.

Resumindo

- Em pirâmides regulares, com bases contidas em planos oblíquos, o seu eixo é sempre ortogonal ao plano da base.
- Em prismas regulares, com bases contidas em planos oblíquos, as arestas laterais são sempre ortogonais ao plano da base.

Projeção de poliedros com bases contidas em planos de rampa

Analisando, agora, a projeção de poliedros com bases contidas em planos de rampa, o raciocínio é em tudo semelhante ao exposto até aqui, no caso de poliedros de bases em planos oblíquos. No entanto, neste caso, as bases estarão contidas em planos de rampa. Tratando-se de pirâmides regulares, o seu eixo estará sobre uma reta perpendicular ao plano de rampa, ou seja: **uma reta de perfil**.

No caso de prismas regulares, serão as suas arestas laterais que estarão sobre retas de perfil, perpendiculares aos planos das bases.

Face ao já exposto, abordar-se-á o estudo da representação de um prisma com bases em planos de rampa, uma vez que em pirâmides o raciocínio é em tudo idêntico ao já estudado.

Assim, observa o exemplo:

Pretende-se a determinação das projeções de um prisma triangular regular, com 6 cm de altura, cuja base de menor cota é o triângulo **[ABC]**, do 1.º diedro, contido num plano de rampa **p**, cujo traço frontal tem 4 cm de cota e o traço horizontal tem 3 cm de afastamento.

Sabe-se que o lado **[AB]** do quadrado corresponde a um segmento oblíquo, contido numa reta **r**, de suporte, cuja projeção frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 35° (a.d.). O vértice **B** é um ponto do Plano Frontal de Projeção e o vértice **A** tem 2 cm de cota.

Primeiramente, são transpostos para o plano do desenho os dados do enunciado.

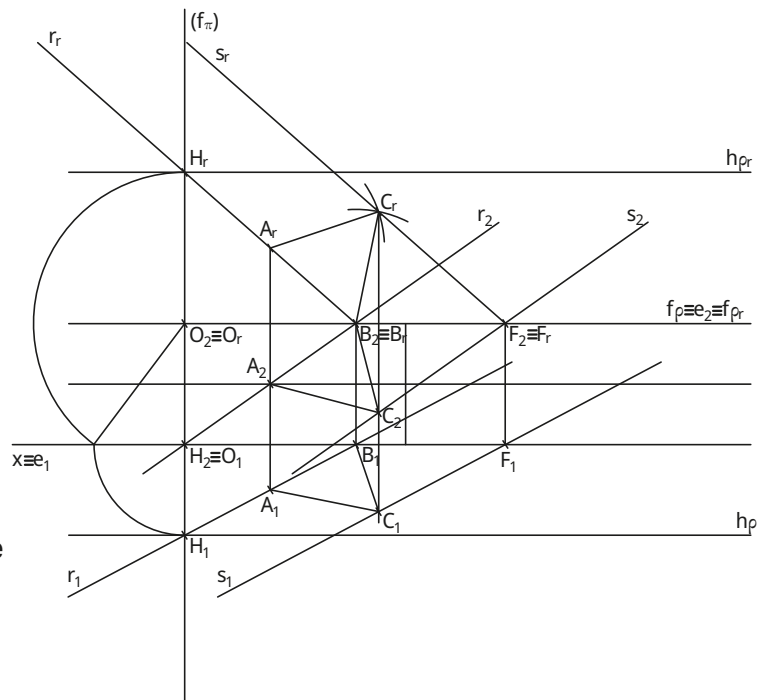
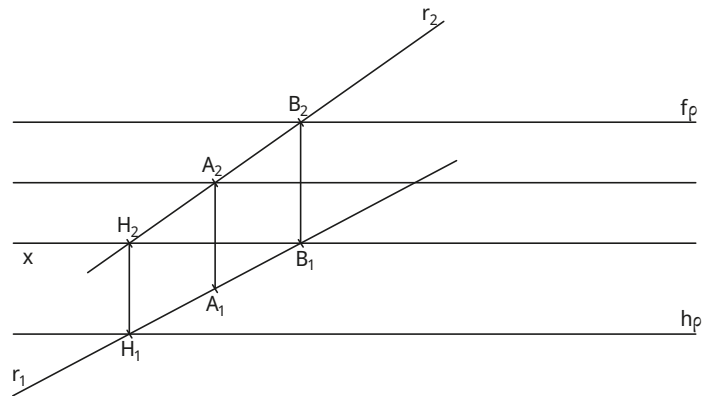
Estando o lado **[AB]** representado em dupla projeção ortogonal, é necessário determinar o vértice **C**, de modo a chegar às projeções do triângulo **[ABC]**.

Nota que o lado **[AB]** pertence a uma reta **r**, oblíqua, pelo que nenhuma das suas projeções se encontra em verdadeira grandeza. Desse modo, é necessário, para determinar as projeções do triângulo, recorrer a um método geométrico auxiliar.

Neste caso, optou-se pelo rebatimento do plano de rampa através do rebatimento dos seus traços.

Uma vez que o ponto **B** pertence ao Plano Frontal de Projeção, optou-se por rebater o plano **p** sobre o P.F.P., ficando o ponto **B** automaticamente rebatido (ver página 88).

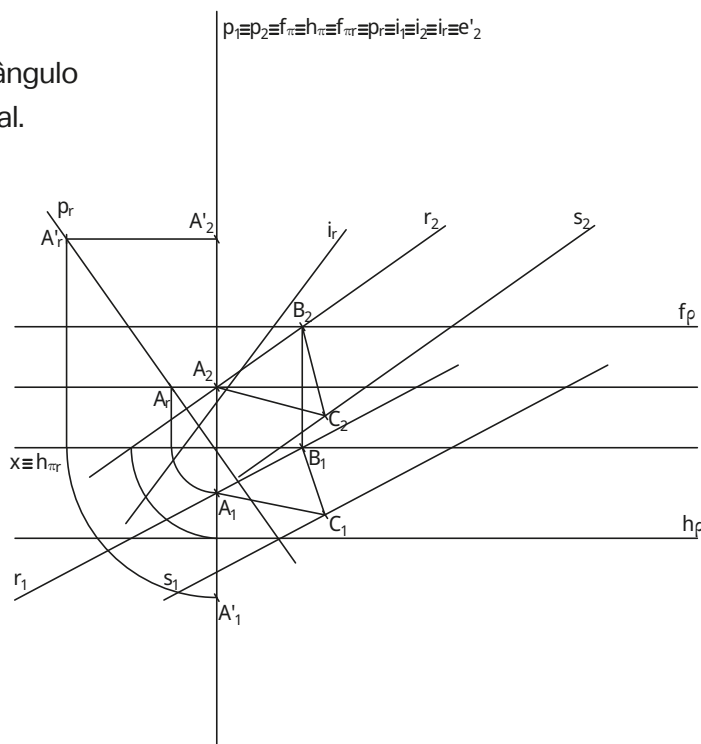
Após a determinação do ponto **A** rebatido – **A_r** – tem-se um dos lados do triângulo em verdadeira grandeza. Tratando-se de um prisma regular, a base será um triângulo equilátero. Assim, será determinado o ponto **C**, no rebatimento, através da construção do triângulo.



Contrarreatando o ponto **C**, tem-se o triângulo representado em dupla projeção ortogonal.

Dada a complexidade gráfica, optou-se por desconsiderar o traçado que permitiu a determinação das projeções do triângulo, de modo a dar mais ênfase ao procedimento que se segue: determinação das arestas laterais do prisma.

As arestas laterais do prisma deverão ser perpendiculares aos planos das bases. Tratando-se de uma base contida num plano de rampa, as arestas deverão estar sobre retas de perfil (retas ortogonais a planos de rampa).



Assim, por um dos vértices da base deverá passar-se uma reta de perfil, contida num plano de perfil ortogonal ao plano da base.

Determinando a reta de interseção – reta **i** – de ambos os planos, tem-se a direção do plano de rampa.

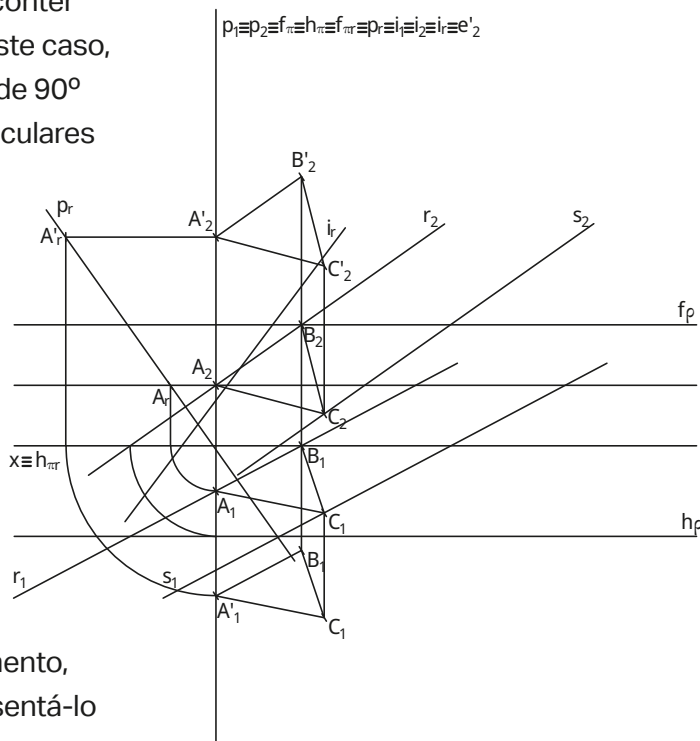
Assim, no rebatimento, a reta **p** deverá conter o vértice da base que lhe pertence – neste caso, o ponto **A** – e deverá formar um ângulo de 90° com a reta **i**. As retas **i** e **p** são perpendiculares e concorrem entre si no ponto **A**.

Sobre a reta **p** rebatida, deverá marcar-se a altura do prisma – 6 cm.

Aí situar-se-á o ponto **A'**.

Contrarreatando o ponto **A'**, tem-se, em projeção, um vértice da base **[A'B'C']**.

Uma vez que os lados do triângulo **[ABC]** são paralelos aos lados do triângulo **[A'B'C']**, não é necessário desenhar o triângulo **[A'B'C']** no rebatimento, podendo, através do paralelismo, representá-lo em dupla projeção ortogonal.



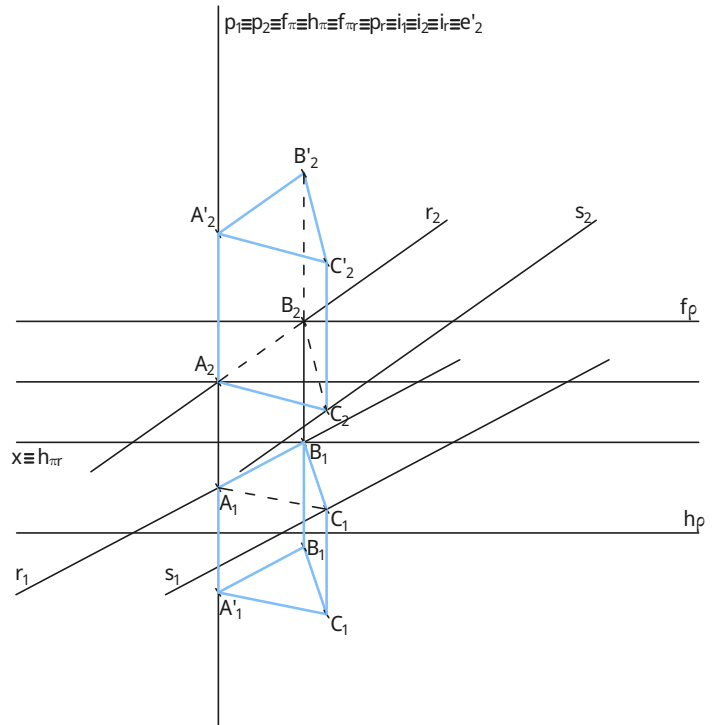
Por fim, representado o prisma, torna-se necessário determinar as arestas visíveis e invisíveis do sólido.

A base **[A'B'C']** é a base de maior cota do sólido, sendo, por isso, visível em projeção horizontal.

Já a aresta **[CC']** é a aresta de maior afastamento do sólido, sendo visível em projeção frontal.

A aresta **[BB']** é a aresta de menor afastamento, sendo invisível em projeção frontal.

As arestas laterais **[AA']** e **[BB']** fazem parte do contorno aparente do sólido.



Para praticar

- 1 Determina as projeções de uma pirâmide triangular regular, cuja base pertence ao plano de rampa p , ortogonal ao plano bisetor dos diedros ímpares, sabendo que o seu traço frontal tem 4 cm de cota. O lado **[AB]** do triângulo mede 4 cm e tem 2 cm de afastamento e está sobre uma reta g , fronto-horizontal. O vértice **C** é o vértice da base de maior cota. A pirâmide tem 6 cm de altura.
- 2 Considera o triângulo **[ABC]** do exercício anterior. Considera que este corresponde à base de um prisma regular, cuja base oposta **[A'B'C']** dista 6 cm da base **[ABC]**. Determina as projeções do prisma.

Resumindo

- Em pirâmides regulares, com bases contidas em planos de rampa, o seu eixo é sempre de perfil, perpendicular ao plano da base.
- Em prismas regulares, com bases contidas em planos de rampa, as arestas laterais são sempre de perfil, perpendiculares ao plano da base.

Projeção de poliedros com bases contidas em planos passantes

Também os poliedros com bases pertencentes a planos passantes têm o seu eixo sobre retas de perfil, perpendiculares aos planos das bases.

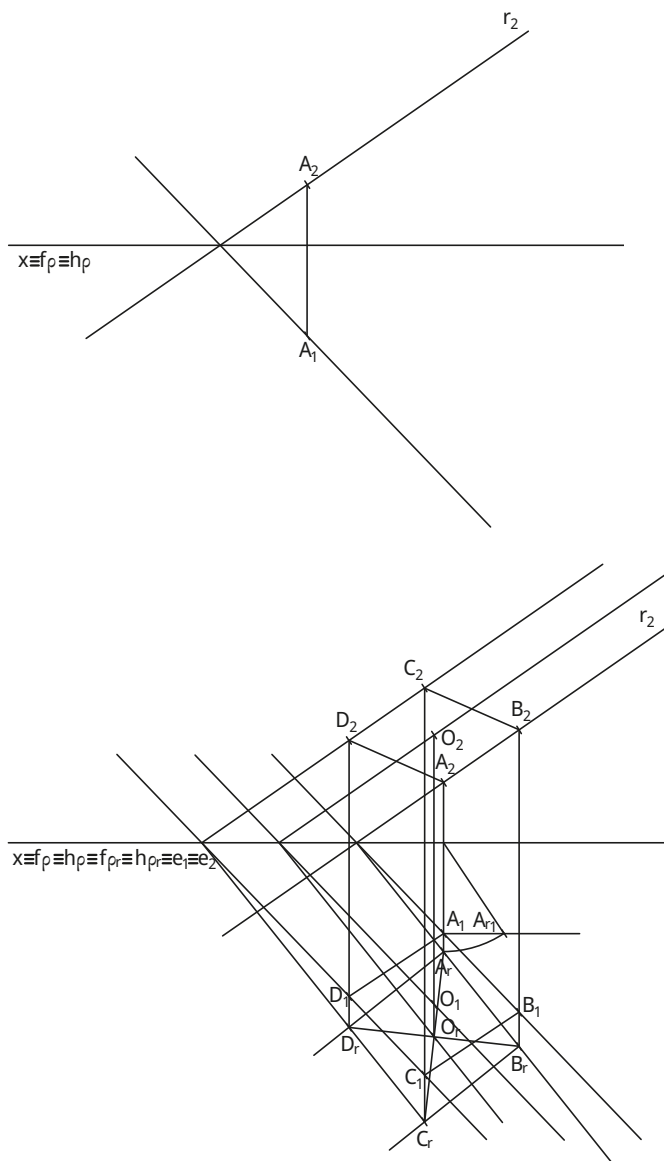
Sugere-se o recurso a um caso concreto para abordar esta situação concreta:

Pretende-se a determinação das projeções de uma pirâmide quadrangular regular do 1.º diedro. Sobre a base, sabe-se que esta corresponde ao quadrado **[ABCD]** e está contida num plano passante ρ definido pelo eixo x e pelo ponto **A** (4; 3). O lado **[AB]** mede 4 cm e faz, em projeção central, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.d.), e o ponto **A** situa-se à esquerda do ponto **B**. A pirâmide tem 7 cm de altura.

Transpostos os dados do enunciado para o plano do desenho, conclui-se que o lado **[AB]** está sobre uma reta oblíqua passante e, por isso, não se encontra em verdadeira grandeza, sendo necessário recorrer a um método geométrico auxiliar para o determinar.

Assim, procede-se ao rebatimento do ponto **A** usando o método do triângulo do rebatimento, uma vez que, tratando-se de um plano passante, o rebatimento dos seus traços não é aplicável por si só.

Assim, rebatendo o ponto **A**, é possível determinar, imediatamente, a reta **r** rebatida – reta de suporte do segmento **[AB]**, pois o ponto de concorrência das suas projeções no eixo x é comum à reta **r** rebatida. A partir daí, traça-se o segmento **[AB]** em verdadeira grandeza e procede-se à construção do quadrado **[ABCD]**, determinando os vértices **C** e **D** também no rebatimento.



Resumindo

Figuras planas podem pertencer a:

- planos paralelos aos planos de projeção (projeção em verdadeira grandeza);
- planos não paralelos aos planos de projeção (necessário recorrer a métodos geométricos auxiliares para a determinação da verdadeira grandeza).

As bases dos sólidos são figuras planas.

A altura do sólido é sempre medida sobre uma reta ortogonal à base:

- pirâmides e cones – a altura é medida entre o ponto de interseção da reta com o plano da base e o vértice do sólido;
- prismas e cilindros – a altura é medida entre os pontos de interseção da reta com os planos de ambas as bases.

No caso de sólidos retos, a reta de suporte do segmento correspondente à altura do sólido é coincidente com o seu eixo.

Para praticar

- 1 Determina as projeções de um cubo em que a sua face de menor cota – a face **[ABCD]** – está contida num plano passante definido pelo eixo x e pelo ponto **A** (6; 3). Sabe-se que o segmento **[AB]** mede 5 cm, é o lado de menor afastamento e é fronto-horizontal, e que **B** está à direita de **A**.
- 2 Considera o quadrado que corresponde à face oposta à face **[ABCD]** do enunciado anterior – **[A'B'C'D']**. Sabendo que esse quadrado é a base de uma pirâmide regular cujo vértice é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, determina as projeções da pirâmide.
- 3 Considera o triângulo equilátero **[ABC]**, contido num plano passante, em que **[AB]** é um segmento de reta fronto-horizontal. Sabendo que **A** (1; 3; 5) e **B** (-3; 3; 5), e que **C** é o ponto de menor cota do triângulo, determina as projeções de um prisma triangular regular, sabendo que **[ABC]** é a sua base de menor afastamento e que a sua altura é de 4 cm.
- 4 Considera o plano passante do exercício anterior e o seu segmento **[AB]**. Sabendo que esse segmento é o lado de maior cota de um quadrado **[ABCD]**, base de uma pirâmide quadrangular regular cujo vértice é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, determina as projeções da mesma.

13

Interseção de retas com planos

Interseção de retas com planos projetantes

Interseção de retas com planos não-projetantes

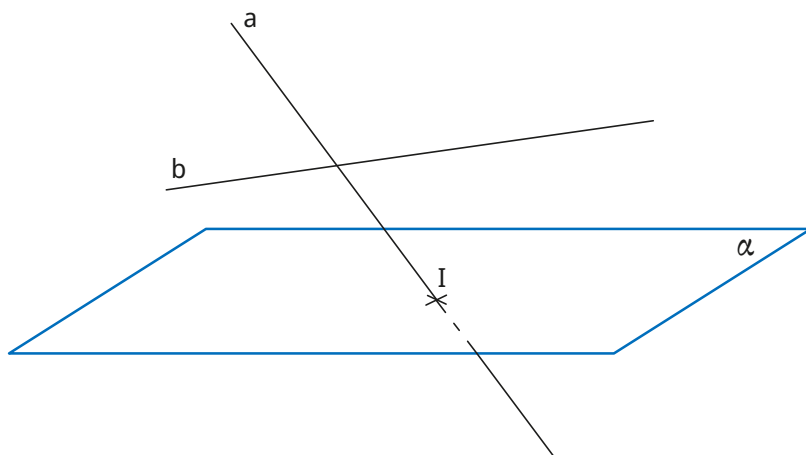
Interseção de retas com planos

A interseção entre uma reta e um plano dá-se sempre segundo um ponto. Esse ponto é um ponto comum entre a reta em questão e o plano intersetado por esta.

Esse ponto pode ser um **ponto próprio** (localizado a distância finita) ou um **ponto impróprio** (localizado a distância infinita).

Observa o exemplo ao lado, que ilustra os dois casos descritos acima.

- A reta **a** é concorrente com o plano α no ponto **I**, sendo este um **ponto próprio** (situado a distância finita).
- A reta **b** possui a mesma direção do plano α , intersetando-o num ponto a distância infinita – **ponto impróprio**.

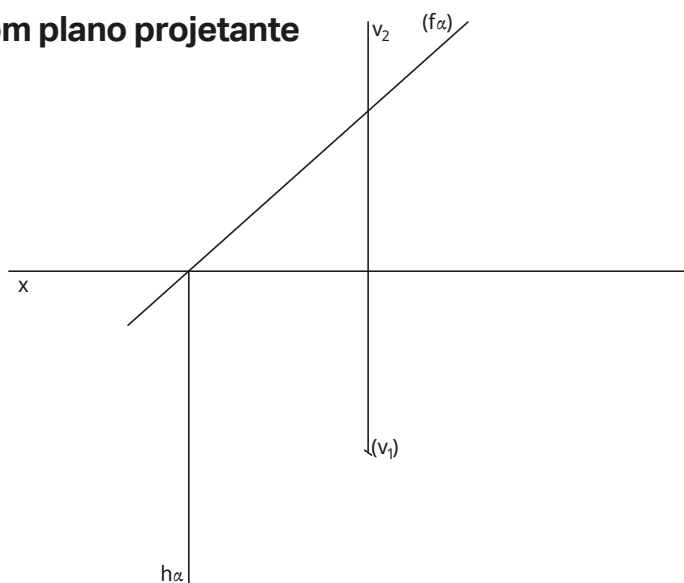


Interseção de retas com planos projetantes

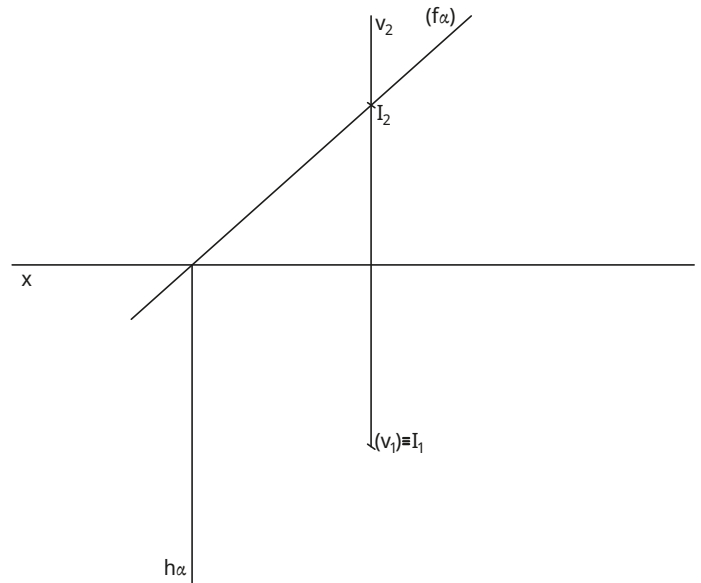
Interseção de reta projetante com plano projetante

Observa o plano de topo α , projetante.

Pretende-se a determinação do ponto **I**, de interseção da reta **v**, vertical e projetante horizontal, com o plano α , projetante frontal.



Sabendo que o ponto I pertence, em simultâneo, à reta v e ao plano α , e sendo ambos projetantes, horizontal e frontal, respetivamente, a determinação do ponto I é imediata, uma vez que todas as projeções frontais de pontos do plano estão sobre o seu traço frontal, e todas as projeções horizontais de pontos da reta v têm a sua projeção sobre a deformação máxima da reta v em projeção horizontal (traço horizontal da reta).

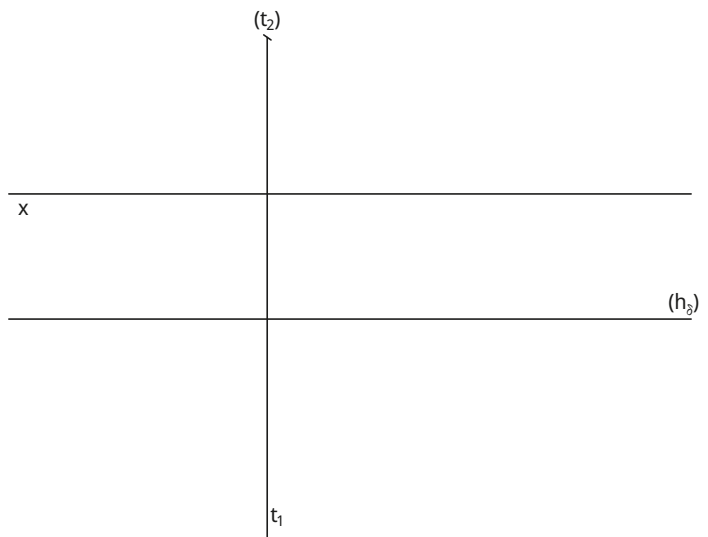


Assim, I_2 está na interseção de v_2 com f_α , e I_1 está sobre v_1 .

Observa agora outro exemplo, também de interseção de uma reta projetante com um plano, também ele projetante.

Considera o plano frontal δ , projetante horizontal, e a reta t , de topo, projetante frontal.

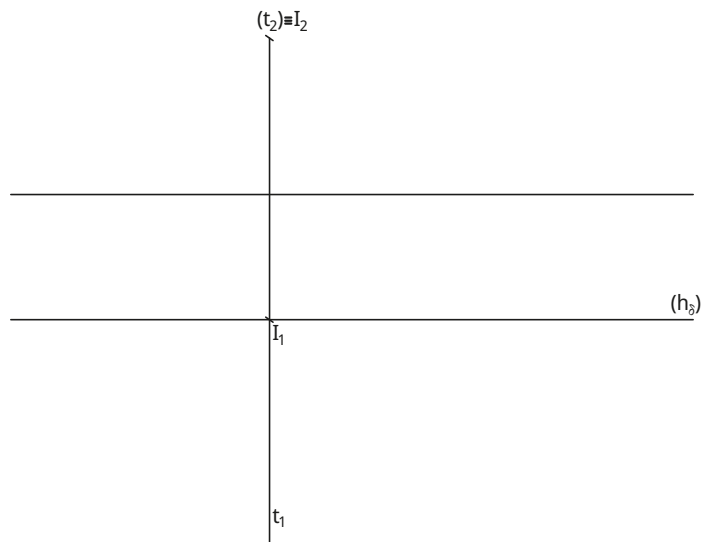
O ponto I , de interseção da reta t com o plano δ , é um ponto comum a ambos, ou seja, pertence, em simultâneo, à reta t e ao plano δ . Sendo a reta t uma reta projetante frontal, todos os seus pontos têm a sua projeção frontal coincidente na projeção frontal da reta (neste caso, um só ponto, correspondente ao seu traço frontal). Já o plano δ , projetante horizontal, tem as projeções horizontais dos pontos que lhe pertencem sobre o seu traço horizontal.



Deste modo, a determinação das projeções do ponto **I** é imediata:

- I_2 está coincidente com t_2 ;
- I_1 está na interseção de t_1 com (h_δ) .

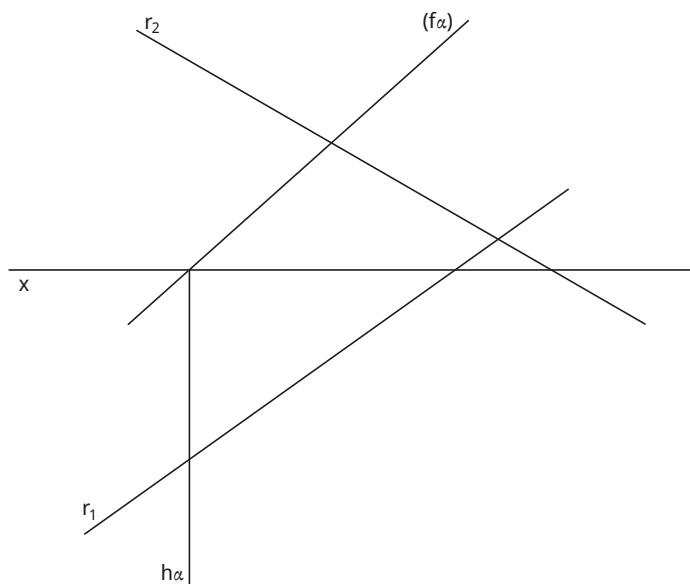
Nota que **I** pertence ao plano δ , pois a sua projeção horizontal encontra-se sobre o traço horizontal do plano e pertence à reta **t**, pois tem as suas projeções sobre as projeções homónimas da reta **t**.



Interseção de reta não-projetante com plano projetante

Considerando, agora, o mesmo plano de topo α , projetante frontal, pretende-se determinar a interseção de uma reta **r**, oblíqua, e, por isso, não-projetante, com esse plano.

O ponto **I**, de interseção da reta **r** com α , deverá ser o ponto comum a ambos. Sendo α um plano projetante frontal, a projeção frontal de **I** deverá estar sobre o seu traço frontal. Também se sabe que, para que o ponto pertença à reta **r**, este deve ter as suas projeções sobre as projeções homónimas da reta **r**.



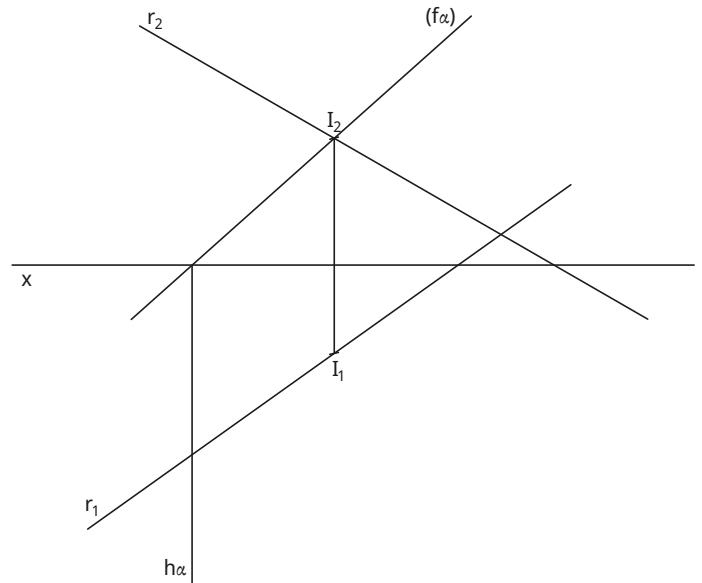
Assim, a determinação do ponto **I** faz-se a partir da sua projeção frontal.

A interseção do traço frontal do plano α com a projeção frontal da reta **r** origina a projeção frontal do ponto **I**₂.

Determinada a sua projeção frontal, resta determinar a sua projeção horizontal.

Conduzindo uma linha de chamada até à projeção horizontal da reta **r**, tem-se **I**₁.

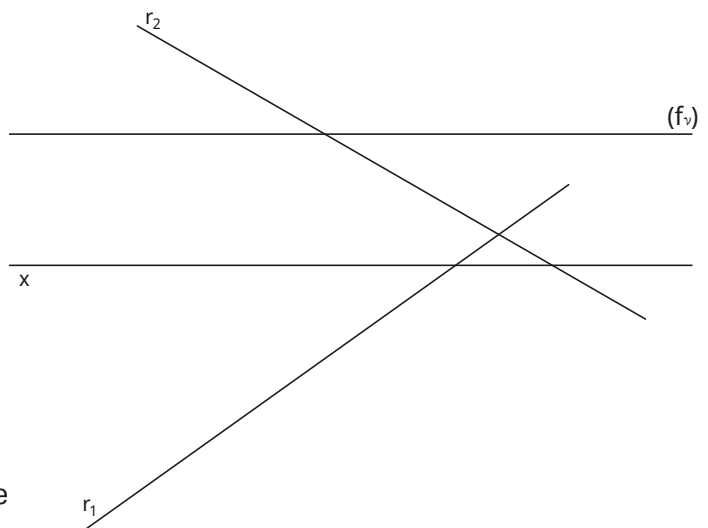
O ponto **I** pertence ao plano α , pois a sua projeção frontal está sobre o traço frontal do plano, e pertence à reta **r**, pois tem as suas projeções sobre as projeções homónimas da reta **r**.



Considerando, agora, um outro exemplo, também de interseção de uma reta não-projetante com um plano projetante, tem-se:

Uma reta **r**, oblíqua, e por isso, não-projetante, e um plano ν , horizontal, projetante frontal.

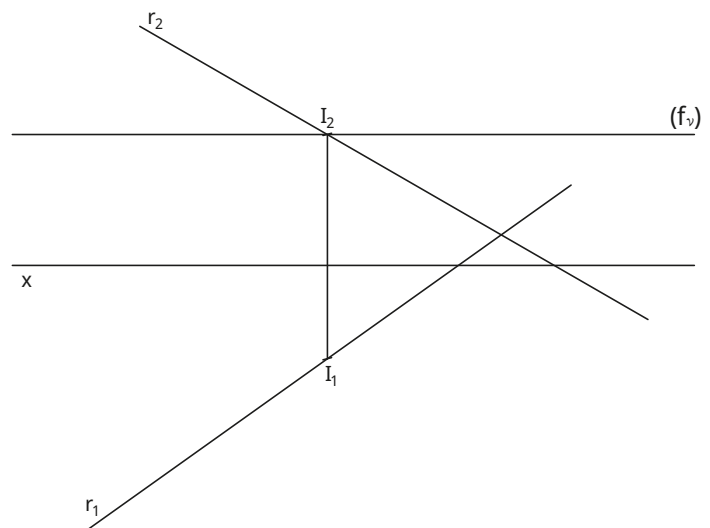
Sendo o ponto **I**, de interseção entre ambos, um ponto que pertence, em simultâneo, à reta **r** e ao plano ν , sabe-se que a sua projeção frontal deve estar sobre **r**₂, mas também sobre o traço frontal de ν .



Assim, a projeção frontal de **I** deverá estar sobre a interseção de r_2 com (f_v) .

Uma vez que a condição de pertença de um ponto a uma reta é que as suas projeções estejam sobre as projeções homónimas da reta a que pertence, a sua projeção horizontal encontra-se no prolongamento da linha de chamada a partir da sua projeção frontal, sobre r_1 .

O ponto **I** pertence ao plano ν , pois a sua projeção frontal está sobre o traço horizontal do plano, e pertence à reta r , pois tem as suas projeções sobre as projeções homónimas da reta r .



Resumindo

Uma reta interseja um plano segundo um ponto.

Esse ponto pode ser:

- um **ponto próprio** – se se situar a uma distância finita;
- um **ponto impróprio** – se se situar a uma distância infinita.

Nos casos práticos, apenas são abordadas interseções segundo um ponto próprio.

O ponto de interseção entre uma reta e um plano é sempre um ponto comum a ambos.

Para praticar

- 1 Considera uma reta t , de topo, com 2 cm de cota, e um plano vertical θ , que forma um ângulo de 45° (a.d.) com o P.F.P., cujo ponto do eixo x se situa 4 cm à esquerda da reta t . Determina o ponto I , de interseção entre ambos.
- 2 Considera uma reta v , vertical, com 3 cm de afastamento, e um plano horizontal ν , com 2 cm de cota. Determina o ponto I , de interseção entre ambos.
- 3 Considera uma reta r , definida pelos pontos $A(0; 2; 4)$ e $B(-2; 5; 1)$. Determina o ponto I , de interseção da reta r com o plano de topo α , que contém o ponto $K(3; 0; 0)$ e cujo traço frontal forma, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.d.).
- 4 Considera uma reta g , fronto-horizontal, com 3 cm de afastamento e 4 cm de cota. Determina a interseção da reta g com o plano vertical θ , que contém o ponto $K(2; 0; 0)$, cujo traço horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.e.).

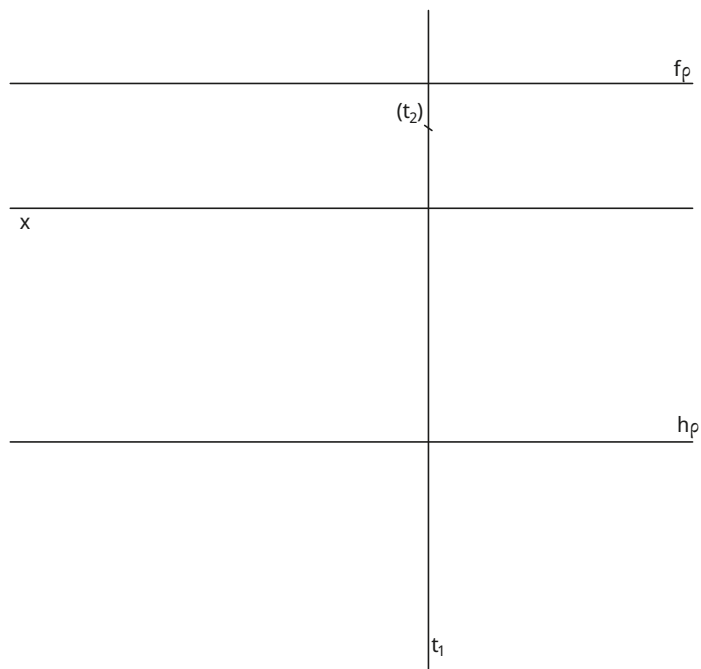
Interseção de retas com planos não-projetantes

Interseção de reta projetante com plano não-projetante

Iniciamos o estudo da interseção de uma reta projetante com um plano não projetante através do exemplo prático seguinte:

Pretende-se determinar o ponto I , de interseção de uma reta t , de topo (projetante frontal), e um plano de rampa ρ , não-projetante.

O ponto I deverá ser o ponto comum entre a reta t e o plano ρ , pertencendo a ambos.



Neste caso, é necessário recorrer a uma reta auxiliar do plano, que irá conter o ponto I .

A reta t , de topo, sendo uma reta projetante frontal, concentra todas as projeções frontais dos seus pontos num só, coincidentes com a sua projeção frontal. Deste modo, I_2 estará sobre (t_2) – projeção frontal da reta t em deformação máxima.

Assim, tem-se a projeção I_2 .

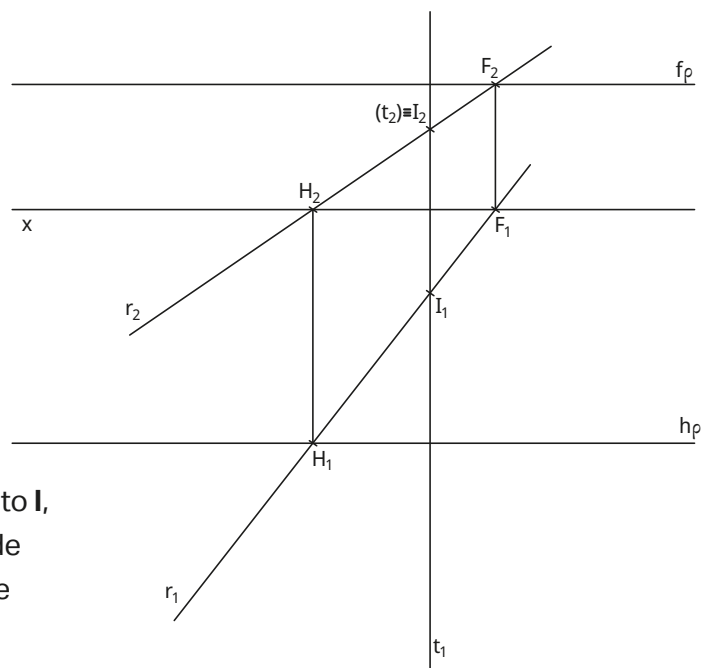
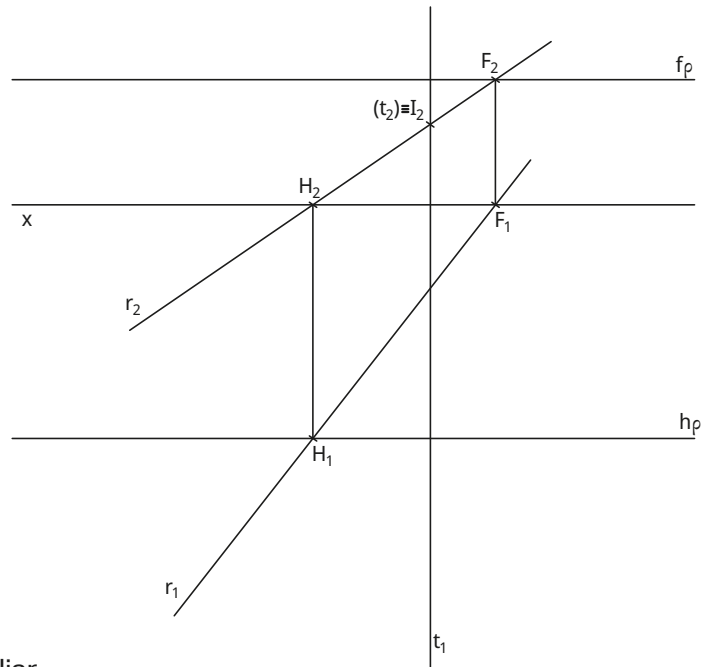
De seguida, determina-se a reta r , auxiliar, pertencente ao plano de rampa, que contenha a projeção frontal de I .

A projeção da reta r passa por I_2 e permite determinar os traços da mesma, sobre os traços do plano que a contém, levando à representação da sua projeção horizontal.

Deste modo, a reta r é a reta do plano de rampa que contém o ponto I , logo, as projeções do ponto deverão estar sobre as projeções homónimas da reta r .

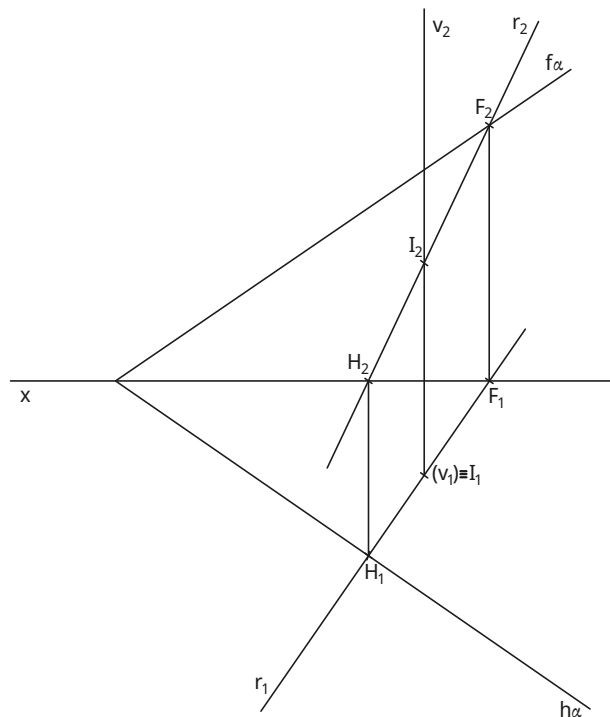
- I_1 está, simultaneamente, sobre t_1 e r_1 ;
- I_2 está, simultaneamente, sobre (t_2) e r_2 .

As retas t e r são concorrentes no ponto I , sendo que a reta r pertence ao plano de rampa ρ , ou seja, o ponto I é o ponto de interseção da reta t com o plano ρ .



Tendo a reta r representada pelas suas projeções, é possível determinar a projeção frontal do ponto I .

As retas r e v são concorrentes no ponto I , e a reta r pertence ao plano α , logo, o ponto I é o ponto comum ao plano α e à reta v .

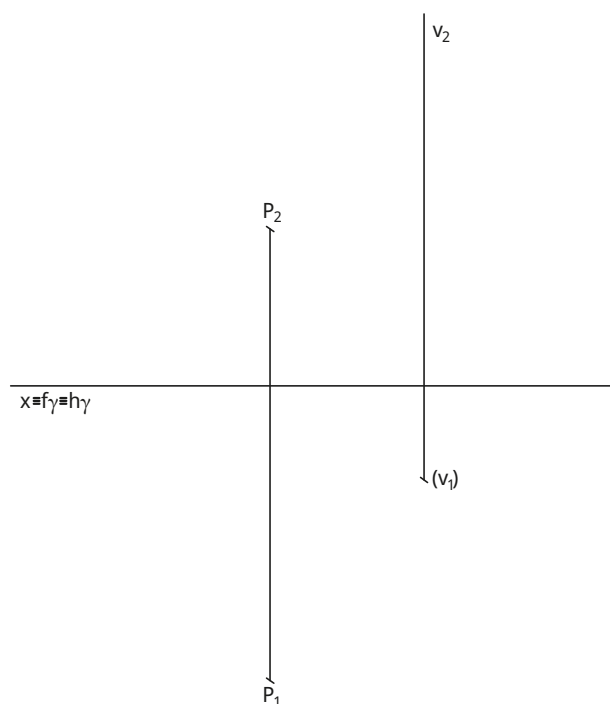


No que respeita a planos não-projetantes, resta abordar a interseção de uma reta projetante com um plano passante.

Observando o exemplo, pretende-se determinar o ponto I , de interseção da reta v , vertical, projetante horizontal, com o plano passante γ , definido pelo eixo x e pelo ponto P .

O raciocínio permanece semelhante aos exemplos anteriores, recorrendo a uma reta auxiliar, pertencente ao plano.

Essa reta deverá conter o ponto P e as suas projeções deverão concorrer no mesmo ponto, no eixo x (provando a sua pertença ao plano passante γ).

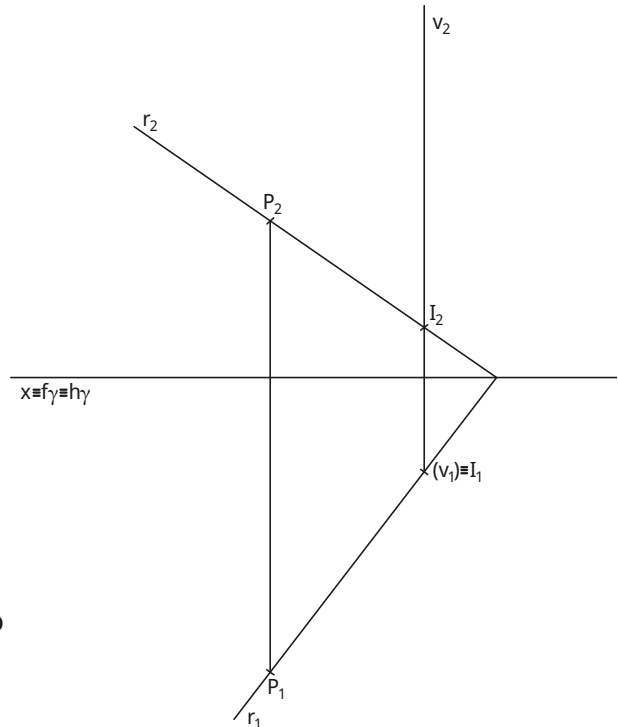


A determinação dessa reta auxiliar (reta r) dá-se, primeiramente, pela sua projeção horizontal, que passa por P_1 e I_1 . Como já foi referido, sendo uma reta oblíqua pertencente a um plano passante, as suas projeções deverão concorrer num único ponto, no eixo x .

Assim, existem dois pontos que permitem traçar a projeção frontal da reta r .

Estando a reta r representada pelas suas projeções, é possível determinar a projeção frontal do ponto I , na interseção de r_2 com v_2 .

Assim, determina-se o ponto I , de interseção do plano γ , passante e não-projetante, com a reta vertical v , projetante horizontal.



Resumindo

A determinação do ponto I , de interseção de uma reta projetante com um plano não-projetante, recorre sempre a uma reta auxiliar do plano, concorrente com a reta projetante no ponto I , de interseção.

Para praticar

- 1 Determina o ponto I , de interseção entre a reta t , de topo, e o plano α , oblíquo:
 - a reta t contém o ponto $A (-2; 5; 3)$;
 - o plano α está definido pelos seus traços, que concorrem no eixo x no ponto $K (3; 0; 0)$;
 - o traço frontal de α faz, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.d.), e o traço horizontal, um ângulo de 35° (a.d.).
- 2 Determina o ponto I , de interseção entre a reta v , vertical, e o plano p , de rampa:
 - a reta v tem 3 cm de afastamento;
 - os traços horizontal e frontal do plano de rampa têm, respetivamente, 5 cm de afastamento e 3 cm de cota.
- 3 Determina o ponto I , de interseção entre a reta t , de topo, e o plano γ , passante:
 - o traço frontal da reta t é o ponto $F (0; 0; 4)$;
 - o plano γ é definido pelo eixo x e pelo ponto $P (2; 3; 3)$.

Interseção de reta não-projetante com plano não-projetante (método geral)

O método geral de interseção de uma reta com um plano permite resolver qualquer tipo de interseção, sendo ela um caso particular (envolvendo retas ou planos projetantes), mas também os casos em que nenhum dos elementos da interseção é projetante.

Observe o exemplo:

Tendo uma reta v , vertical, projetante horizontal, e um plano α , oblíquo, não-projetante, pretende-se determinar o ponto I , de interseção entre ambos.

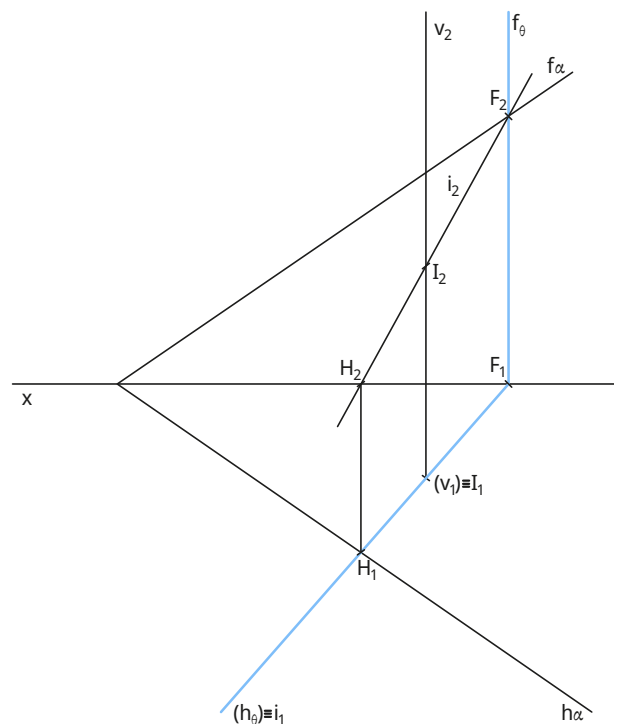
Este caso já foi abordado anteriormente, onde se recorreu a uma reta auxiliar, pertencente ao plano dado. Porém, esse procedimento apenas é válido quando a reta em questão é projetante.

O **método geral** permite uniformizar processos e é aplicável a ambas as situações.

Assim, este consiste em traçar um plano projetante (neste caso, um plano vertical θ), que contenha a reta que intersesta o plano dado.

A determinação da reta de interseção entre ambos os planos – reta i – vai determinar as projeções do ponto I , onde esta intersesta a reta dada.

Neste caso, o ponto I é o ponto de concorrência das retas i e v .



Considerando o mesmo plano α , pretende-se determinar a interseção de uma reta oblíqua r com o plano oblíquo.

Neste caso, nenhum dos elementos é projetante. Desse modo, o único procedimento válido é o **método geral**.

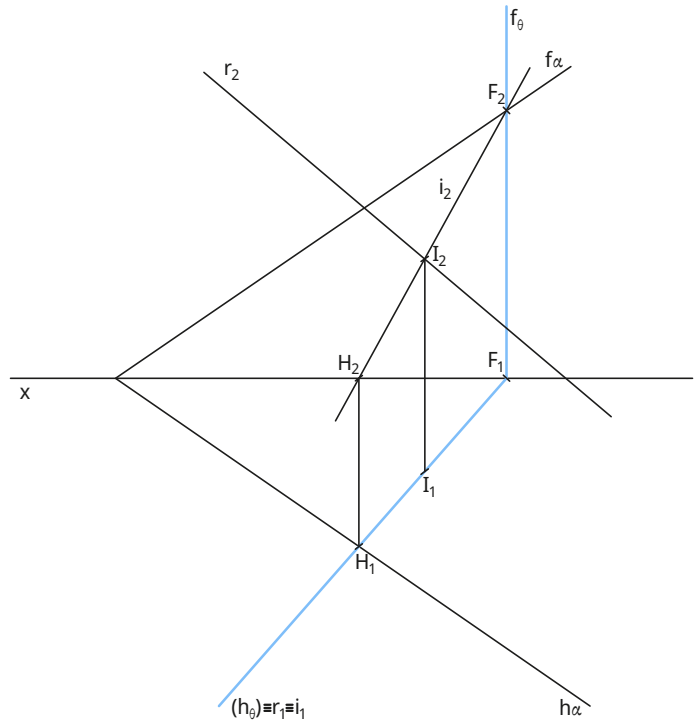
Assim, pela reta dada, faz-se passar um plano auxiliar, projetante.

Recorrendo a um plano vertical θ , projetante, este contém a reta r , pois r_1 está coincidente com o traço horizontal do plano.

A reta i , de interseção de ambos os planos, é complanar com a reta r .

Ambas concorrem em I – ponto de interseção da reta r com o plano α .

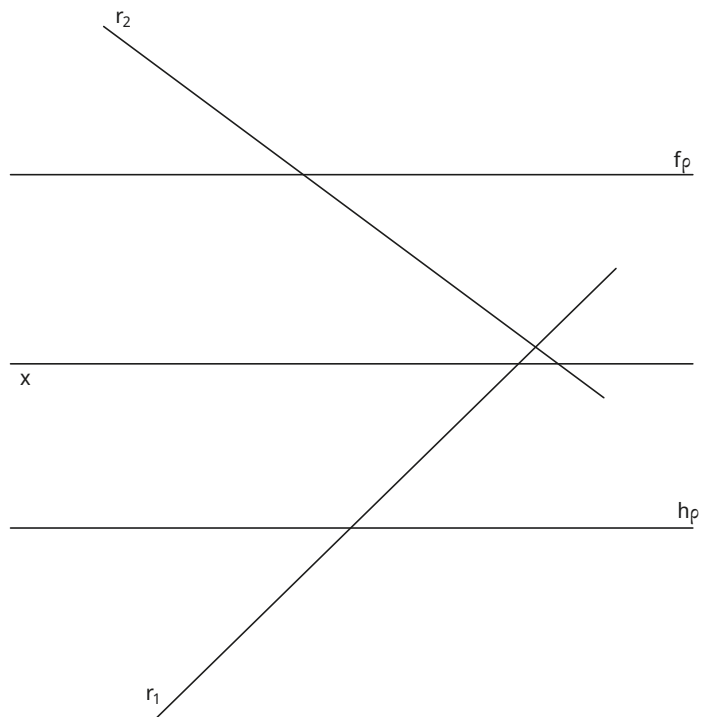
A reta r é concorrente com uma reta do plano α no ponto I , logo, a reta r é concorrente com o plano α no ponto I .



Abordando agora a interseção de uma reta r , oblíqua, e um plano de rampa ρ , observa o exemplo ao lado.

Trata-se de uma interseção de uma reta não-projetante e um plano não-projetante.

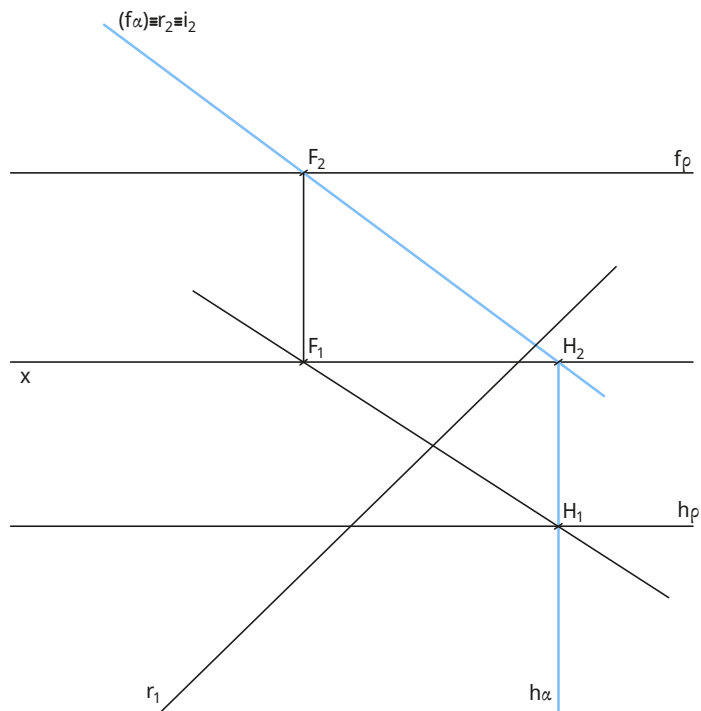
Assim, recorrer-se-á ao método geral para determinar o ponto I .



O recurso a um plano auxiliar projetante, neste caso, deu-se a partir da projeção frontal da reta r . Assim, considera-se um plano de topo α , projetante frontal.

O traço frontal do plano de topo está coincidente com a projeção frontal da reta r , garantindo a pertença dessa reta ao plano.

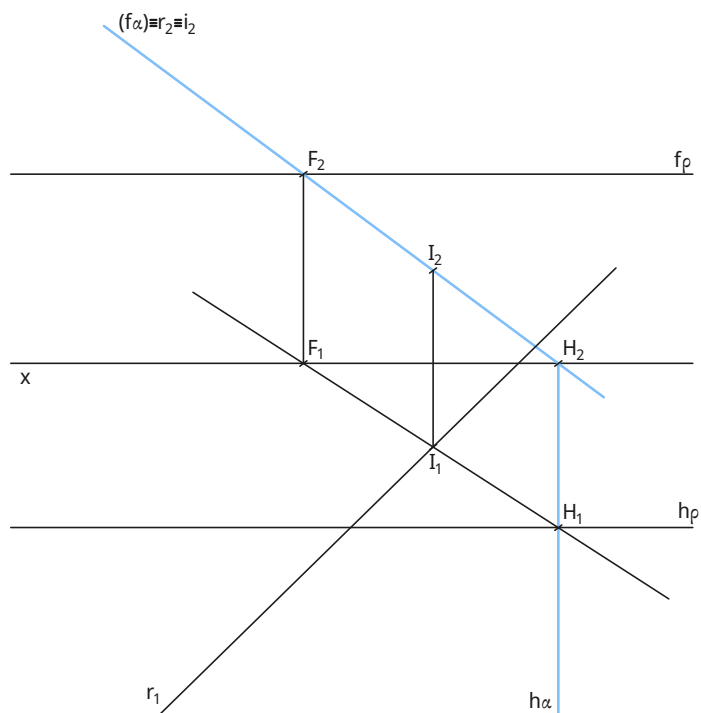
Determinada a interseção de ambos os planos – a reta i – estão reunidas as condições para a representação do ponto I – interseção da reta r com o plano ρ .



As retas r e i são concorrentes no ponto I .

Uma vez que a reta i pertence ao plano de rampa, determinando o seu ponto de interseção com a reta r , tem-se o ponto comum da reta r e o plano de rampa.

O ponto I pertence, simultaneamente, à reta r e ao plano ρ .



Interseção de reta com um plano não definido pelos seus traços

Até ao momento, foram abordados exemplos de interseção de uma reta com um plano, em que este está sempre representado pelos seus traços, independentemente de se tratar de um plano projetante ou não-projetante.

Contudo, há casos em que o plano em questão poderá não estar representado pelos seus traços, mas sim por duas retas que lhe pertençam, paralelas ou concorrentes.

Nestes casos, aplica-se também o método geral, como podes verificar no exemplo ao lado.

Considera a reta r e o plano definido pelas retas paralelas a e b .

Pretende-se determinar o ponto I , de interseção entre a reta r e o plano definido pelas retas a e b .

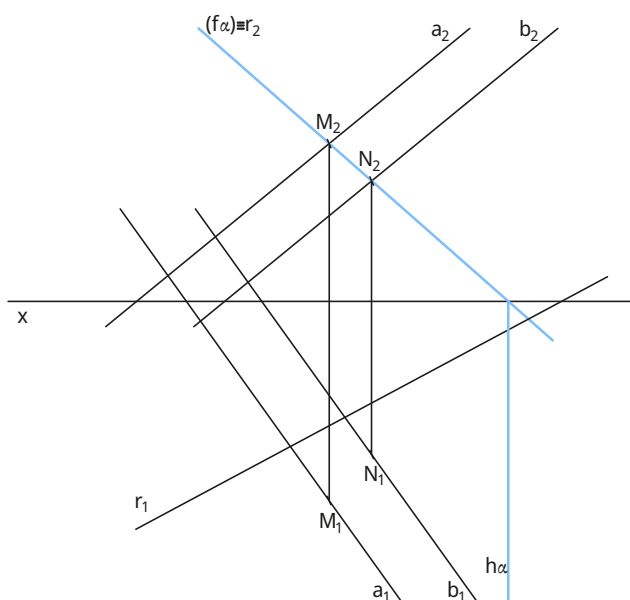
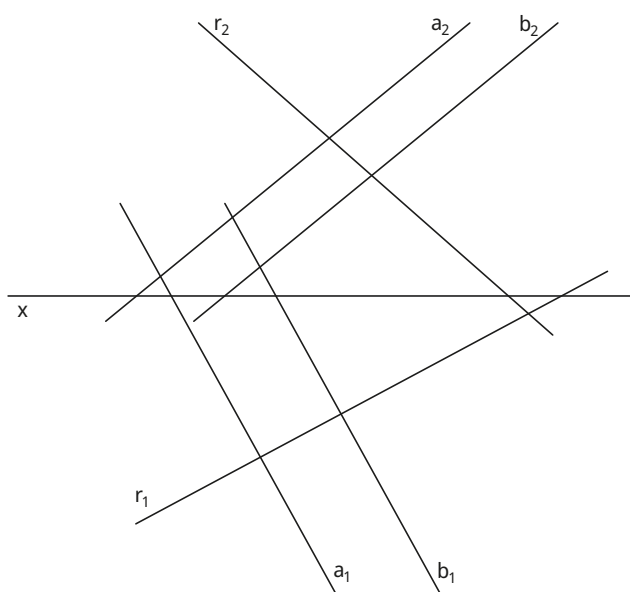
As retas a e b são paralelas e oblíquas, pelo que se antecipa que se tratará de um plano oblíquo.

No entanto, este não está definido pelos seus traços, e não se pretende que estes sejam representados para a resolução do enunciado.

A aplicabilidade do método geral é admitida nestes casos.

Tal como se verifica nos exemplos em que os planos estão definidos pelos seus traços, o método geral consiste em recorrer a um plano auxiliar, projetante, que contenha a reta que intersesta o plano dado.

Optou-se por um plano de topo, projetante frontal, e, portanto, com o seu traço frontal coincidente com r_2 .



Seguidamente, determina-se a reta i , de interseção do plano α de topo, com o plano definido pelas retas a e b . A reta i será definida pelos pontos M e N , respetivamente, pontos de interseção do plano de topo com as retas a e b .

Representada a reta i pelas suas projeções, procede-se à determinação do ponto I , de interseção da reta r com o plano definido pelas retas a e b .

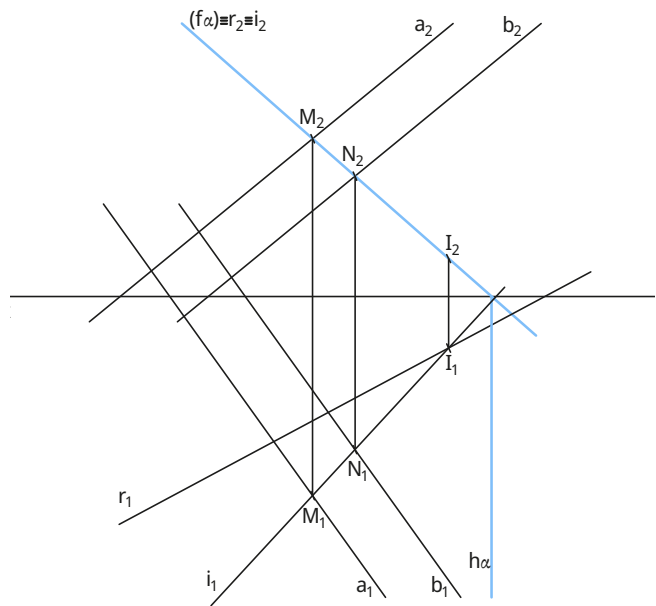
Esse ponto será o ponto de concorrência entre a reta i e a reta r .

Tendo ambas as suas projeções frontais coincidentes, considera-se a interseção das suas projeções horizontais – I_1 .

I_2 estará sobre as suas projeções frontais.

Assim, determina-se o ponto de interseção de uma reta e um plano, não estando este definido pelos seus traços.

Em todos os casos, é aplicável o método geral.



Resumindo

O método geral da interseção de retas com planos resume-se a:

- conduzir, pela reta dada, um plano auxiliar (preferencialmente projetante);
- determinar a reta de interseção entre o plano dado e o plano projetante;
- o ponto de interseção da reta com o plano é o ponto de concorrência entre a reta dada e a reta de interseção entre ambos os planos.

Para praticar

- 1 Determina o ponto I, de interseção de uma reta r , oblíqua, com um plano oblíquo α , sabendo que:
 - a reta r está definida pelos pontos A (2; 3; 2) e B (-1; 1; 5);
 - o plano α contém o ponto K (-4; 0; 0) e os seus traços frontal e horizontal fazem ângulos de 35° (a.e.) e 40° (a.e.), respetivamente.
- 2 Determina o ponto I, de interseção de uma reta fronto-horizontal g e um plano oblíquo α , sabendo que:
 - a reta g tem 3 cm de afastamento e 4 cm de cota;
 - o plano α é ortogonal ao plano bisetor dos diedros ímpares e o seu traço frontal faz um ângulo de 45° (a.d.).
- 3 Determina o ponto I, de interseção de uma reta r , oblíqua, e um plano ρ , de rampa, sabendo que:
 - a reta r está definida pelos pontos A (3; 4; 2) e B (-1; 2; 6);
 - o plano ρ está definido pelos seus traços, que têm 4 cm de cota e 3 cm de afastamento.
- 4 Considera o plano de rampa do enunciado anterior. Determina o ponto I, de interseção da reta p , de perfil, definida pelos pontos A (3; 2) e B (1; 4), com o plano ρ .
- 5 Determina o ponto I, de interseção de uma reta oblíqua r e um plano definido por duas retas concorrentes a e b , sabendo que:
 - a reta r é uma reta oblíqua passante, que contém o ponto do eixo x de abscissa 4, e as suas projeções frontal e horizontal fazem, com o eixo x , ângulos de 30° (a.e.) e 45° (a.e.), respetivamente;
 - as retas a e b são concorrentes no ponto P (2; 4; 4);
 - a reta a contém o ponto A (4; 1; 2);
 - a reta b contém o ponto B (1; 3; 3).
- 6 Determina o ponto I, de interseção de uma reta fronto-horizontal g e um plano definido por duas retas paralelas m e n , sabendo que:
 - a reta g tem 4 cm de afastamento e 2 cm de cota;
 - a reta m contém o ponto M (2; 4; 3) e a sua projeção frontal faz, com o eixo x , um ângulo de 50° (a.d.);
 - a reta n contém o ponto N (0; 1; 1) e a sua projeção horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.e.).

14

Secções planas de sólidos

Secções planas por planos horizontais ou frontais

Secções planas por planos de perfil

Secções planas por planos verticais e de topo

Secções planas por planos projetantes em sólidos com arestas de perfil

Pontos problemáticos na determinação de uma secção plana

Secções planas por planos não-projetantes

Secções planas em cones

Secções planas em cilindros

Secções planas em esferas

Sólidos resultantes de uma truncagem

Secções planas de sólidos

Em Geometria Descritiva, entende-se por **secção** uma linha ou superfície segundo a qual se cortam uma superfície e um sólido.

Revisitando os conceitos apreendidos no manual de 10.º ano desta disciplina, importa distinguir uma **secção plana** de um **sólido truncado**.

Por **secção plana** entende-se o **polígono** resultante da intersecção de um dado plano (plano secante) com as arestas do sólido seccionado. A união desses pontos de intersecção origina a **secção plana**.

Por **sólido truncado** entende-se o **sólido** resultante entre a secção plana e o plano da base do sólido seccionado.

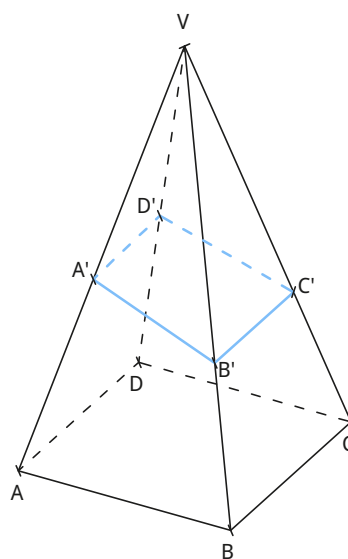
Assim, uma **secção plana** corresponde a um **polígono**, e um **sólido truncado** corresponde, como o próprio nome indica, a um **sólido**.

Observa os exemplos:

A pirâmide quadrangular de base **[ABCD]** é seccionada por um plano oblíquo relativamente à base (plano secante), originando uma secção plana.

A figura da secção é o quadrilátero **[A'B'C'D']**.

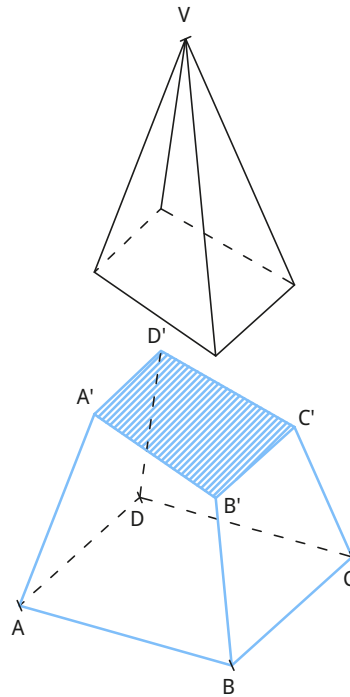
Neste caso, o sólido permanece inteiro (indiviso), salientando, apenas, a figura resultante da secção.



No caso de uma truncagem, o sólido original é dividido em duas partes, delimitadas pela secção plana originada pelo plano secante. Assim, entende-se como sólido resultante aquele que se situa entre o plano da base, ou o vértice, e o plano secante – sólido truncado.

Numa truncagem, considera-se apenas uma parte do sólido, rejeitando-se a outra.

No exemplo ao lado, considerou-se o sólido resultante da truncagem que está compreendido entre o plano da base e o plano secante.



Secções planas por planos horizontais ou frontais

As secções planas resultantes de planos secantes horizontais ou frontais terão sempre uma das suas projeções em verdadeira grandeza, uma vez que são figuras pertencentes a esses planos, paralelos aos planos de projeção, independentemente do plano da base do sólido seccionado.

Deste modo, seguir-se-ão exemplos de sólidos com bases nos vários tipos de planos, seccionados por planos secantes paralelos aos planos de projeção.

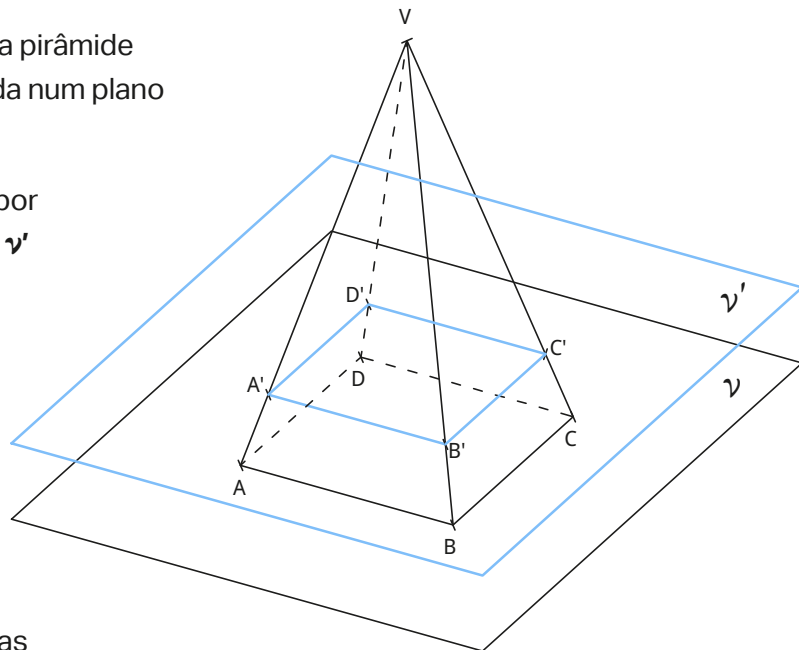
Pirâmides

O exemplo ao lado ilustra uma pirâmide cuja base **[ABCD]** está contida num plano horizontal ν .

Essa pirâmide é seccionada por um plano horizontal (de nível) ν' paralelo ao plano da base.

A figura plana resultante da secção é o quadrilátero **[A'B'C'D']**, que pertence ao plano ν' , cuja projeção horizontal se encontra em verdadeira grandeza.

[ABCD] e **[A'B'C'D']** são figuras paralelas.



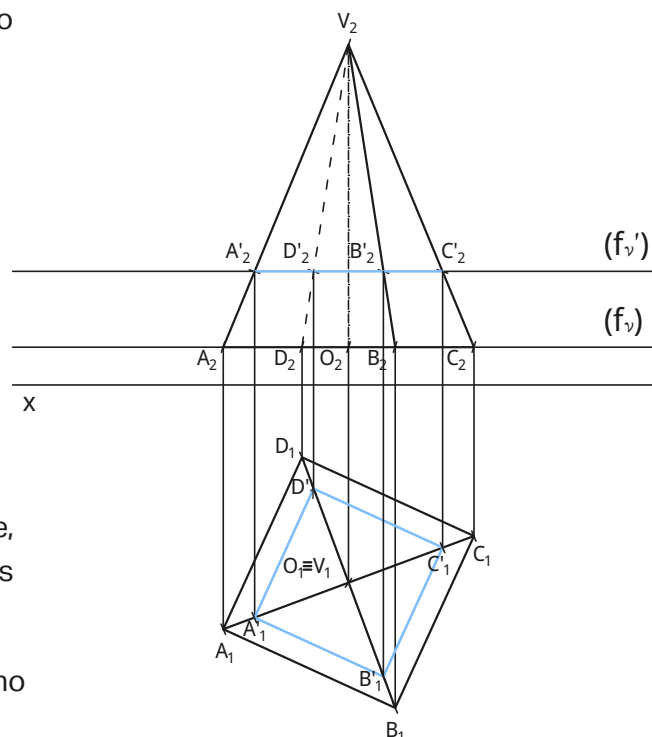
Visualizando o exemplo em dupla projeção ortogonal, tem-se:

A base da pirâmide, o quadrado **[ABCD]**, tem a sua projeção em deformação máxima e a sua projeção horizontal em verdadeira grandeza.

O plano secante ν' é horizontal e paralelo ao plano da base ν .

A figura plana resultante da secção da pirâmide é o quadrado **[A'B'C'D']**, de lado menor do que o quadrado da base, mas cujos lados são paralelos entre si dois a dois.

Ou seja: planos secantes paralelos ao plano da base originam figuras de secção paralelas à base do sólido seccionado.



Considera, agora, um exemplo de secção por um plano horizontal, numa pirâmide cuja base não é paralela ao plano secante:

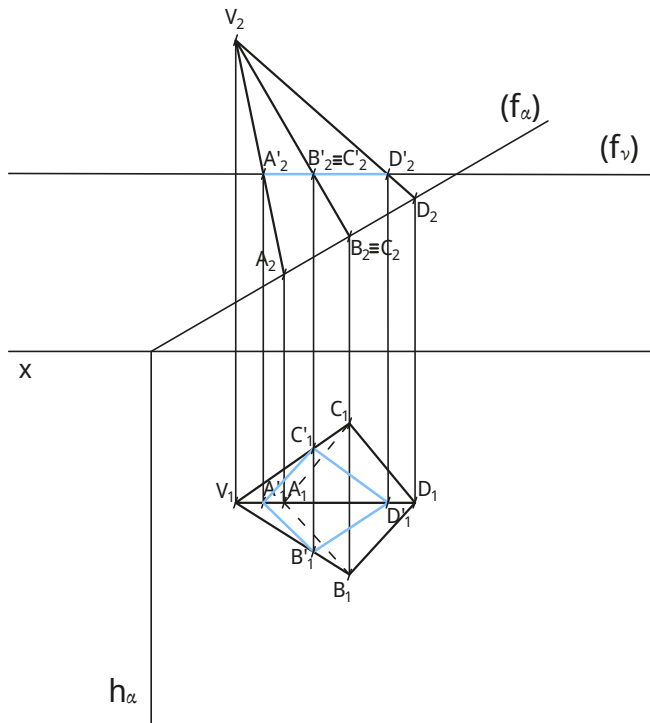
A pirâmide cuja base é o quadrado **[ABCD]** tem a sua base num plano de topo α .

O plano secante é o plano horizontal ν concorrente e, por isso, não paralelo, com o plano α .

A figura plana resultante da secção terá a sua projecção horizontal em verdadeira grandeza, pois pertence a um plano paralelo ao Plano Horizontal de Projecção.

Sendo o plano ν um plano projetante frontal, as projecções frontais dos vértices da figura resultante da secção estão sobre o traço frontal de ν , onde este intersesta as arestas da pirâmide.

Assim, nas arestas correspondentes, em projecção horizontal, tem-se a projecção horizontal dos vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'**.



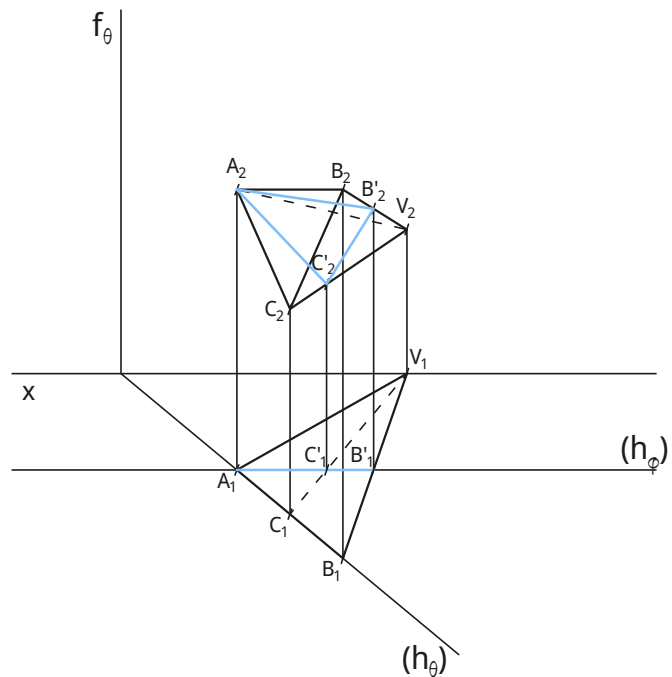
Nota que, neste caso, a figura resultante da secção tem uma das suas projecções em verdadeira grandeza. Porém, não é semelhante à figura da base do sólido seccionado, nem paralela a esta, uma vez que o plano secante não é paralelo ao plano da base da pirâmide.

Abordando, agora, um exemplo de plano secante frontal, considera a pirâmide triangular de base **[ABC]**, contida num plano vertical.

O vértice **V** é um ponto do Plano Frontal de Projeção.

Pretende-se determinar a figura resultante da secção da pirâmide por um plano frontal ϕ , que contém o vértice **A** da base.

Tal como acontece com as secções por planos horizontais, os vértices da secção estão sobre o traço do plano secante, uma vez que se trata de um plano projetante. Assim, onde as arestas da pirâmide interseitam o traço horizontal de ϕ , tem-se as projeções horizontais dos vértices da secção.



As projeções frontais estarão sobre as projeções frontais das arestas em questão.

Neste caso, o vértice **A** pertence, simultaneamente, à base do sólido e à figura de secção obtida através da intersecção do plano secante com o sólido seccionado. A figura de secção é o triângulo **[AB'C']**.

Prismas

Até agora foram abordadas secções por planos horizontais ou frontais em pirâmides.

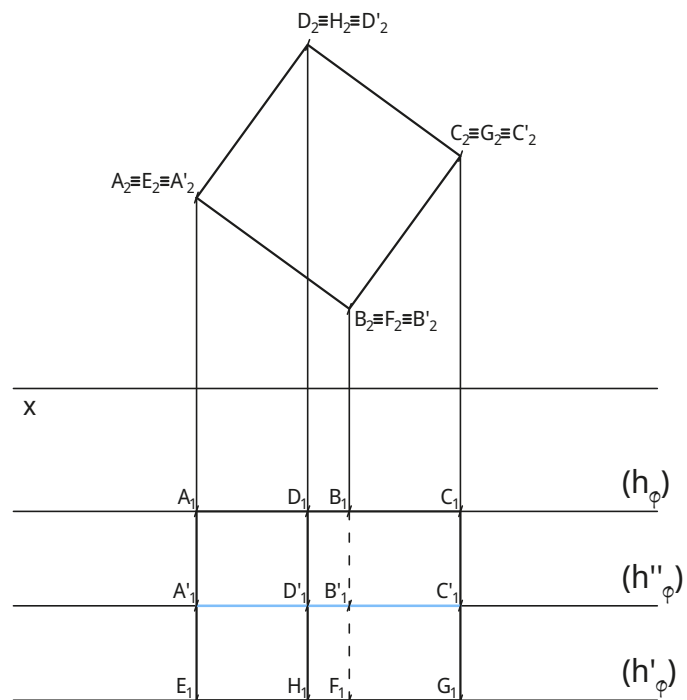
No caso dos prismas, o procedimento é semelhante. Contudo, há especificidades próprias nas figuras resultantes da secção, em casos especiais, nomeadamente na secção por planos paralelos às bases, como se verifica no exemplo abaixo:

Considerando o cubo

[ABCDEFGH], com bases frontais, pretende-se determinar a figura de secção resultante da intersecção do plano secante, também frontal, ϕ'' .

Tratando-se de um plano secante paralelo às bases, a figura de secção será geometricamente igual às bases, uma vez que as arestas laterais do sólido são paralelas entre si.

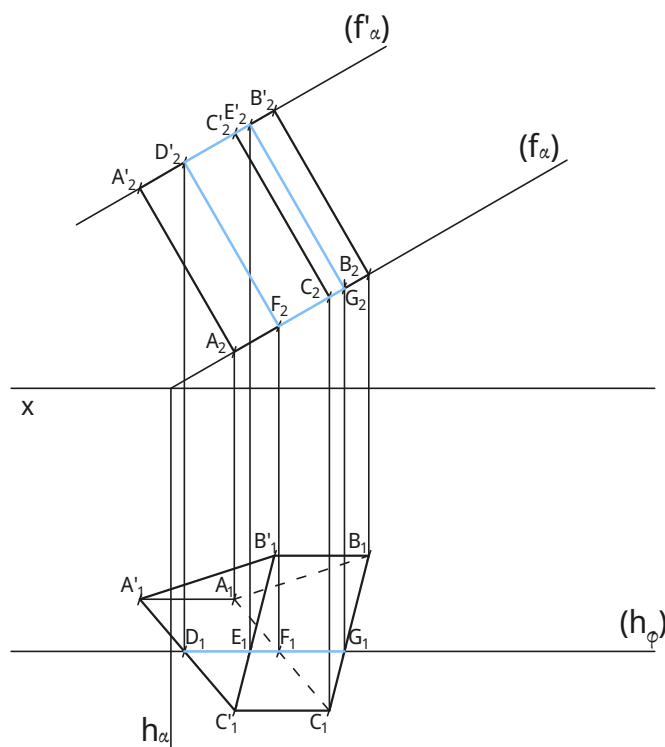
Nota que, no caso das pirâmides, em que as arestas laterais convergem num único ponto – vértice da pirâmide –, a figura de secção era semelhante à figura da base da pirâmide, diferindo na dimensão dos seus lados, resultado da convergência das arestas laterais da pirâmide.



Considerando, agora, um prisma triangular regular com bases de topo, pretende-se determinar a figura de secção obtida através de um plano secante frontal.

Observando os planos paralelos, de topo, α e α' , que contêm as bases **[ABC]** e **[A'B'C']** do prisma, e o plano frontal ϕ , que secciona o sólido, verifica-se que os planos α e α' são ortogonais a ϕ . Desse modo, a secção resultante corresponderá a um quadrilátero ortogonal aos triângulos das bases do prisma e, portanto, os seus lados serão paralelos às arestas do mesmo.

Sendo o plano secante um plano projetante horizontal, as projeções horizontais dos vértices da secção estarão na intersecção das arestas do prisma com o traço horizontal do plano secante.



Em projeção frontal, estes encontram-se sobre as arestas correspondentes.

Neste caso, a figura de secção é o retângulo **[DEFG]**.

Resumindo

- Secções em sólidos, independentemente dos planos das suas bases, a partir de planos horizontais ou frontais, terão sempre uma das suas projeções em verdadeira grandeza.
- Em qualquer sólido, com bases em quaisquer planos, seccionado por planos horizontais, a projeção frontal dos vértices da figura de secção estará sempre na intersecção das arestas do sólido com o traço frontal do plano secante.
- Em qualquer sólido, com bases em quaisquer planos, seccionado por planos frontais, a projeção horizontal dos vértices da figura de secção estará sempre na intersecção das arestas do sólido com o traço horizontal do plano secante.

Para praticar

- 1 Determina a secção plana produzida por um plano horizontal ν com 3 cm de cota numa pirâmide quadrangular regular, situada no 1.º diedro, cuja base está assente num plano frontal ϕ com 1 cm de afastamento. O vértice A (2; 1; 1) é o vértice de menor cota da pirâmide e mais à esquerda do segmento [AB], correspondente a uma das arestas da base, cuja reta de suporte é uma reta frontal cuja projecção frontal forma um ângulo de 35° (a.d.) com o Plano Horizontal de Projecção. O lado do quadrado mede 4 cm e a altura da pirâmide é 6 cm.
- 2 Determina a secção plana produzida por um plano frontal ϕ num prisma triangular regular com bases assentes em planos de topo, sabendo que:
 - os planos de topo são paralelos e formam, com o Plano Horizontal de Projecção, ângulos de 45° (a.d.);
 - as bases são triângulos equiláteros e a base de menor cota contém o vértice A (-3; 3; 0);
 - as arestas laterais do prisma são segmentos de reta frontais e medem 6 cm, bem como o lado [AB], da base de menor cota, que mede 4 cm;
 - o prisma situa-se no 1.º diedro;
 - o plano secante tem 5 cm de afastamento.

Secções planas por planos de perfil

Até ao momento, foram abordados exemplos de sólidos com bases em diferentes tipos de planos, seccionadas por planos projetantes paralelos aos planos de projecção.

Assim, a verdadeira grandeza das secções era determinada automaticamente, pois estas pertenciam a planos que projetam os seus elementos em verdadeira grandeza no plano de projecção ao qual são paralelos.

No entanto, existem outros tipos de planos projetantes que não são paralelos aos planos de projecção.

O caso dos planos de perfil é categórico, uma vez que os planos de perfil são ortogonais a ambos os planos de projecção.

Deste modo, ambas as projecções de qualquer elemento que lhes pertença está em deformação máxima.

Nesse sentido, é necessário, após a determinação dos pontos da secção, recorrer a um método geométrico auxiliar, de forma a obter a verdadeira grandeza da secção.

Observa o exemplo:

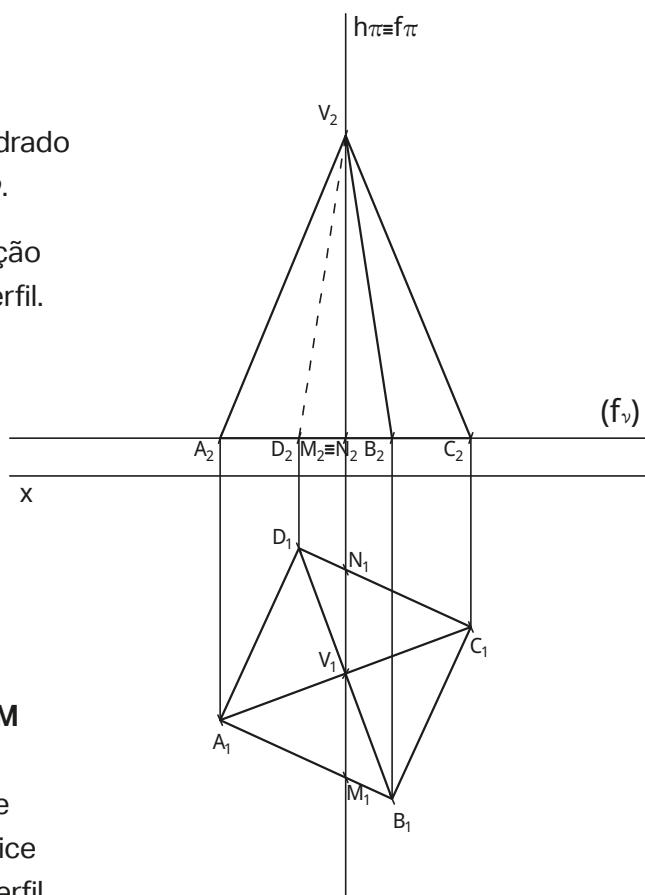
Considera a pirâmide cuja base é o quadrado **[ABCD]**, assente num plano horizontal ν .

Pretende-se determinar a figura de secção da pirâmide pelo plano secante π , de perfil.

Neste caso, o plano secante contém o vértice da pirâmide, sendo esse facto totalmente ocasional.

Sendo o plano de perfil um plano duplamente projetante, os pontos da secção, em ambas as projeções, estarão sobre os seus traços.

Determinadas as projeções dos pontos **M** e **N**, resultantes da intersecção do plano secante com as arestas da base, sabe-se que o terceiro ponto será o ponto **V**, vértice da pirâmide, que pertence ao plano de perfil.

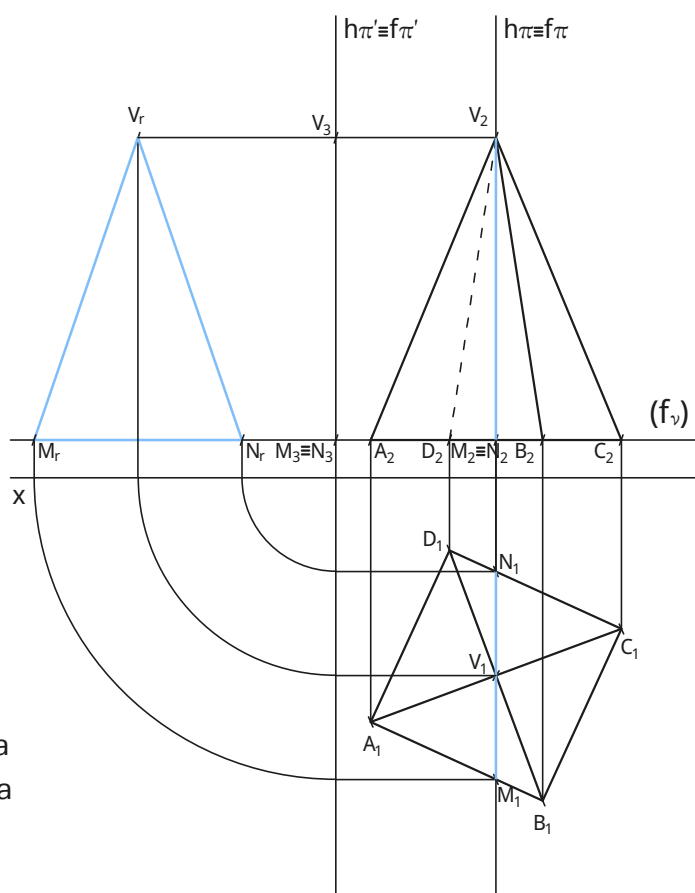


No entanto, a determinação dos pontos não nos permite conhecer a figura resultante da secção, estando esta em deformação máxima.

É, então, necessário recorrer a um rebatimento do plano de perfil, para determinar a verdadeira grandeza da secção.

Por uma questão de maior clareza do traçado, optou-se por uma terceira projeção, para um plano de perfil π' , paralelo a π .

Procedendo à transposição dos pontos **M**, **N** e **V** para esse plano auxiliar, e ao consequente rebatimento, é conhecida a verdadeira grandeza da secção originada pelo plano secante π sobre a pirâmide.



Secções planas por planos verticais e de topo

À semelhança das secções originadas por planos de perfil, também no caso de secções por planos verticais ou de topo é necessário recorrer ao rebatimento do plano secante para determinar a verdadeira grandeza da secção. No entanto, *a priori*, pode vislumbrar-se a geometria da figura de secção, embora esta esteja sujeita a deformação.

No caso dos planos verticais, projetantes horizontais, as projeções horizontais dos vértices da secção estarão sobre o traço horizontal do plano secante. Já no caso dos planos de topo, projetantes frontais, as projeções frontais dos vértices da secção estarão sobre o traço frontal do plano secante.

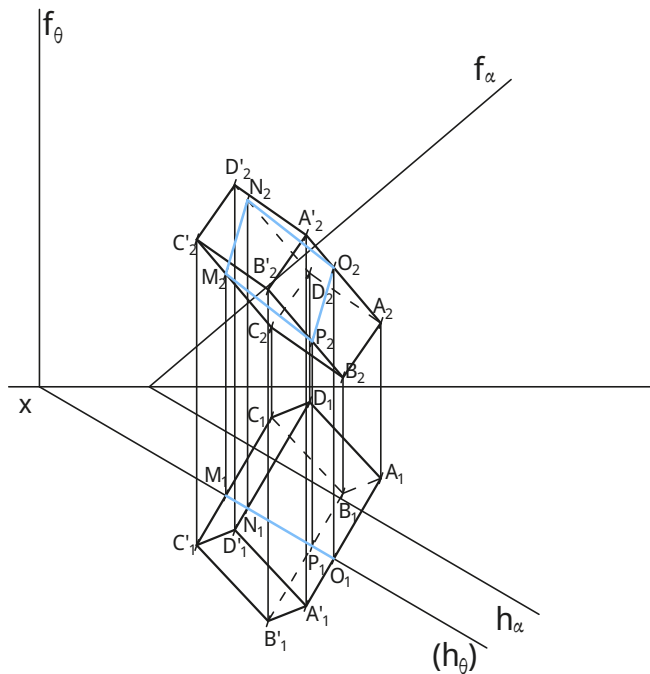
Observa o prisma regular **[ABCD A' B' C' D']** de bases oblíquas.

Pretende-se determinar a secção plana originada pelo plano secante θ , vertical e projetante horizontal.

Como plano projetante horizontal, os pontos da secção, em projeção horizontal, estarão sobre o traço horizontal do plano vertical.

As suas projeções frontais estarão sobre as arestas correspondentes em projeção frontal.

A secção plana é o polígono **[MNOP]**, cuja projeção horizontal se encontra em deformação máxima e a projeção frontal deformada.

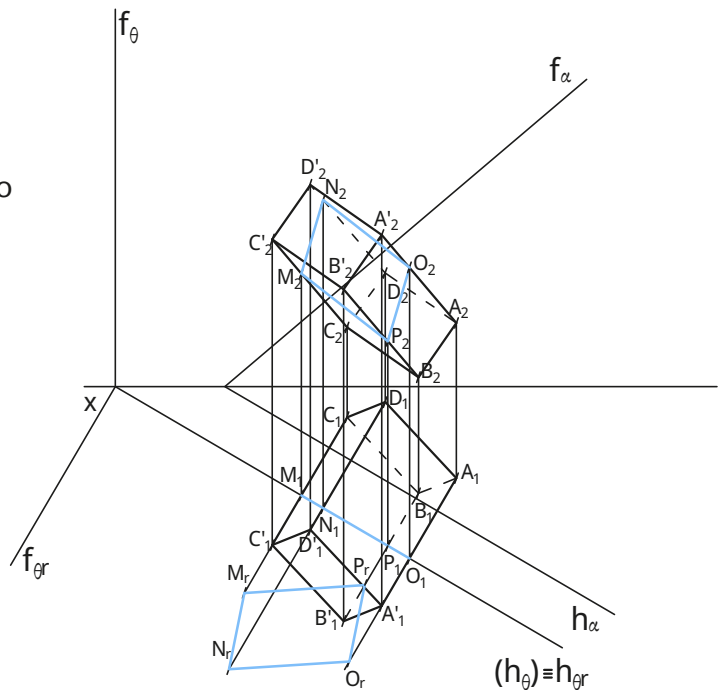


Para conhecer a verdadeira grandeza da secção, é necessário recorrer ao rebatimento do plano secante, que contém a secção.

Neste caso, optou-se por rebater o plano secante θ sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Rebatidos os pontos **M**, **N**, **O** e **P**, tem-se a secção rebatida **[M_rN_rO_rP_r]**.

Como podes verificar, o procedimento no que respeita à determinação da figura de secção por planos projetantes é sempre idêntico, independentemente do tipo de plano que contém as bases do sólido seccionado, sendo este projetante ou não.



Atenta, agora, no exemplo seguinte:

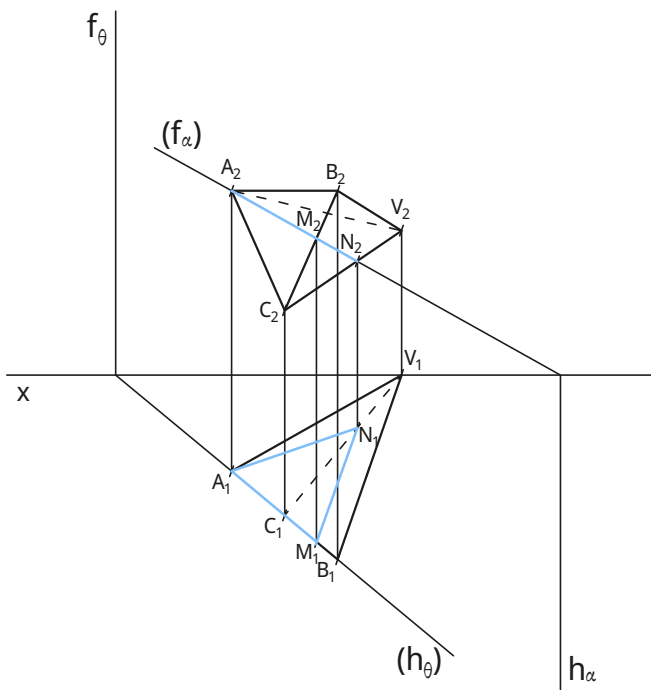
É dada uma pirâmide triangular regular, cuja base **[ABC]** está contida num plano vertical θ .

Pretende-se determinar a secção plana obtida através do plano secante α , de topo, e, por isso, projetante frontal.

Como é sabido, tratando-se de um plano secante projetante frontal, os vértices da secção terão a sua projeção frontal sobre o traço frontal do plano secante.

A projeção horizontal desses vértices estará sobre as projeções homónimas das arestas interseccionadas.

A projeção frontal da figura de secção encontra-se em deformação máxima e a sua projeção horizontal encontra-se deformada.

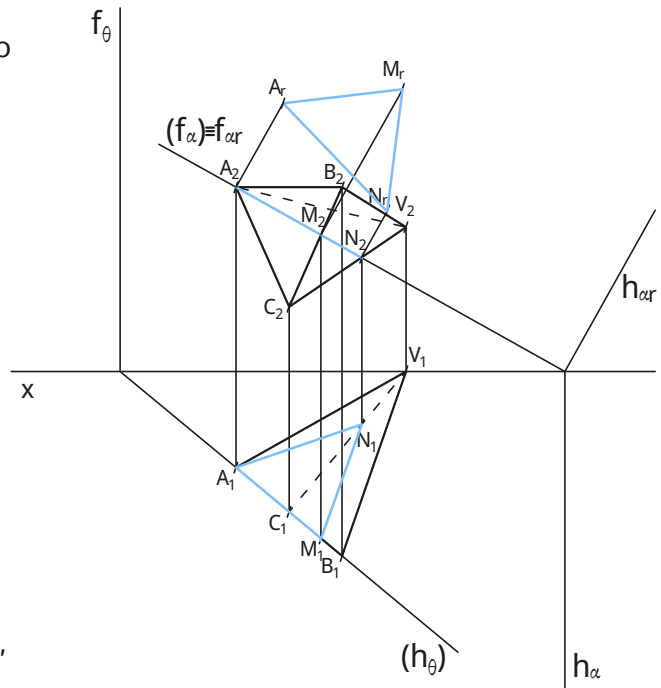


Deste modo, para determinar a verdadeira grandeza da figura de secção, é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar, através do rebatimento do plano que a contém – o plano secante.

Assim, rebatendo o plano α sobre o plano frontal de projeção, têm-se os pontos da secção **A**, **M** e **N** rebatidos.

Nota que, neste caso, o plano secante contém um dos vértices da pirâmide – o ponto **A** é, simultaneamente, um vértice da pirâmide e da figura de secção.

Assim, a verdadeira grandeza da figura de secção está representada pelos pontos **A_r**, **M_r** e **N_r** – triângulo **[A_rM_rN_r]**.



Para praticar

- 1 Determina a secção plana produzida por um plano de topo α num prisma quadrangular oblíquo de bases horizontais, sabendo que:
 - **A** (0; 2; 0) é um dos vértices da base de menor cota e o ponto **C**, da diagonal **[AC]**, tem -4 cm de abcissa e 6 cm de afastamento;
 - as arestas laterais do prisma são segmentos de reta oblíquos cujas projeções frontal e horizontal fazem, respetivamente, ângulos de 50° (a.d.) e 30° (a.d.) com o eixo **x**;
 - a altura do prisma é 7 cm;
 - o plano secante contém o ponto **K** (-7; 0; 0) e o seu traço frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 45° (a.e.).
- 2 Considera o prisma quadrangular do enunciado anterior e determina a secção produzida por um plano de perfil π que contém o ponto **C**.
- 3 Determina a secção produzida por um plano vertical θ numa pirâmide triangular regular, sabendo que:
 - a sua base **[ABC]** é um triângulo equilátero contido num plano vertical que faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 65° (a.e.);
 - o ponto **A** (2; 1) é um dos vértices da base e o ponto **B** tem afastamento nulo e 6 cm cota;
 - a altura da pirâmide é 5 cm;
 - o sólido localiza-se inteiramente no 1.º diedro;
 - o plano secante é paralelo ao plano da base e dista 3 cm deste.

Secções planas por planos projetantes em sólidos com arestas de perfil

Pirâmides com arestas de perfil

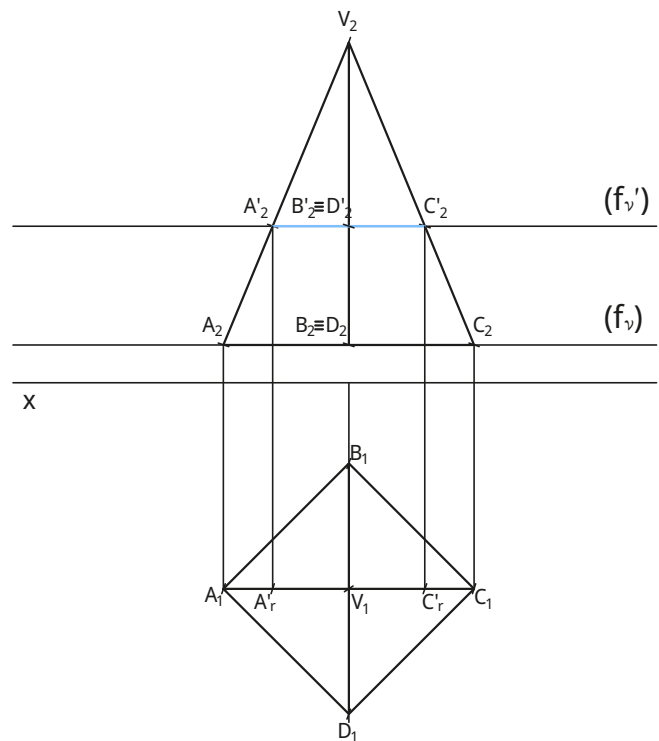
A secção de pirâmides com arestas de perfil constitui um caso particular, na medida em que uma das suas arestas estará contida numa reta de perfil, exigindo um procedimento específico na determinação dos vértices da figura de secção.

Observa o exemplo:

A pirâmide quadrangular, cuja base é um quadrado **[ABCD]** assente num plano horizontal ν , é seccionada por um outro plano horizontal ν' .

Observando o desenho, entende-se que duas das arestas da pirâmide são de perfil – arestas **[VB]** e **[VD]**.

A determinação dos vértices da secção nas arestas **[VA]** e **[VC]** é imediata, estando as suas projeções frontais sobre o traço frontal do plano secante – uma vez que se trata de um plano projetante frontal – e as projeções horizontais sobre as projeções homónimas das arestas seccionadas.



Já os vértices da secção localizados nas arestas **[BV]** e **[DV]** não são de determinação imediata. As suas projeções frontais estão, também, sobre o traço frontal do plano secante, porém, uma vez que seccionam duas arestas de perfil, a determinação da sua projeção horizontal não é imediata em dupla projeção ortogonal.

Deste modo, será necessário recorrer a raciocínios específicos ou a métodos geométricos auxiliares.

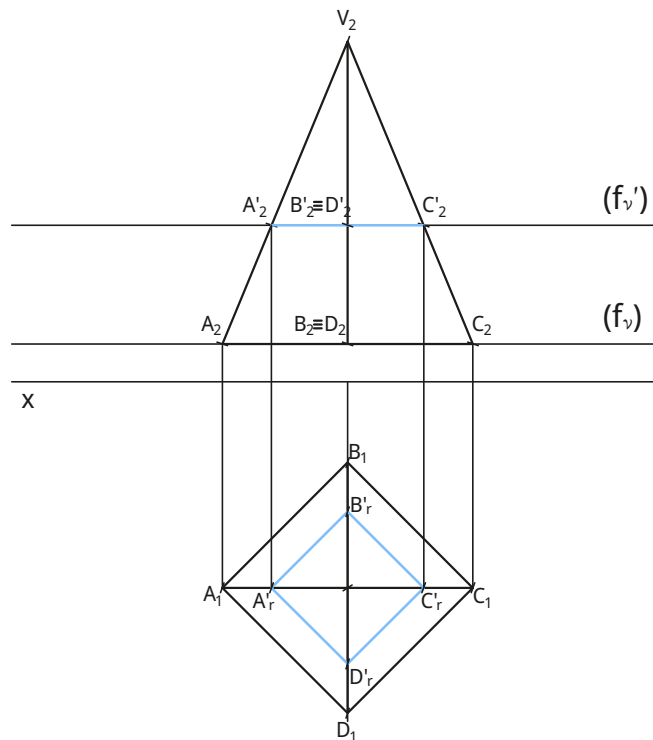
Seguem-se os dois processos:

Neste caso concreto, foi possível recorrer a um raciocínio específico, uma vez que o plano secante é paralelo ao plano da base.

Assim, a figura de secção deverá ter os seus lados paralelos aos lados da base.

Deste modo, a determinação das projeções horizontais dos pontos **B'** e **D'** é feita através do traçado de linhas paralelas às arestas **[AB]** e **[BC]**, em projeção horizontal.

Este raciocínio advém da visualização tridimensional do caso exposto em dupla projeção ortogonal, permitindo antever que a figura de secção deverá ser paralela e, por isso, semelhante – embora menor, devido à convergência das arestas seccionadas – à figura da base do sólido seccionado.

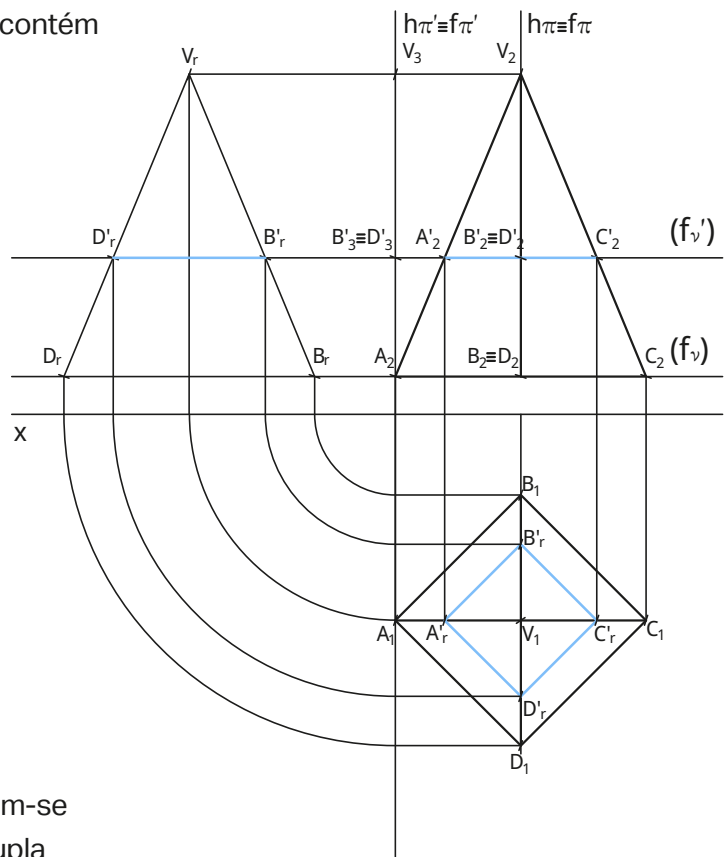


Por outro lado, poder-se-ia recorrer a um rebatimento do plano de perfil que contém as arestas de perfil seccionadas.

Nota que, também neste caso, para garantir alguma clareza do traçado, optou-se por projetar os pontos a rebater num plano π de perfil paralelo ao plano a rebater, fazendo uma terceira projeção.

Deste modo, é possível verificar as arestas **[VD]** e **[VB]** em verdadeira grandeza e, por isso, determinar, nas mesmas, a localização dos pontos da secção **D'** e **B'**.

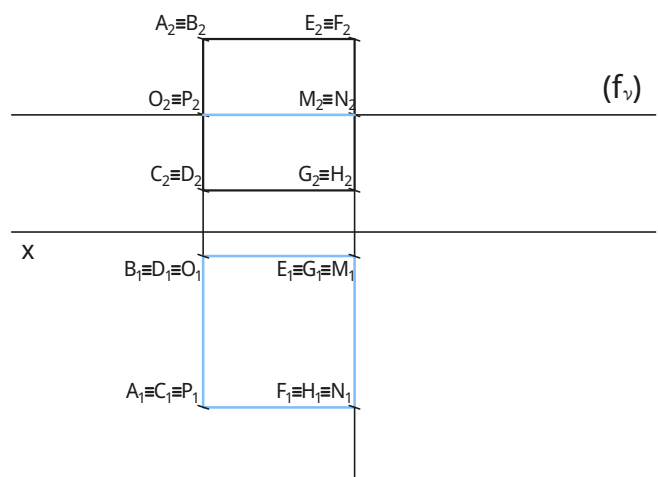
Contrarrebateando esses pontos, tem-se a secção plana representada em dupla projeção ortogonal.



Prismas com bases de perfil

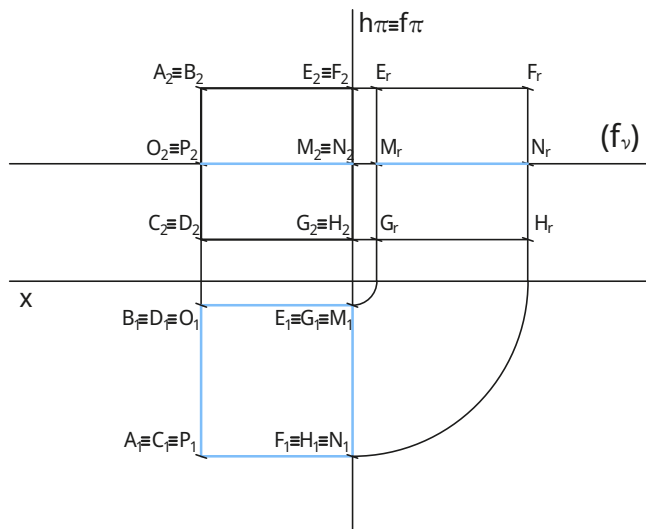
Considera um cubo **[ABCDEFGH]**, com bases assentes em planos de perfil, seccionado por um plano horizontal ν .

A determinação das projeções frontais dos vértices da secção é imediata, pois o plano secante é projetante frontal. Contudo, uma vez que as arestas seccionadas são de perfil, para determinar a projeção horizontal desses vértices, é necessário recorrer a raciocínios específicos ou a métodos geométricos auxiliares.



Neste caso, é possível entender que a projeção horizontal da secção coincide com a projeção horizontal do sólido seccionado, uma vez que se trata de um sólido regular, de arestas paralelas, e o plano secante é paralelo ao plano da base.

Porém, o recurso ao rebatimento também se aplicaria como forma de resolução, rebatendo uma das faces de perfil e verificando os vértices da secção que se encontravam na mesma face de perfil.



Para praticar

- 1 Determina a secção produzida por um plano horizontal γ com 4 cm de cota, num cubo cujas faces [ABCD] e [EFGH] são de perfil. As arestas [AE] e [CG] são fronto-horizontais, bem como as arestas [BF] e [DH], e medem 4 cm. O ponto A está à esquerda de D e tem 2 cm de afastamento e 2 cm de cota. O cubo está assente num plano horizontal γ com 2 cm de cota.
- 2 Determina a secção produzida por um plano frontal ϕ com 4 cm de afastamento numa pirâmide quadrangular regular assente no Plano Horizontal de projeção, sabendo que:
 - o ponto O (5; 0) é o centro geométrico da base;
 - a base é o quadrado [ABCD] cuja diagonal mede 6 cm;
 - o vértice da pirâmide é o ponto V (5; 6);
 - as arestas [AV] e [CV] são de perfil.
- 3 Considera o quadrado [ABCD] do enunciado anterior. Sendo este uma das bases de um prisma quadrangular regular, do 1.º diedro, com 7 cm de altura, determina a secção plana produzida no prisma por um plano horizontal γ com 3 cm de cota.

Pontos problemáticos na determinação de uma secção plana

Após a análise dos casos particulares de pirâmides com arestas de perfil, ou de prismas com bases de perfil, seccionados por planos paralelos às suas bases, surge um novo tema, que está relacionado com sólidos com arestas de perfil, mas seccionados por planos não paralelos à base e, como tal, onde não é possível recorrer a raciocínios lógicos que advêm do facto de a figura resultante da secção ser semelhante ao polígono da base do sólido seccionado.

Observa o exemplo:

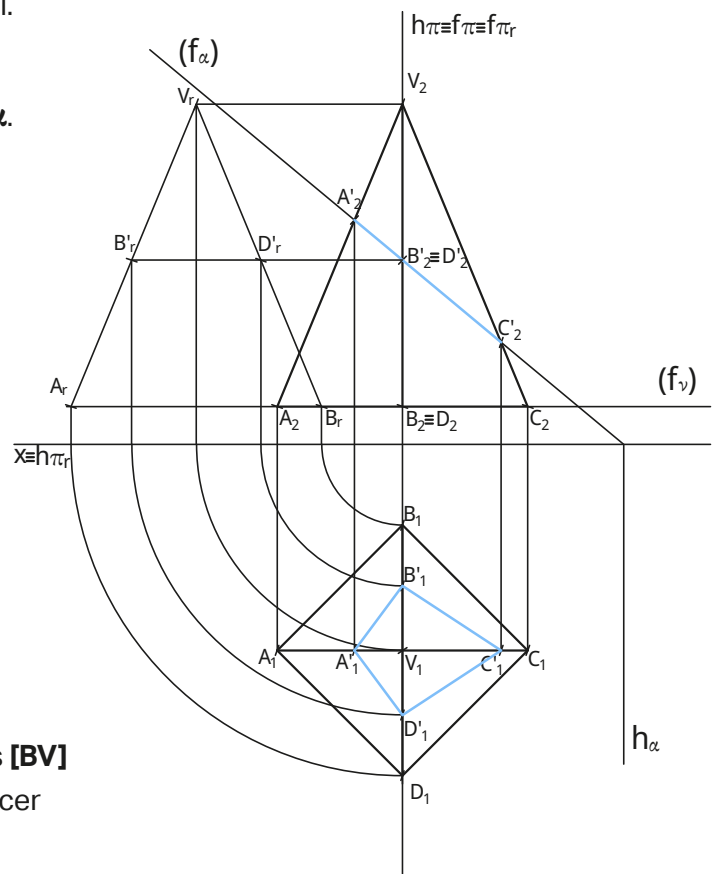
Considera a pirâmide de base quadrangular **[ABCD]**, assente num plano horizontal.

Pretende-se determinar a secção resultante do plano secante de topo α .

Nota que as arestas **[BV]** e **[DV]** são de perfil, e, por isso, ao contrário dos pontos de intersecção do plano secante com as arestas **[AV]** e **[CV]**, que são de determinação imediata, os pontos de intersecção com essas arestas de perfil não o são.

Uma das formas de solucionar esse problema é através do rebatimento do plano de perfil que contém essas arestas.

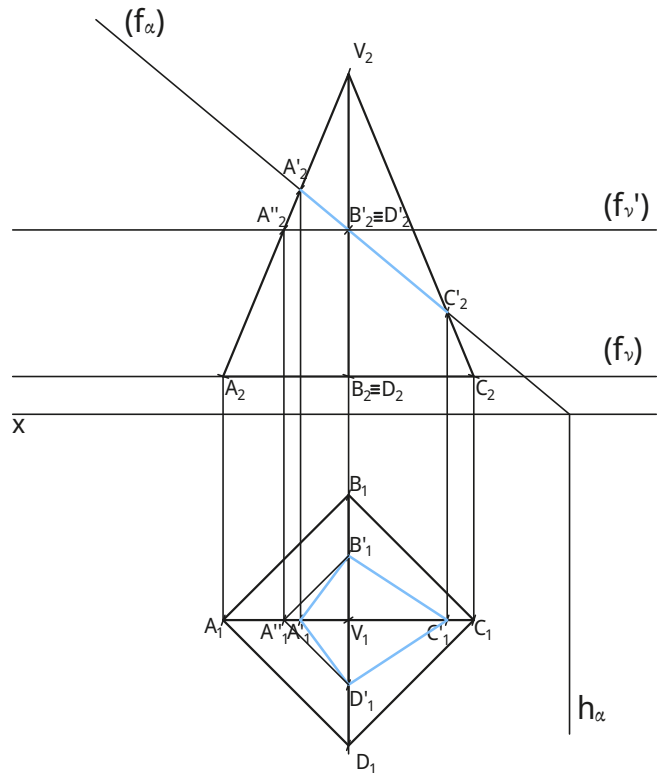
Assim, é possível visualizar as arestas **[BV]** e **[DV]** lateralmente e, por isso, conhecer a exata localização desses pontos, contrarrebatando-os e tendo-os em dupla projecção ortogonal.



Porém, existe outro método para resolver situações desta natureza, através de um plano auxiliar, paralelo ao plano da base do sólido seccionado, contendo os pontos problemáticos da secção.

Baseando o raciocínio no princípio de que a figura de secção de um sólido regular por um plano secante paralelo ao plano da base resultará, sempre, numa figura semelhante ao polígono da base do sólido, determina-se a intersecção desse plano auxiliar com uma das outras arestas, neste caso, a aresta **[AV]**, originando o ponto **A''**. Ora, sabe-se que **[A''B'']** e **[A''D'']** deverão ser paralelas, respetivamente, a **[A₁B₁]** e **[A₁D₁]**.

Assim, determinam-se os pontos problemáticos da secção com recurso a um plano auxiliar paralelo ao plano da base do sólido seccionado.



Secções planas por planos não-projetantes

Após terem sido abordadas as secções planas de sólidos com bases assentes em planos projetantes e não-projetantes, seccionados por planos projetantes, segue-se o estudo da secção de sólidos por planos não-projetantes. Trata-se de casos de maior complexidade, uma vez que, não sendo o plano secante um plano projetante, a determinação dos vértices da secção não será imediata, sendo necessário recorrer ao método de intersecção de retas projetantes e não-projetantes com planos não-projetantes.

Deste modo, há diversos processos que poderão ser adotados na resolução deste tipo de problemas:

- Recurso a métodos geométricos auxiliares, nomeadamente: mudança do diedro de projeção, transformando, assim, o plano secante não-projetante num plano projetante;
- Recurso ao método geral de intersecção de retas com planos, determinando a intersecção de cada aresta com o plano secante;
- Utilização de um método misto, conjugando o método geral de intersecção de retas com planos (intersecção das arestas do sólido com o plano secante) e a intersecção entre planos (intersecção dos planos que contêm as faces do sólido seccionado com o plano secante).

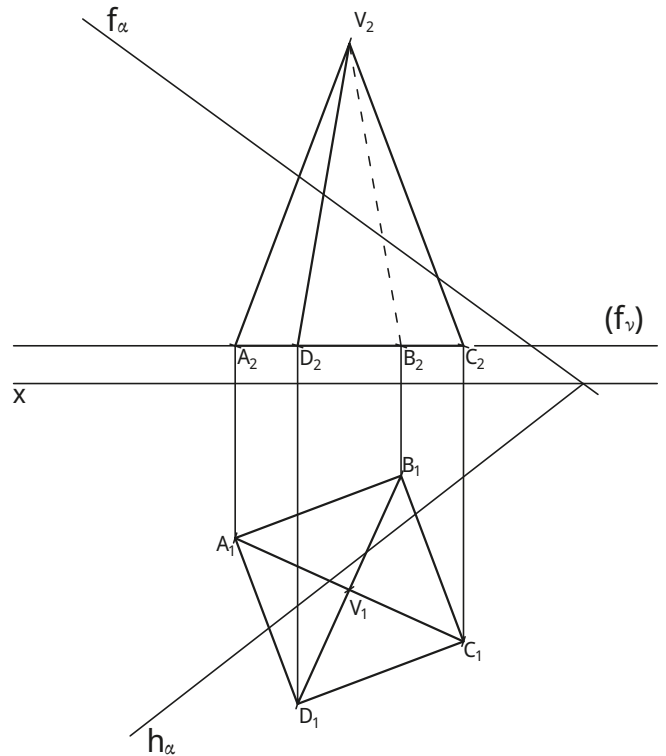
A escolha do método mais adequado depende de cada situação, obrigando a uma análise caso a caso.

Considera a pirâmide quadrangular regular com a sua base **[ABCD]** assente num plano horizontal ν .

Pretende-se determinar a secção plana do sólido resultante do plano secante α , oblíquo, e, por isso, não-projetante.

Neste caso, o que melhor se adequa à resolução da situação exposta será o método misto.

Desta forma, promover-se-á a interseção entre dois planos: o plano secante α e o plano da base da pirâmide seccionada ν .

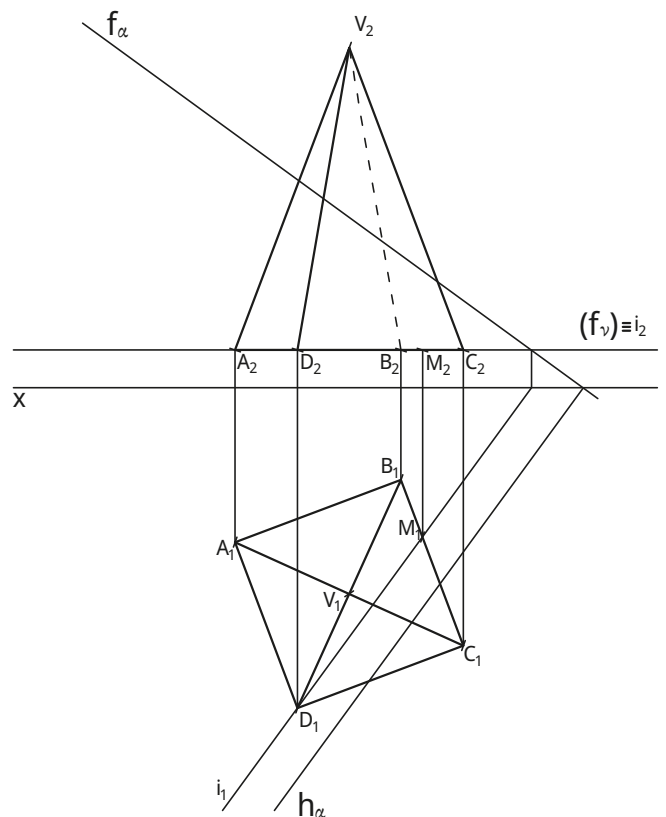


Assim, recorrendo à determinação da reta i , de interseção do plano projetante frontal ν e o plano oblíquo α , é possível determinar os dois pontos das arestas da base, resultantes da interseção do plano secante com esta – pontos **M** e **D**.

Nota que, neste caso, um dos vértices da secção da base coincide com um vértice da própria base – ponto **D**.

Essa determinação é feita em projeção horizontal, através da interseção de i_1 com a projeção horizontal da base da pirâmide.

Observando o desenho, pode antever-se que a aresta **[CV]** ficará fora da secção, como irá ser confirmado mais adiante.

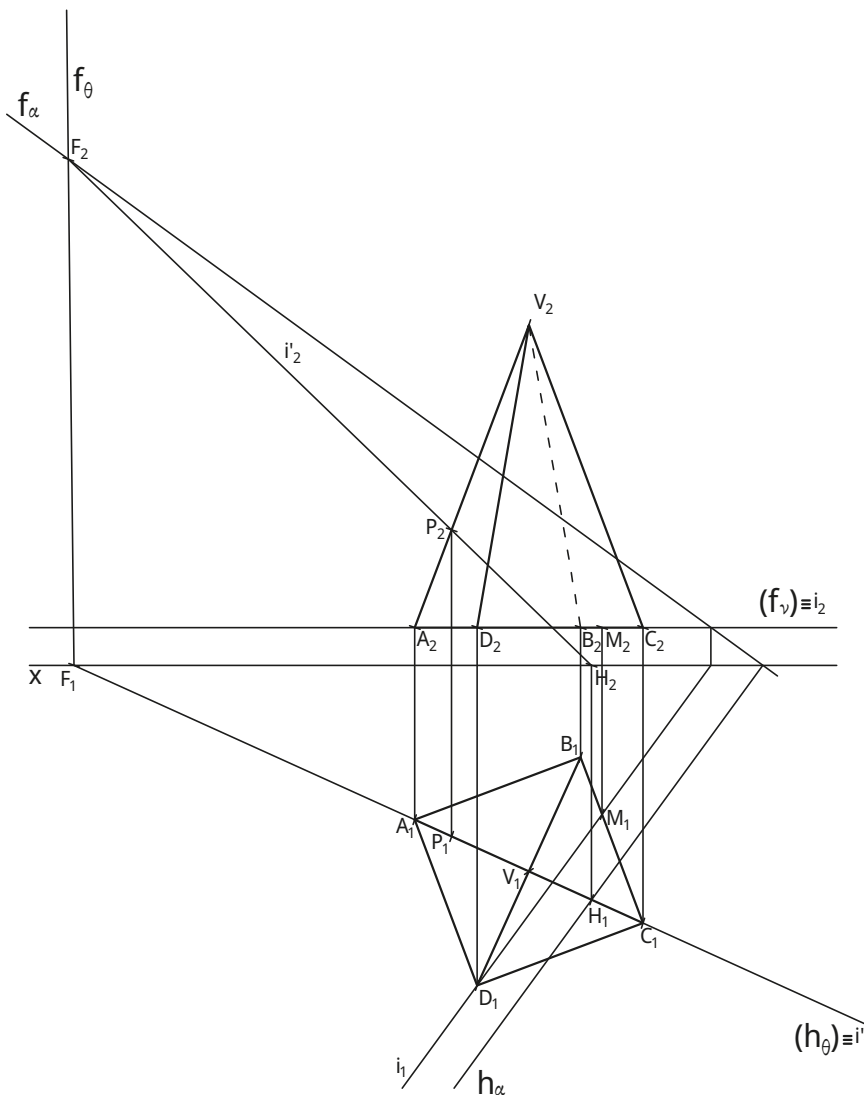


Determinados os pontos da secção plana na base do sólido, é necessário determinar os vértices resultantes da intersecção do plano secante com as arestas laterais da pirâmide.

Neste caso, aplica-se o princípio da intersecção de uma reta e um plano, aplicando o método geral (ver página 138).

Deste modo, recorrendo a planos auxiliares, projetantes, contendo as arestas laterais das pirâmides, procede-se à determinação desses pontos.

De forma a promover uma maior economia de traçado, recorreu-se a um plano vertical θ que contém, em simultâneo, duas arestas da pirâmide – **[VA]** e **[VC]**.



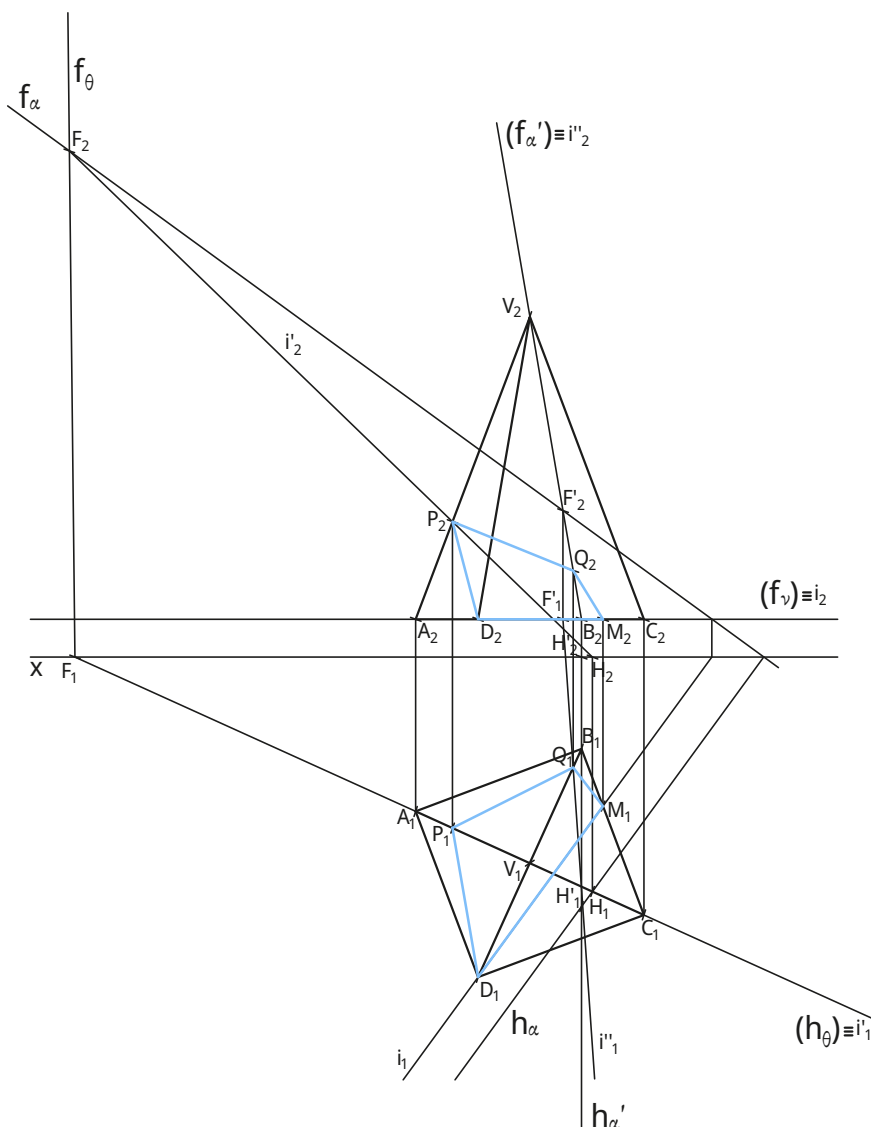
A reta i' de intersecção dos planos α e θ intersesta a aresta **[AV]** no ponto **P**. Nota que a aresta **[CV]** não possui qualquer ponto comum com a reta i' – esta aresta não é seccionada.

De seguida, aplica-se o mesmo princípio à aresta **[BV]**, recorrendo-se a um plano de topo α' .

A reta i'' , de intersecção do plano secante α com o plano oblíquo α' , intersesta a aresta **[BV]** no ponto **Q**.

Assim, os vértices da secção plana são os pontos **D, M, Q e P**.

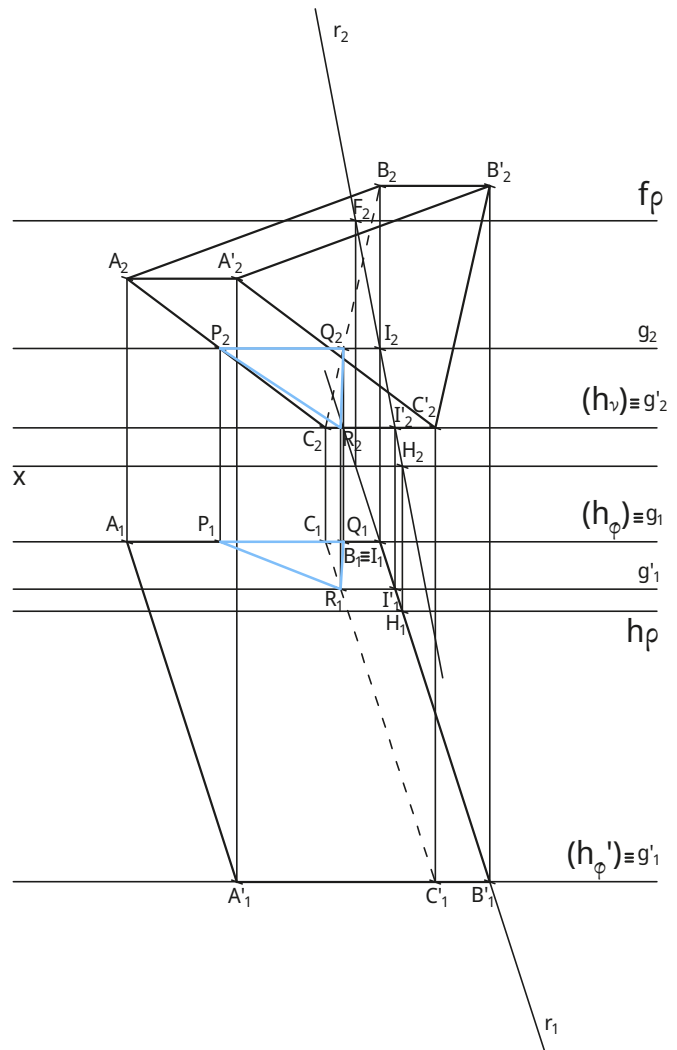
O polígono **[DMQP]** é a secção plana resultante da intersecção do plano oblíquo α com a pirâmide regular de base **[ABCD]**, horizontal.



Neste caso, por observação do desenho, antevê-se que é provável que as arestas **[AA']** e **[BB']** não sejam interseccionadas. Deste modo, inicia-se o processo pela aresta **[CC']**.

A reta **g''**, de intersecção entre o plano secante e o plano ν , intersecciona a aresta **[CC']** no ponto **R**.

Assim, conclui-se que a figura de secção do plano secante sobre o prisma triangular oblíquo é o triângulo **[PQR]**.



Nota que, dada a complexidade de traçado inerente a este tipo de situações, optou-se, por questões de economia de traçado, fazer com que a projecção horizontal da reta **r** – reta oblíqua pertencente ao plano secante, utilizada para determinar a intersecção deste com os planos das bases e da aresta lateral, coincidisse com a aresta **[BB']**, de forma a não sobrecarregar o desenho. Contudo, tal facto não pressupõe uma obrigatoriedade.

Para praticar

- 1 Determina a secção plana produzida por um plano oblíquo α numa pirâmide quadrangular oblíqua de base horizontal com 2 cm de cota, sabendo que:
 - a base da pirâmide, o quadrado [ABCD] tem como centro o ponto O (2; 4; 2), e o vértice de maior afastamento é o ponto C (3; 7; 2);
 - o eixo da pirâmide é frontal e o vértice da mesma é o ponto V (-3; 4; 8);
 - o plano secante é ortogonal ao plano bisetor dos diedros ímpares e contém o ponto K (-1; 0; 0), e o seu traço frontal faz, com o eixo x, um ângulo de 50° (a.e.).

- 2 Determina a secção plana produzida por um plano de rampa ρ num prisma triangular regular de bases frontais, sabendo que:
 - as bases do prisma são triângulos equiláteros inscritos em circunferências, cujo raio mede 3 cm;
 - o eixo do prisma é um segmento de reta [OO'], de topo, com 5 cm de cota e mede 6 cm;
 - a base de menor afastamento está contida num plano frontal de 2 cm de afastamento e o seu lado [AB], de menor cota, é fronto-horizontal;
 - o traço frontal do plano secante tem 8 cm de cota e o traço horizontal tem 5 cm de afastamento.

Secções planas em cones

Uma secção cónica é uma figura de secção produzida por um plano secante numa dada superfície cónica.

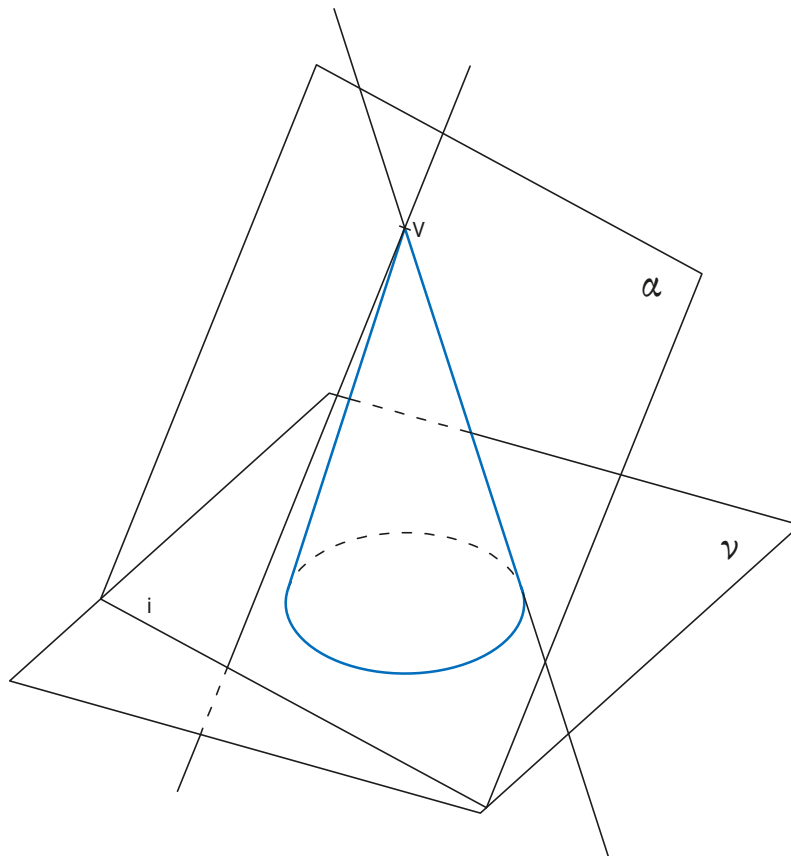
Essas secções podem assumir diferentes configurações, dependendo do tipo de cone seccionado (reto ou oblíquo) e da posição do plano secante relativamente a este.

Existem duas situações a distinguir:

- O plano secante contém o vértice da secção;
- O plano secante não contém o vértice da secção.

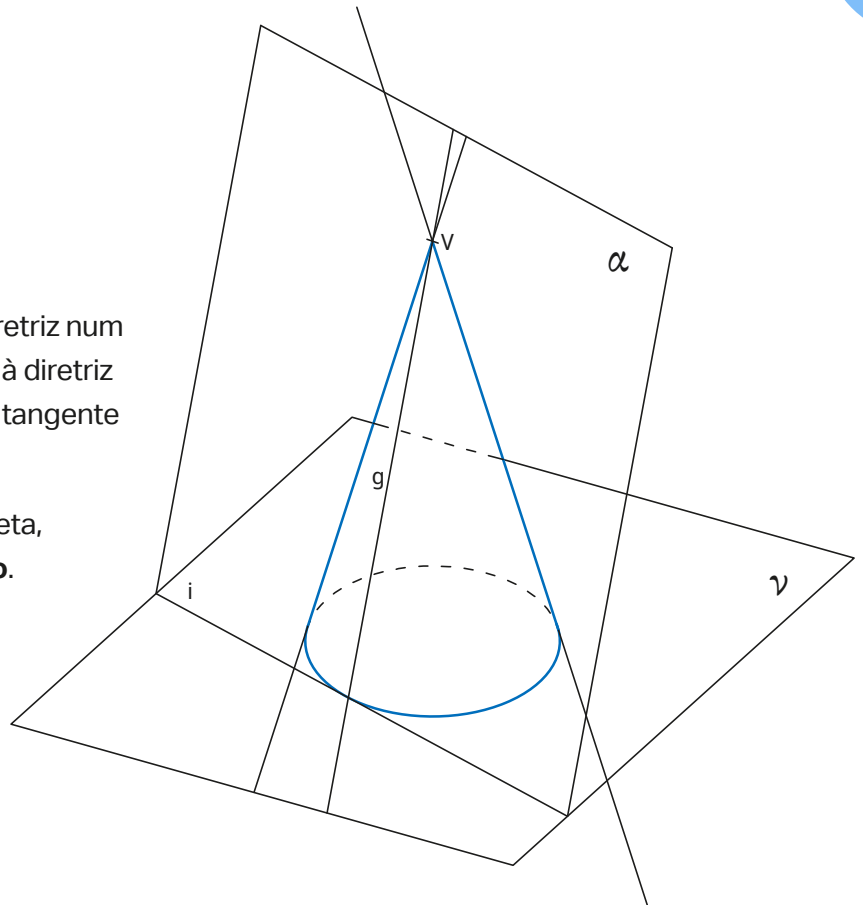
Planos secantes que contêm o vértice da superfície

Se o plano secante não intersectar a diretriz da superfície (base do cone), o plano secante secciona todas as geratrizes num único ponto – vértice da superfície (vértice do cone). Neste caso, a secção é um único ponto – vértice.

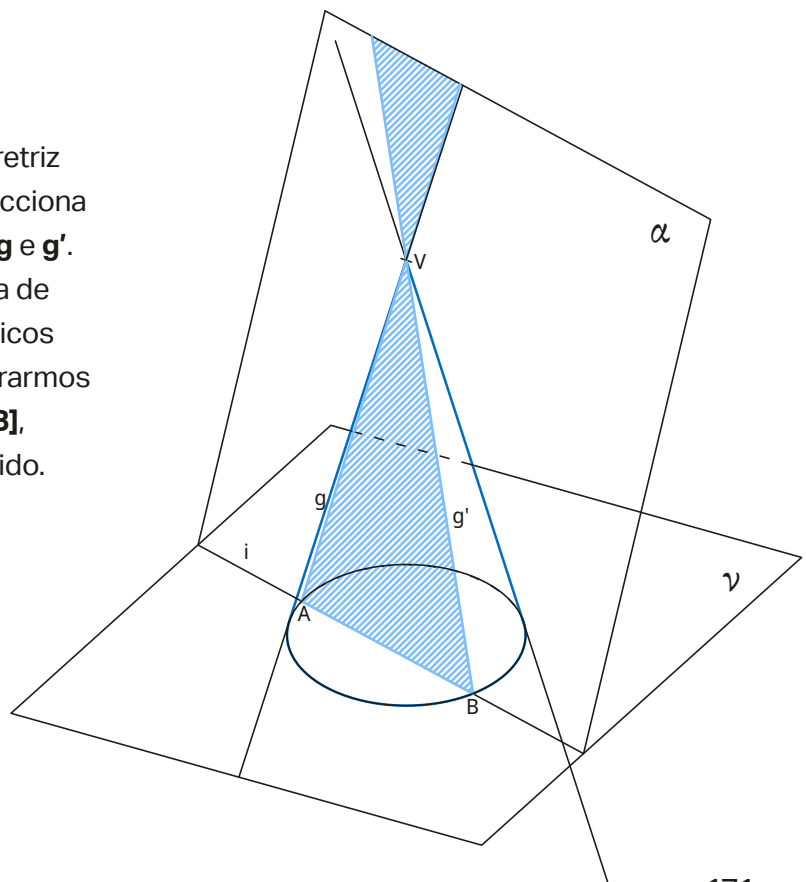


Se o plano secante intersectar a diretriz num único ponto, ou seja, for tangente à diretriz (base do cone), o plano secante é tangente ao longo de uma geratriz – **g**.

Assim, a figura de secção é uma reta, denominada **geratriz de contacto**.

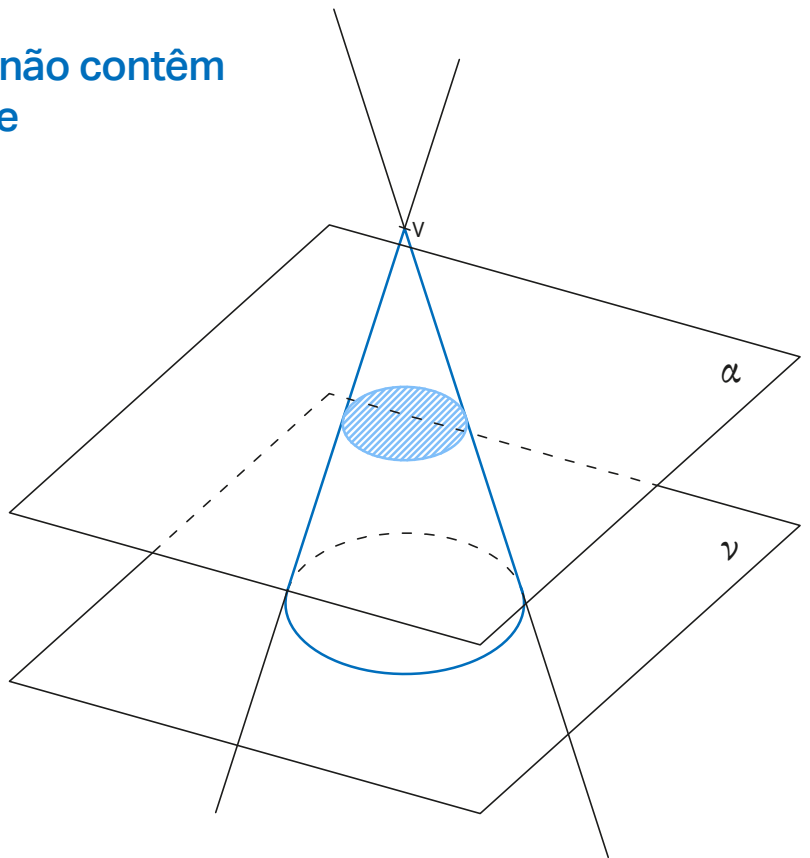


Se o plano secante intersectar a diretriz em dois pontos (**A** e **B**), o plano secciona a superfície em duas geratrizes – **g** e **g'**. Assim, contendo o vértice, a figura de secção são dois triângulos simétricos em relação ao vértice (se considerarmos a superfície), ou um triângulo **[AVB]**, se se considerar o cone como sólido.

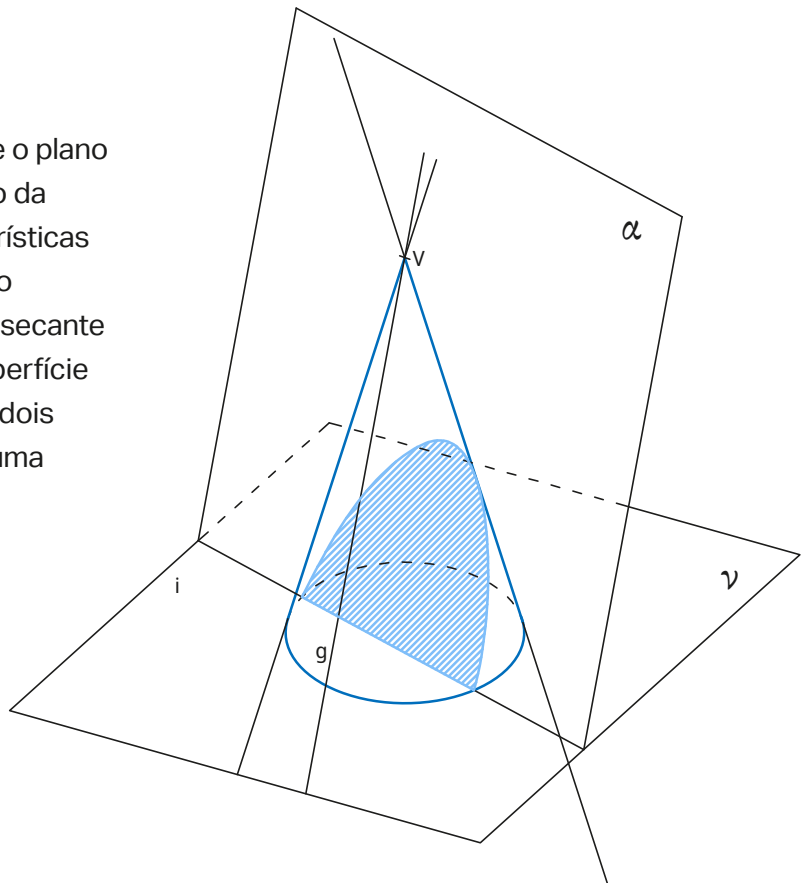


Planos secantes que não contêm o vértice da superfície

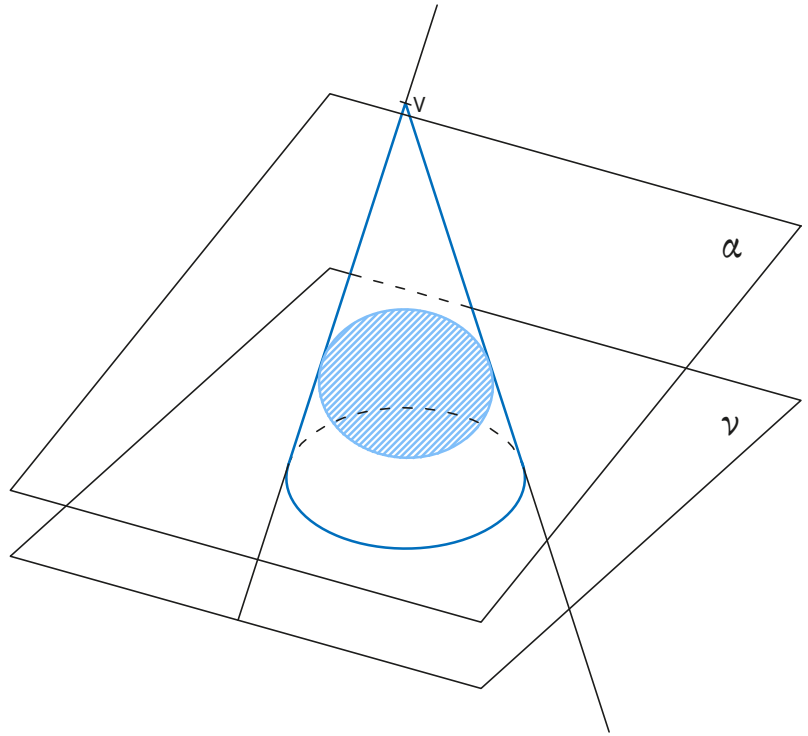
Se o plano secante for paralelo ao plano da diretriz (base, tratando-se de um cone e não de uma superfície cônica), a figura de secção resulta numa **circunferência** semelhante à diretriz (ou base).



Existem diversos casos em que o plano secante não é paralelo ao plano da diretriz (ou base), cujas características ditam o tipo de figura de secção resultante. Neste caso, o plano secante é paralelo a uma geratriz da superfície cônica e intersecta a diretriz em dois pontos. A secção produzida é uma **parábola**.

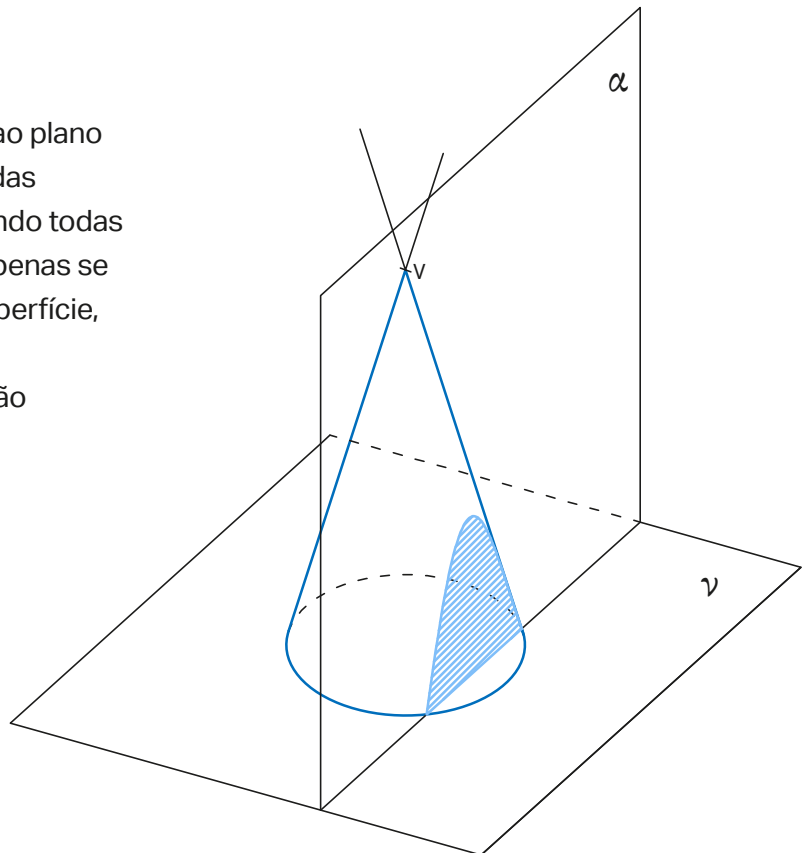


Nos casos em que o plano secante não intersesta a diretriz, mas intersesta todas as geratrizes da superfície e não é paralelo ao plano da diretriz, a figura de secção produzida não é semelhante à diretriz: é uma **elipse**.



Se o plano secante for ortogonal ao plano da diretriz, este é paralelo a duas das geratrizes da superfície, intersestando todas as outras (nota que, neste caso, apenas se está a considerar uma folha da superfície, contudo, após o vértice, a secção continuaria, permitindo a interseção de todas as geratrizes).

Nestes casos, a figura de secção é uma **hipérbole** – no exemplo, um **ramo de hipérbole**.

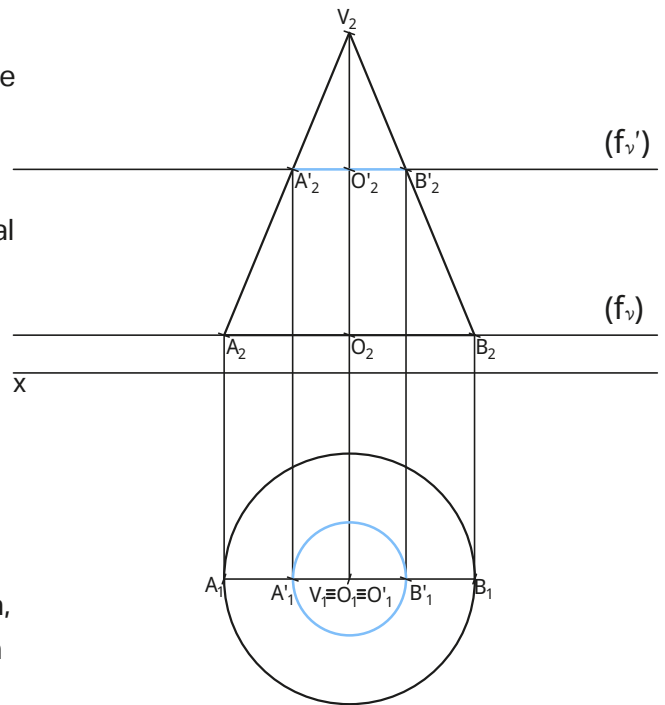


Considera o exemplo ao lado.

Trata-se de um cone de revolução, cuja base é uma circunferência com centro no ponto **O**, e o diâmetro é o segmento **[AB]**.

Este cone está assente num plano horizontal ν e é seccionado por um plano, também horizontal, ν' , e, consequentemente, paralelo à base do cone. Deste modo, antevê-se que a figura de secção resultará numa circunferência semelhante à base do cone seccionado.

Onde o plano secante intersesta o eixo do cone tem-se o centro da circunferência, que resulta da secção – **O'**. O raio da figura de secção corresponde a **[A'O']**.

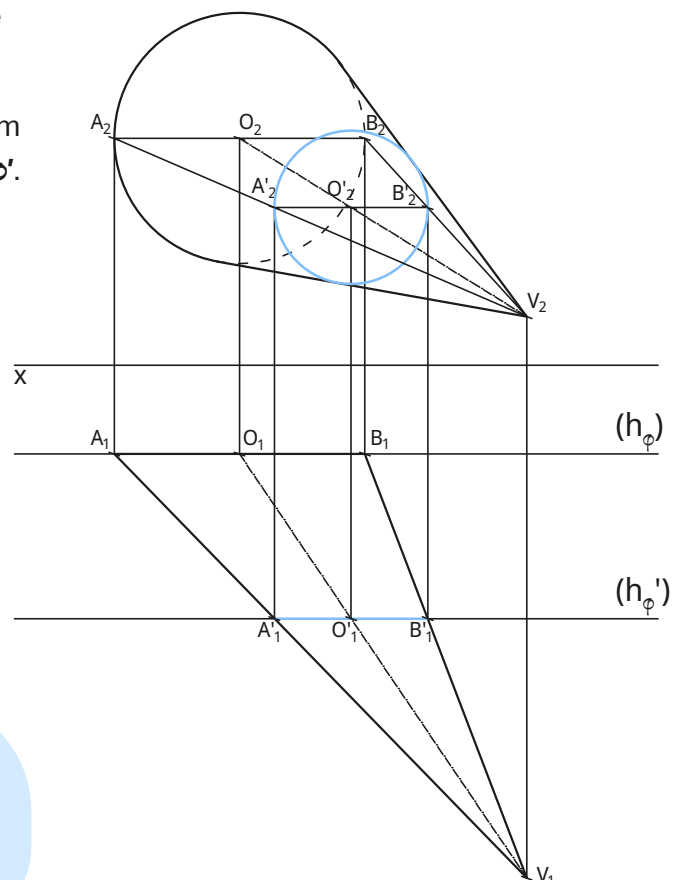


Observa, agora, um cone oblíquo, de base frontal.

O cone é seccionado por um plano, também frontal, e, por isso, paralelo à base – plano ϕ' .

O plano secante intersesta as geratrizes **[AV]** e **[BV]** nos pontos **A'** e **B'**, respetivamente. O eixo do cone é intersetado pelo plano secante no ponto **O'**, que será o centro da circunferência que é a figura de secção.

Assim, **[A'B']** corresponde ao diâmetro da figura de secção.



Resumindo

Secções em cones por planos paralelos às bases resultarão sempre numa figura de secção na forma de uma **circunferência**.

Observa, agora, o cone oblíquo com base assente num plano horizontal ν , seccionado por um plano de topo α , que contém o vértice do cone.

O plano secante corta a base do cone em dois pontos. Esses pontos, pertencentes a duas geratrizes que pertencem, em simultâneo, ao cone e ao plano secante, fazem parte da figura de secção, uma vez que esta contém o ponto **V**.

Assim, **[CV]** e **[DV]** correspondem às duas geratrizes pertencentes à figura de secção.

Deste modo, a figura de secção resultante do plano secante α é o triângulo **[CDV]**.

Resumindo

Quando o plano secante contém o vértice do cone e corta a sua base em dois pontos, a figura de secção é um **triângulo**.

No exemplo ao lado, tem-se um cone de revolução de base horizontal, seccionado por um plano de topo α , que não intersecta a base do sólido, nem contém o seu vértice.

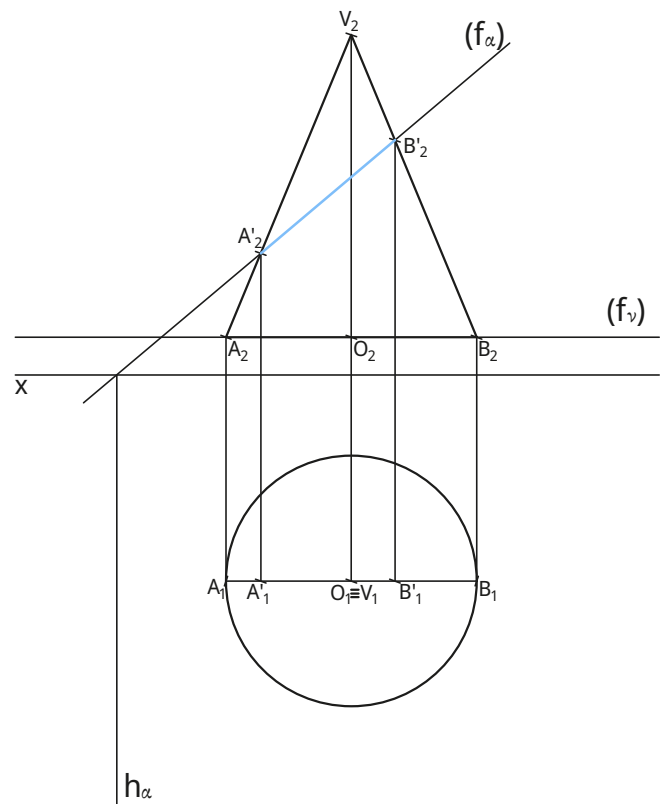
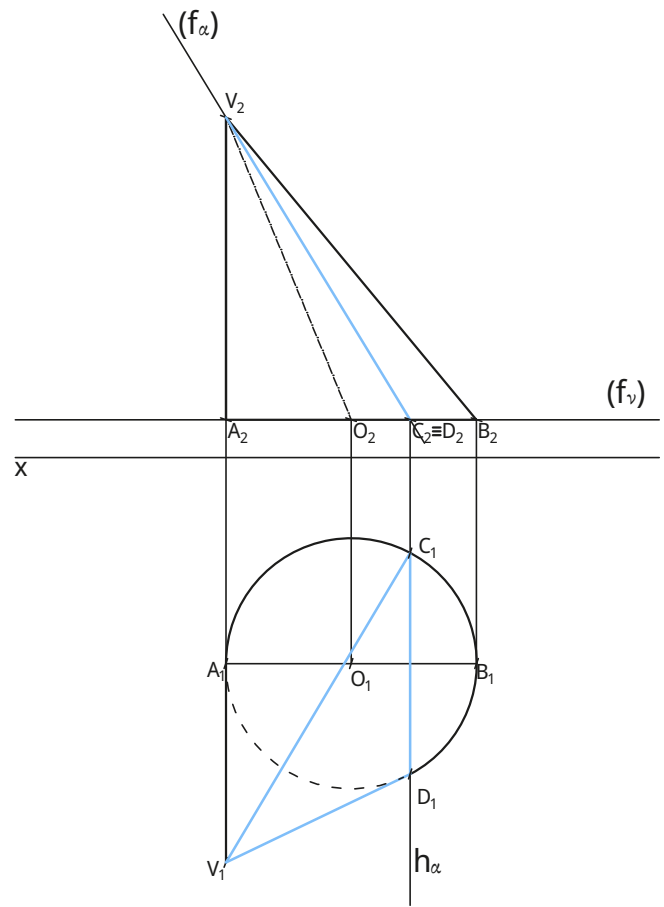
Neste caso, conclui-se que o plano secante intersecta todas as geratrizes.

A determinação da secção em projeção frontal é imediata, dado o plano secante ser projetante frontal.

No entanto, a determinação da projeção horizontal da secção não o é.

Assim, existem dois métodos para a resolução deste problema:

- método das geratrizes;
- método dos planos paralelos à base.



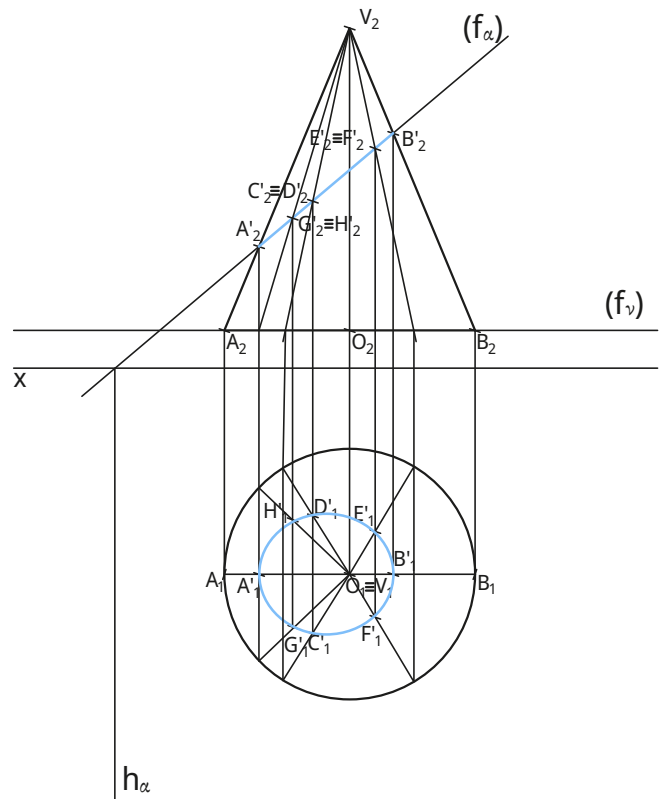
Método das geratrizes

O método das geratrizes, como o próprio nome indica, consiste na determinação da intersecção de sucessivas geratrizes com o plano secante.

Deste modo, através da união de vários pontos da base do sólido ao seu vértice, determinam-se várias geratrizes do cone, que serão intersecadas pelo plano secante em diversos pontos, que correspondem a pontos da figura de secção. Neste caso, trata-se de uma elipse, sendo necessários oito pontos para a sua correta representação.

Assim, tendo dois pontos de determinação imediata – **A' e B'** – pertencentes às geratrizes de contorno aparente do sólido, traçam-se seis geratrizes adicionais, para determinar os restantes seis pontos necessários: **C, G, H, D, E e F**.

Nota que, em projeção frontal, as geratrizes são coincidentes duas a duas.



Resumindo

Quando o plano secante é obliquo à base, não a intersesta e não contém o vértice do cone, a figura de secção resultante é uma **elipse**.

Método dos planos paralelos à base

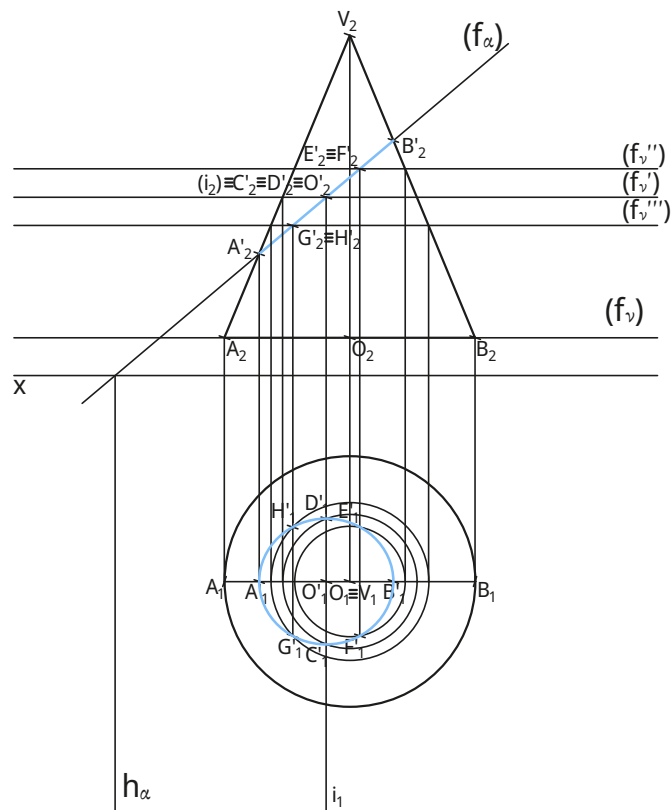
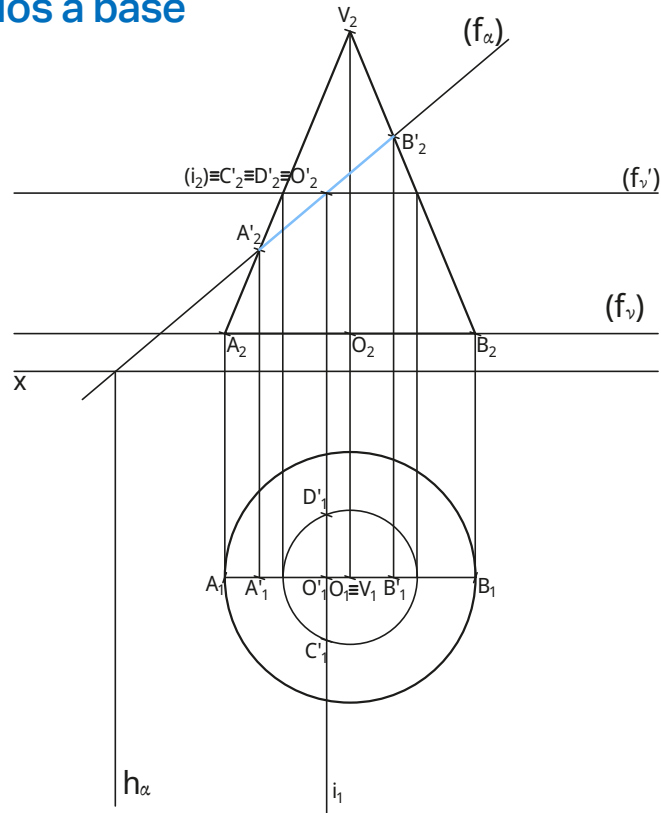
Como foi referido, existe um outro método para a determinação dos pontos da secção que recorre a sucessivos planos auxiliares, paralelos à base.

Este método consiste em determinar as figuras de interseção entre vários planos paralelos à base do cone e o cone em si.

Sabe-se, tratando-se de planos paralelos ao plano da base, que as figuras de secção resultantes serão circunferências semelhantes à base do cone.

Assim, traça-se um primeiro plano horizontal, ν' , e a respetiva secção em projeção horizontal. Esta é uma circunferência com centro em O , cujo raio corresponde à distância entre a interseção do plano secante com a geratriz $[AV]$ e o ponto O .

Nessa circunferência estarão dois pontos da figura de secção resultante do plano secante α . Esses pontos têm as duas projeções frontais coincidentes, sobre a interseção do plano secante com o plano auxiliar, e situam-se, no decorrer da linha de chamada, sobre a circunferência em projeção horizontal – pontos C' e D' .



O processo deverá ser repetido com recurso a outros planos auxiliares, também paralelos à base, ν'' e ν''' . A repetição do processo permite determinar os restantes pontos da elipse – figura de secção –, completando os oito pontos necessários para a sua definição.

Resumindo

Quando o plano secante é oblíquo à base, não a intersecta e não contém o vértice do cone, a figura de secção resultante é uma **elipse**.

Parábolas e hipérboles

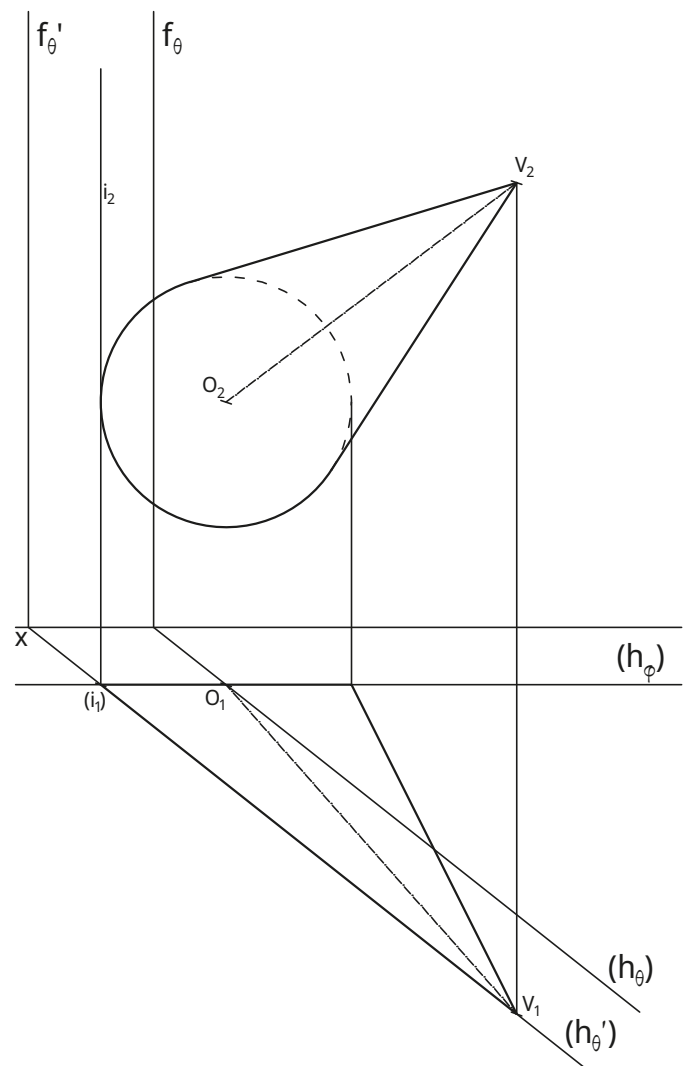
Observa o exemplo ao lado.

Tem-se um cone oblíquo de base frontal, do qual se pretende determinar a figura de secção originada por um plano secante θ , vertical.

Em primeiro lugar, recorre-se a um método auxiliar que permite determinar, *a priori*, o tipo de secção em questão. Para tal, faz-se passar um novo plano θ' , paralelo ao plano secante, que contém o vértice do cone. De seguida, determina-se a intersecção desse mesmo plano com o plano da base do sólido – neste caso, trata-se de uma reta vertical – a reta i .

Notando que essa reta é tangente à base do sólido, isso permite antever que a figura de secção em questão é uma **parábola**.

Para resolver este problema, são necessários dez pontos da secção. Só assim pode ser representada com algum rigor.

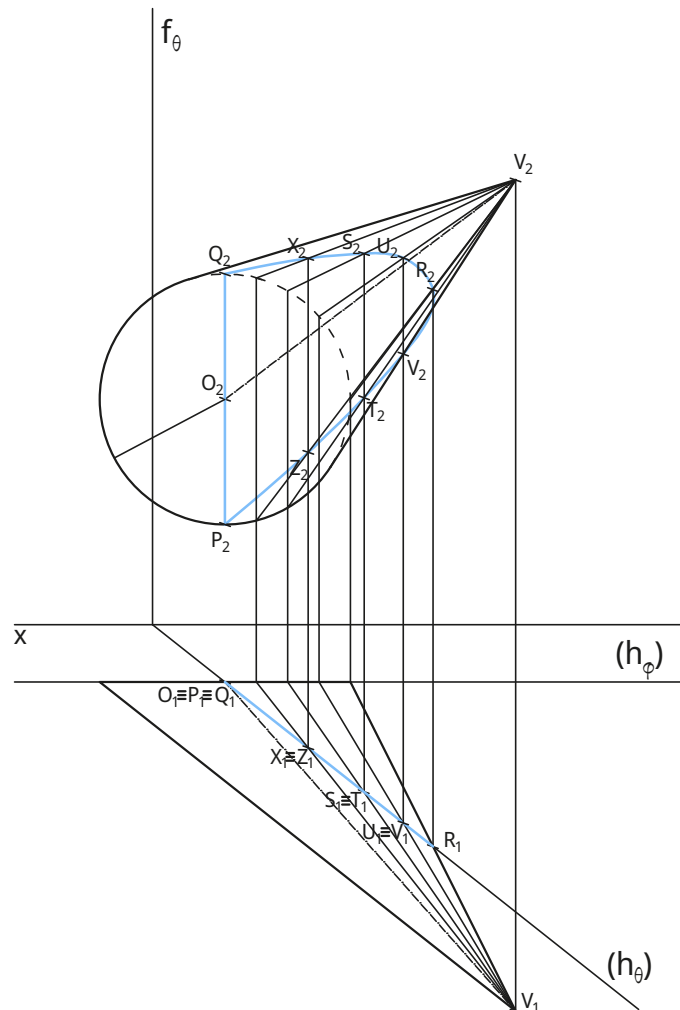


Neste caso, os pontos em que o plano secante corta a base do sólido – pontos **P** e **Q** – estão contidos numa reta vertical, que contém, também, o centro da circunferência que corresponde à base do sólido.

Já o ponto **R**, que é o ponto da secção mais à direita, e, neste caso, de maior afastamento, situa-se na geratriz de contorno aparente do sólido em projeção horizontal. Representada essa mesma geratriz em projeção frontal, tem-se a projeção frontal de **R**.

A determinação dos restantes pontos da secção – **S, T, U, V, X** e **Z** – é feita com base no método das geratrizes, a partir do traçado de várias geratrizes do cone seccionado e da determinação da intersecção dessas geratrizes com o plano secante.

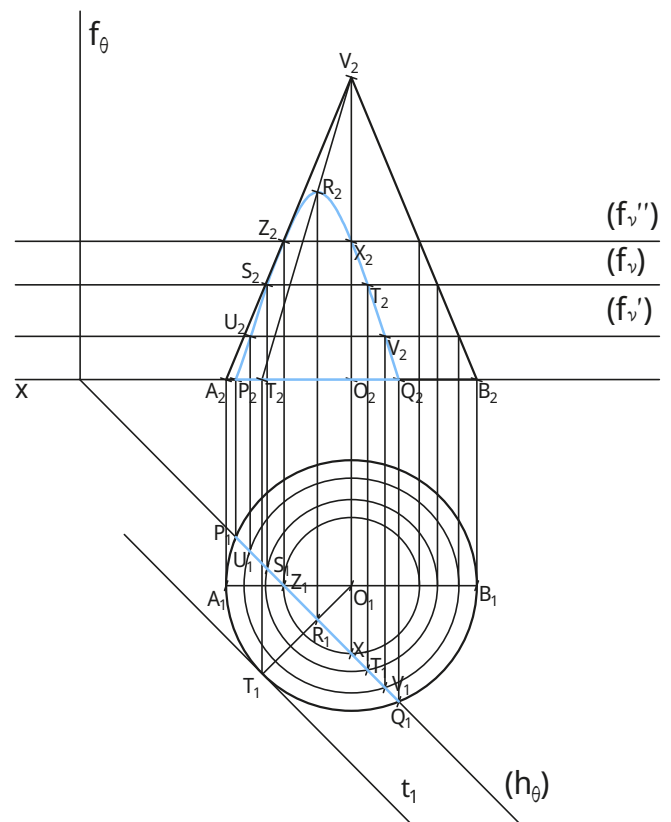
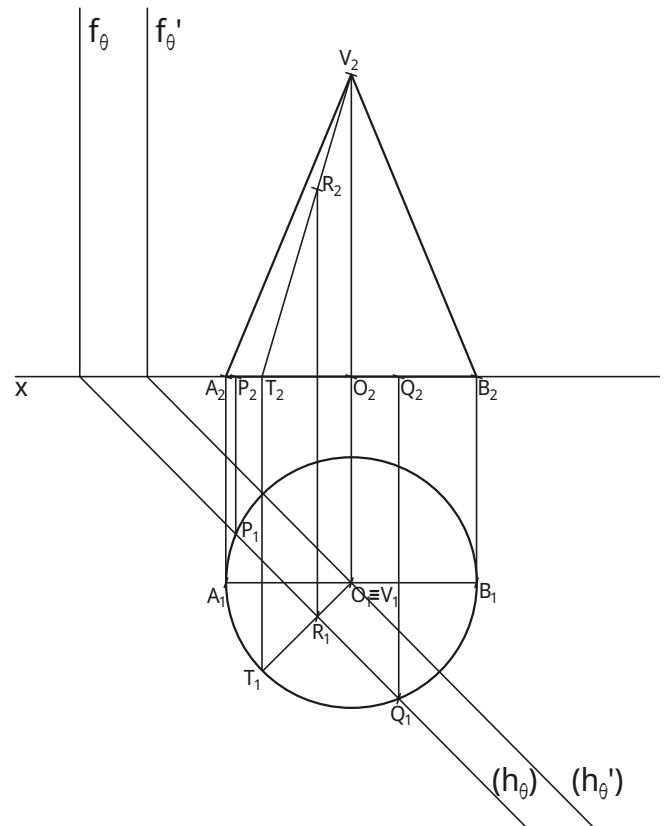
Nota que seria igualmente viável o recurso ao método dos planos paralelos à base, tendo sido a escolha do processo totalmente arbitrária.



Resumindo

Se o plano secante cortar a base do sólido em dois pontos e for paralelo a uma das suas geratrizes, a figura de secção será uma **parábola**.

A determinação do ponto de maior cota da secção – ponto **R** – é feita com recurso a uma perpendicular ao plano secante, em projeção horizontal, passando pelo ponto de tangência (ponto de contacto da reta **t** com a base do sólido – ponto **T**). Essa perpendicular corresponde à geratriz à qual pertence o ponto **R**.



Para determinar os restantes pontos, à exceção dos pontos **P** e **Q** da base, que são de determinação imediata, recorre-se ao método dos planos paralelos à base.

Também neste caso deverão ser considerados dez pontos para uma correta representação da figura de secção.

Resumindo

Se o plano secante interseccionar a base em dois pontos e for paralelo a duas geratrizes do cone, a figura de secção é uma **hipérbole** – ou **ramo de hipérbole** – se se tratar de um sólido limitado apenas por uma folha.

Para praticar

- 1 Determina e identifica a secção plana produzida por um plano horizontal ν com 3 cm de cota num cone de revolução em que a base, frontal, é uma circunferência, cujo centro é o ponto **O** (2; 3), tangente ao Plano Horizontal de Projeção. O eixo do cone corresponde ao segmento **[OV]** e mede 6 cm.
- 2 Considera o cone de revolução do enunciado anterior. Determina e identifica a secção plana produzida no cone por um plano vertical θ que contém o ponto médio do eixo do cone, e cujo traço horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.e.).
- 3 Determina e identifica a secção produzida por um plano de topo α num cone oblíquo cuja base está assente no Plano Horizontal de Projeção e o seu eixo é um segmento de reta oblíquo. O centro da base é o ponto **O** (0; 4; 0) e o seu raio é 3 cm. O vértice do cone é o ponto **V** (-4; 7; 5). O plano secante contém o ponto **K** (-2; 0; 0) e faz, com o eixo x , um ângulo de 40° (a.e.).
- 4 Considera o cone oblíquo do enunciado anterior. Determina e identifica a secção produzida por um plano vertical θ que contém o eixo do cone.

Secções planas em cilindros

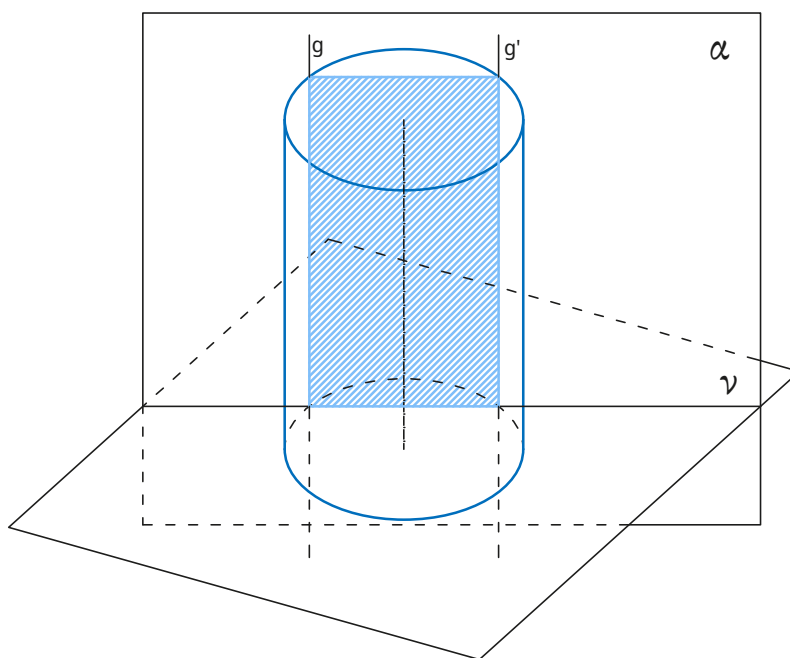
Uma secção cilíndrica é, como o nome indica, uma secção que um dado plano provoca numa superfície cilíndrica.

Essas secções podem apresentar-se sob variadas formas, nomeadamente se:

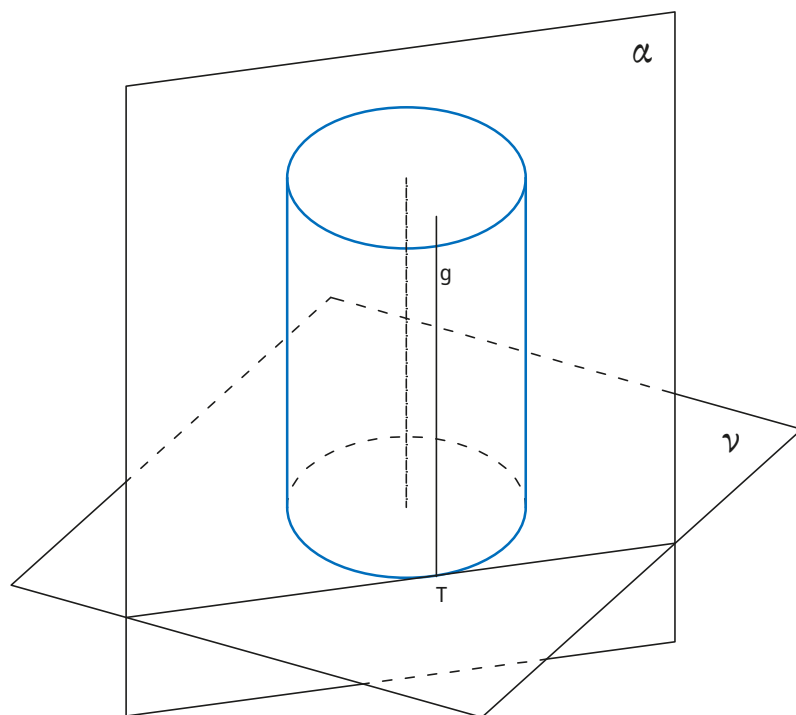
- o plano secante é **paralelo** ao eixo da superfície;
- o plano secante **não é paralelo** ao eixo da superfície.

Observa as situações seguintes:

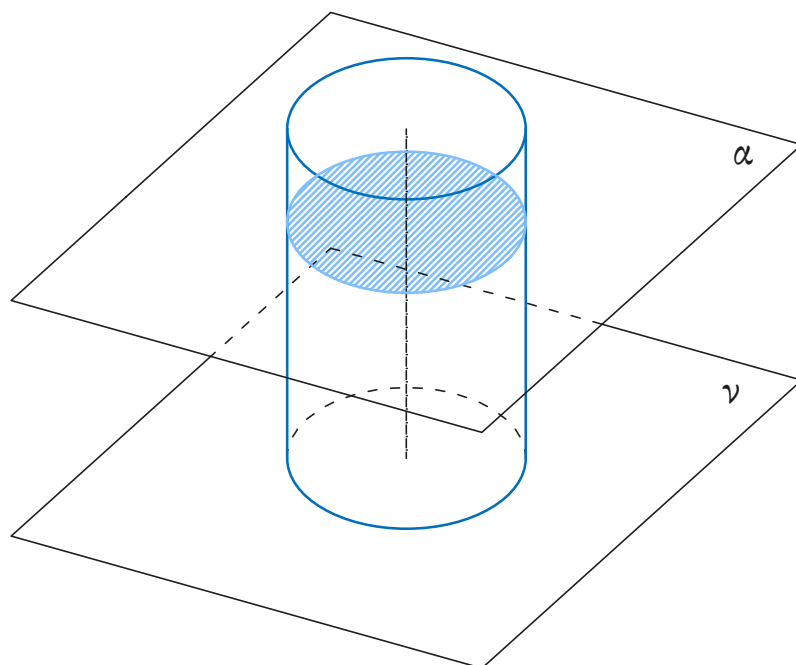
Nos casos em que o plano secante é paralelo ao eixo da superfície cilíndrica, a figura resultante da secção consistirá num **retângulo**. Neste caso, o plano corta as duas bases do sólido e contém duas das suas geratrizes.



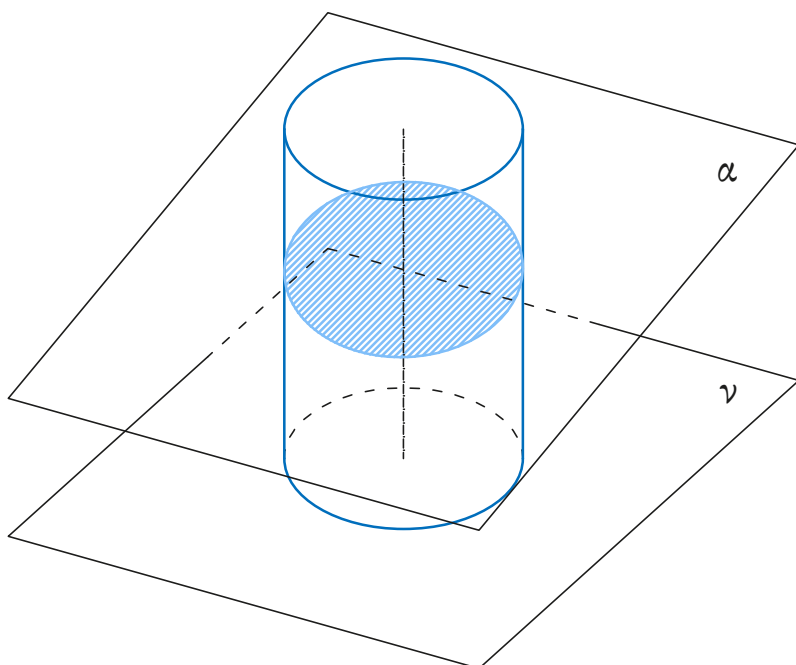
Ainda no âmbito dos planos secantes paralelos ao eixo da superfície, pode dar-se o caso de o plano secante ser tangente às diretrizes (bases do cilindro). Neste caso, o plano contém uma, e só uma, geratriz da superfície. A figura de intersecção é essa **geratriz**.



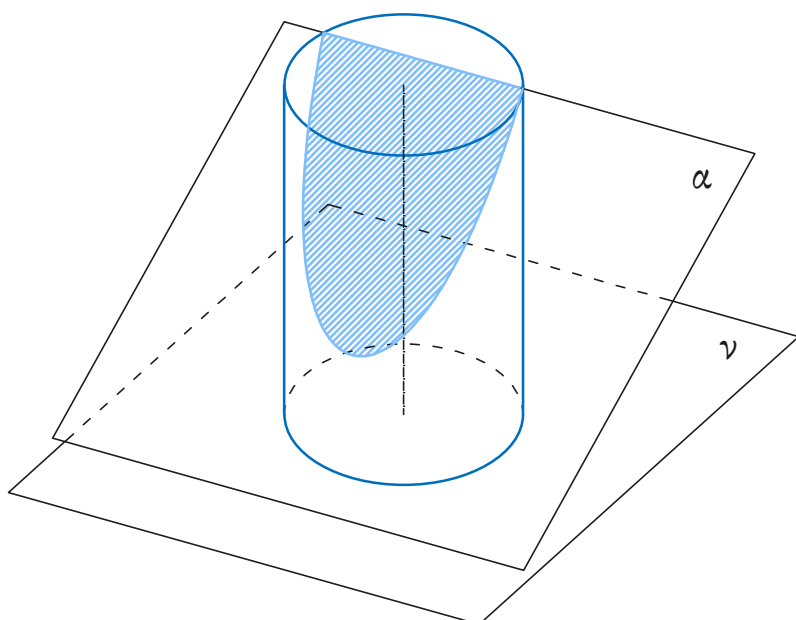
Nos casos em que o plano secante não é paralelo ao eixo da superfície, destaca-se aquele em que o plano secante é ortogonal ao eixo da superfície, ou seja, paralelo aos planos que contêm as diretrizes (bases do cilindro). Neste caso, a figura de secção resulta numa **circunferência** geometricamente igual às das bases. Tal advém do facto de o plano secante intersectar todas as geratrizes à mesma cota, sendo estas paralelas entre si.



Se o plano secante for oblíquo face ao eixo da superfície e não interseccionar as suas diretrizes, a figura de secção resultante será uma **elipse**. O plano secante intersecciona todas as geratrizes, a cotas distintas, duas a duas.



No entanto, se o plano secante for oblíquo ao eixo, mas cortar uma das bases do cilindro, a figura resultante da secção passa a ser um **segmento de elipse**. Nota que esta condição apenas se verifica quando se trata de um cilindro (limitado por dois planos que contêm as bases), e não de uma superfície cilíndrica, na qual as geratrizes se prolongam além das diretrizes.

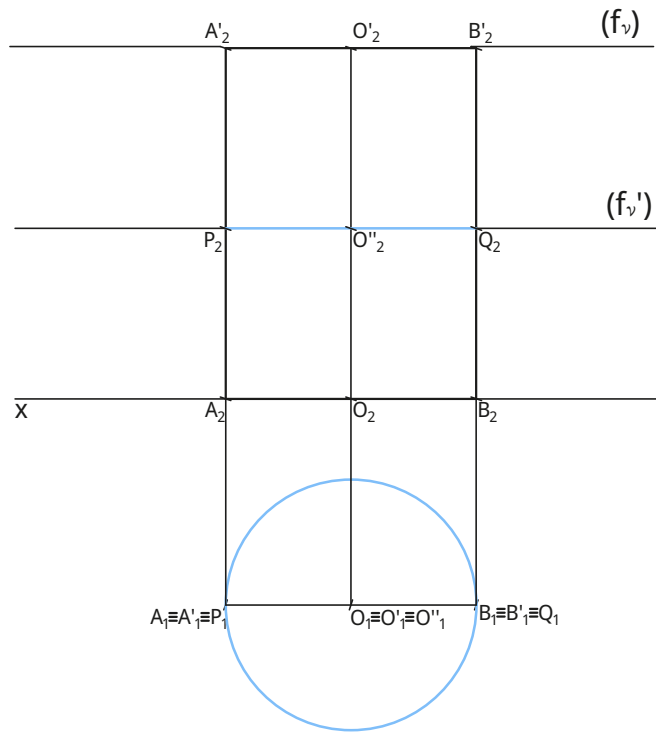


Observa o cilindro de revolução de bases horizontais assente no Plano Horizontal de Projeção.

Pretende-se determinar a figura de secção resultante do plano secante paralelo às bases do cilindro e, consequentemente, ortogonal ao seu eixo.

A enumeração dos elementos do enunciado permite, por si só, antever que a figura de secção produzida será uma circunferência geometricamente igual às circunferências das bases, como se pode verificar no exemplo ao lado.

A figura de secção é uma circunferência com centro em O'' , cujo diâmetro corresponde a $[PQ]$.

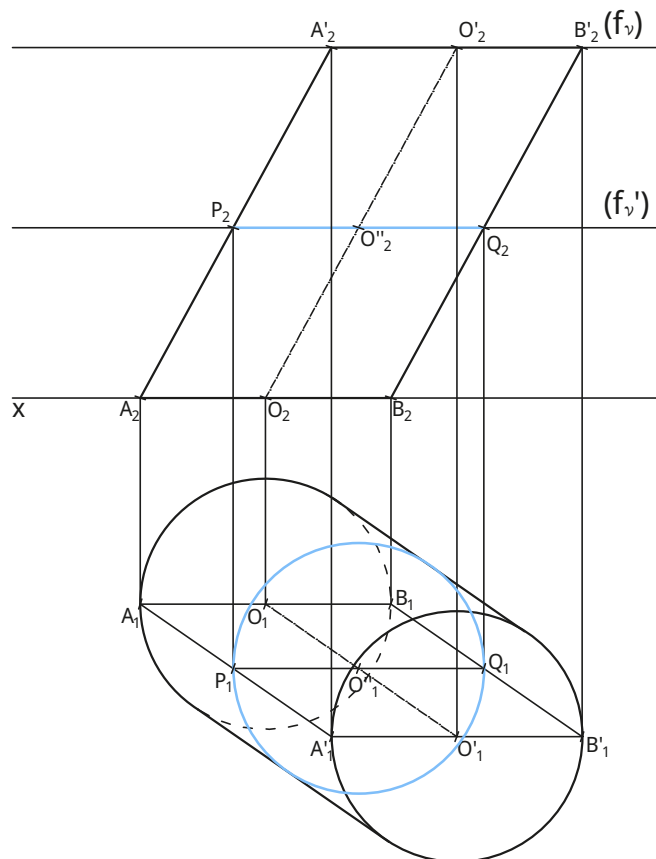


Considera agora um cilindro oblíquo, de bases horizontais e assente, também, no Plano Horizontal de Projeção.

Neste caso, o eixo é oblíquo face aos planos das bases, uma vez que se trata de um plano oblíquo e, consequentemente, oblíquo ao plano secante.

Porém, sendo o plano secante paralelo às bases, a figura resultante da secção continua a ser uma circunferência geometricamente igual às circunferências das bases do cilindro, como se pode verificar no exemplo ao lado.

A figura de secção é uma circunferência com centro em O'' , cujo diâmetro corresponde a $[PQ]$.

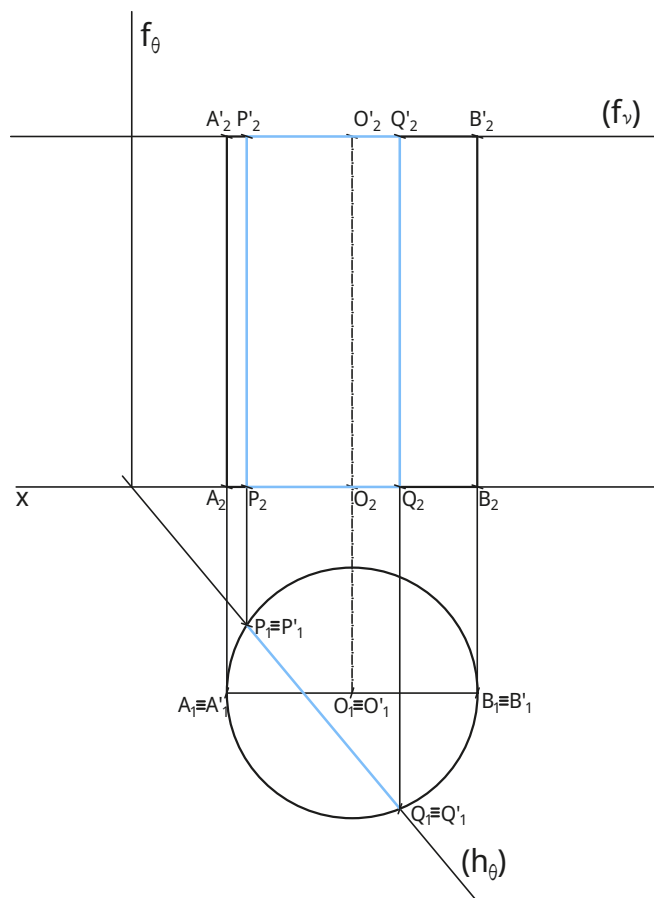


No exemplo ao lado, está representado um cilindro de revolução, de bases horizontais, assente no Plano Horizontal de Projeção. O plano secante, vertical, é paralelo ao eixo do cilindro, que é, neste caso, um segmento vertical.

O plano secante corta as bases nos pontos **P** e **Q**, na base de menor cota, e **P'** e **Q'** na base de maior cota. Contém, por isso, as geratrizes **[PP']** e **[QQ']**.

A figura resultante da secção é o retângulo **[PP'Q'Q]**.

Neste caso, bastam, para definir a figura de secção, os pontos de secção das bases.

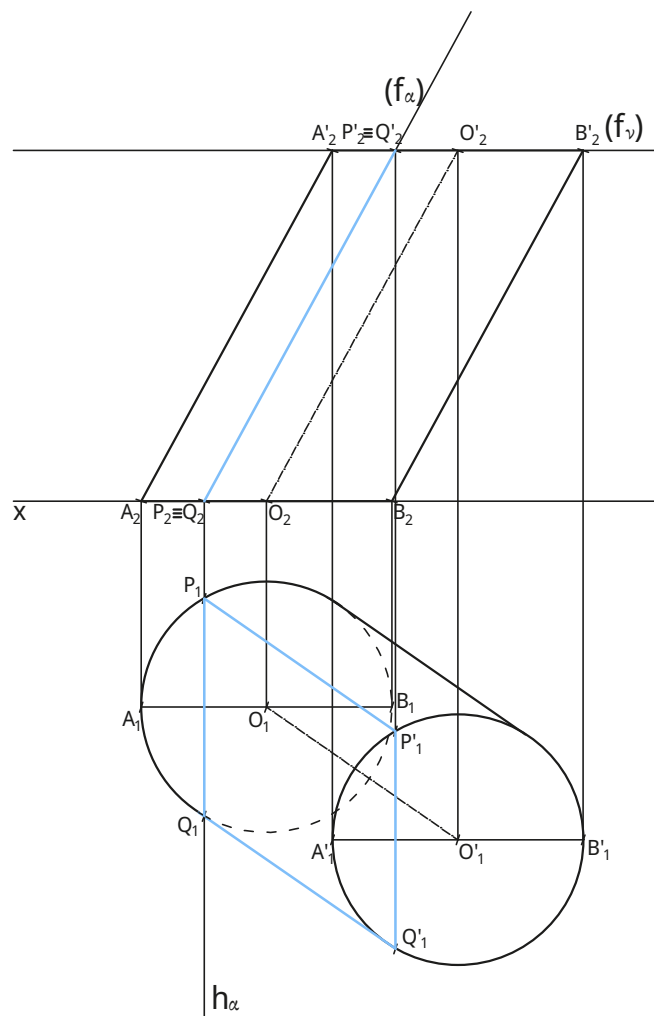


Esta condição também se verifica no caso de cilindros oblíquos.

Observa o cilindro oblíquo assente no Plano Horizontal de Projeção. O plano secante de topo α é paralelo ao eixo do cilindro e, consequentemente, às suas geratrizes, contendo duas delas: **[PP']** e **[QQ']**.

O plano secante intersesta a base de menor cota nos pontos **P** e **Q**, e a base de maior cota nos pontos **P'** e **Q'**.

Neste exemplo, em que o plano secante apresenta estas características face ao cilindro seccionado, a figura de secção é um **paralelogramo**.



Considera, agora, um cilindro de revolução com bases frontais.

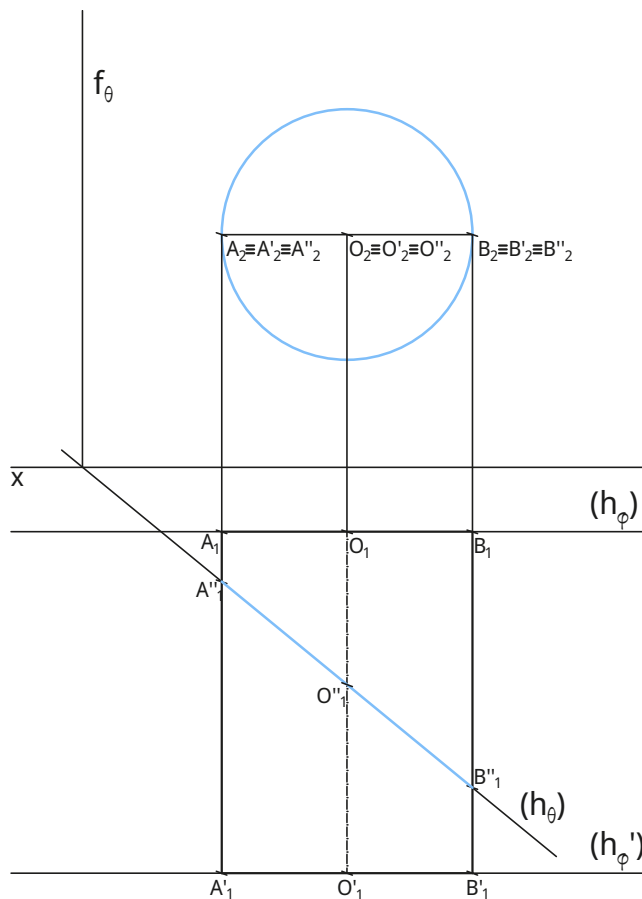
Pretende-se determinar a figura de secção resultante de um plano vertical θ .

Sendo o plano secante projetante horizontal, a determinação da secção em projeção horizontal é imediata, concluindo, também, que o plano secante é oblíquo face ao eixo do sólido, e não corta as bases do mesmo.

Deste modo, a figura de secção resultante é uma elipse.

Em projeção frontal, a figura de secção coincide com as bases do sólido, uma vez que se trata de um cilindro de revolução.

Todas as geratrizes são seccionadas, mas não em pontos equidistantes das bases.



Apesar de a figura de secção, em projecção frontal, coincidir com as bases do sólido, esta não é geometricamente igual às circunferências das bases.

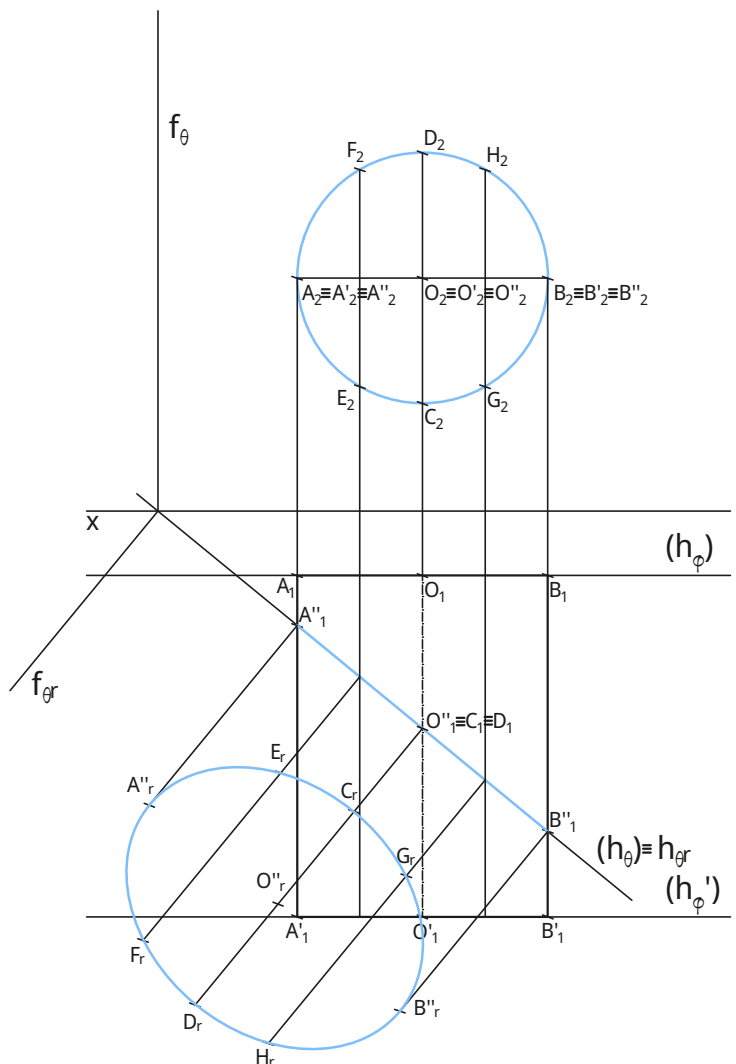
Esse facto deve-se à deformação da projecção frontal da secção, uma vez que o plano secante não é paralelo a nenhum dos planos de projecção.

Para determinar a verdadeira grandeza da figura de secção, é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar: rebatimento do plano secante.

No exemplo, optou-se por rebater o plano vertical sobre o Plano Horizontal de Projecção.

Nota que, para poder representar a elipse com o devido rigor, são necessários, pelo menos, oito pontos. Assim, através da determinação desses pontos em dupla projecção ortogonal, sobre as projecções da secção, seguiu-se o rebatimento dos mesmos.

Desta forma, é determinada a verdadeira grandeza da secção e, por conseguinte, representada a sua verdadeira forma.



Resumindo

Em qualquer tipo de secção, provocada em qualquer tipo de sólido, cujo plano secante não seja paralelo a qualquer um dos planos de projecção, a figura de secção encontra-se sempre deformada. Desse modo, é necessário rebater o plano secante, de forma a obter a verdadeira grandeza da figura de secção resultante.

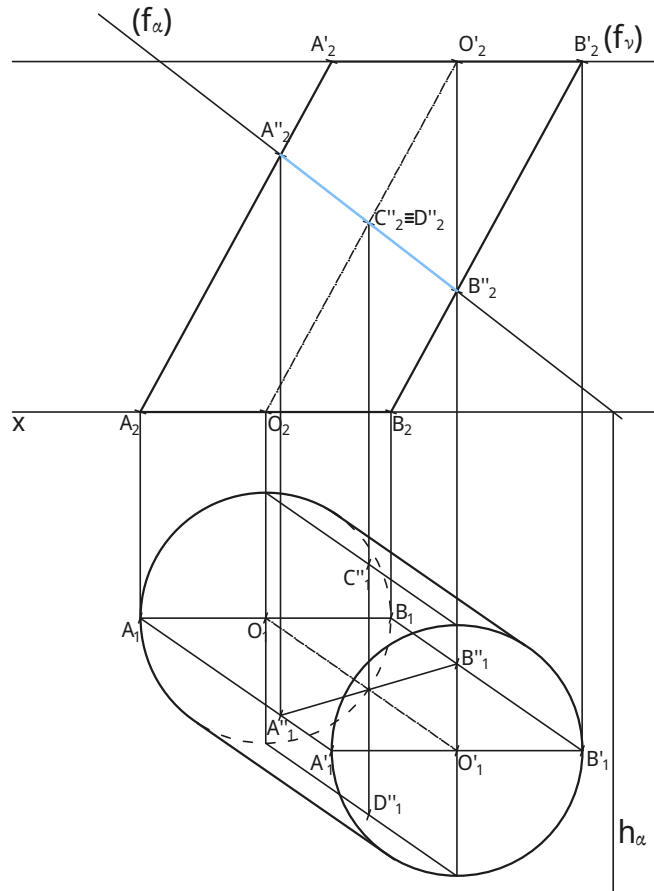
Analise-se, agora, uma situação em que a relação do plano secante com o sólido é semelhante à do exemplo anterior, contudo, aplicável a um cilindro oblíquo.

Sendo dado um cilindro oblíquo assente no Plano Horizontal de Projeção, pretende-se determinar a figura de secção resultante do plano secante α , de topo.

Nota que o plano secante é oblíquo face ao eixo do cilindro, e não intersesta as suas bases – a figura de secção será uma **elipse**.

A determinação da secção em projeção frontal é imediata, uma vez que o plano secante é projetante frontal. Contudo, este não é paralelo a nenhum dos planos de projeção. Desse modo, a projeção horizontal da secção não se irá refletir em verdadeira grandeza.

Tratando-se de um cilindro oblíquo, a figura de secção em dupla projeção ortogonal também não irá coincidir com as bases do sólido, visto as geratrizes serem intersetadas em pontos de abcissas distintas dos pontos correspondentes das bases.



Assim, é necessário recorrer a um dos métodos já enunciados anteriormente:

- método dos planos paralelos à base (ver página 177);
- método das geratrizes (ver página 176).

Método dos planos paralelos às bases

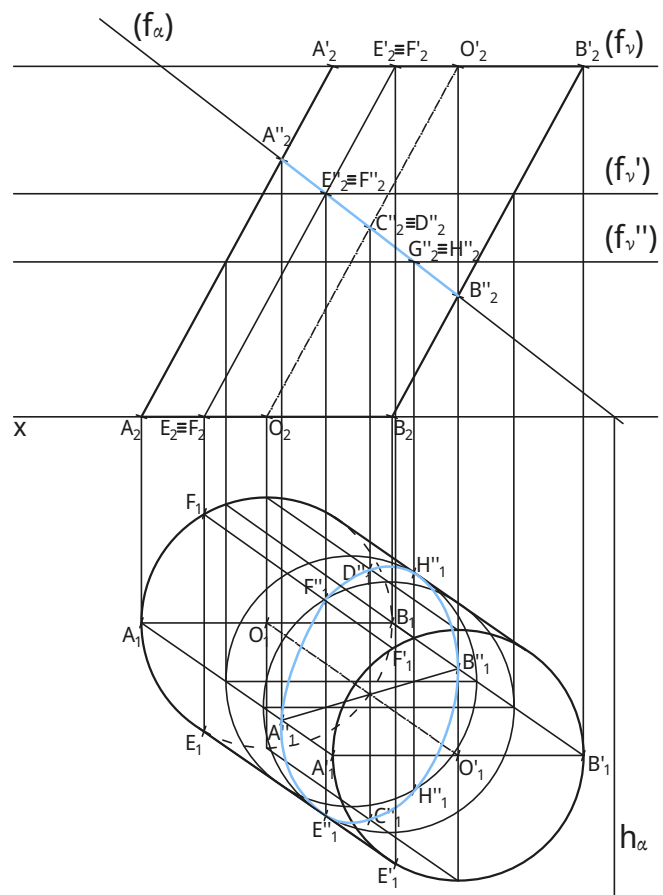
Este método, como já foi referido no caso das secções cónicas, consiste em recorrer a sucessivos planos auxiliares, paralelos aos planos das bases do sólido seccionado, e determinar as interseções entre esses planos com o sólido em questão e, seguidamente, a interseção entre a figura resultante dessa secção e o plano secante.

Neste caso, tendo sido já determinados os extremos dos eixos da elipse, correspondentes à intersecção do plano secante com as geratrizes de contorno aparente em projeção frontal, e às geratrizes de maior e menor afastamento do cilindro, segue-se a determinação de mais quatro pontos da secção, completando os oito necessários para a representação da elipse.

Assim, recorreu-se aos planos ν' e ν'' , determinando a sua intersecção com o cilindro.

Essa intersecção resulta em circunferências geometricamente iguais à base. A intersecção desses planos com o plano secante origina pontos da secção, coincidentes em projeção frontal, cuja projeção horizontal se encontra sobre a projeção da secção dos planos auxiliares com o sólido.

A união dos pontos em projeção horizontal corresponde à **elipse** de secção do cilindro resultante do plano secante de topo.

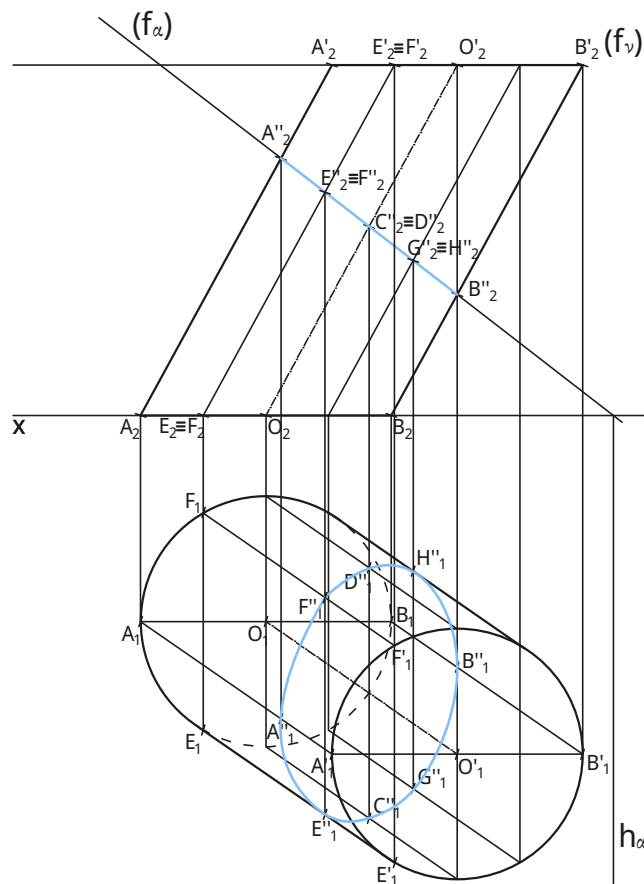


Método das geratrizes

Este método consiste em determinar, em dupla projeção ortogonal, as sucessivas geratrizes do sólido e os pontos de interseção das mesmas com o plano secante.

De forma a promover uma maior economia de traçado, consideram-se geratrizes coincidentes em projeção frontal. Deste modo, as geratrizes **[EE']** e **[FF']** são coincidentes em projeção frontal, mas não em projeção horizontal. Identificados os seus pontos de contacto com as bases do sólido, as geratrizes são representadas em projeção horizontal, e os seus pontos de interseção com o plano secante, coincidentes em projeção frontal (dado as geratrizes terem essas projeções coincidentes), têm as suas projeções horizontais sobre as projeções homónimas das geratrizes a que pertencem.

Este processo é repetido até completar os oito pontos para a representação da elipse de secção.



Para praticar

- 1 Determina e identifica a secção produzida por um plano frontal num cilindro de revolução de bases horizontais, sabendo que:
 - o ponto $O(4; 1)$ é o centro da base de menor cota, cujo raio mede 3 cm;
 - o eixo $[OO']$ mede 6 cm;
 - o plano secante tem 2 cm de afastamento.
- 2 Determina e identifica a secção produzida por um plano de topo α num cilindro oblíquo assente no Plano Horizontal de Projeção, sabendo que:
 - o ponto $O(1; 3; 0)$ é o centro da base de menor cota, cujo diâmetro mede 4 cm;
 - o eixo do cilindro é o segmento $[OO']$, oblíquo, e $O'(-4; 5; 5)$;
 - o plano secante contém o ponto $K(-4; 0; 0)$.
- 3 Determina e identifica a secção produzida por um plano vertical θ num cilindro oblíquo de bases frontais, sabendo que:
 - a base de menor afastamento está assente no Plano Frontal de Projeção;
 - o eixo do cilindro é horizontal e mede 6 cm;
 - o centro da base de menor afastamento é o ponto $O(2; 0; 5)$ e o raio da base é 3 cm;
 - o eixo do cilindro faz, em projeção horizontal, um ângulo de 35° (a.d.) com o eixo x ;
 - o plano secante contém o ponto O' , centro da base de maior afastamento, e faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.e.).

Secções planas em esferas

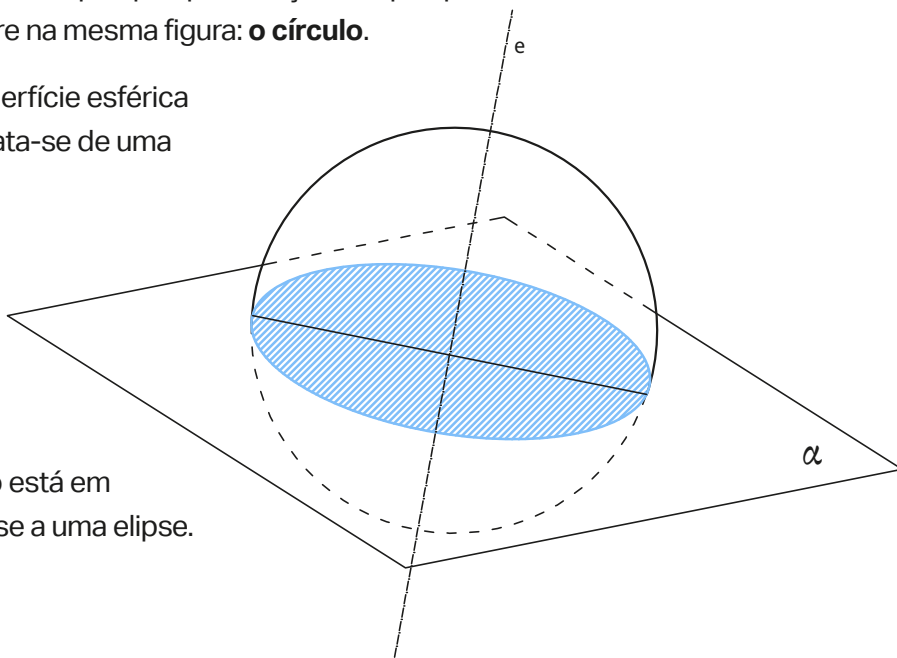
As esferas são o único sólido em que qualquer secção de qualquer plano secante resulta sempre na mesma figura: **o círculo**.

Se for considerada uma superfície esférica e não uma esfera (sólido), trata-se de uma circunferência.

Observa o exemplo:

O plano α secciona a esfera segundo um **círculo**.

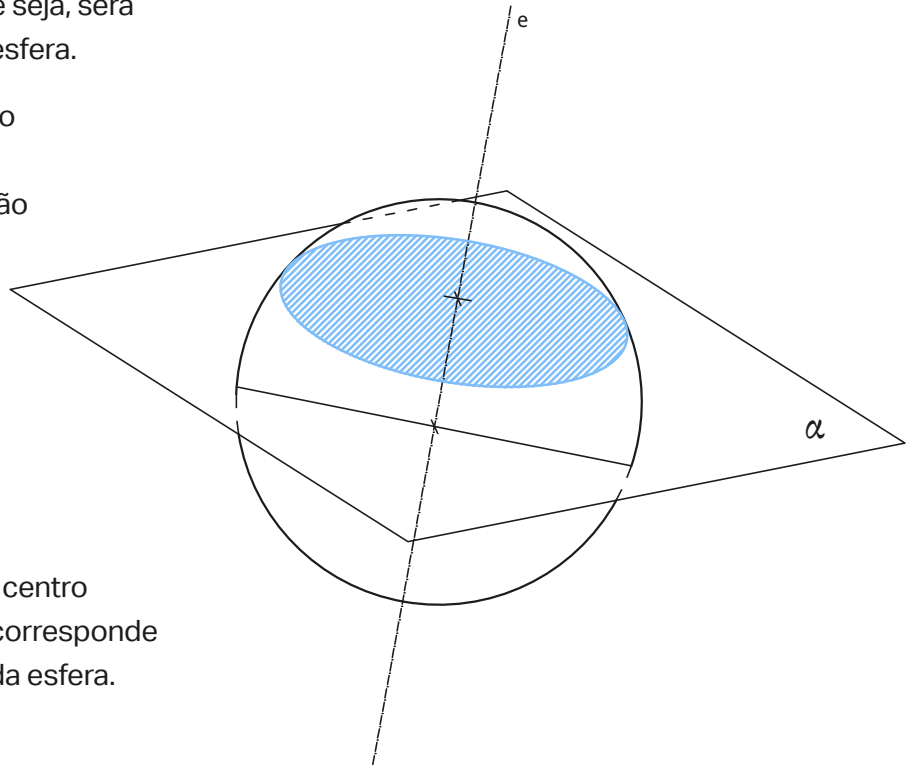
Nota que, na figura, o círculo está em perspetiva, daí assemelhar-se a uma elipse.



O plano secante, qualquer que seja, será sempre ortogonal ao eixo da esfera.

Qualquer que seja a orientação ou posição do plano secante face à esfera, a figura de secção será sempre um **círculo**, podendo este ser maior ou menor, consoante o seu afastamento ou proximidade relativamente ao centro da esfera.

Se o plano secante contiver o centro da esfera, a figura de secção corresponde ao círculo de maior diâmetro da esfera.



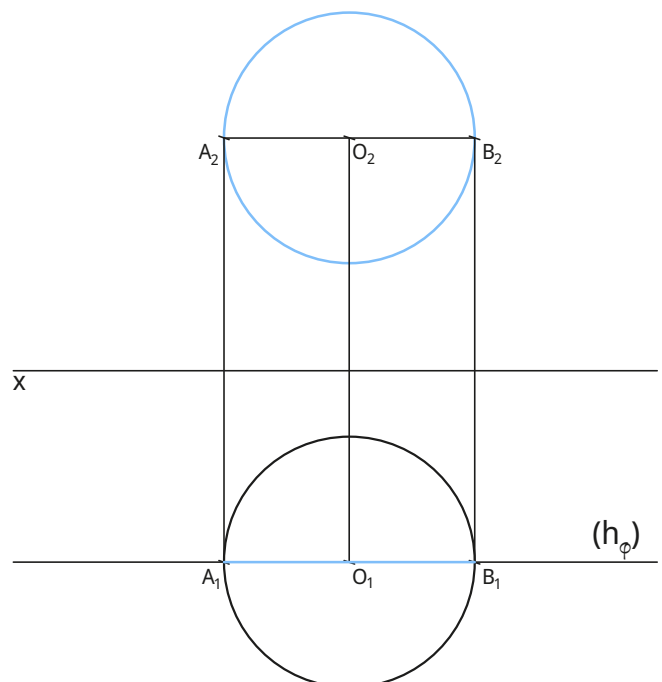
A esfera, pelas suas características, nunca está assente num tipo de plano específico, uma vez que é composta por uma só superfície.

A sua representação em dupla projeção ortogonal é igual em ambas as projeções, sendo estas sempre correspondentes ao círculo maior da esfera.

No exemplo ao lado, a esfera representada é seccionada por um plano frontal, que contém o ponto **O**, que é o centro da esfera.

Deste modo, a figura de secção corresponde ao círculo maior da esfera.

A figura de secção pelo plano secante é uma circunferência de centro em **O**, cujo diâmetro corresponde a **[AB]**.

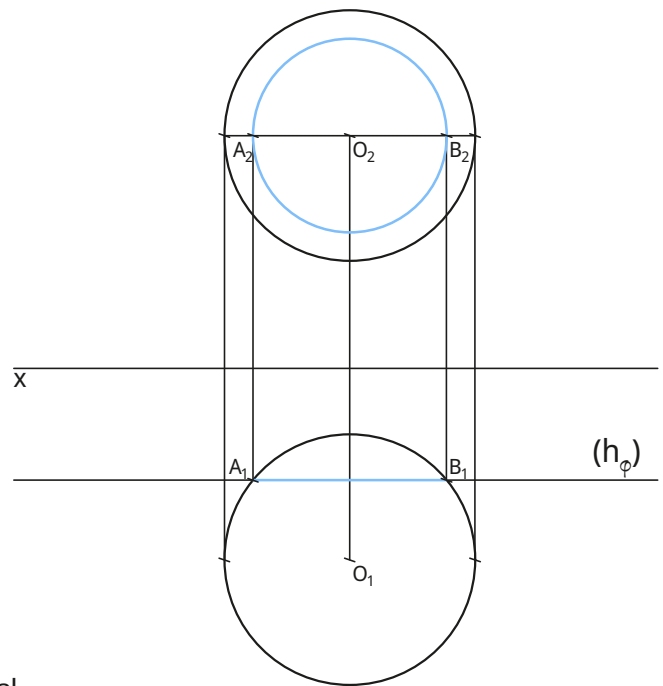


Observa, agora, outro exemplo em que a esfera é igualmente seccionada por um plano paralelo a um dos planos de projecção, porém, o plano secante não contém o centro da esfera.

Neste caso, a figura de secção é também uma circunferência, como aliás todas as secções em esferas, mas de diâmetro inferior ao círculo máximo da esfera.

O diâmetro da circunferência que resulta da secção tem como extremos os pontos de intersecção entre o plano secante e o contorno aparente da esfera em projecção horizontal.

Nota que, caso o plano secante fosse horizontal, esses pontos pertenceriam ao contorno aparente da esfera em projecção frontal.

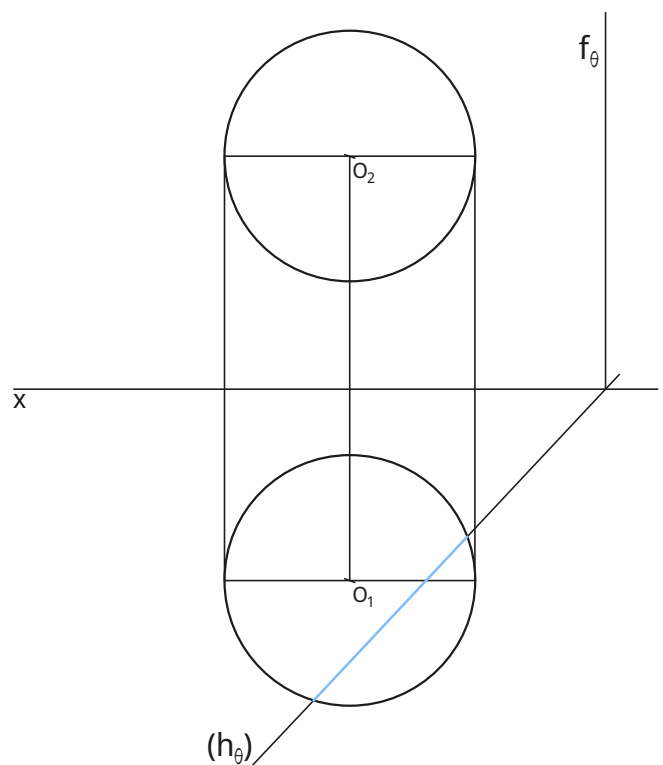


Analisando, agora, um exemplo em que o plano secante não é paralelo aos planos de projecção, tem-se:

Uma esfera representada em dupla projecção ortogonal, seccionada por um plano vertical θ , que não contém o centro da esfera.

A figura de secção será, naturalmente, uma circunferência, de diâmetro inferior ao círculo máximo da esfera, uma vez que o plano secante não contém o centro da esfera.

Contudo, em dupla projecção ortogonal, a figura de secção será representada como uma elipse, devido à deformação inerente ao facto de o plano secante não ser paralelo a nenhum dos planos de projecção e, por isso, não projetar os seus elementos em verdadeira grandeza em nenhuma das projecções.



A determinação da figura de secção pelo plano secante vertical consiste, primeiramente, na determinação do centro da circunferência que corresponde à figura de secção.

Essa determinação é feita com recurso a uma reta auxiliar, ortogonal ao plano secante, que contém o centro da esfera.

Assim, pelo ponto **O**, conduz-se uma reta, neste caso horizontal. Onde essa reta intersestar o plano secante tem-se o ponto **Q** – centro da figura de secção.

Seguidamente, determinam-se os pontos em que o plano secante corta o contorno aparente do sólido em projeção frontal. Essa determinação é feita a partir da interseção do diâmetro da projeção horizontal da esfera, paralelo ao eixo **x**. Onde esse diâmetro intersestar o traço horizontal do plano secante, tem-se as projeções horizontais dos pontos **M** e **N**, coincidentes.

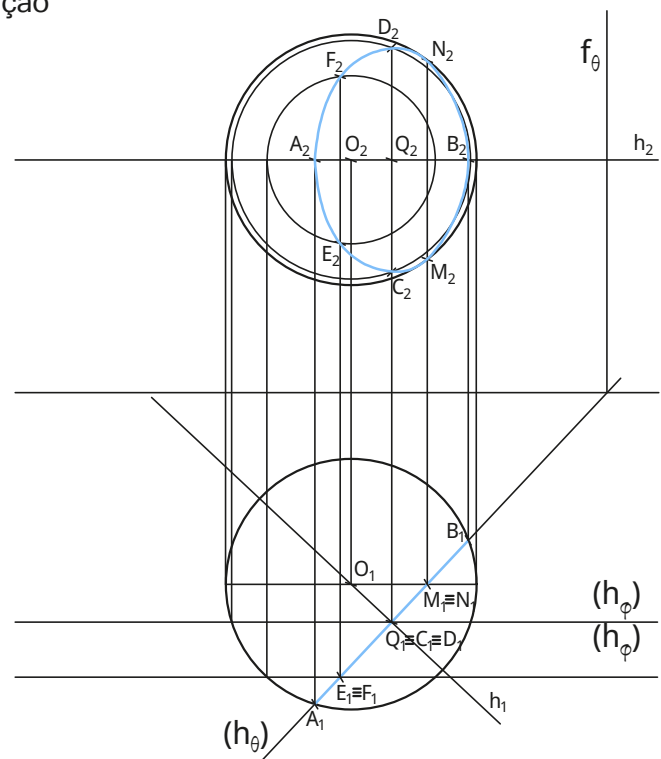
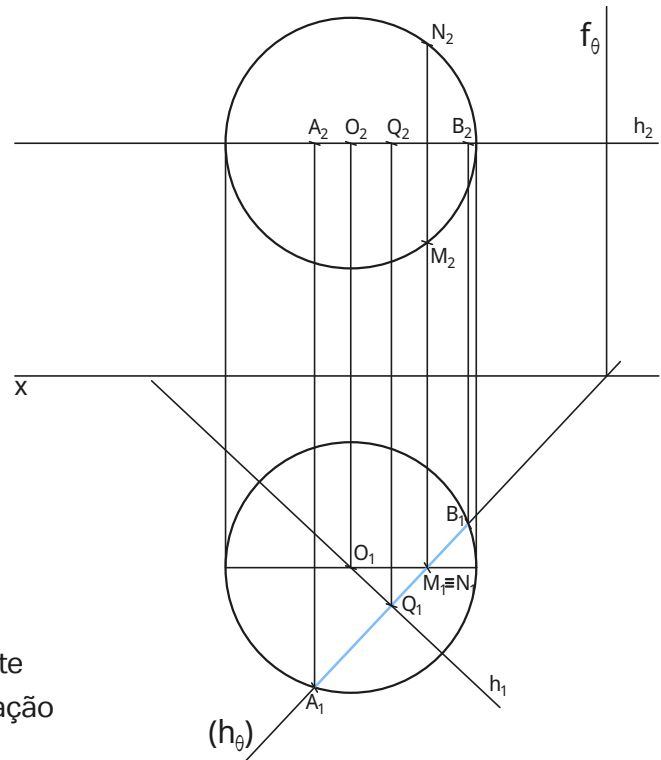
As projeções frontais situam-se sobre a projeção frontal da esfera.

Como já foi referido, para uma correta representação de uma elipse, são necessários, pelo menos, oito pontos.

Uma vez que estão já determinados quatro, resta determinar os restantes.

Para tal, poderá recorrer-se ao método dos planos paralelos, mas, neste caso, paralelos aos planos de projeção, uma vez que uma esfera não tem bases (é formada por uma só superfície).

Assim, com recurso a dois planos frontais, auxiliares, é feita a sua interseção com a esfera e, seguidamente, a interseção com o plano secante.



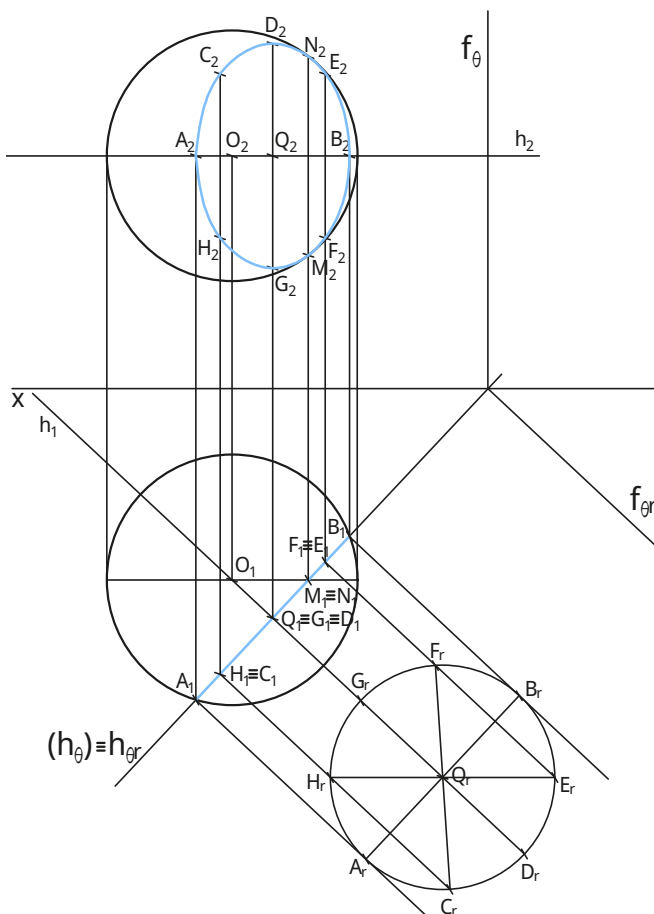
Assim, são determinados os pontos **C**, **D**, **E**, e **F**.

Existe outro método, aplicável ao caso das esferas, uma vez que é o único exemplo em que a figura de secção é sempre uma circunferência, que confere maior rigor à representação: o **método do rebatimento do plano secante**.

Neste caso, o processo é invertido.

Determinado o centro da figura de secção e os pontos que delimitam o seu diâmetro (neste caso, consideraram-se os pontos **A** e **B**), e rebatendo-se o plano secante (optou-se pelo rebatimento sobre o Plano Horizontal de Projeção), desenha-se a secção em verdadeira grandeza, e determina-se, no rebatimento, os restantes pontos necessários à representação da figura em dupla projeção ortogonal.

Este método é o mais adequado, conhecendo de antemão que a figura de secção é uma circunferência.



Para praticar

- 1 Determina a secção produzida por um plano horizontal γ com 5 cm de cota numa esfera situada no 1.º diedro, com 3 cm de raio, tangente ao Plano Frontal de Projeção, cujo centro é o ponto **O** (3; 5).
- 2 Determina a secção produzida por um plano frontal ϕ com 4 cm de afastamento numa esfera situada no 1.º diedro, cujo centro é um ponto do plano $\beta 1/3$, com 4 cm de cota, e cujo raio mede 3 cm.
- 3 Determina a secção produzida por um plano vertical θ que contém o ponto **K** (-2; 0; 0) e cujo traço horizontal faz, com o eixo x , um ângulo de 35° (a.e.). A esfera é tangente a ambos os planos de projeção e o seu centro é o ponto **O** (1; 4; 4).
- 4 Determina a secção produzida por um plano de topo α ortogonal ao $\beta 1/3$, de abertura à direita, que contém o ponto **K** (0; 0; 0), numa esfera cujo centro é o ponto **O** (-3; 5; 5) com 4 cm de raio.

Sólidos resultantes de uma truncagem

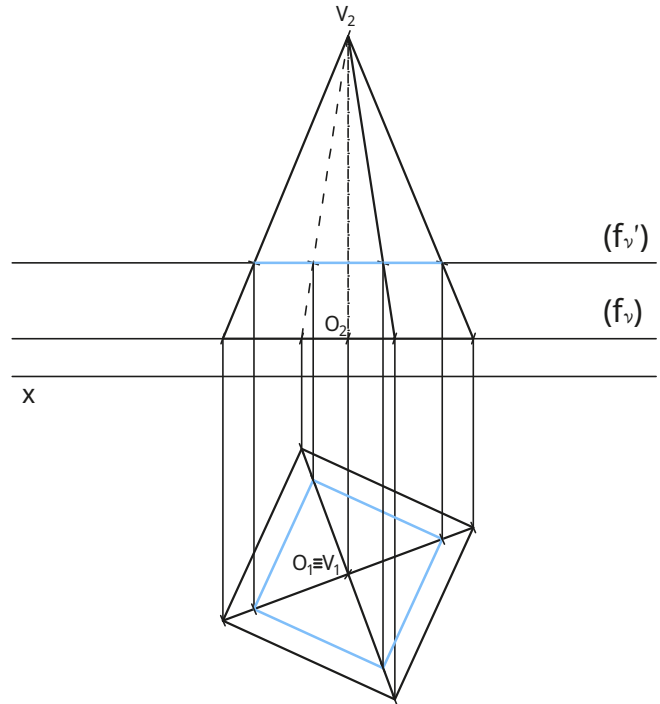
Por **sólido truncado** entende-se o **sólido** que resulta entre a secção plana e o plano da base do sólido seccionado.

Essa representação segue normas de desenho que devem ser tidas em conta, de forma a clarificar a solução gráfica.

Observa o exemplo:

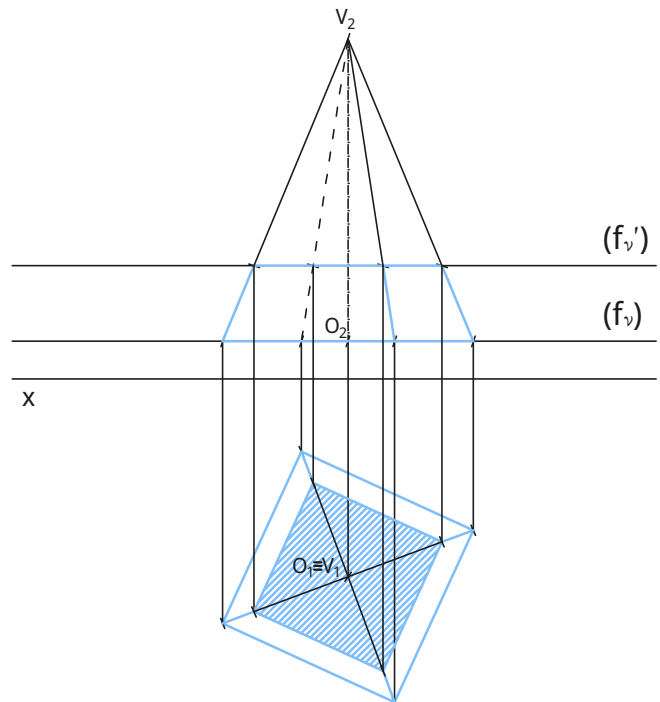
Após determinar a figura de secção resultante de um plano secante horizontal sobre uma pirâmide quadrangular regular, com a sua base assente, também, num plano horizontal, pretende-se proceder à representação gráfica do sólido resultante da secção.

Por convenção, entende-se que o sólido resultante é aquele que se situa entre o plano da base do sólido original e o plano secante.



Assim, neste caso, evidenciado a azul está o sólido resultante da secção, denominado **sólido truncado**.

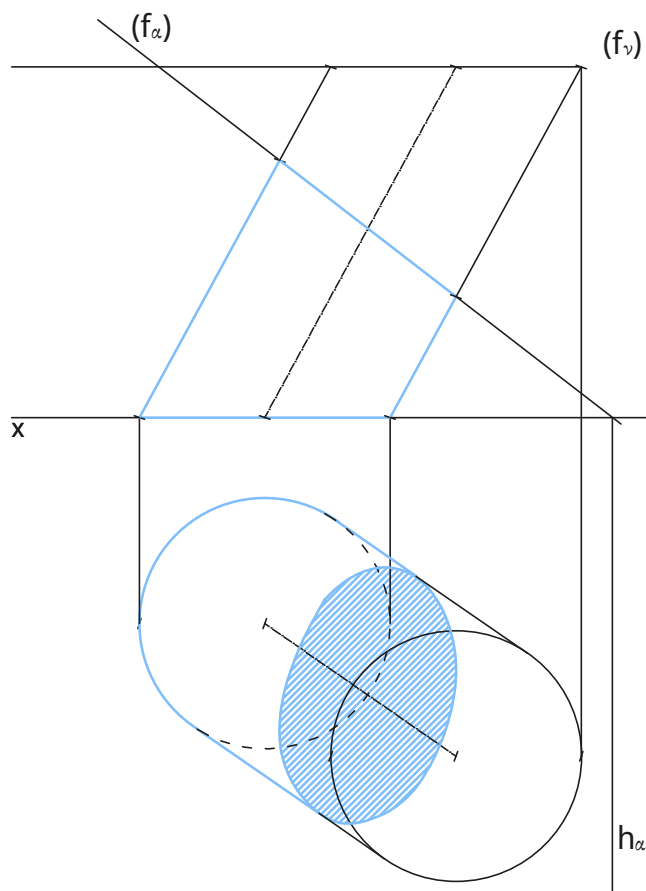
Neste manual, para uma maior clareza, o contorno do sólido resultante, bem como a trama da superfície seccionada, estão representados a azul. Porém, no desenho, essa representação deverá ser feita, no contorno, com traço grosso, e na trama da superfície de secção, com linhas sucessivas, de afastamento igual, com traço mais leve.



Considera, agora, um cilindro oblíquo de bases horizontais, seccionado por um plano de topo.

O sólido resultante da secção, salvo indicação contrária do enunciado, será aquele que fica compreendido entre o plano da base e o plano secante.

Assim, o sólido resultante da truncagem do cilindro oblíquo encontra-se destacado graficamente.



Para praticar

- 1 Determina as projeções do sólido resultante da secção produzida por um plano de topo α numa pirâmide pentagonal regular de base horizontal, sabendo que:
 - o ponto A (-5; 9; 2) é um dos vértices da base [ABCDE] da pirâmide;
 - o vértice da pirâmide é o ponto V (-5; 5; 7);
 - o plano secante faz, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de 35° (a.d.) e contém o vértice mais à esquerda da pirâmide.
- 2 Determina as projeções do sólido resultante da secção produzida por um plano vertical θ num cone oblíquo de base frontal, sabendo que:
 - o centro da base é o ponto O (0; 2; 4) e o raio é 3 cm;
 - o eixo do cone é horizontal e faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 45° (a.e.);
 - a geratriz do cone que contém o ponto da base mais à esquerda é horizontal e faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 65° (a.e.);
 - o plano secante contém o ponto K (-2; 0; 0) e faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de 35° (a.e.).

Geometria Descritiva 11.º ano

Criação intelectual
Inês Cabral Campo

Design
Porto Editora

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Edição
2025

Cabo Verde



Brasão



Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!