Matemática

Aplicada às Ciências Sociais e Humanas

11.º ano

11

Ministério da Educação

escola virtual
um serviço Porto Editora

Explora o manual digital do teu livro

Exercícios Interativos
Para resolução com *feedback* imediato.

Vídeos e interatividades
Explicam a matéria de forma motivadora.

Jogos
Exploram os conceitos curriculares de forma lúdica.

Áudios
Dão vida aos textos e ajudam a reforçar as competências linguísticas.

QuizEV
Desafiam-te a mostrares o que sabes. Podes, também, jogar com os teus amigos.

www.escolavirtual.cv

Matemática

Aplicada às Ciências Sociais e Humanas

11.º ano

Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado pela Universidade de Cabo Verde.

Ministério da Educação

Explora o teu manual digital

https://escolavirtual.cv

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

DISPONÍVEL NO Google Play

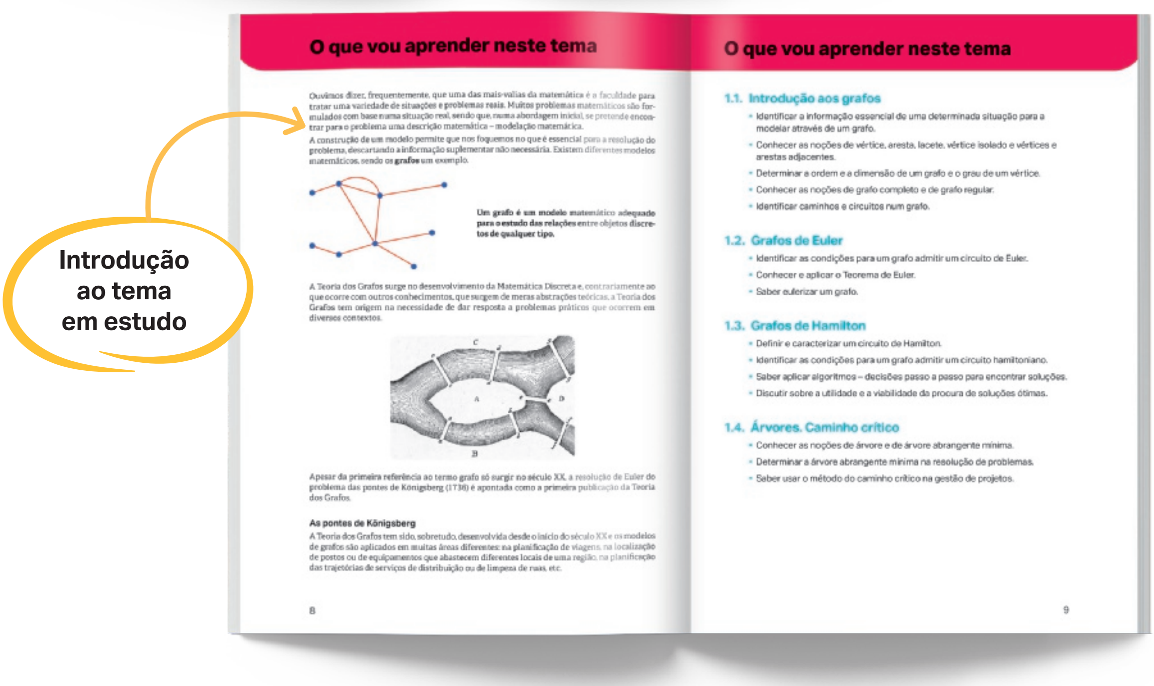
Descarregar na App Store

Conhece o teu manual

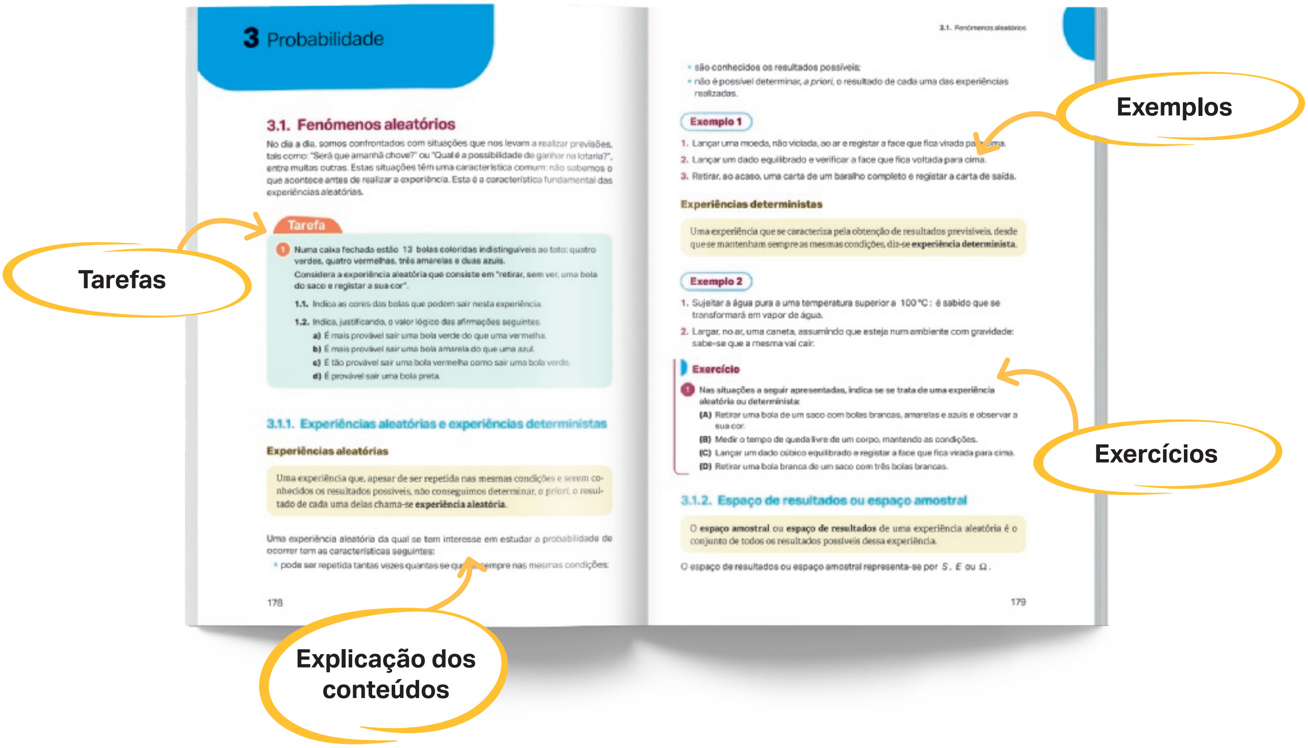
Este manual ajuda-te neste percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em três temas, de acordo com o plano curricular do ensino secundário. Os temas (Modelos de Grafos, Modelos populacionais e Probabilidade) dividem-se, por sua vez, em subtemas.

Cada tema e subtema é composto por…

Separador

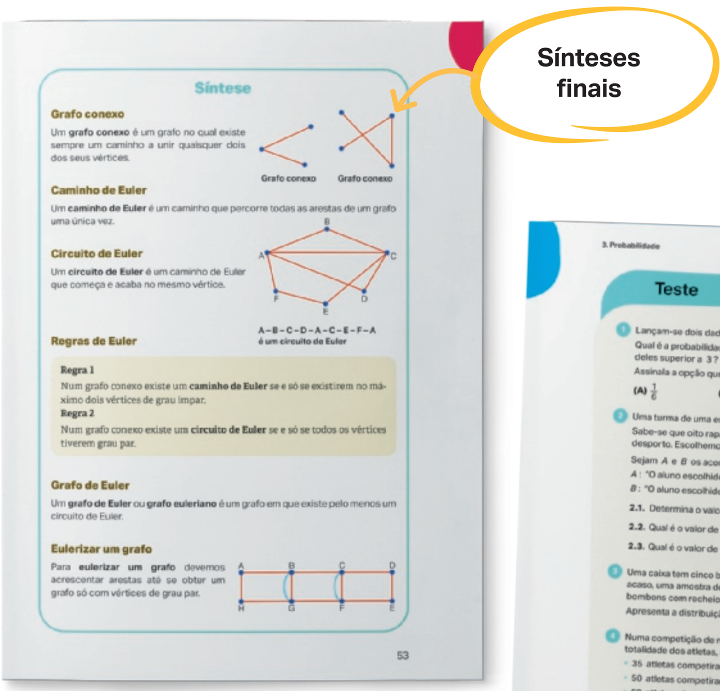


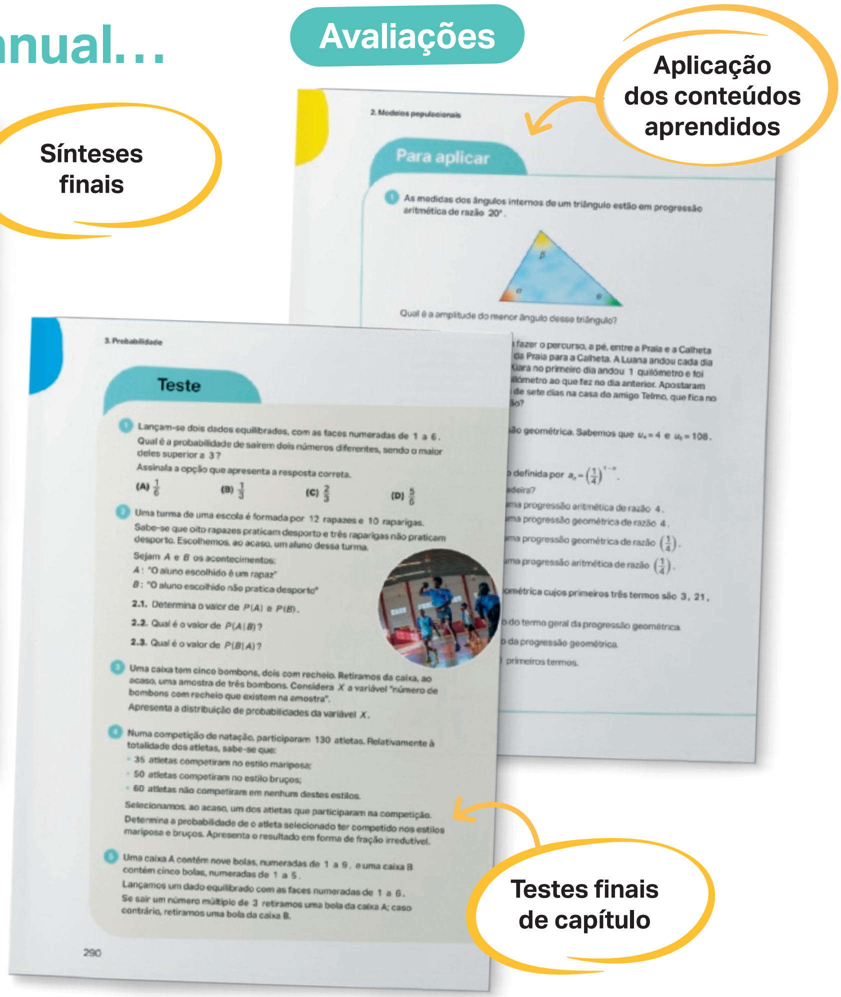
Desenvolvimento de conteúdos



Ao longo do teu manual…

Avaliações





Índice

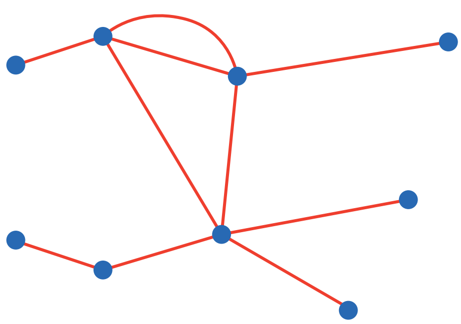
1

Modelos de grafos

O que vou aprender neste tema

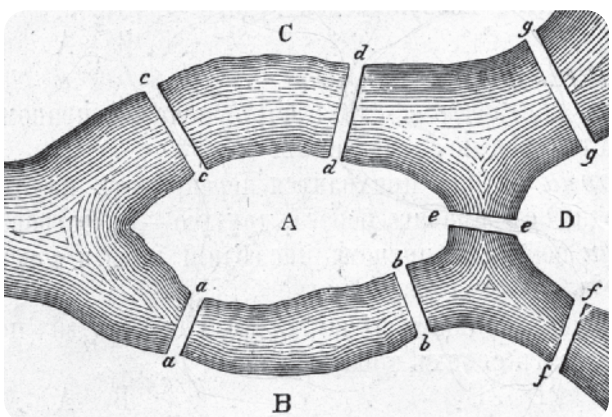
Ouvimos dizer, frequentemente, que uma das mais-valias da matemática é a faculdade para tratar uma variedade de situações e problemas reais. Muitos problemas matemáticos são formulados com base numa situação real, sendo que, numa abordagem inicial, se pretende encontrar para o problema uma descrição matemática – modelação matemática.

A construção de um modelo permite que nos foquemos no que é essencial para a resolução do problema, descartando a informação suplementar não necessária. Existem diferentes modelos matemáticos, sendo os **grafos** um exemplo.



Um grafo é um modelo matemático adequado para o estudo das relações entre objetos discretos de qualquer tipo.

A Teoria dos Grafos surge no desenvolvimento da Matemática Discreta e, contrariamente ao que ocorre com outros conhecimentos, que surgem de meras abstrações teóricas, a Teoria dos Grafos tem origem na necessidade de dar resposta a problemas práticos que ocorrem em diversos contextos.



Apesar da primeira referência ao termo grafo só surgir no século XX, a resolução de Euler do problema das pontes de Königsberg (1736) é apontada como a primeira publicação da Teoria dos Grafos.

As pontes de Königsberg

A Teoria dos Grafos tem sido, sobretudo, desenvolvida desde o início do século XX e os modelos de grafos são aplicados em muitas áreas diferentes: na planificação de viagens, na localização de postos ou de equipamentos que abastecem diferentes locais de uma região, na planificação das trajetórias de serviços de distribuição ou de limpeza de ruas, etc.

O que vou aprender neste tema

1.1. Introdução aos grafos

- Identificar a informação essencial de uma determinada situação para a modelar através de um grafo.
- Conhecer as noções de vértice, aresta, lacete, vértice isolado e vértices e arestas adjacentes.
- Determinar a ordem e a dimensão de um grafo e o grau de um vértice.
- Conhecer as noções de grafo completo e de grafo regular.
- Identificar caminhos e circuitos num grafo.

1.2. Grafos de Euler

- Identificar as condições para um grafo admitir um circuito de Euler.
- Conhecer e aplicar o Teorema de Euler.
- Saber eulerizar um grafo.

1.3. Grafos de Hamilton

- Definir e caracterizar um circuito de Hamilton.
- Identificar as condições para um grafo admitir um circuito hamiltoniano.
- Saber aplicar algoritmos – decisões passo a passo para encontrar soluções.
- Discutir sobre a utilidade e a viabilidade da procura de soluções ótimas.

1.4. Árvores. Caminho crítico

- Conhecer as noções de árvore e de árvore abrangente mínima.
- Determinar a árvore abrangente mínima na resolução de problemas.
- Saber usar o método do caminho crítico na gestão de projetos.

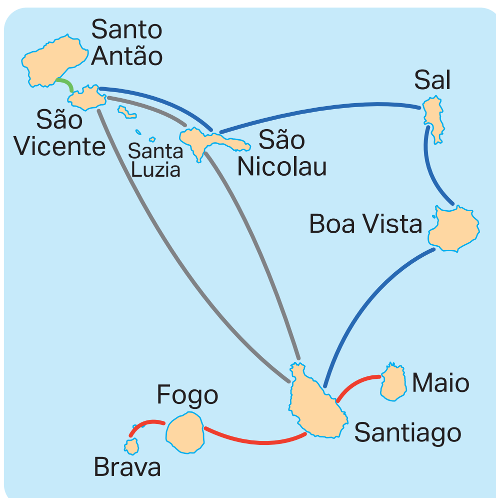
1 Modelos de grafos

1.1. Introdução aos grafos

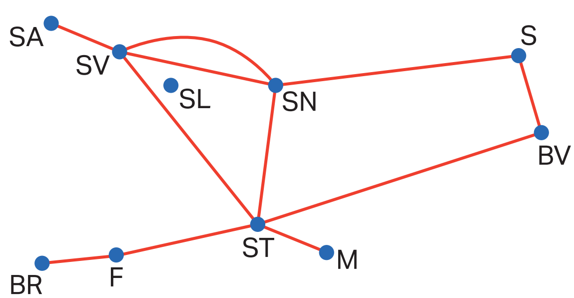
1.1.1. O que é um grafo?

O transporte marítimo é uma das formas mais populares de viajar entre as ilhas de Cabo Verde. O transporte por barco não só torna as viagens acessíveis, como também permite desfrutar das magníficas vistas do oceano Atlântico que rodeiam o arquipélago.

O mapa que se segue mostra as conexões marítimas asseguradas por uma empresa entre as ilhas de Cabo Verde.



Estas conexões marítimas podem ser representadas através de um grafo.

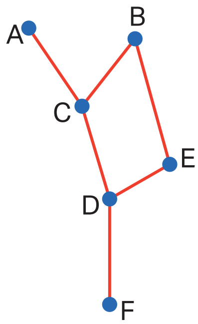


Esta representação em grafo facilita a simulação e otimização de recursos, como se explica nas páginas seguintes.

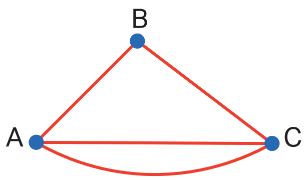
Grafos, vértices e arestas

Um **grafo** é uma estrutura constituída por um conjunto de pontos, a que chamamos **vértices**, e um conjunto de **arestas**, que unem pares de pontos.

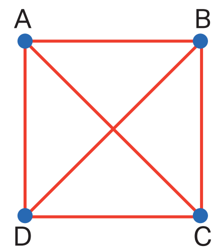
As figuras seguintes representam alguns exemplos de grafos.



Vértices: A, B, C, D, E, F



Vértices: A, B, C

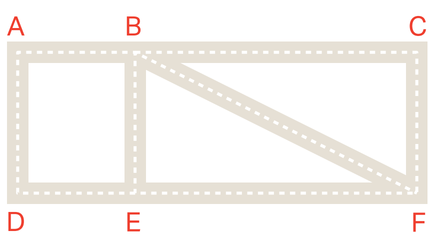


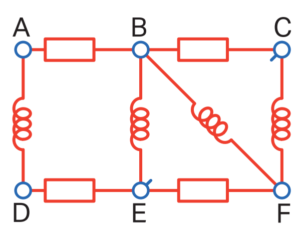
Vértices: A, B, C, D

As arestas podem ser curvas ou retilíneas. As interseções das arestas que não estão realçadas não são vértices do grafo.

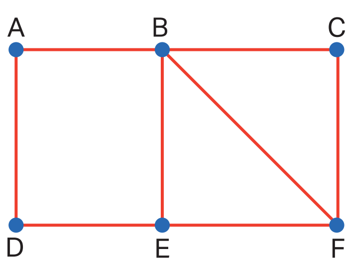
Exemplo 1

Um grafo permite modelar uma situação do quotidiano através de uma representação mais simples que facilita a análise. Por exemplo, o mapa de estradas e o esquema de uma rede elétrica das figuras seguintes





podem ser representados pelo mesmo grafo:



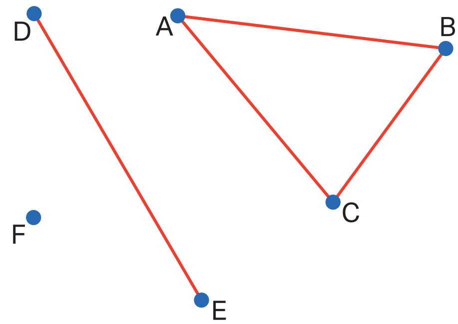
Exemplo 2

A figura ao lado representa um grafo com seis vértices e quatro arestas, em que o conjunto de vértices é:

$V = \{A, B, C, D, E, F\}$

e o conjunto de arestas é:

$A = \{AB, BC, AC, DE\}$



Exercícios

1 Desenha um grafo em que o conjunto dos vértices seja $V = \{A, B, C, D\}$ e o conjunto das arestas seja $A = \{AB, AC, AD, CD\}$.

2 Desenha um grafo que modele a situação representada na tabela ao lado.

A, B, C, D e E são vértices

✗ – significa que há uma aresta entre os vértices

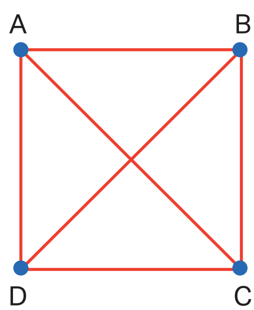
	A	B	C	D	E
A		✗	✗		✗
B	✗		✗		✗
C	✗	✗		✗	✗
D			✗		
E	✗	✗	✗		

Nota: Repara que se A está ligado a B, então B está ligado a A. É habitual omitir esta informação da tabela, deixando essas células a sombreado.

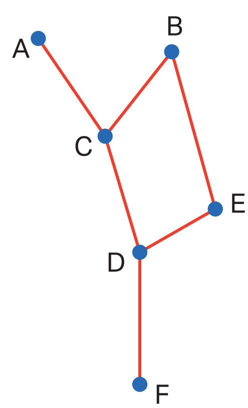
Ordem e dimensão de um grafo

A **ordem** de um grafo é o número de vértices do grafo.
A **dimensão** de um grafo é o número de arestas do grafo.

Exemplo 3



Ordem 4
Dimensão 6

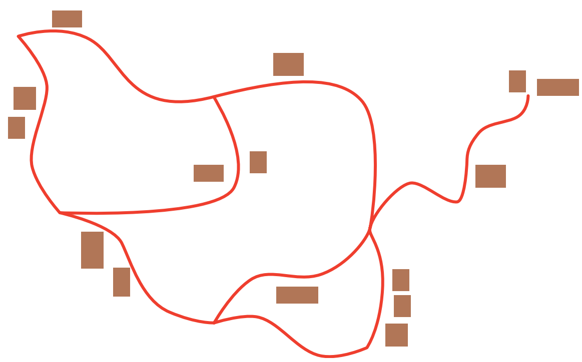


Ordem 6
Dimensão 6

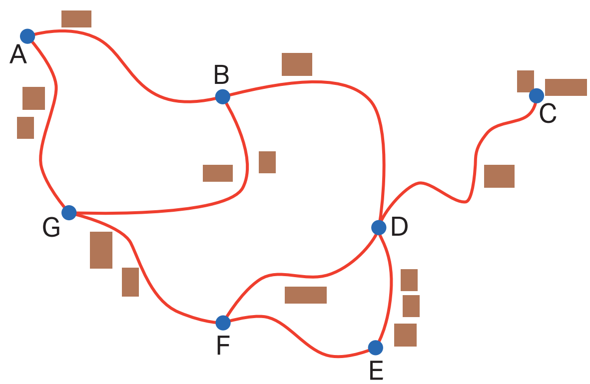
Construção de grafos a partir de mapas e plantas

Exemplo 4

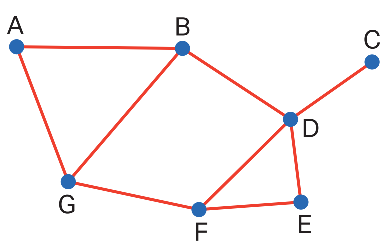
O Edson ao olhar para o mapa da sua aldeia decidiu tentar representar todas as estradas existentes através de um grafo.



Para construir o grafo começou por identificar, com as letras A, B, C, D, E, F e G, todos os pontos em que as estradas iniciam ou se intersetam:



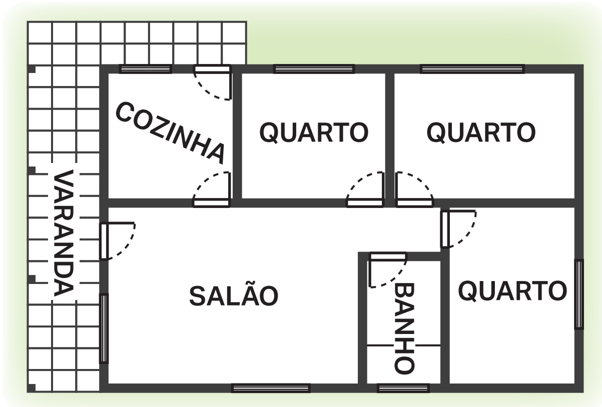
E depois só teve de representar as estradas através de arestas que ligam esses vértices:



Este grafo permite identificar e comparar mais facilmente os vários percursos que o Edson pode fazer. Por exemplo, para ir de A a C, tem várias opções, duas delas são percorrer $A-B-D-C$ ou percorrer $A-G-F-D-C$.

Exemplo 5

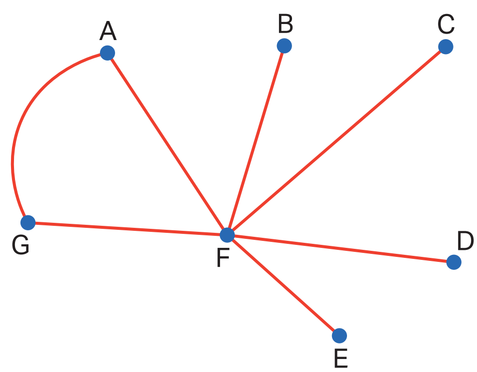
A figura seguinte representa a planta da casa da Luana.



A Luana decidiu representar as ligações entre as divisões da casa através de um grafo, em que os vértices são as divisões da casa e as arestas são as ligações entre as divisões.

Para isso, identificou cada divisão com uma letra (que irá originar um vértice).

E depois uniu os vértices que têm uma ligação entre eles (onde há uma porta). O grafo que obteve foi:



Exercício

3 Observa o mapa de estradas da ilha do Maio.

3.1. Com base no mapa, completa a tabela assinalando com X as situações em que existe uma estrada a ligar diretamente cada par de localidades.

	Vila do Maio	Morro	Calheta	Morrinho	Cascabulho	Pedro Vaz	Alcatraz	Figueira da Horta	Ribeira Dom João
Vila do Maio									
Morro									
Calheta									
Morrinho									
Cascabulho									
Pedro Vaz									
Alcatraz									
Figueira da Horta									
Ribeira Dom João									

3.2. Representa o mapa de estradas da tabela através de um grafo.

3.3. Qual é a ordem e a dimensão do grafo que elaboraste?

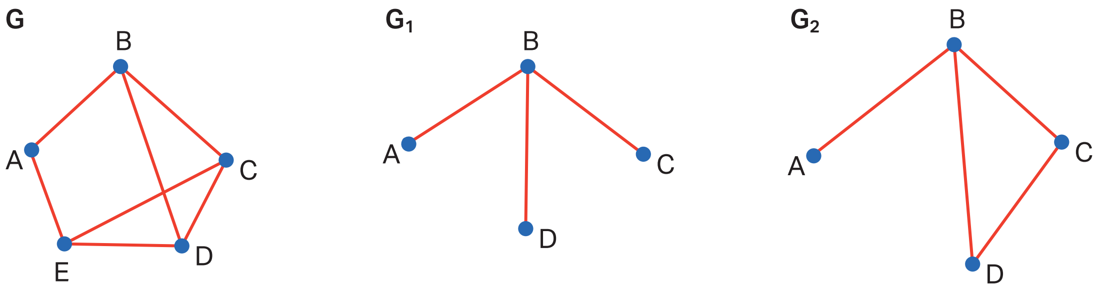
3.4. Imagina que são construídas duas novas estradas, uma que liga diretamente as localidades do Morro e de Figueira da Horta, e outra que liga a Calheta a Pedro Vaz. Acrescenta estas arestas ao teu grafo. Qual é a ordem e a dimensão do novo grafo?

Subgrafo

Um **subgrafo** de um grafo é um grafo composto por um subconjunto de vértices e arestas desse grafo.

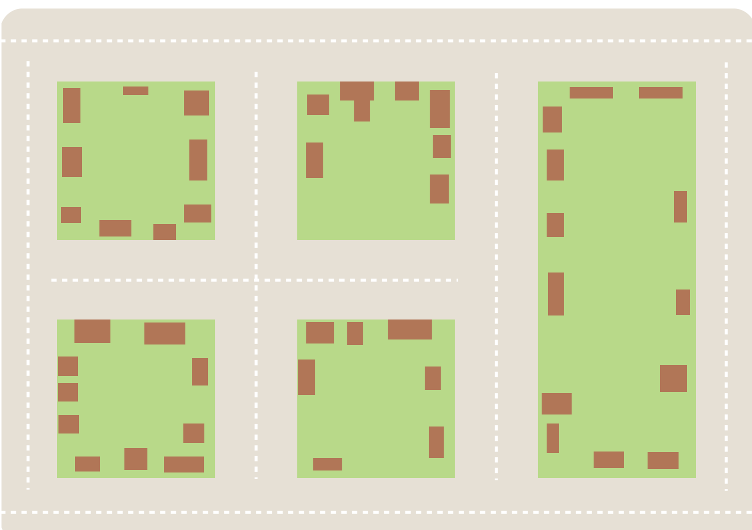
Exemplo 6

Na figura seguinte, os grafos G_1 e G_2 são subgrafos do grafo G.



Exercícios

4 O Gabriel anda a distribuir panfletos pelas casas do seu bairro.

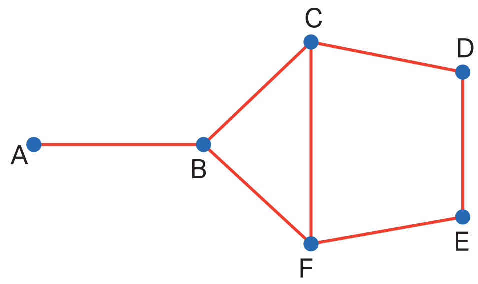


4.1. Representa as ruas do bairro do Gabriel através de um grafo.

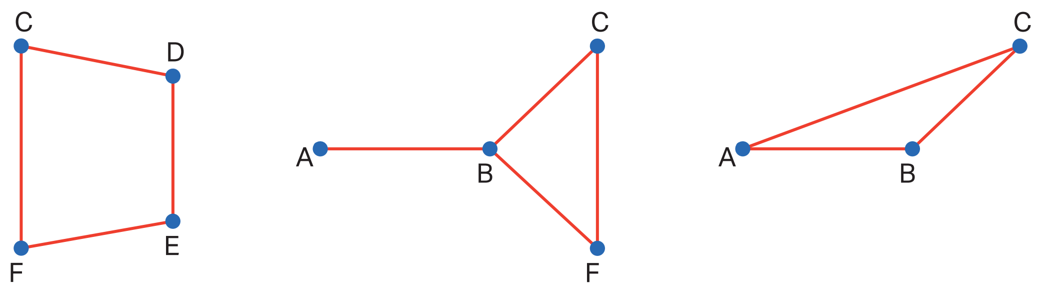
4.2. Qual é a ordem e a dimensão do grafo representado?

4.3. Identifica dois subgrafos distintos do grafo que construíste.

5 **Observa o seguinte grafo.**



5.1. Quais dos seguintes grafos são subgrafos do grafo anterior?

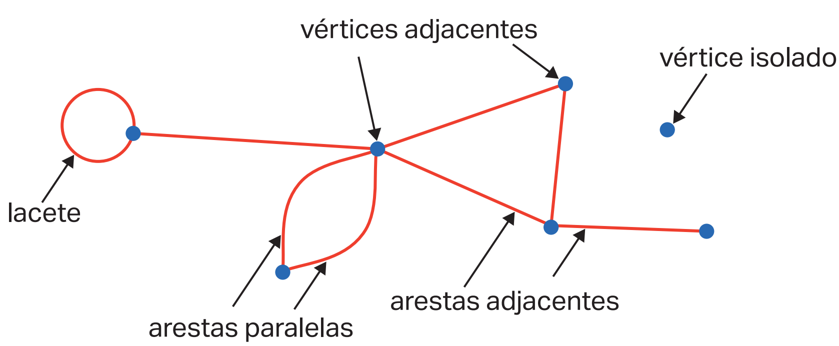


5.2. Constrói um subgrafo diferente dos anteriores.

Vértices e arestas adjacentes

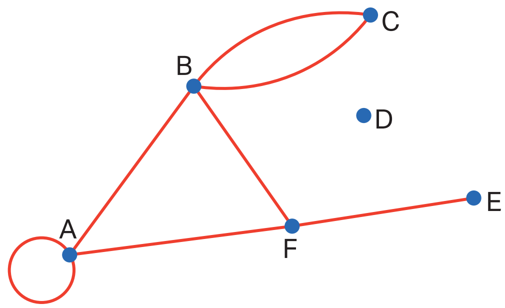
Arestas adjacentes são arestas que partilham um mesmo vértice.
Arestas paralelas são arestas distintas que ligam os mesmos vértices.
Lacete é uma aresta que liga um vértice a ele próprio.
Vértice isolado é um vértice que não tem arestas incidentes.
Vértices adjacentes são vértices que têm pelo menos uma aresta que os liga.

Exemplo 7



Exercícios

6 Observa o grafo seguinte e identifica:



6.1. a ordem e a dimensão do grafo;

6.2. um par de arestas adjacentes;

6.3. um par de arestas paralelas;

6.4. um vértice isolado;

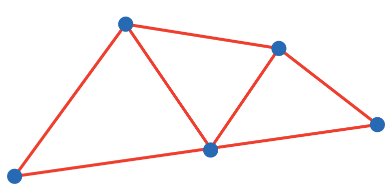
6.5. um par de vértices adjacentes.

7 Constrói um grafo de ordem 4 e dimensão 10 de modo que tenha:
– quatro lacetes;
– duas arestas paralelas.

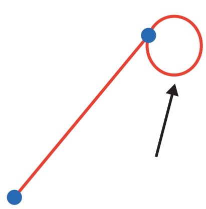
8 Constrói um grafo de ordem 5 e dimensão 9 de modo que tenha:
– um vértice adjacente a quatro vértices;
– duas arestas paralelas.

Grafo simples e multigrafo

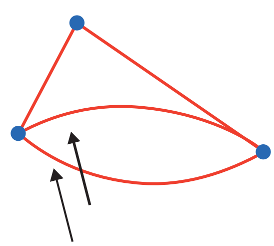
Um **grafo simples** é um grafo que não tem lacetes nem arestas paralelas. Se tiver algum destes elementos, chama-se **multigrafo**.



Grafo simples



Multigrafo

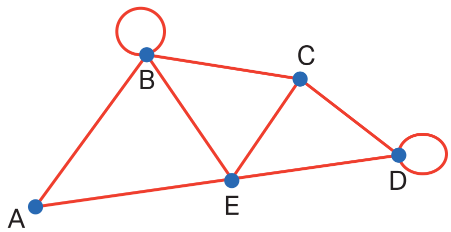


Multigrafo

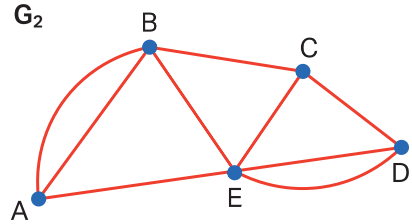
Exercícios

9 Observa os seguintes grafos.

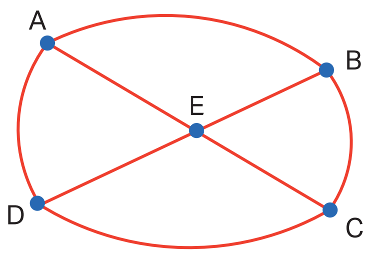
G_1



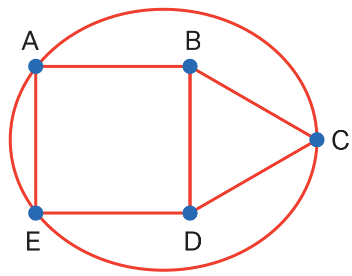
G_2



G_3



G_4



9.1. Qual é a ordem e a dimensão de cada um dos grafos?

9.2. Identifica, se existirem, os lacetes de cada grafo.

9.3. Identifica, se existirem, pares de arestas paralelas em cada grafo.

9.4. Quais são grafos simples e quais são multigrafos?

10 **Numa escola existem seis computadores e alguns computadores estão ligados entre si.**
Na tabela ao lado, estão representados os seis computadores e os cabos de ligação que existem entre alguns.

	A	B	C	D	E	F
A		✗				✗
B			✗		✗	✗
C				✗	✗	
D					✗	✗
E						✗
F						

10.1. Representa a situação através de um grafo.

10.2. Qual é a ordem e a dimensão do grafo que construíste?

10.3. Imagina que foi adquirido um sétimo computador e que foi criada uma ligação entre este e o computador A. Atualiza o teu grafo com esta informação.

11 **Um grafo tem 10 vértices numerados de 1 a 10 e as suas arestas ligam dois vértices quando estes têm o máximo divisor comum superior a 1 .**

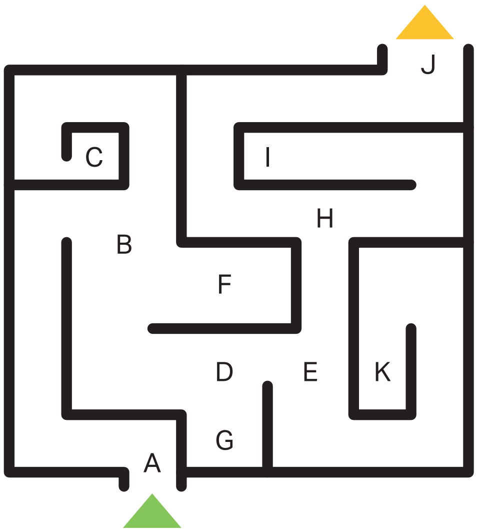
11.1. Desenha o grafo e determina a sua dimensão.

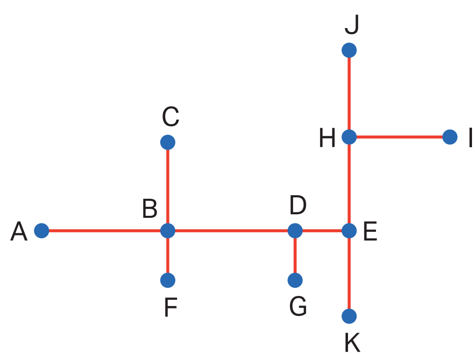
11.2. Existem vértices isolados? Quais?

11.3. Completa a seguinte tabela.

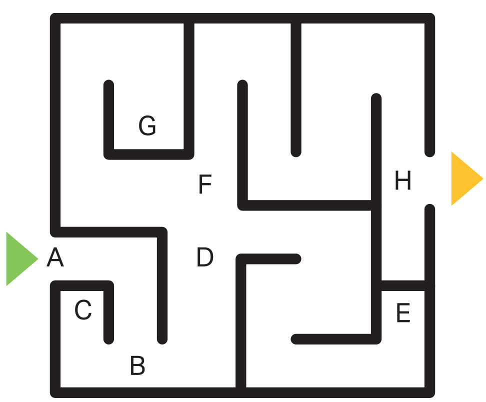
Vértice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de arestas que incidem no vértice										

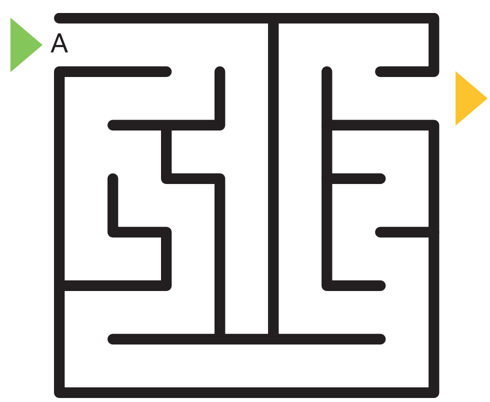
12 **Um labirinto pode ser modelado através de um grafo, representando cada bifurcação por um vértice.**





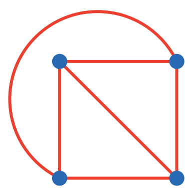
Modela os labirintos seguintes através de grafos usando uma estratégia semelhante.



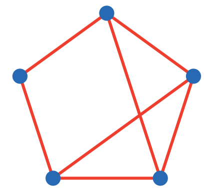


Grafo completo

Um **grafo completo** é um grafo simples em que cada um dos vértices é adjacente a todos os outros.



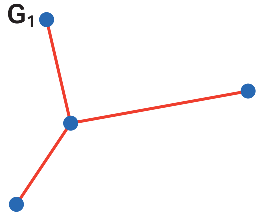
Grafo completo

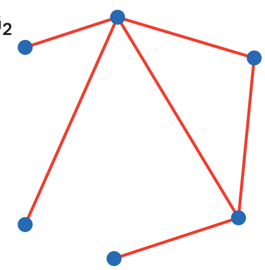


Grafo não completo

Exercícios

13 Acrescenta arestas aos grafos ao lado de modo que se transformem em grafos completos.





14 Nas tabelas seguintes estão representadas as ligações diretas (sem ter de mudar de autocarro) entre algumas localidades da cidade da Praia, efetuadas pelos autocarros de uma empresa de transportes.

Tabela 1

	A	B	C	D	E
A		✗	✗	✗	✗
B			✗	✗	✗
C				✗	✗
D					✗
E					

A – Plateau
B – Fazenda
C – Achada Grande
D – ASA
E – Chã de Areia

Tabela 2

	F	G	H	I	J
F		✗		✗	✗
G					✗
H					✗
I					
J					

F – Safende
G – São Filipe
H – Pensamento
I – Ponta D'água
J – Sucupira (Fazenda)

14.1. Constrói o grafo de cada uma das situações.

14.2. Algum dos grafos que construíste é um grafo completo?

14.3. O que podes concluir acerca das tabelas que representam grafos completos?

1.1.2. Grau de um vértice

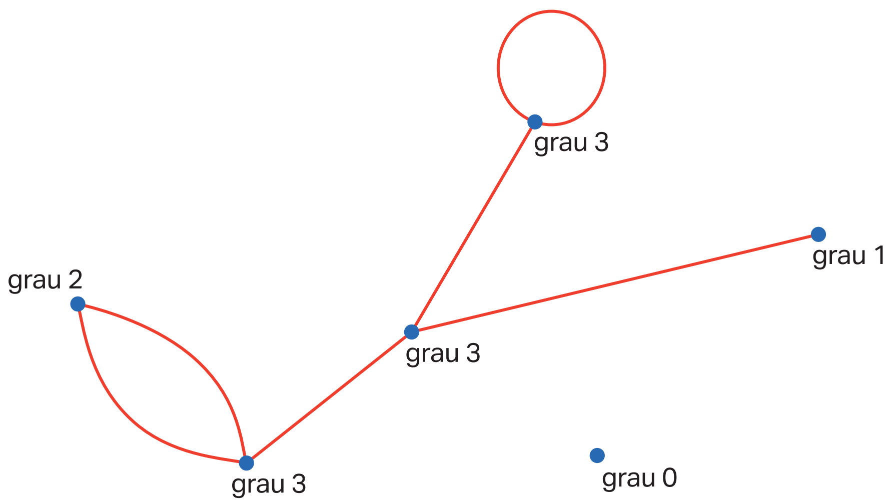
Grau de um vértice

O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nesse vértice.

Exemplo 8

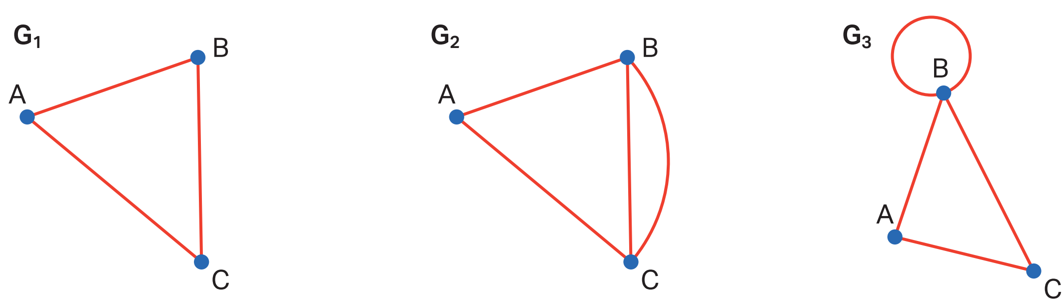
No grafo seguinte está identificado o grau de cada vértice.

Repara que um lacete é contabilizado duas vezes.

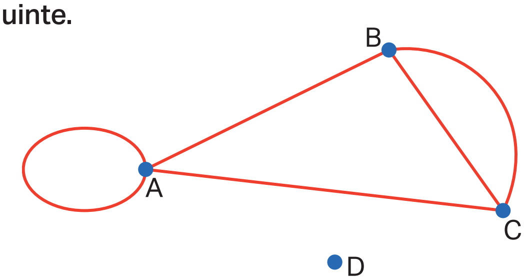


Exercícios

15 Para cada um dos grafos seguintes, determina o grau de cada um dos seus vértices.



16 **Observa o grafo seguinte.**



16.1. Determina o grau de cada um dos vértices do grafo.

16.2. Acrescenta arestas ao grafo de modo que os vértices tenham todos grau 4.

17 **Tenta construir um grafo de ordem 4 com todos os vértices de grau 3.**

18 **Tenta construir um grafo de ordem 6 com três vértices de grau 3, dois vértices de grau 2 e um vértice de grau 1.**

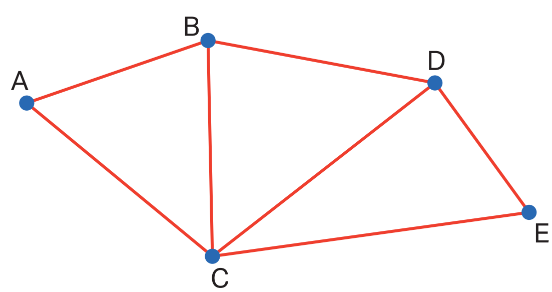
19 **Numa ilha foram implementados seis centros de vacinação: A, B, C, D, E e F. Na tabela seguinte estão representados os comprimentos, em quilómetros, das estradas que ligam estes centros.**

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	—	12	15		23	
B		—	13	13		
C			—	23		
D				—	15	
E					—	23
F						—

19.1. Constrói um grafo que tenha como vértices os seis centros de vacinação e como arestas as estradas que os ligam.

19.2. Qual é o grau de cada vértice?

20 **Observa o grafo ao lado e determina o grau de cada um dos vértices.**
O que acontece se acrescentares ao grafo uma aresta AD? Que vértices passam a ter um grau diferente?



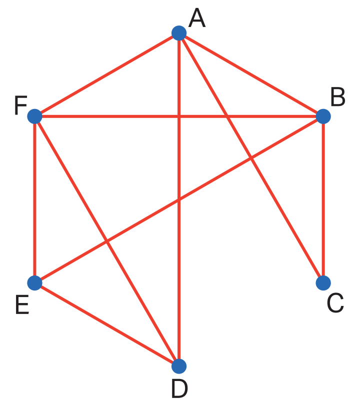
21 **Observa o grafo representado ao lado.**

21.1. Indica o grau de cada vértice.

21.2. Determina a soma dos graus de todos os vértices.

21.3. Indica a dimensão do grafo.

21.4. Qual é a relação entre a dimensão do grafo e a soma obtida na alínea anterior?



Teorema

Em qualquer grafo a soma dos graus dos seus vértices é igual ao dobro do número das suas arestas.

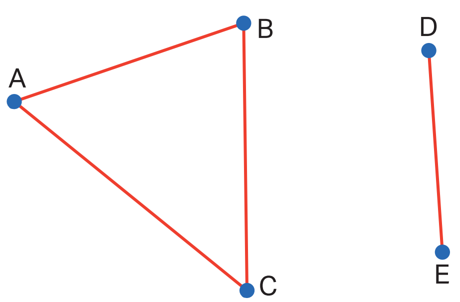
Exemplo 9

O teorema acima é conhecido como o **Lema dos apertos de mão** e pode ser ilustrado pela seguinte situação:

O Marcelo está numa festa e a cada pessoa com quem conversa dá um aperto de mão. Como gosta muito de matemática, começou a pensar:

"Que interessante! Em cada aperto de mão, há duas mãos envolvidas! Então, se contarmos o número de mãos apertadas nesta festa, será sempre o dobro do número de apertos de mão!"

Interpretando através de um grafo, o número de apertos de mão é dado pelo número de arestas e o número de mãos apertadas é obtido através da soma dos graus de cada vértice.

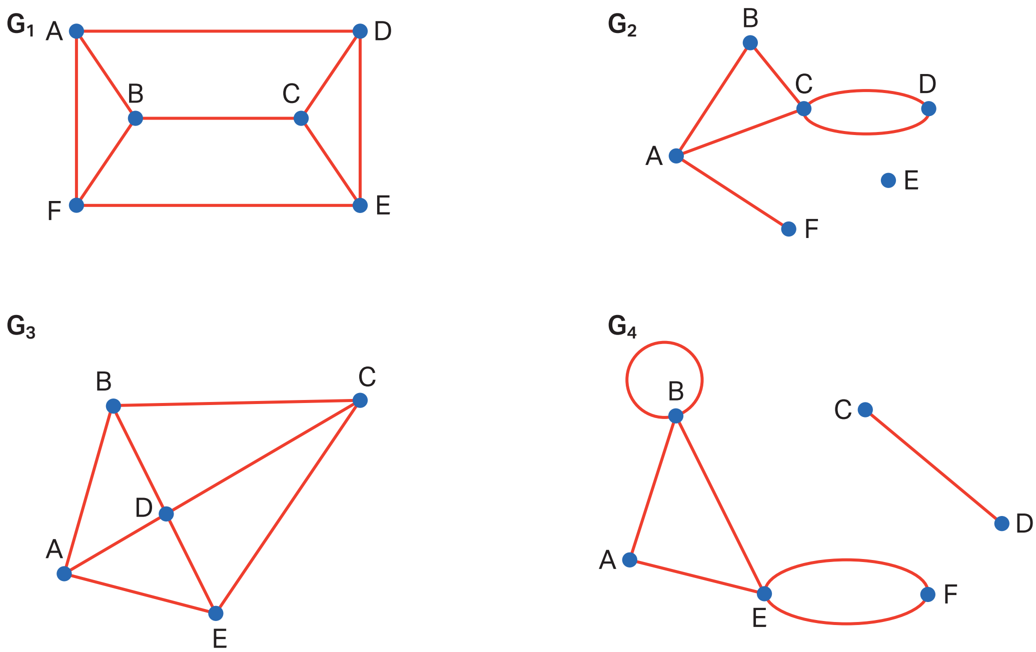


Por exemplo, numa festa com cinco pessoas que se cumprimentaram como representado no grafo ao lado podes verificar que:

- há quatro apertos de mão (número de arestas);
- há, no total, oito mãos apertadas (soma dos graus dos vértices).

Exercícios

22 **Observa os grafos seguintes.**



22.1. Determina a ordem e dimensão dos quatro grafos.

22.2. Determina o grau dos vértices de cada grafo.

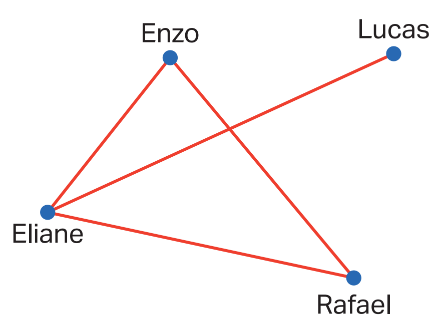
22.3. Para cada grafo, verifica que a soma dos graus dos seus vértices é igual ao dobro do número das suas arestas.

23 **O Enzo, o Rafael e a Eliane são amigos e, assim que se viram, cumprimentaram-se com um aperto de mão. Depois chegou o Lucas, que apenas cumprimentou a Eliane.**

23.1. Quantos apertos de mão foram dados?

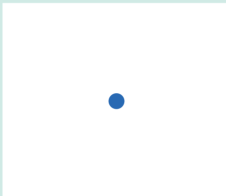
23.2. Se o Lucas cumprimentar os outros dois amigos, quantos apertos de mão vão ser no total?

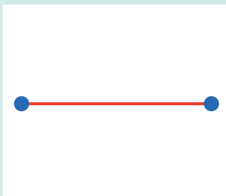
23.3. Se depois chegar a Luana e cumprimentar todos os presentes, quantos novos apertos de mão vão ser dados?

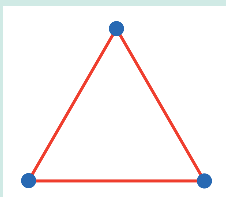


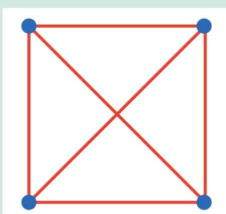
Tarefa

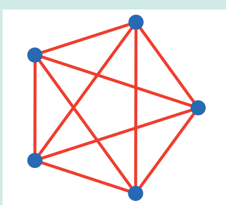
1 Observa a sequência de grafos simples e completos.

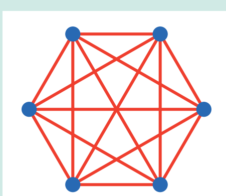
K_1  1 vértice 0 arestas

K_2  2 vértices 1 aresta

K_3  3 vértices 3 arestas

K_4  4 vértices 6 arestas

K_5  5 vértices 10 arestas

K_6  6 vértices 15 arestas

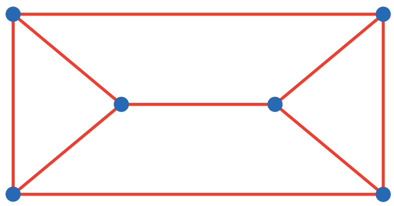
Desenha o grafo K_7 e determina o número de arestas.

1.1. Qual é o grau dos vértices em cada um dos grafos?

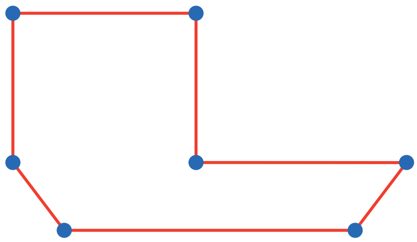
1.2. Quantas arestas tem o grafo K_8? E o grafo K_{10}? E o de ordem n?

Grafo regular

Um **grafo regular é um grafo em que todos** os seus vértices têm o mesmo grau.



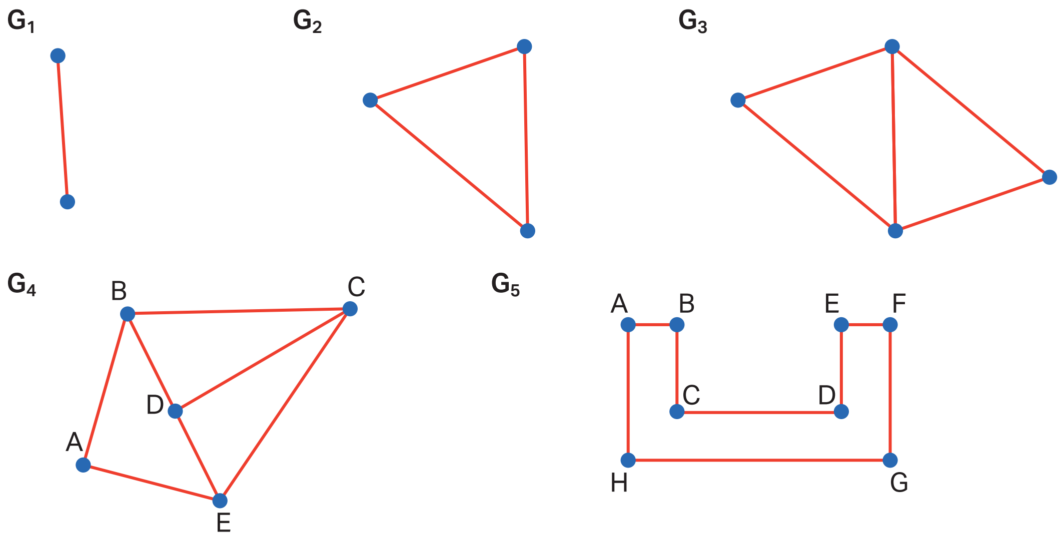
Grafo regular
(todos os vértices têm grau 3)



Grafo regular
(todos os vértices têm grau 2)

Exercícios

24 Considera os seguintes grafos.



24.1. Determina o grau dos vértices de cada grafo e identifica os grafos que são regulares.

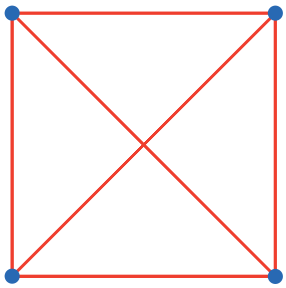
24.2. Consegues acrescentar arestas aos grafos não regulares de modo que estes passem a ser grafos regulares?

25 Consegues construir um grafo regular de ordem 6 em que todos os vértices têm grau 2?

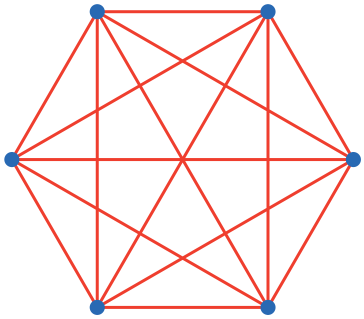
26 Consegues construir um grafo regular de ordem 6 em que todos os vértices têm grau 3?

Exemplo 10

Todos os grafos completos são regulares.



Grafo completo e regular de ordem 4
Todos os vértices têm grau 3.



Grafo completo e regular de ordem 6
Todos os vértices têm grau 5.

Exercícios

27 **Cinco amigos encontraram-se junto à praia e cumprimentaram-se todos entre si com um aperto de mão.**

27.1. Representa a situação através de um grafo.

27.2. O grafo que construíste é completo? Explica porquê.

27.3. O grafo é regular? Explica porquê.

28 **No torneio de futebol da escola participaram oito equipas. Todas as equipas jogaram entre si.**

28.1. Representa num grafo as oito equipas (vértices) e os jogos realizados entre elas (arestas).

28.2. Quantos jogos teve o torneio?

29 **No torneio de andebol jogaram-se 15 jogos. Sabendo que todas as equipas jogaram entre si, quantas equipas participaram no torneio de andebol?**

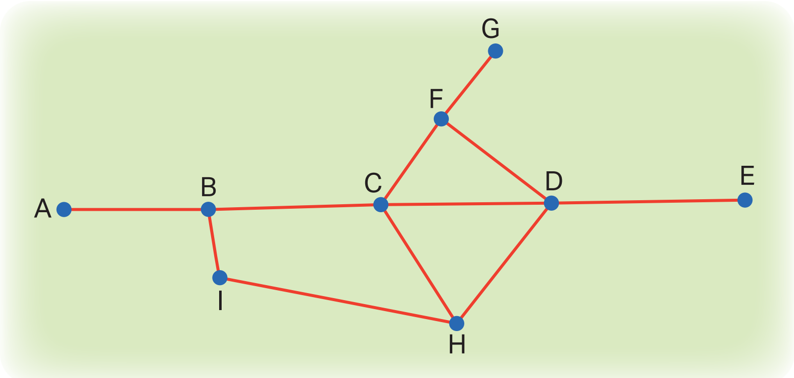
1.1.3. Caminho e circuito

Caminho

Um **caminho** é uma sequência de vértices em que cada dois vértices consecutivos estão ligados por uma aresta.

Exemplo 11

Observa o grafo abaixo que representa as passagens num jardim.



A – B – C – H – I – B – C – F – G é um caminho com arestas repetidas.

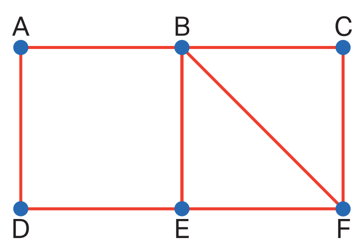
A – B – C – H – D – C – F – G é um caminho sem repetição de arestas.

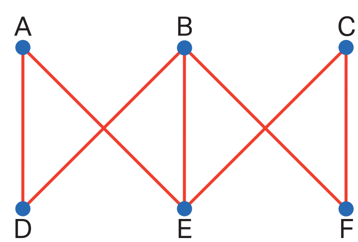
A – B – C – H – D – F – G é um caminho sem repetição de arestas e de vértices.

Consegues descobrir outros exemplos?

Exercícios

30 Em cada um dos grafos, identifica:





30.1. um caminho de A a F sem repetição de arestas;

30.2. um caminho de D a C sem repetição de vértices.

31 A Melissa vai visitar a ilha da Madeira, em Portugal. Nesta ilha existem diversos miradouros com vistas deslumbrantes e a Melissa encontrou na internet informação sobre a altitude de cada um dos miradouros.

Miradouro	Altitude (em metros)
Balcões (B)	860
Cabo Girão (CG)	580
Encumeada (E)	1007
Pináculo (P)	283
Pico do Areeiro (PA)	1818
Pico de Barcelos (PB)	355
Pico do Facho (PF)	280
Ponta do Pargo (PP)	312
Pico Ruivo (PR)	1862
Pico da Torre (PT)	205

A Melissa encontrou também informação sobre as ligações diretas que existem entre os miradouros, quer através de uma estrada ou de um caminho pedonal.
Na tabela seguinte, construída pela Melissa, estão assinaladas as ligações diretas entre os miradouros.

	B	CG	E	P	PA	PB	PF	PP	PR	PT
B	—			✓	✓	✓	✓	✓	✓	
CG		—	✓	✓		✓				✓
E		✓	—	✓	✓	✓			✓	✓
P	✓	✓	✓	—	✓	✓	✓			✓
PA	✓		✓	✓	—		✓		✓	
PB	✓	✓	✓	✓		—	✓			✓
PF	✓			✓	✓	✓	—		✓	
PP	✓							—		
PR	✓		✓		✓		✓		—	
PT		✓	✓	✓		✓				—

Na sua viagem, a Melissa pretende visitar todos os miradouros com uma altitude superior a 350 metros que tenham uma ligação direta entre si.

Para definir o seu percurso, a Melissa construiu um grafo, tendo por base a informação constante nas tabelas anteriores.

Depois de construir o grafo, a Melissa definiu o percurso, começando no miradouro de maior altitude. Em seguida, optou sempre pelo miradouro que, de entre os restantes, tem maior altitude.

Quantos miradouros conseguirá a Melissa visitar?

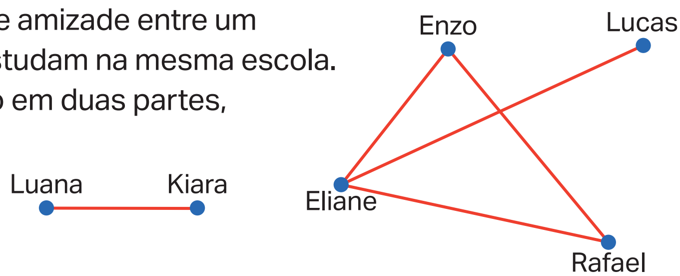
Na tua resposta, apresenta:
– o grafo construído pela Melissa;
– o percurso escolhido.

Grafo conexo

Um grafo **conexo** é um grafo em que existe sempre um caminho a unir quaisquer dois dos seus vértices. Um grafo que não é conexo diz-se **desconexo**.

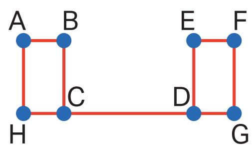
Exemplo 12

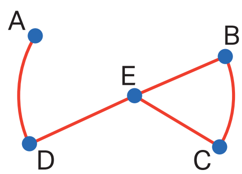
O grafo mostra as relações de amizade entre um grupo de seis vizinhos que estudam na mesma escola. Este grafo pode ser separado em duas partes, ou seja, não é conexo.



Exercício

32 **Retira uma aresta a cada um dos grafos seguintes de modo que se transformem em grafos desconexos.**



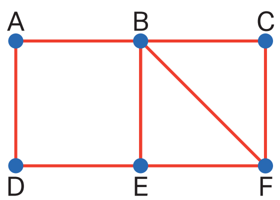


Circuito

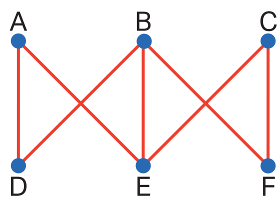
Um **circuito** é um caminho que inicia e termina no mesmo vértice.

Exemplo 13

Observa os grafos e procura circuitos que iniciem e terminem no vértice A.



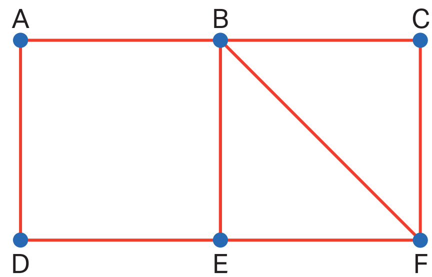
$A-B-E-D-A$ é um circuito.
$A-B-C-F-E-D-A$ é um circuito que passa por todos os vértices.



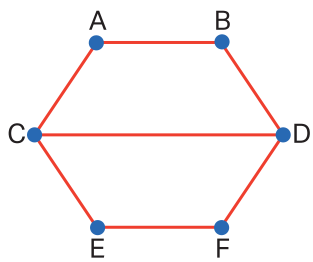
$A-E-B-D-A$ é um circuito.
$A-E-C-F-B-D-A$ é outro circuito.

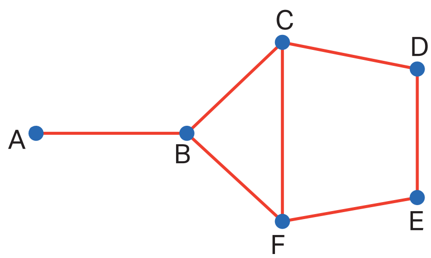
Exercícios

33 Observa o grafo seguinte e identifica seis circuitos distintos que se iniciem no vértice A.



34 Em cada um dos grafos identifica, se possível:

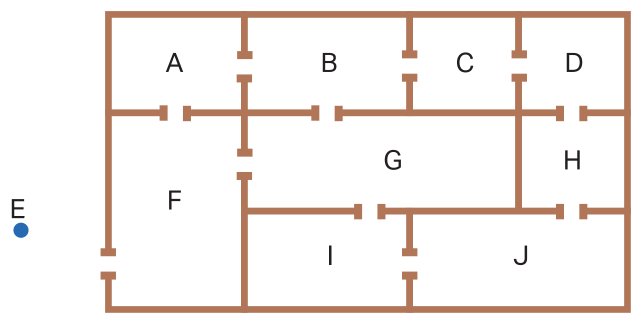




34.1. um circuito sem repetição de vértices que tenha início no vértice C;

34.2. um circuito sem repetição de arestas que tenha início no vértice A.

35 A figura representa a planta de uma casa em que A, B, C, D, F, G, H, I e J identificam as divisões e o ponto E identifica o exterior. Estão também representadas as portas que existem entre as divisões.



35.1. Representa através de um grafo a planta da casa.

35.2. Identifica um caminho que permita ir da divisão A à divisão I.

35.3. Identifica um circuito com início em F e que passe pelo máximo de divisões possível sem atravessar duas vezes a mesma divisão.

36 **Em Cabo Verde é possível viajar de avião entre sete das nove ilhas habitadas. Os voos interilhas são possíveis pela existência de quatro aeroportos internacionais e três aeródromos. A exceção são as ilhas de Santo Antão e da Brava, acessíveis apenas por via marítima, através de barcos e *ferries*.**

Os quatro aeroportos internacionais que recebem voos para Cabo Verde são:

– Aeroporto Internacional da ilha do Sal (Amílcar Cabral);

– Aeroporto Internacional da ilha de Santiago (Nelson Mandela);

– Aeroporto Internacional da ilha da Boa Vista (Aristides Pereira);

– Aeroporto Internacional da ilha de São Vicente (Cesária Évora).

Aos aeroportos internacionais, somam-se três aeródromos:

– Aeródromo de Preguiça, na ilha de São Nicolau;

– Aeródromo do Maio, na ilha do Maio;

– Aeródromo de São Filipe, na ilha do Fogo.

Em Cabo Verde é possível fazer as seguintes rotas aéreas interilhas:

- **Maio para Santiago;**
- **Fogo para Santiago;**
- **Santiago para Boa Vista, Fogo, Maio, Sal, São Nicolau, São Vicente;**
- **Boa Vista para Santiago;**
- **Sal para Santiago, São Nicolau e São Vicente;**
- **São Nicolau para Sal e Santiago;**
- **São Vicente para Sal e Santiago.**

36.1. Constrói um grafo que modele as rotas aéreas interilhas.

36.2. Um inspetor das linhas aéreas quer avaliar as operações, efetuando cada uma das rotas. Conseguirá realizar cada rota apenas uma vez?

Explica a tua resposta.

36.3. Imagina que queres visitar todas as ilhas, mas ir a cada uma delas apenas uma vez. Será possível? Se sim, como? Se não, que novas ligações deveriam ser acrescentadas para que tal fosse possível?

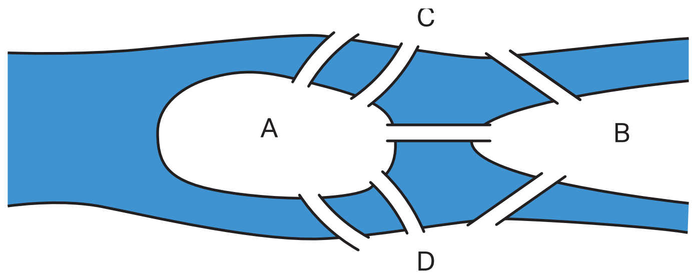
Explica a tua resposta.

1.2. Grafos de Euler

O problema das sete pontes de Königsberg

A cidade de Königsberg, que hoje se chama Kalininegrado, era uma cidade da antiga Prússia que tinha sete pontes como as da figura abaixo. Discutia-se, nas ruas da cidade, a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma… mas ninguém conseguia.

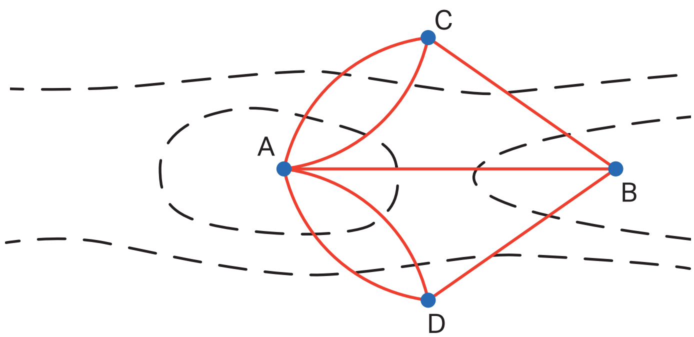
Este é um famoso quebra-cabeças da história da matemática: o **problema das pontes de Königsberg**.



As pontes de Königsberg

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler mostrou que o problema não era possível.

Euler fez uma coisa muito simples: representou as zonas da cidade por pontos e as pontes por traços e percebeu que o problema só era possível se não existissem mais de dois pontos de onde saísse um número ímpar de traços.



Representação em grafo das pontes de Königsberg

Porquê? Porque cada ponto, que não seja o início nem o fim do percurso, tem de ter um caminho para entrar e outro para sair…

Os estudos de Euler estiveram na base do ramo da matemática a que hoje se chama Teoria dos Grafos.

1.2.1. Circuitos de Euler

Caminho de Euler

Um **caminho de Euler** é um caminho que percorre todas as arestas de um grafo uma única vez.

Repara que só podem existir caminhos de Euler num grafo que seja conexo.

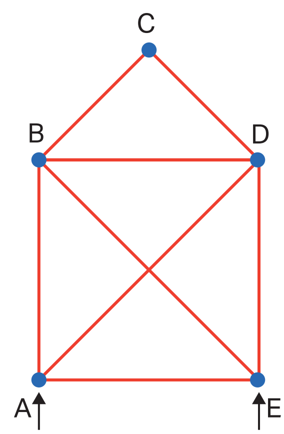
Exemplo 14

"Será possível desenhar a casa sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelas mesmas linhas?"

Tentar resolver este desafio é o mesmo que procurar um caminho de Euler.

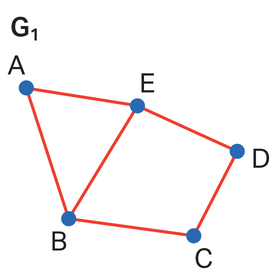
Devemos começar num dos vértices de grau ímpar e terminar no outro vértice de grau ímpar.

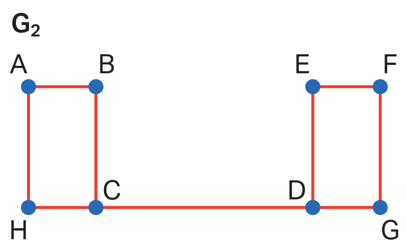
Por exemplo, A – B – C – D – E – B – D – A – E é um caminho de Euler pois percorre todas as arestas uma única vez. Consegues encontrar outro?

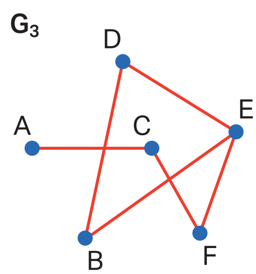


Exercício

37 **Averigua se existe um caminho de Euler em cada um dos seguintes grafos. Identifica os caminhos de Euler que encontrares.**



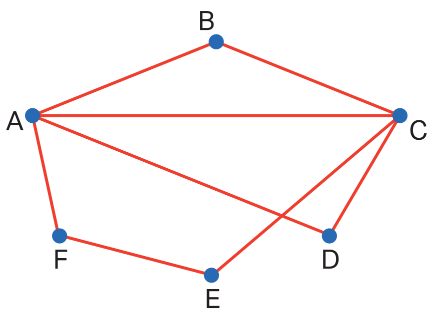




Circuito de Euler

Um **circuito de Euler** é um caminho de Euler que começa e acaba no mesmo vértice.

Exemplo 15



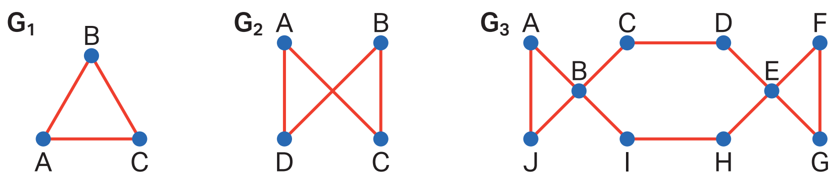
A – B – C – D – A – C – E – F – A é um circuito de Euler porque percorre todas as arestas do grafo uma única vez e começa e acaba no vértice A .

D – C – B – A – F – E – C – A – D é outro circuito de Euler.

Consegues encontrar outros circuitos de Euler no grafo?

Exercício

38 **Identifica um circuito de Euler em cada um dos seguintes grafos.**



Regras de Euler

Regra 1

Num grafo conexo existe um **caminho de Euler** se e só se existirem no máximo dois vértices de grau ímpar.

Regra 2

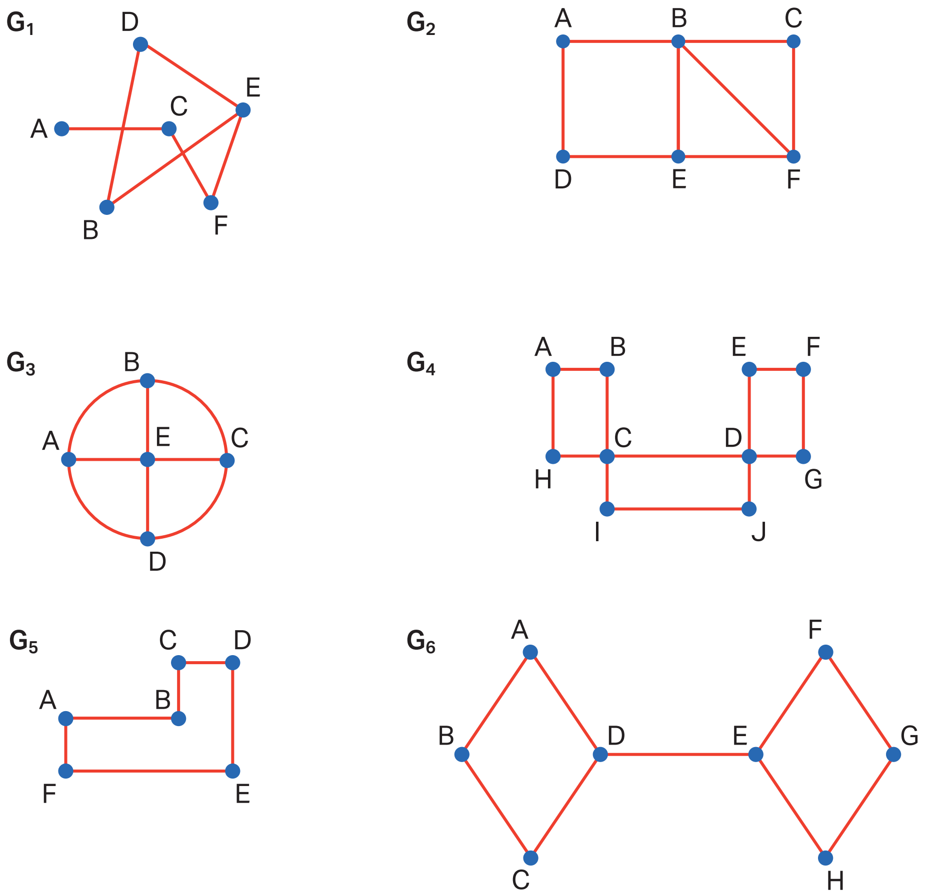
Num grafo conexo existe um **circuito de Euler** se e só se todos os vértices tiverem grau par.

Ou seja:

- se um grafo conexo possuir mais de dois vértices de grau ímpar, então não admite um caminho de Euler;
- se um grafo conexo possuir um ou dois vértices de grau ímpar, então admite, pelo menos, um caminho de Euler, mas não admite nenhum circuito de Euler.

Exercícios

39 Considera os seguintes grafos.



39.1. Quais os grafos que admitem circuitos de Euler? Justifica a tua resposta.

39.2. Nos grafos em que é possível, identifica pelo menos um circuito de Euler.

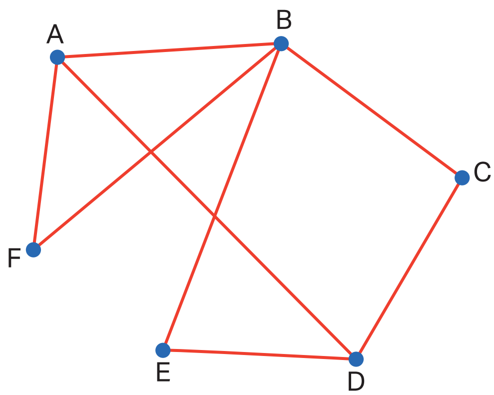
40 Observa o grafo e descobre a afirmação falsa.

(A) O grafo é conexo.

(B) O grafo admite caminhos de Euler.

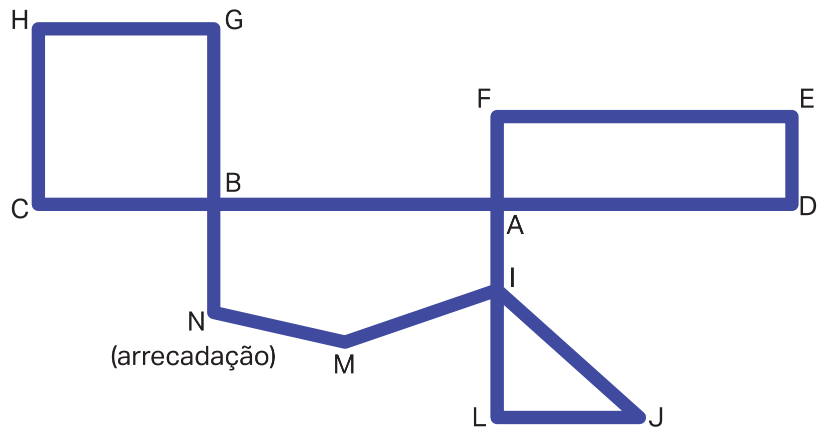
(C) O grafo admite circuitos de Euler.

(D) O vértice B tem grau par.

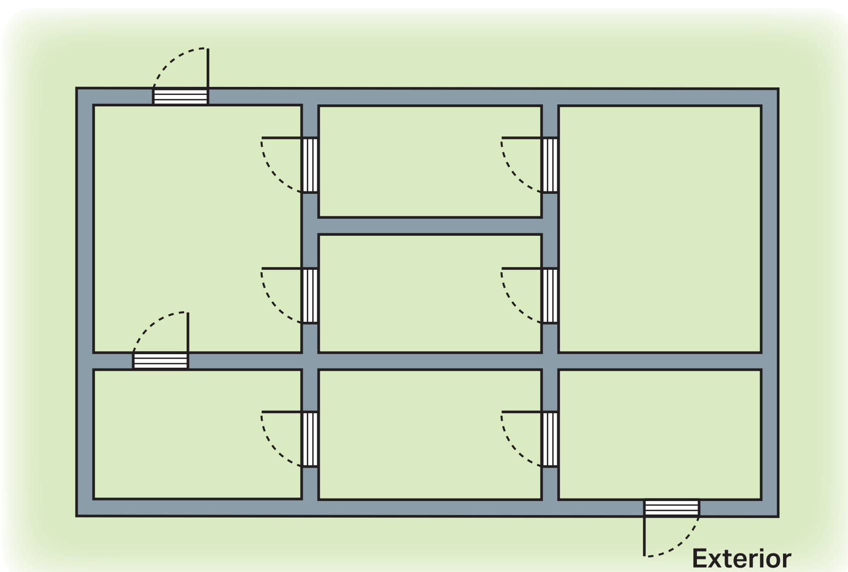


41 A Mayara e o Leonardo têm de varrer todos os corredores da sua escola. Têm de sair da arrecadação, onde estão os instrumentos de limpeza, e regressar no final ao mesmo local. Será que conseguem encontrar um circuito em que percorram cada corredor uma única vez?

Observa o grafo abaixo em que cada corredor da escola é representado por uma aresta, e, caso seja possível, identifica o circuito que devem percorrer.



42 O Sr. Silvino pretende pintar todas as portas da sua casa e, para isso, quer percorrer todas as portas sem passar por cada uma delas mais do que uma vez.



42.1. Representa através de um grafo as divisões da casa e as ligações entre elas. Cada divisão deve ser representada por um vértice e lembra-te que o exterior da casa deve ser também um vértice do grafo.

42.2. É possível encontrar um circuito tal como pretende o Sr. Silvino? Se sim, identifica-o.

Grafo de Euler

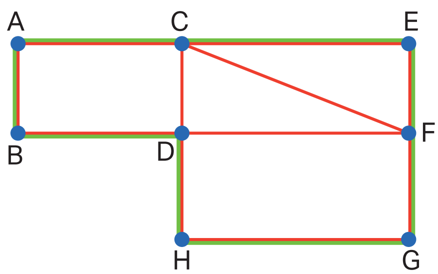
Um **grafo de Euler** ou **grafo euleriano** é um grafo em que existe pelo menos um circuito de Euler.

Ou seja, pelo que já aprendeste, um grafo de Euler é um grafo em que todos os vértices têm grau par. Contudo, perante um grafo de Euler, nem sempre é fácil encontrar um circuito de Euler, mas podemos usar um algoritmo para facilitar essa tarefa.

Exemplo 16

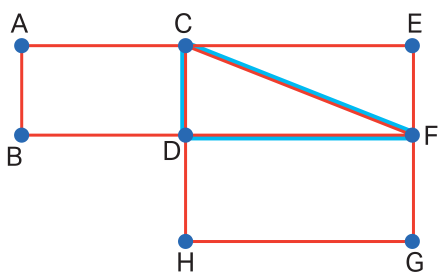
Algoritmo para encontrar um circuito de Euler

1.º passo. Escolhemos um vértice qualquer e percorremos um circuito, sem repetir arestas, até chegarmos ao vértice de partida.



Escolhendo, por exemplo, o vértice A, podemos construir o circuito A – C – E – F – G – H – D – B – A.

2.º passo. Se todas as arestas tiverem sido percorridas, encontramos o circuito pretendido. Caso contrário, escolhemos um vértice que tenha arestas ainda não percorridas e iniciamos um novo circuito só através de arestas ainda não percorridas.



Escolhendo, por exemplo, o vértice C, podemos construir o circuito C – F – D – C.

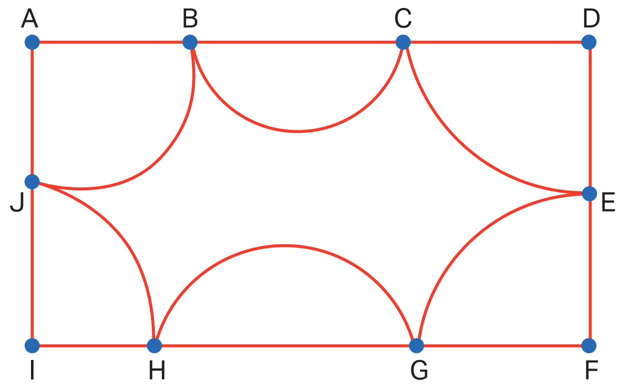
3.º passo. Se todas as arestas tiverem sido percorridas terminamos o algoritmo. Caso contrário, repetimos o 2.º passo.

Ao terminar o algoritmo é só juntar todos os circuitos construídos e obtemos um circuito de Euler.

Juntando os dois circuitos, obtemos o circuito de Euler A – C – F – D – C – E – F – G – H – D – B.

Exercícios

43 Considera o seguinte grafo.

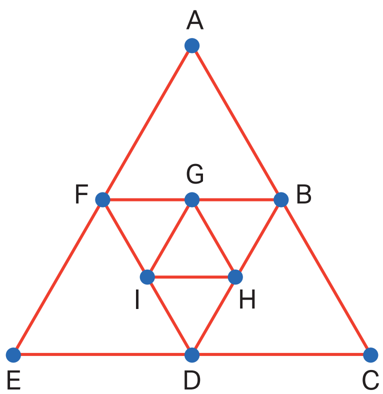


43.1. Este grafo admite um circuito de Euler? Justifica a tua resposta.

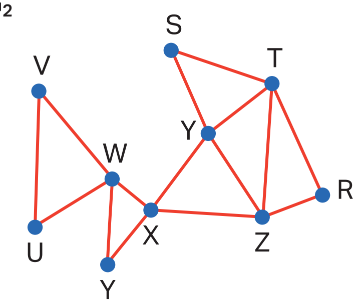
43.2. Se possível, identifica pelo menos um circuito de Euler.

44 **Verifica se os grafos seguintes são grafos de Euler e, quando possível, identifica em cada grafo um circuito de Euler.**

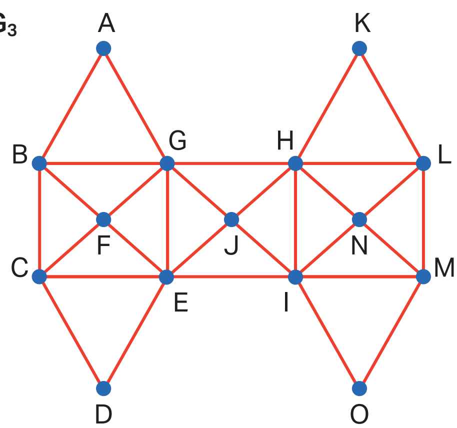
G_1



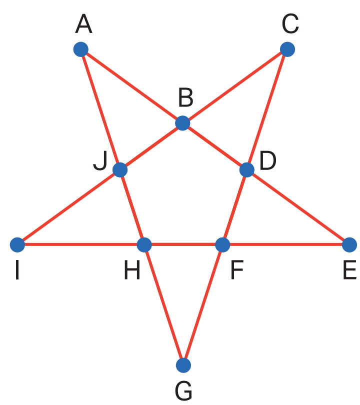
G_2



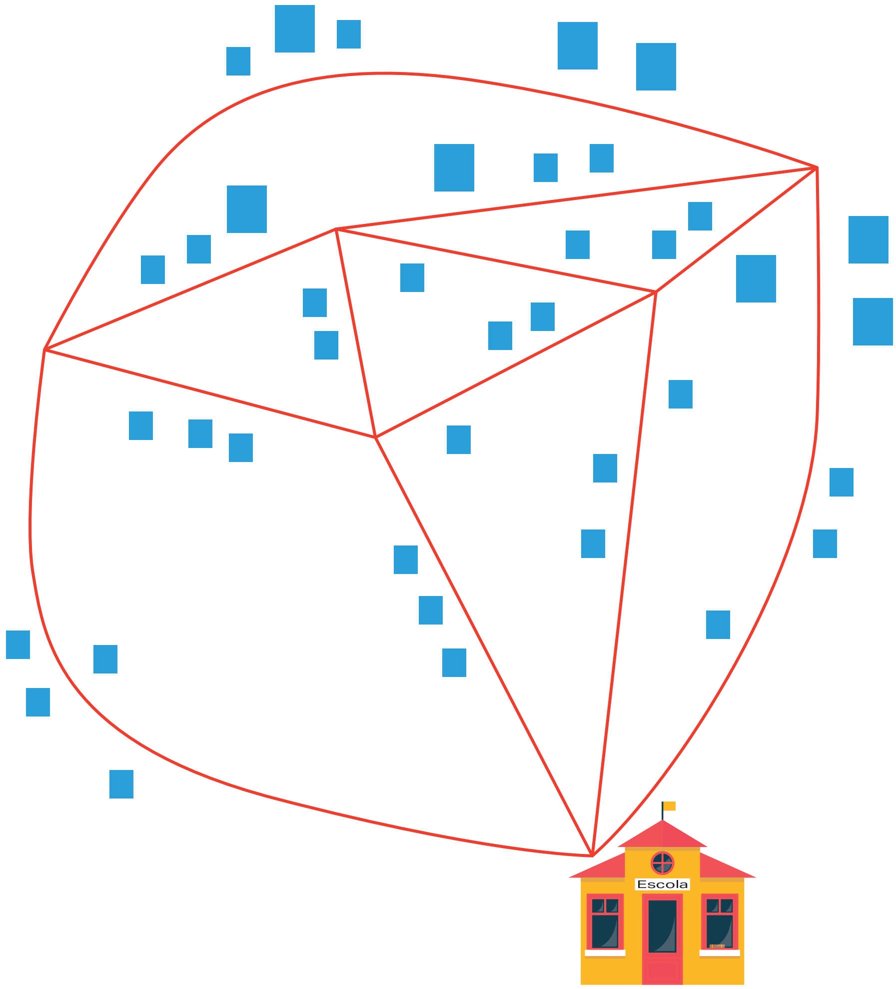
G_3



G_4



45 A carrinha da escola do Daniel, ao sair da escola, tem de apanhar alunos ao longo de todas as estradas da aldeia. Para poupar custos, o motorista quer tentar não passar na mesma rua duas vezes. Observa o mapa com as estradas da aldeia.



45.1. Constrói o grafo que representa as estradas da aldeia.

45.2. Qual é a ordem e a dimensão do grafo que construíste?

45.3. Completa a tabela com as letras que escolheste para cada um dos vértices do teu grafo e indica o grau de cada vértice.

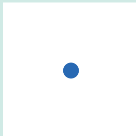
Vértice						
Grau do vértice						

45.4. O Daniel pensou: "O motorista quer percorrer um circuito de Euler com início na escola". Concordas com o Daniel? Explica porquê.

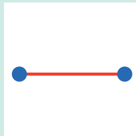
45.5. Existe um circuito de Euler com início na escola? Justifica a tua resposta.

Tarefa

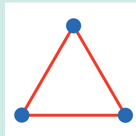
2 Relembra a sequência de grafos simples e completos.



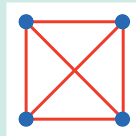
K_1



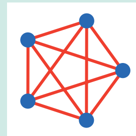
K_2



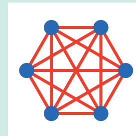
K_3



K_4



K_5



K_6

Em que situações são grafos de Euler?

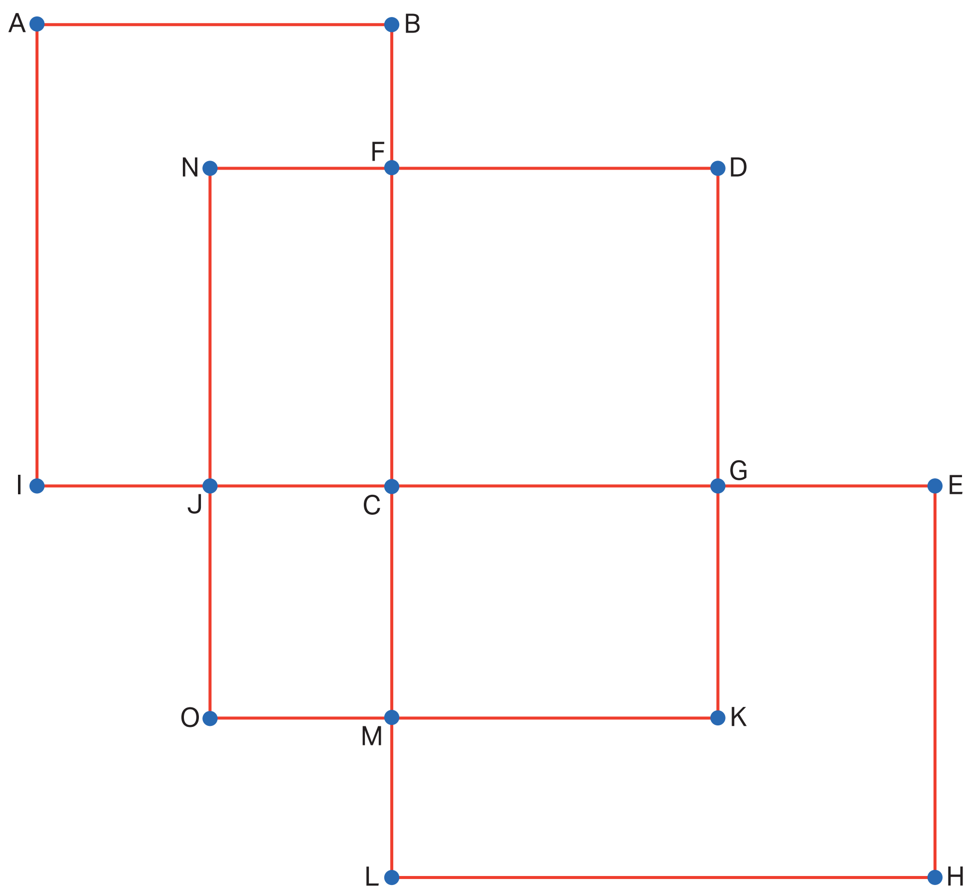
Na tua resposta, começa por explicar:

– quais dos grafos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 e K_6 são grafos de Euler.

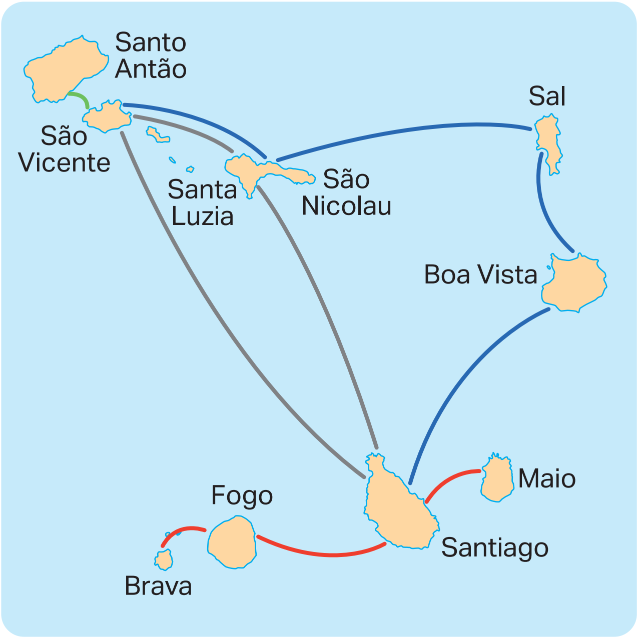
Explica em que situações K_n é um grafo de Euler.

Exercícios

46 O Sr. Ernesto é responsável por vigiar durante a noite as ruas representadas no grafo. É possível percorrer todas as ruas através de um circuito de Euler? Justifica a tua resposta e, em caso afirmativo, sugere um percurso.



47 Analisa novamente o mapa que mostra as ligações marítimas asseguradas por uma empresa entre as ilhas de Cabo Verde.



Imagina que esta empresa decidiu eliminar uma das rotas que liga a ilha de São Vicente à ilha de São Nicolau e criar uma nova rota que liga diretamente a ilha Brava à ilha de Santo Antão. Com estas alterações passa a ser possível percorrer um circuito de Euler? Justifica a tua resposta construindo um grafo que represente a nova situação.

48 Um engenheiro agrónomo construiu um grafo para representar os canais de água que ligam os cinco terrenos, $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ e $T5$, de uma plantação. Nesse grafo, conexo, os vértices representam os terrenos e as arestas representam os canais de água. Ao observar o grafo, o engenheiro chegou à conclusão de que bastaria construir um novo canal entre os terrenos $T2$ e $T4$, que ainda não existia, para poder ser possível identificar um circuito de Euler.

Qual das tabelas pode apresentar o grau de cada vértice do grafo que o engenheiro construiu?

(A)

Vértice	Grau
T1	4
T2	4
T3	3
T4	3
T5	4

(B)

Vértice	Grau
T1	3
T2	3
T3	3
T4	3
T5	2

(C)

Vértice	Grau
T1	2
T2	2
T3	4
T4	4
T5	2

(D)

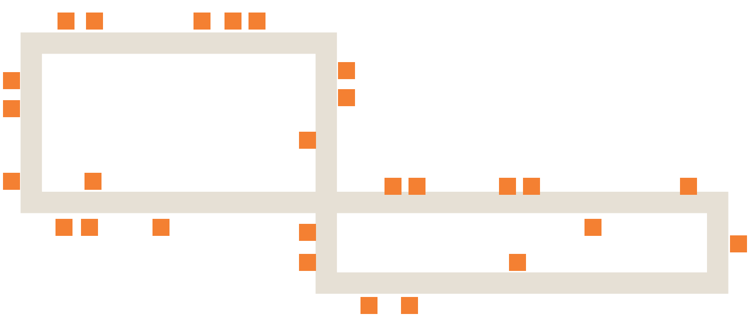
Vértice	Grau
T1	4
T2	3
T3	2
T4	1
T5	2

1.2.2. Eulerizar um grafo

O problema do carteiro chinês

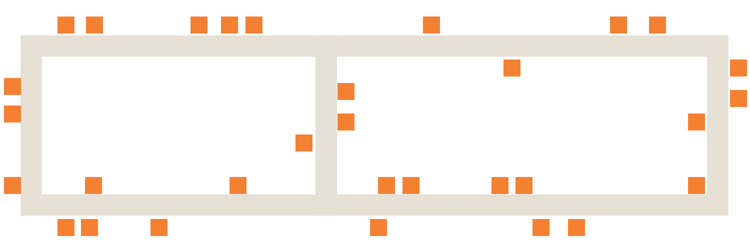
O **problema do carteiro chinês**, formulado em 1962 pelo matemático chinês Meigu Guan, consiste em minimizar o esforço de um carteiro que tem de percorrer todas as ruas de uma vila.

Se existir um circuito de Euler no conjunto de ruas que o carteiro tem de percorrer, então o problema está solucionado. Mas se o grafo de ruas não for euleriano, ou seja, se existirem vértices de grau ímpar, então o carteiro vai ter de repetir algumas ruas. O desafio é encontrar o circuito em que o número de ruas a repetir seja mínimo.



Vila A

No grafo das ruas existe um circuito de Euler. Está encontrado o circuito do carteiro!



Vila B

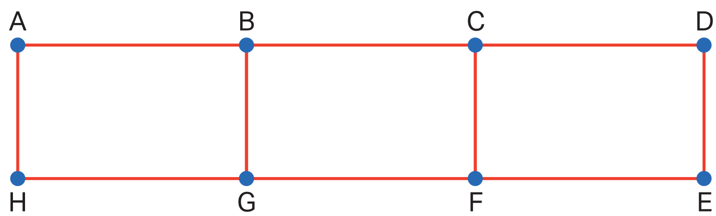
No grafo das ruas da vila B não existe um circuito de Euler. O carteiro vai ter de repetir uma das ruas.

Eulerizar um grafo

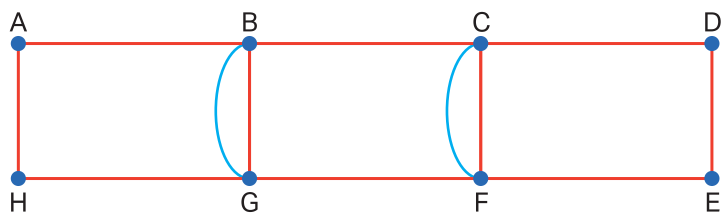
Eulerizar um grafo consiste em acrescentar arestas até se obter um grafo só com vértices de grau par.
Ou seja, acrescentar arestas até se obter um grafo de Euler que admite um circuito euleriano.

Exemplo 17

O grafo abaixo tem oito vértices e não é um grafo de Euler, uma vez que tem quatro vértices de grau ímpar (vértices G, F, B e C).



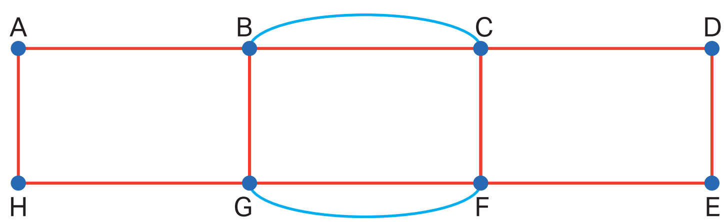
Para eulerizar o grafo, podemos, por exemplo, duplicar as arestas BG e CF.



Exemplo 1 de eulerização do grafo

Este novo grafo é um grafo euleriano (todos os seus vértices têm grau par) e um possível circuito de Euler pode ser $C-D-E-F-G-H-A-B-G-B-C-F-C$.

Outra hipótese para eulerizar o grafo inicial poderá ser duplicar as arestas BC e GF.

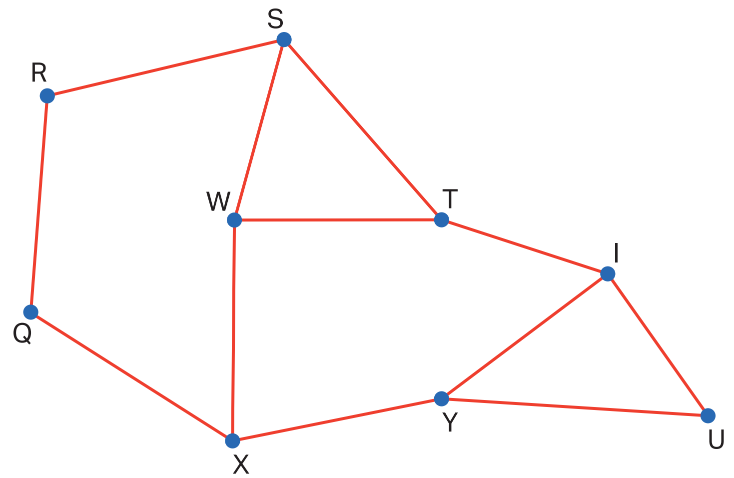


Exemplo 2 de eulerização do grafo

Este outro grafo também é um grafo euleriano e um possível circuito de Euler pode ser $C-D-E-F-G-H-A-B-G-F-C-B-C$.

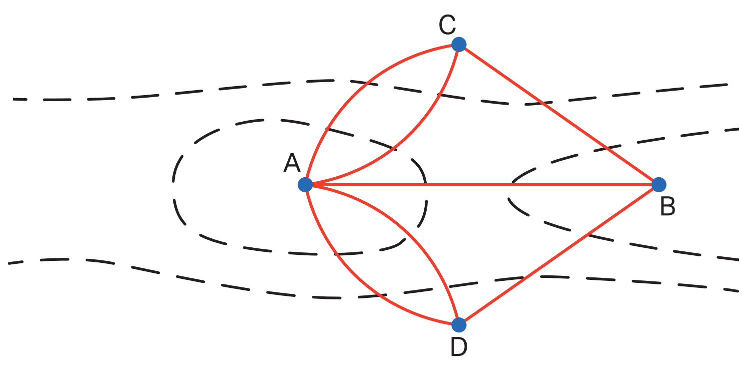
Exercícios

49 O guarda-noturno José António deve fazer, a cada duas horas, uma ronda numa zona residencial. Como é muito preguiçoso, só quer passar uma única vez em cada rua, isto é, não quer voltar a passar numa rua já inspecionada e, de cada vez que passa numa rua, considera vigiados ambos os lados. A zona em que o José António tem de fazer a ronda está representada pelo grafo seguinte.



Ajuda o José António a encontrar um circuito que o satisfaça, sabendo que regressa ao ponto de partida. Caso não seja possível não repetir ruas, explica porquê e define um circuito que repita o menor número de ruas.

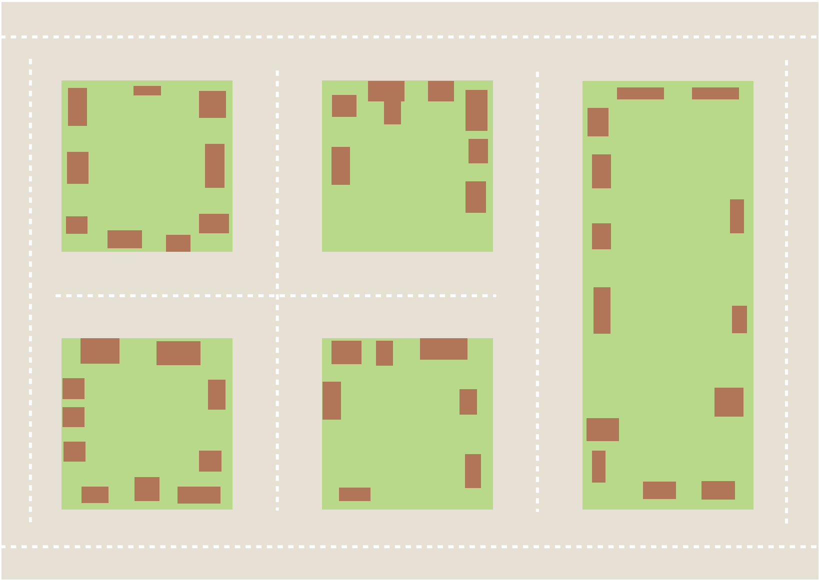
50 Relembra o **problema das pontes de Königsberg** estudado por Euler, que pode ser representado pelo grafo:



50.1. Euler demonstrou que não é possível percorrer toda a cidade e regressar ao ponto de partida atravessando cada ponte uma única vez. Será que é possível acrescentando uma nova ponte? Explica o teu raciocínio.

50.2. Encontra uma possível eulerização do grafo da cidade.

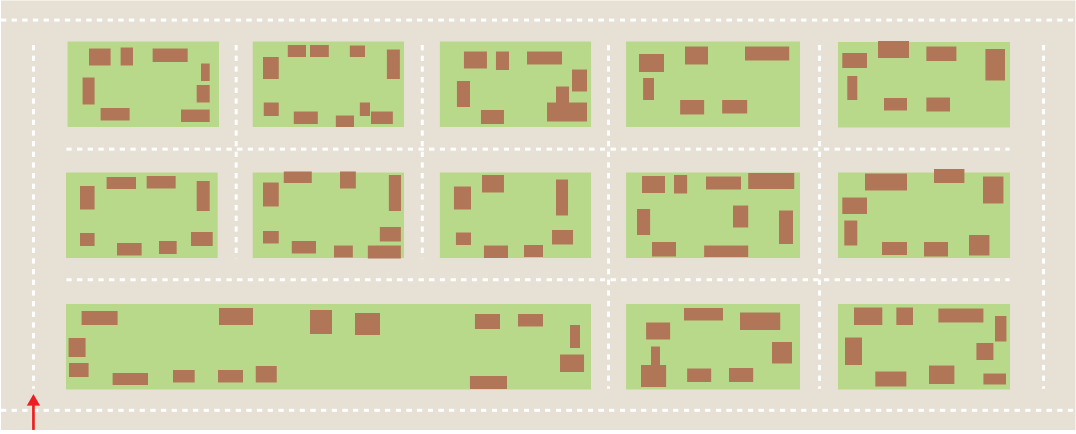
51 **A figura representa o conjunto de ruas nas quais o carteiro Adilson é responsável por entregar a correspondência. Nas ruas em que há casas dos dois lados da rua, o Adilson quer percorrê-las duas vezes, uma de cada lado, para não desperdiçar tempo a atravessar a rua.**



51.1. Representa através de um grafo o conjunto de ruas que o Adilson tem de percorrer, tendo o cuidado de duplicar as arestas nas ruas em que há casas dos dois lados da rua.

51.2. É possível delinear um percurso de forma que o Adilson percorra cada lado de uma rua exatamente uma vez? Identifica o circuito mais curto que o Adilson pode percorrer (iniciando no local assinalado).

52 **Noutra zona da vila, a disposição das ruas é diferente. Consegues ajudar o Adilson a descobrir o circuito mais curto que pode percorrer?**

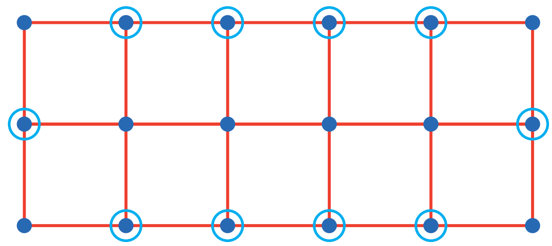


Exemplo 18

Eulerizar grelhas retangulares e não retangulares

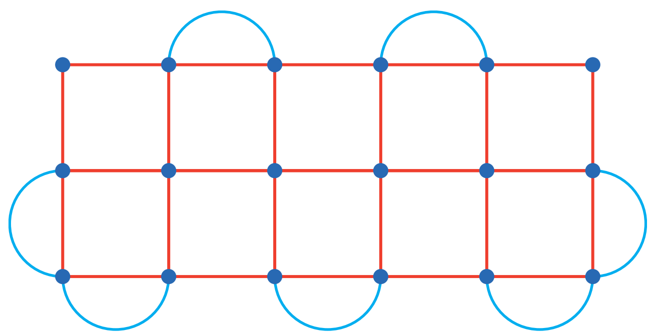
Ao modelar percursos nas ruas de uma vila ou cidade é usual surgirem grafos em forma de grelha.

Num grafo em forma de **grelha retangular**, os vértices no interior têm sempre grau par (têm sempre quatro arestas) e os vértices com grau ímpar estão na periferia.



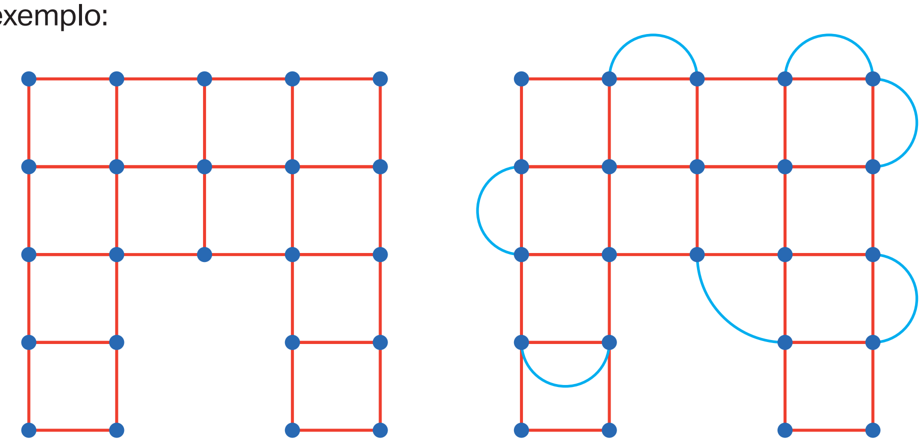
Assim, para eulerizar uma grelha retangular, basta ir percorrendo ao longo da periferia os vértices ímpares, unindo-os dois a dois. Repara que ao unires um vértice ao vértice seguinte, os dois vértices passam a ter grau par.

Por exemplo:



Num grafo em forma de grelha não retangular, o procedimento é idêntico, mas tens de ter um pouco mais de atenção, porque, geralmente, existem mais vértices de grau ímpar.

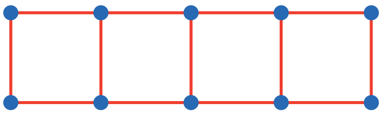
Por exemplo:



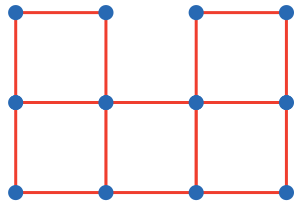
Exercícios

53 Considera os seguintes grafos que representam diferentes zonas residenciais de uma cidade.

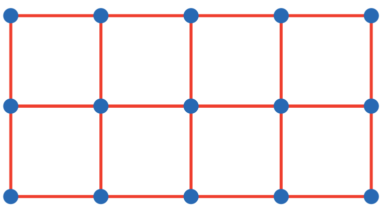
G_1



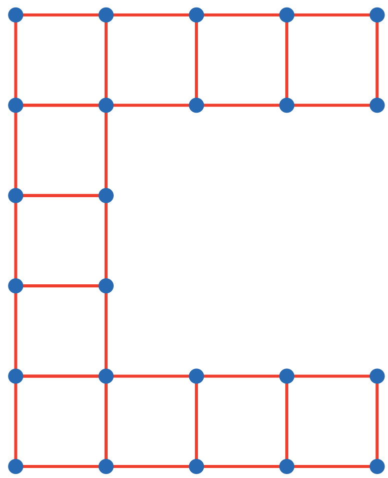
G_2



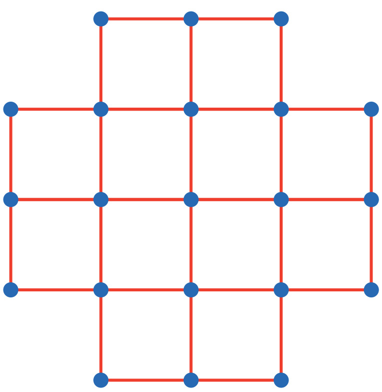
G_3



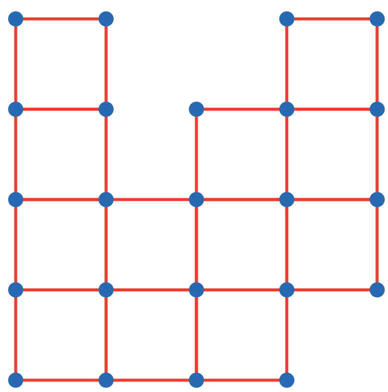
G_4



G_5



G_6



53.1. São grafos de Euler? Justifica a tua resposta.

53.2. Euleriza cada um dos grafos.

54 Os funcionários do Município da Praia têm de limpar as ruas da zona da Cidadela que estão assinaladas a amarelo no mapa abaixo.

54.1. Representa as ruas a limpar através de um grafo e identifica com letras os vértices.

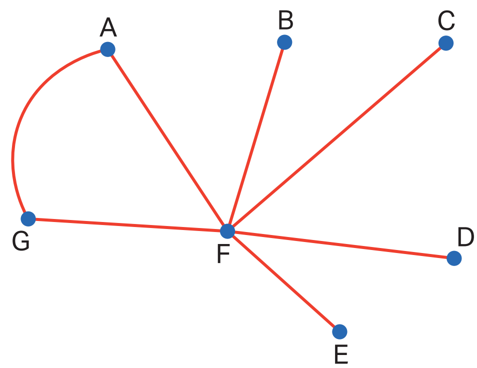
54.2. Qual é a ordem e a dimensão do grafo?

54.3. Consegues identificar um circuito em que o número de ruas percorridas duas vezes seja mínimo? Descreve o teu circuito.

Síntese

Grafos, vértices e arestas

Um **grafo** é uma estrutura constituída por um conjunto de pontos, a que chamamos **vértices,** e um conjunto de **arestas,** que unem pares de pontos.



Ordem e dimensão de um grafo

A **ordem** de um grafo é o número de vértices do grafo.

A **dimensão** de um grafo é o número de arestas do grafo.

Ordem 7

Dimensão 7

Vértices e arestas adjacentes

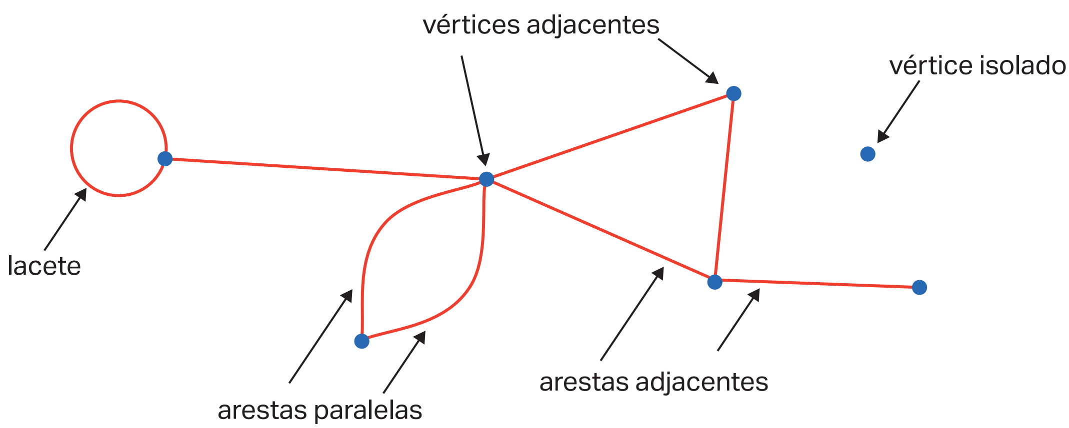
Arestas adjacentes são arestas incidentes no mesmo vértice.

Arestas paralelas são arestas distintas que ligam os mesmos vértices.

Lacete é uma aresta que liga um vértice a ele próprio.

Vértice isolado é um vértice que não tem arestas incidentes.

Vértices adjacentes são vértices que têm pelo menos uma aresta que os liga.



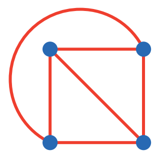
Grafo simples e multigrafo

Um **grafo simples** é um grafo que não tem lacetes nem arestas paralelas. Se tiver algum destes elementos, chama-se **multigrafo**.

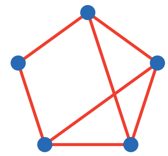
Síntese

Grafo completo

Um **grafo completo** é um grafo simples em que cada um dos vértices é adjacente a todos os outros.



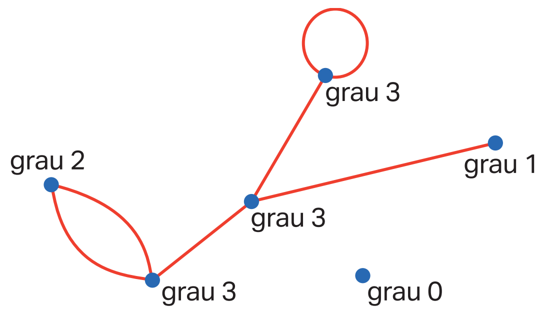
Grafo completo



Grafo não completo

Grau de um vértice

O **grau** de um vértice é o número de arestas que incidem nesse vértice.

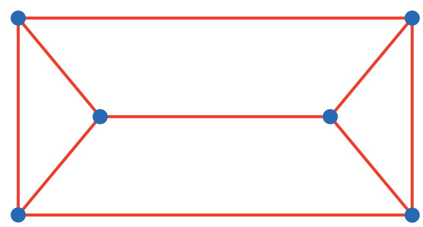


Teorema

Em qualquer grafo a soma dos graus dos seus vértices é igual ao dobro do número das suas arestas.

Grafo regular

Um **grafo regular é um grafo em que todos** os seus vértices têm o mesmo grau.

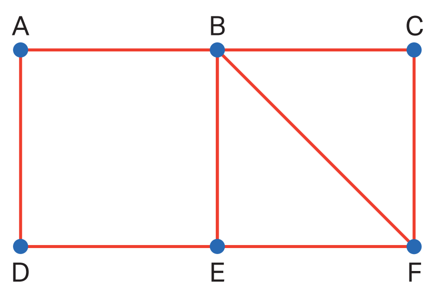


Grafo regular (todos os vértices têm grau 3)

Caminho e circuito

Um **caminho** é uma sequência de vértices em que cada dois vértices consecutivos estão ligados por uma aresta.

Um **circuito** é um caminho que inicia e termina no mesmo vértice.

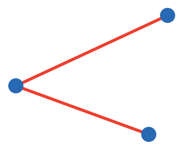


A – B – C – F é um caminho
A – B – E – D – A é um circuito

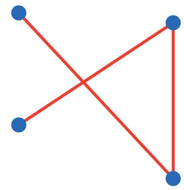
Síntese

Grafo conexo

Um **grafo conexo** é um grafo no qual existe sempre um caminho a unir quaisquer dois dos seus vértices.



Grafo conexo



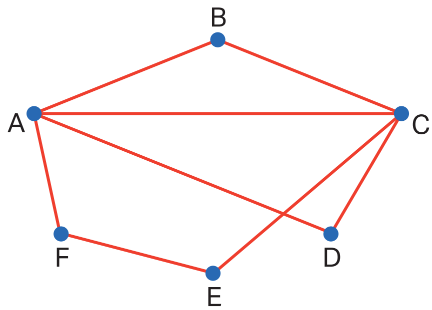
Grafo conexo

Caminho de Euler

Um **caminho de Euler** é um caminho que percorre todas as arestas de um grafo uma única vez.

Circuito de Euler

Um **circuito de Euler** é um caminho de Euler que começa e acaba no mesmo vértice.



A – B – C – D – A – C – E – F – A
é um circuito de Euler

Regras de Euler

Regra 1

Num grafo conexo existe um **caminho de Euler** se e só se existirem no máximo dois vértices de grau ímpar.

Regra 2

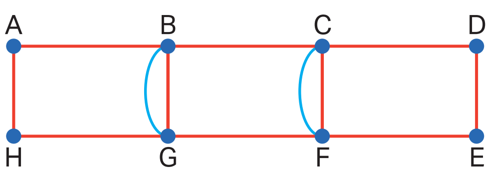
Num grafo conexo existe um **circuito de Euler** se e só se todos os vértices tiverem grau par.

Grafo de Euler

Um **grafo de Euler** ou **grafo euleriano** é um grafo em que existe pelo menos um circuito de Euler.

Eulerizar um grafo

Para **eulerizar um grafo** devemos acrescentar arestas até se obter um grafo só com vértices de grau par.



Para aplicar

1 Na tabela abaixo estão representadas as estradas existentes entre oito aldeias. As aldeias estão identificadas pelas letras A, B, C, D, E, F, G e H e, na tabela, o sinal "✗" significa que existe uma estrada direta entre esse par de aldeias.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		✗	✗		✗		✗	
B			✗		✗			
C				✗	✗		✗	
D						✗	✗	✗
E						✗		
F								✗
G								✗
H								

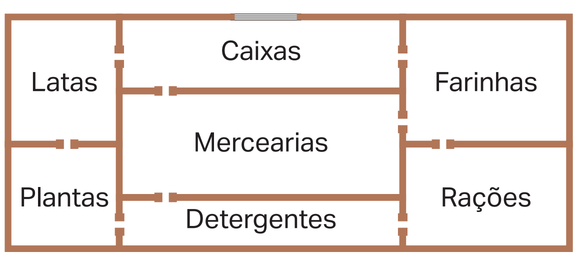
1.1. Representa o conjunto de estradas através de um grafo.

1.2. Existe algum vértice isolado?

1.3. Identifica dois caminhos distintos que permitam ir da aldeia A à aldeia G.

1.4. Identifica um circuito que se inicie na aldeia D e passe pela aldeia H.

2 Na figura abaixo está a planta de uma loja.



2.1. Desenha um grafo que modele as divisões da loja (cada espaço deve ser representado por um só vértice e cada porta corresponde a uma aresta).

2.2. Qual é a ordem e a dimensão do grafo desenhado?

2.3. Numa ida a esta loja, será possível, a partir da zona das caixas, atravessar cada uma das portas apenas uma vez e terminar na divisão das caixas? Justifica a tua resposta.

2.4. Se fosse possível retirar algumas das portas, alterarias a tua resposta à questão anterior?

3 Considera um grafo G, conexo, de ordem 5 e dimensão 9. Constrói esse grafo de modo que:

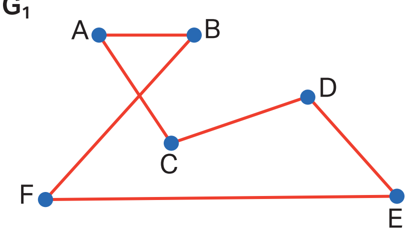
- o grafo tenha um vértice com grau 6, um vértice com grau 3 e um vértice com grau 1;
- um vértice seja adjacente a quatro vértices;
- dois vértices estejam ligados por arestas paralelas, sendo que um tem grau par e outro tem grau ímpar.

4 A turma do Leandro está a organizar um torneio de ouri no qual se inscreveram oito jogadores. No primeiro dia do torneio, todos os jogadores têm de jogar entre si.

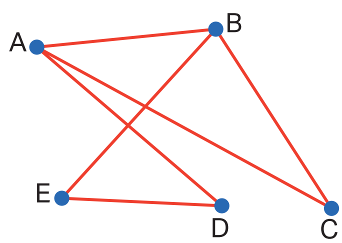
Quantos jogos se vão realizar no primeiro dia?

5 Considera os grafos seguintes e indica os que são grafos de Euler. Explica a tua resposta.

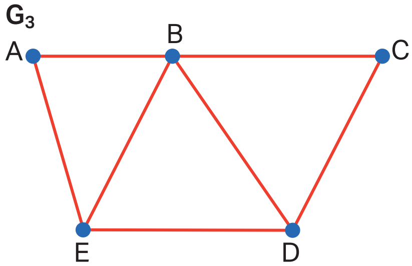
G_1



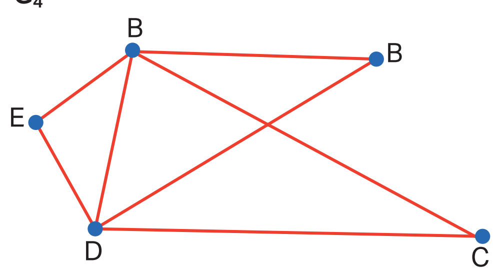
G_2



G_3



G_4



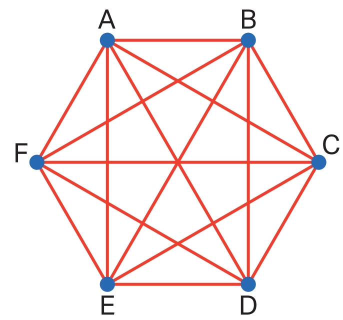
6 Classifica as seguintes afirmações quanto ao seu valor lógico. Justifica a tua resposta.

6.1. Um grafo conexo de ordem 3 e dimensão 4 não é simples.

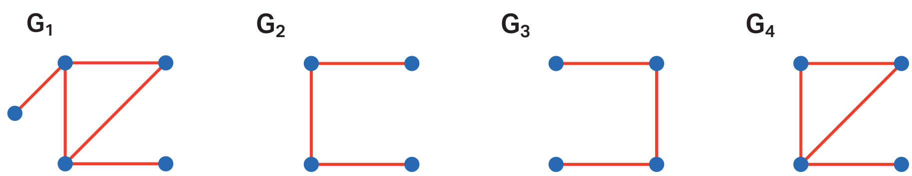
6.2. Um grafo completo de ordem 6 admite circuitos de Euler.

Para aplicar

7 Observa o grafo e retira arestas até obteres um grafo de Euler.



8 Considera os grafos da figura e identifica qual das afirmações não está correta.



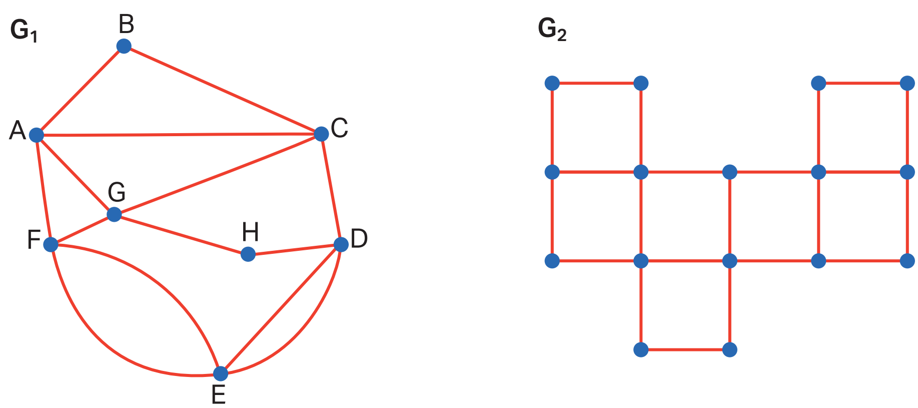
(A) G_2 é um subgrafo de G_1.

(B) G_3 não é um subgrafo de G_1.

(C) G_4 é um subgrafo de G_1.

(D) G_1 tem dimensão 6.

9 Considera os seguintes grafos.



9.1. Qual dos grafos é um grafo de Euler? Explica porquê.

9.2. Identifica um circuito de Euler nesse grafo.

9.3. Euleriza o outro grafo de modo que seja possível identificar um circuito de Euler.

10 **Na figura abaixo é possível observar parte do mapa da cidade da Praia, onde foi construído um grafo que representa algumas das ruas da cidade.**

10.1. Reproduz o grafo identificando cada vértice com uma letra.

10.2. Determina a ordem e a dimensão do grafo.

10.3. Identifica um par de arestas adjacentes.

10.4. Determina o grau de cada vértice.

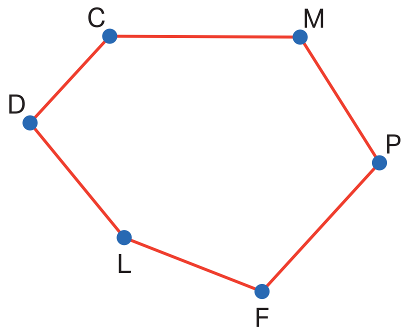
10.5. É possível identificar um circuito de Euler? Caso não seja possível, que arestas podes acrescentar para obteres um circuito de Euler?

1.3. Grafos de Hamilton

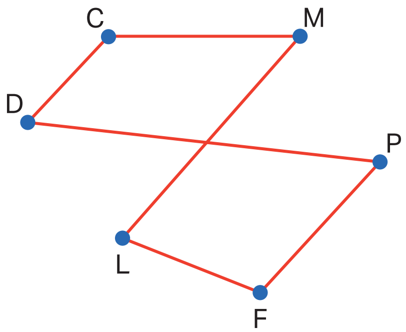
Num determinado dia, a Dona Juceila queria fazer algumas compras. Ela pretendia sair de casa (C) e passar por cada um dos seguintes locais: Mercado (M), Padaria (P), Farmácia (F), Loja de artesanato (L) e Drogaria (D).

A Dona Juceila sabe que, no final, vai regressar a casa exausta, por isso quer passar por cada local apenas uma vez.

A Dona Juceila pode fazer diferentes circuitos, que podemos representar através dos seguintes grafos:



Circuito A: C – M – P – F – L – D – C

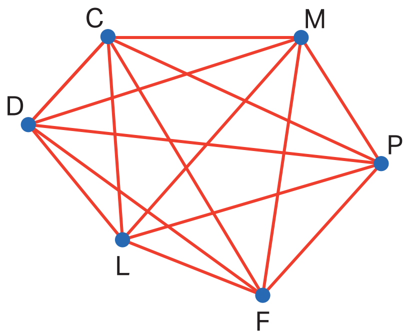


Circuito B: C – D – P – F – L – M – C

Nas condições dadas, qualquer circuito a definir vai ter sempre que:

- passar por todos os vértices do grafo;
- percorrer cada vértice uma única vez;
- partir e regressar ao mesmo vértice (C).

Neste contexto, se considerarmos que todos os locais estão ligados entre si, podemos representar a situação através de um grafo completo, pelo que há inúmeros circuitos possíveis que satisfazem as condições anteriores.



Outros circuitos possíveis:

C – F – P – L – M – D – C

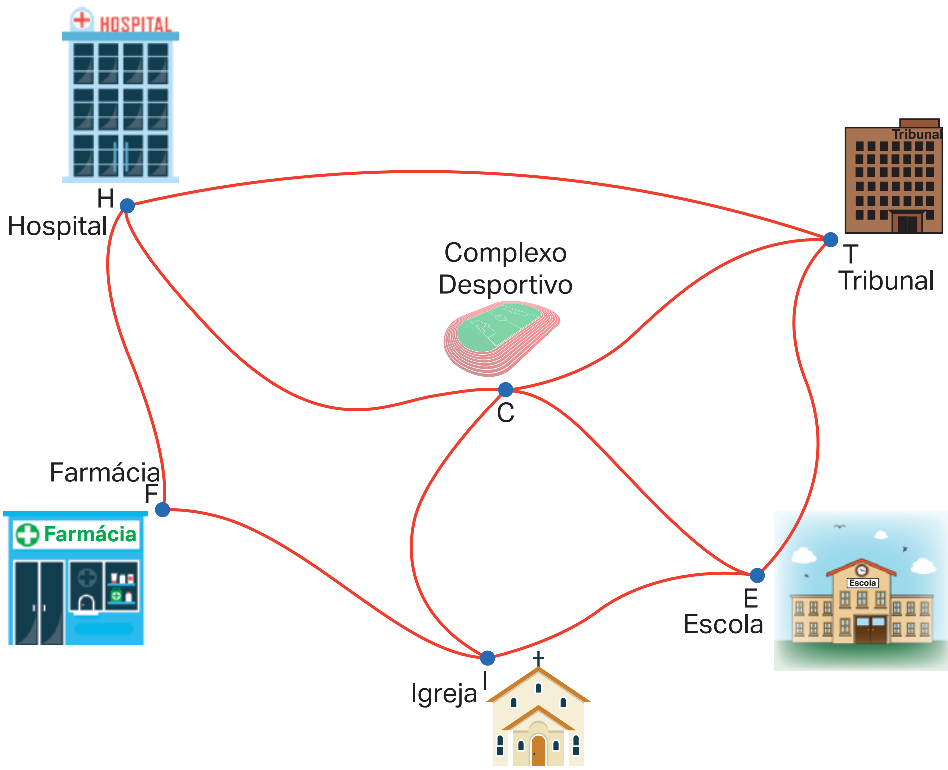
C – L – D – M – P – F – C

...

1.3.1. Circuitos e grafos de Hamilton

Como vimos anteriormente, em muitos problemas do dia a dia é necessário tomar decisões sobre como definir um percurso para visitar um determinado conjunto de locais, regressando, no final do dia, ao ponto de partida.

Nestes casos, o grafo em causa deve permitir o estudo de caminhos que passem por todos os vértices uma única vez e que volte ao ponto de partida (circuito).



Por exemplo, um circuito que permita visitar todos os locais da vila identificados na imagem acima, com início e fim no hospital, é H – T – E – C – I – F – H .

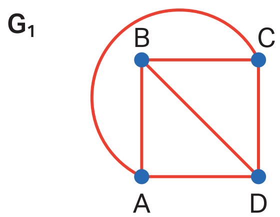
Um **circuito de Hamilton (ou circuito hamiltoniano) é um circuito que percorre todos os vértices do grafo uma única vez.**

Um **grafo de Hamilton (ou grafo hamiltoniano)** é um grafo em que existe, pelo menos, um circuito de Hamilton.

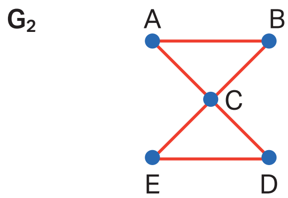
Num grafo de Hamilton existe sempre, pelo menos, um circuito de Hamilton. No entanto, podem existir mais. No contexto anterior, atendendo às arestas do grafo, podemos definir outros circuitos de Hamilton: H – T – C – E – I – F – H (por exemplo).

Exemplo 19

Observa os seguintes grafos:



G_1 é um grafo de Hamilton.
Admite, por exemplo, A-B-C-D-A como um circuito de Hamilton.



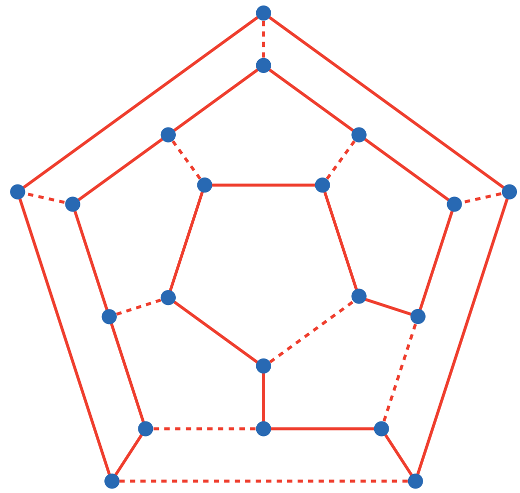
G_2 não é um grafo de Hamilton.
Qualquer circuito que tentemos construir vai passar em C, pelo menos, duas vezes.

Observação

Num circuito de Hamilton não se tem, necessariamente, de percorrer todas as arestas (exemplo no grafo G_1), mas sim todos os vértices.

Grafos e o jogo

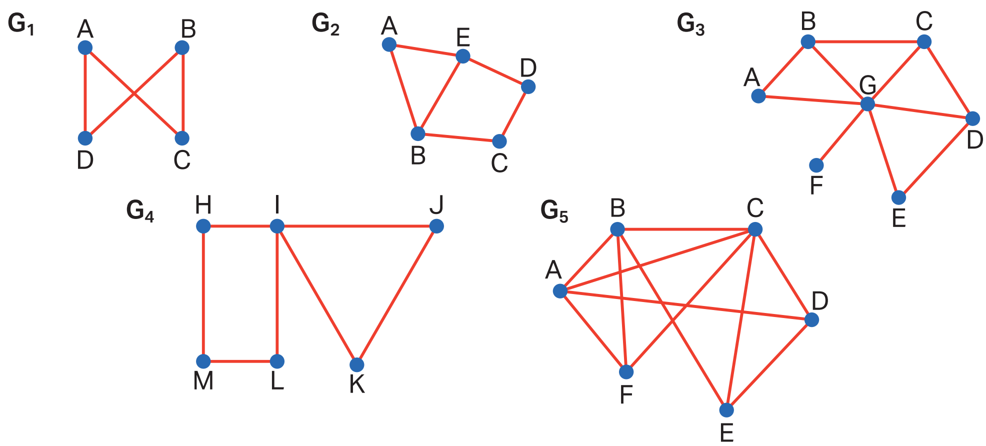
A teoria envolvida nos circuitos de Hamilton foi investigada pelo matemático William Hamilton (1805-1865), nascido na Irlanda.



A teoria surgiu através da criação do **Jogo do Dodecaedro** (poliedro com 12 faces pentagonais).
O jogo começa por atribuir a cada um dos 20 vértices do dodecaedro o nome de uma cidade. O objetivo do jogo consiste em encontrar um percurso sobre o dodecaedro que, partindo de uma das cidades (vértice) e percorrendo as restantes 19 cidades uma única vez, voltasse ao ponto de partida.

Exercício

55 **Identifica quais dos seguintes são grafos de Hamilton. Para cada grafo de Hamilton, identifica, pelo menos, um circuito de Hamilton.**



Para analisar se um grafo admite circuitos de Hamilton há duas estratégias que nos podemos apoiar:

Teorema de Ore

Num grafo G simples, conexo e com ordem n superior a 3, se a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes é maior ou igual à ordem n, então G é um grafo de Hamilton.

Por exemplo, no grafo G_5 (ordem 6), se estudarmos os vértices de menor grau (D) e os seus vértices não adjacentes, verificamos que satisfazem o teorema:

$$\text{Grau D} + \text{Grau B} = 3 + 4 = 7 \;\; | \;\; \text{Grau D} + \text{Grau F} = 3 + 3 = 6$$

Neste caso, bastaria perceber que todos os vértices têm grau 3, 4 ou 5, pelo que a soma de qualquer par é sempre superior ou igual a 6.

Logo, G_5 é um grafo de Hamilton.

Teorema de Dirac

Num grafo G simples, conexo e com ordem superior a 3, se o grau de cada vértice é maior ou igual à metade da ordem do grafo, então G é um grafo de Hamilton.

Por exemplo, em G_1 qualquer vértice tem grau 2, sendo maior ou igual à metade da ordem do grafo (ordem 4).

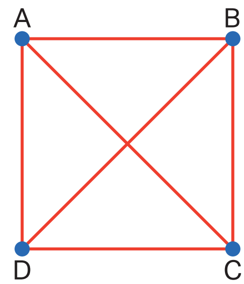
Observação

O facto de um grafo não verificar as condições dos teoremas não nos permite afirmar que não é de Hamilton. Por exemplo, G_2 não verifica as condições dos teoremas, mas admite circuitos de Hamilton.

Circuitos de Hamilton em grafos completos

Exercício

56 Observa o grafo de Hamilton ao lado.



56.1. Quantos circuitos de Hamilton consegues identificar com início em A?

56.2. E em B?

56.3. E em C?

56.4. E em D?

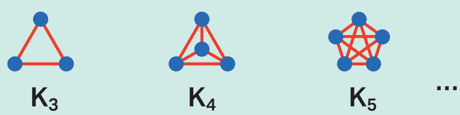
56.5. O que podes concluir sobre o número de circuitos possíveis de definir com início em cada vértice?

56.6. O grafo apenas admite seis circuitos de Hamilton distintos, sem atender ao vértice onde iniciam. Indica-os.

Nota: Sem atender ao vértice onde o circuito inicia, os circuitos $A-B-C-A$ e $B-C-A-B$ são o mesmo percurso sobre as arestas.

Tarefa

3 **Considera a seguinte sequência de grafos simples e completos, com três ou mais vértices.**



3.1. Determina o número de circuitos de Hamilton, sem atender ao vértice em que iniciam, que é possível encontrar no grafo K_3.

3.2. Repete a alínea anterior para o K_4.

3.3. Mostra que existem 24 circuitos de Hamilton, sem atender ao vértice inicial, no grafo K_5 e 120 no K_6.

3.4. O número de circuitos de Hamilton, sem atender ao vértice inicial, que é possível encontrar num grafo completo de ordem n (K_n) é dado pela expressão:

$$(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$$

Justifica no contexto da tarefa a expressão apresentada.

3.5. Qual é o número de circuitos de Hamilton que é possível definir no K_{10}?

O problema do caixeiro viajante

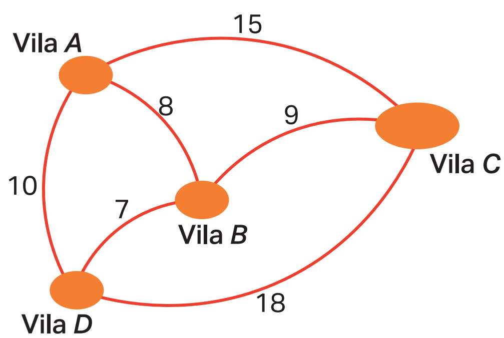
A procura de circuitos de Hamilton pode ainda ser mais relevante num contexto real, quando consideramos a distância entre os locais (peso das arestas). Por exemplo, no problema da D. Juceila, apresentado no início desta secção, em que se pretende sair de casa e fazer um percurso que passe pelo mercado, padaria, farmácia, loja de artesanato e drogaria, fazia sentido determinar qual seria o circuito mais curto.

O **problema do caixeiro viajante** é um problema de otimização clássico na teoria de grafos e consiste em determinar o menor percurso possível para percorrer um determinado número de locais, sem os repetir, regressando no final ao ponto de partida (**circuito de Hamiton de peso mínimo**).

Imagina a seguinte situação:

O Sr. Adilson vende produtos hoteleiros e quer, no mesmo dia, sair de casa na vila A e visitar os estabelecimentos de três vilas diferentes (B, C e D), não importando a ordem pela qual visita cada uma, e regressando no fim a casa. Qual é o circuito que deve escolher para percorrer a menor distância possível?

No grafo ao lado estão representadas as estradas que existem entre as várias vilas e o comprimento, em quilómetros, de cada uma dessas estradas (peso das arestas).



Há várias estratégias que podemos usar para resolver este problema. Por exemplo, podemos identificar todos os circuitos de Hamilton com início em A e calcular qual a distância percorrida em cada um deles:

$A-B-C-D-A$
$8+9+18+10=45$ km

$A-B-D-C-A$
$8+7+18+15=48$ km

$A-C-B-D-A$
$15+9+7+10=41$ km

$A-C-D-B-A$
$15+18+7+8=48$ km

$A-D-B-C-A$
$10+7+9+15=41$ km

$A-D-C-B-A$
$10+18+9+8=45$ km

Há dois circuitos de Hamilton que permitem percorrer uma distância mínima de 41 km:

$$A-C-B-D-A \text{ e } A-D-B-C-A$$

Repara que, em ambos, são percorridas as mesmas estradas, mas em ordem inversa. Caso o início seja noutro vértice, basta reescrever os circuitos com início nesse vértice.

Observação
Este é o método/algoritmo ideal para descobrir a solução ótima para o problema do caixeiro viajante, uma vez que estuda o comprimento de todos os circuitos possíveis, permitindo determinar o **circuito de Hamilton de peso mínimo**.

Exercícios

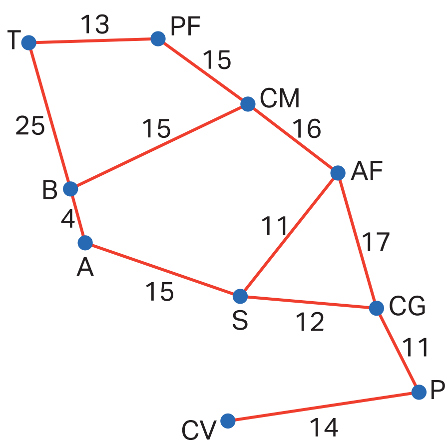
57 **O Arlindo é motorista numa empresa de entregas e, num determinado dia, tem de distribuir pacotes em três aldeias distintas. Na tabela seguinte, estão representadas as distâncias, em quilómetros, das estradas que ligam os vários locais: o ponto de saída do armazém (A) e as três aldeias a visitar (B), (C) e (D).**

57.1. Constrói um grafo com os dados da tabela.

	A	B	C	D
A		17	11	12
B			15	13
C				10
D				

57.2. Sabendo que o Arlindo parte do armazém, e que quer regressar ao mesmo, qual o circuito que lhe permite poupar combustível, percorrendo o menor número de quilómetros possível?

58 **O Lucas vai visitar, pela primeira vez, a ilha de Santiago e vai ficar hospedado, durante um fim de semana, em casa da prima, que mora em Curral Grande. Para organizar a sua viagem, construiu um grafo onde representou os locais que gostaria de visitar e as distâncias, em quilómetros, das estradas que os ligam.**



Legenda:
T - Tarrafal
B - Boa Entrada
A - Assomada
S - Sacramento
CG - Curral Grande
P - Praia
AF - Achada Fazenda
CM - Calheta de São Miguel
PF - Porto Formoso
CV - Cidade Velha

58.1. Qual é a ordem e a dimensão do grafo do Lucas?

58.2. O grafo é um grafo de Hamilton? Justifica a tua resposta.

58.3. No primeiro dia, o Lucas vai visitar a Praia e a Cidade Velha. No segundo dia, vai visitar os restantes locais, regressando a casa da prima. Consegues ajudar o Lucas a descobrir o circuito que permite otimizar as visitas do segundo dia? Apresenta a tua proposta.

1.3.2. Algoritmos

Algoritmo da cidade mais próxima

Imagina que és um carteiro e que tens de entregar encomendas em cinco cidades. Tens de passar uma única vez em todas as cidades e, no final, regressar ao ponto inicial.

Como podes escolher o percurso mais curto?

O método anterior, de testar todos os circuitos possíveis, seria viável mas tornaria o estudo bastante moroso.

Existem outras estratégias que podem facilitar a procura do circuito hamiltoniano de peso mínimo.

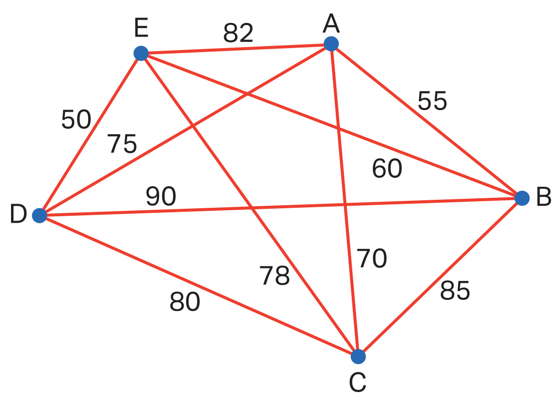
A ideia do **algoritmo da cidade mais próxima** é:

- Escolhes uma cidade para começar.
- Olhas à volta e pensas: **"Qual é a cidade mais próxima?"**.
- Vais até essa cidade e repetes o processo: **"E agora, qual é a cidade mais próxima e que ainda não foi visitada?"**.
- Continuas este processo até visitares todas as cidades.
- No final, regressas à cidade de origem.

Depois, podes repetir o processo iniciando noutros vértices, para perceberes se há circuitos ainda mais curtos.

Vamos experimentar!

Considera que o carteiro tem de percorrer as cinco cidades, A, B, C, D e E, representadas no grafo ao lado, onde estão também indicados os comprimentos, em quilómetros, das estradas que ligam estas cidades.



Podes, por exemplo, iniciar na cidade A e aplicar o algoritmo.

A cidade mais próxima de A é a B e, por isso, irias percorrer a aresta AB, decidindo sucessivamente ir para a cidade mais próxima.

Início em **A**: AB BE ED DC CA

$55 + 60 + 50 + 80 + 70 = 315$

Se realizasses este circuito, irias percorrer 315 km.

Mas, como nada é dito sobre a cidade inicial, deves também testar o início noutras cidades. Aplicando o algoritmo a iniciar nas outras cidades, obténs:

Início em **B**: BA AC CE ED DB

$55 + 70 + 78 + 50 + 90 = 343$

Se realizasses este circuito, irias percorrer 343 km.

Início em **C**: CA AB BE ED DC

$70 + 55 + 60 + 50 + 80 = 315$

Se realizasses este circuito, irias percorrer 315 km.

Início em **D**: DE EB BA AC CD

$50 + 60 + 55 + 70 + 80 = 315$

Se realizasses este circuito, irias percorrer 315 km.

Início em **E**: ED DA AB BC CE

$50 + 75 + 55 + 85 + 78 = 343$

Se realizasses este circuito, irias percorrer 343 km.

Assim, encontraste três circuitos de Hamilton em que a distância a percorrer é mínima, num total de 315 km, podendo iniciar um circuito na cidade A, C ou D.

Os três circuitos percorrem as mesmas arestas: os dois primeiros apenas diferem no local onde iniciam e o último difere, ainda, no sentido em que são percorridas as arestas (sentido contrário).

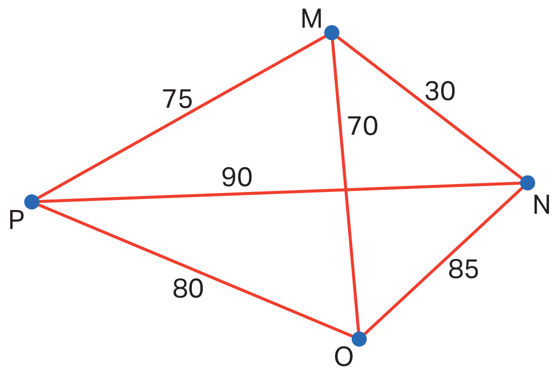
Observação

Este algoritmo permite encontrar circuitos de Hamilton com comprimentos mínimos e é usado em muitos problemas de otimização do dia a dia. Embora nem sempre seja possível garantir que foi encontrada a situação ótima, este algoritmo é bastante simples e rápido de utilizar.

Exercício

59 **O João pretende percorrer as cidades M, N, O e P do grafo ao lado, em que as distâncias entre as cidades estão representadas em quilómetros.**

Utiliza o algoritmo da cidade mais próxima para encontrar um circuito com um comprimento mínimo.



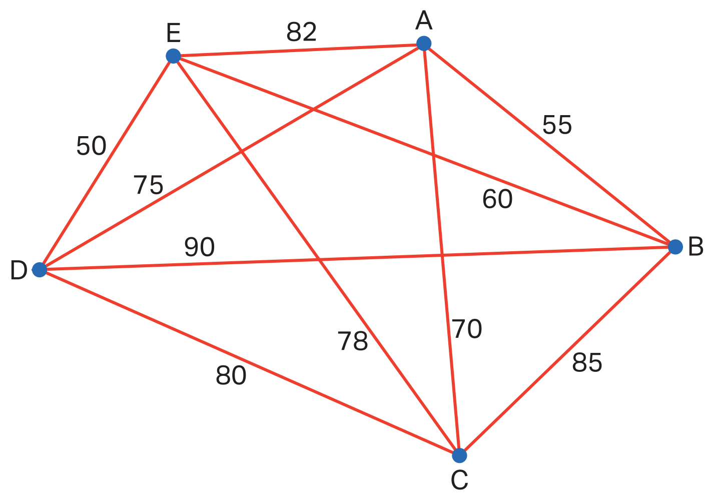
Algoritmo do peso das arestas

O algoritmo do peso das arestas é outro algoritmo que podes usar em problemas de otimização deste tipo.

A ideia do **algoritmo do peso das arestas** é:

- ordenar as arestas por ordem crescente dos seus pesos;
- escolher, sucessivamente, as arestas com o peso mais baixo, tendo em conta que:
  - não podes escolher três arestas incidentes no mesmo vértice;
  - não podes fechar um circuito antes de teres percorrido todos os vértices do grafo.

Relembra a situação anterior, em que um carteiro precisa de percorrer as cinco cidades, A, B, C, D e E, e o objetivo é tentar encontrar um circuito em que o número de quilómetros a percorrer seja mínimo.



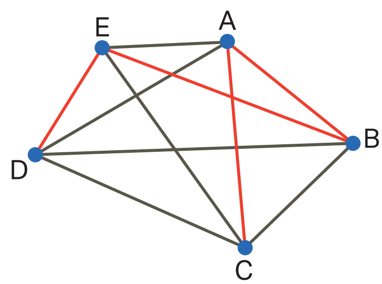
O primeiro passo é ordenar as arestas do grafo por ordem crescente dos seus pesos.

$DE: 50 \quad AB: 55 \quad BE: 60 \quad AC: 70 \quad AD: 75$

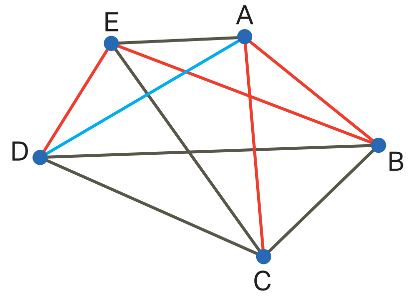
$CE: 78 \quad CD: 80 \quad AE: 82 \quad BC: 85 \quad BD: 90$

O segundo passo é escolheres arestas por ordem crescente do seu peso.

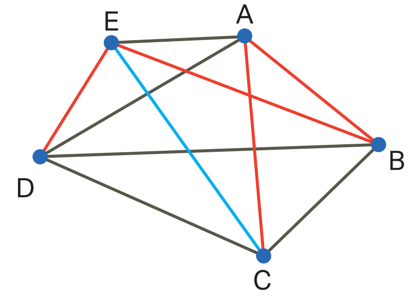
Podes começar por escolher as arestas DE, AB, BE e AC, porque todas satisfazem as condições exigidas (não há três arestas que incidam no mesmo vértice e não fecham um circuito).



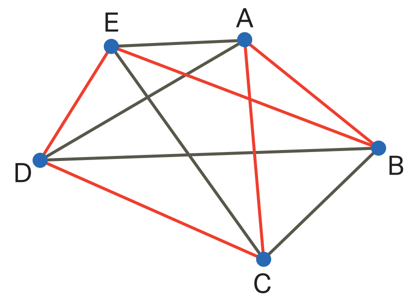
A próxima aresta com menor peso é a aresta AD, mas não a podes escolher porque o vértice A ficaria com três arestas.



A aresta CE também não pode ser escolhida, pelas mesmas razões ou, noutra perspetiva, fecharia um circuito, o $C-E-B-A-C$, sem envolver todos os vértices.



A próxima aresta com menor peso é a aresta CD e juntando esta aresta consegues fechar um circuito que passa por todos os vértices do grafo.



Encontraste o circuito de Hamilton $D-E-B-A-C-D$ com o comprimento de 315 km $(50+60+55+70+80)$.

Observação

- Em alguns grafos, o algoritmo da cidade mais próxima e o algoritmo do peso das arestas podem conduzir a soluções de otimização distintas.
- Estes algoritmos, embora sejam muito eficientes, nem sempre (depende do grafo) conduzem à solução ótima.

Exercícios

60 Os pais do Manuel têm uma padaria e pediram-lhe ajuda nas entregas ao domicílio. Na tabela seguinte, estão representadas as distâncias, em metros, das ruas que interligam a padaria (P) e as casas dos clientes (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
P	120	–	300	–	–	–	–	–	–	285
A	–	150	–	–	–	–	–	–	–	–
B	–	–	–	50	305	–	–	–	–	–
C	–	–	–	95	–	–	10	–	–	–
D	–	–	–	–	115	–	–	–	–	–
E	–	–	–	–	–	62	90	120	–	–
F	–	–	–	–	–	–	55	–	590	–
G	–	–	–	–	–	–	–	117	–	–
H	–	–	–	–	–	–	–	–	45	120
I	–	–	–	–	–	–	–	–	–	130

60.1. Constrói um grafo com os dados da tabela.

60.2. O Manuel decidiu fazer um circuito, utilizando o seguinte método:

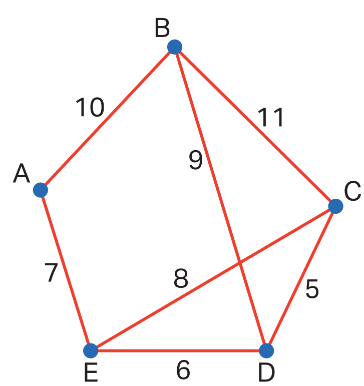
- começar em P;
- de seguida, escolher a casa mais próxima, tendo em conta que, se houver duas casas à mesma distância, a seleção é aleatória;
- proceder como referido no ponto anterior, não repetindo qualquer casa;
- só terminar o circuito depois de passar por todas as casas.

Apresenta o grafo que resulta da aplicação do método descrito, bem como a distância que o Manuel percorreu.

61 O Sr. Tavares é distribuidor de uma empresa de bolachas e, num dado dia, quer visitar três clientes que têm os seus estabelecimentos em vilas vizinhas.

No grafo, o vértice B representa a sede da empresa do Sr. Tavares e os vértices A, C, D e E os locais dos estabelecimentos dos seus clientes. As arestas representam as estradas que existem entre estes locais.

Qual é o mínimo de quilómetros que o Sr. Tavares tem de percorrer para sair da sede, visitar os três clientes e, no final, regressar à sede?



62 No verão passado, os pais da Maira fizeram um cruzeiro com o itinerário seguinte:

Dia 1 – Atenas (A) Dia 2 – Istambul (I) Dia 3 – Volos (V) Dia 4 – Mykonos (M)

Dia 5 – Rodes (R) Dia 6 – Santorini (S) Dia 7 – Atenas (A)

A Maira, depois de ver as fotos, quer visitar os mesmos locais e, para a viagem ficar mais económica, vai viajar em transportes públicos e marítimos. Durante as suas pesquisas na internet, registou numa tabela a duração das viagens entre os vários locais a visitar.

	A	I	M	R	S	V
A	–	17h20	2h50	15h50	9h30	4h40
I	17h20	–	26h00	15h30	28h20	14h50
M	2h50	26h00	–	10h30	2h30	6h10
R	15h50	15h30	10h30	–	2h40	7h00
S	9h30	28h20	2h30	2h40	–	6h20
V	4h40	14h50	6h10	7h00	6h20	–

62.1. Representa a situação através de um grafo.

62.2. Ajuda a Maira a definir um circuito que lhe permita despender o menor tempo possível em deslocações, sabendo que ela vai ter de iniciar e terminar a viagem em Atenas.

63 Na ilha de Santiago, considera que há cinco pontos de recolha de resíduos sólidos especiais: Tarrafal (T), Praia (P), Santa Cruz (S), São Domingos (SD) e Santa Catarina (SC). Observa as distâncias entre cada um dos pontos de recolha.

	T	P	S	SD	SC
T	–	71	40	51	32
P	–	–	56	21	46
S	–	–	–	23	23
SD	–	–	–	–	25
SC	–	–	–	–	–

O Sr. Marcelo é o responsável pela recolha semanal dos resíduos nestes cinco pontos e realiza sempre um percurso fixo de recolha dos resíduos, iniciando e terminando na Praia, passando por todos os restantes locais.

63.1. Desenha um grafo que traduza a informação.

63.2. Qual é a distância mínima que irá percorrer o Sr. Marcelo ao fim de 10 semanas?

63.3. Se acrescentarmos um novo local X de recolha de resíduos aos restantes seis pontos, em que a única informação que se tem é que se encontra mais próximo do Tarrafal do que dos restantes pontos de recolha, qual é o circuito mínimo que o Sr. Marcelo deve usar para fazer a recolha semanal?

63.4. Num determinado dia, o Sr. Marcelo encontra-se no Tarrafal e vai fazer a recolha partindo daí e terminando na Praia, recolhendo os resíduos em todos os restantes locais. Indica uma possibilidade para o fazer.

1.4. Árvores. Caminho crítico

1.4.1. Árvores

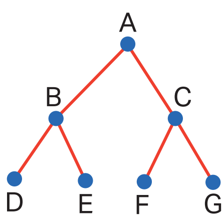
O Sr. Adilson tem cinco computadores e pretende instalar cabos de rede, para que todos estejam conectados entre si e com acesso à internet.

De modo a poupar nos recursos e no tempo de execução, pretende que o cabo de rede necessário para conectar os cinco computadores seja mínimo.

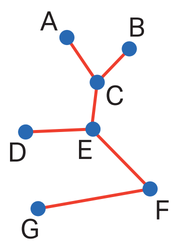
Se pensarmos num grafo, o foco continua a estar nos vértices (computadores), em que todos têm de estar conectados (grafo conexo), mas com o menor número de ligações possível (arestas).

Qual é o número mínimo de arestas a definir que permita dar resposta a este problema?

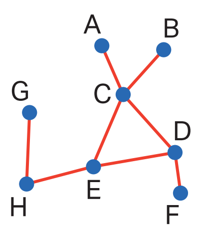
Uma **árvore** é um grafo conexo em que não há circuitos.



Árvore



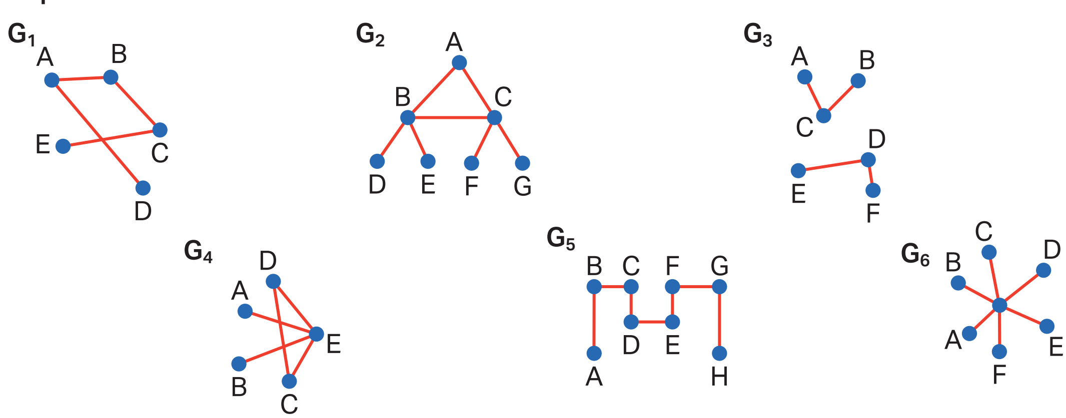
Árvore



Não é árvore
O grafo tem um circuito C-D-E-C.

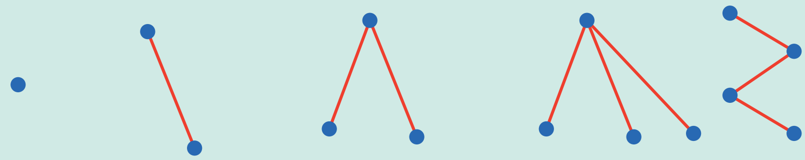
Exercício

64 **De entre os grafos seguintes identifica os que não são árvores. Justifica a tua resposta.**



Tarefa

4 Quantas arestas tem uma árvore com n vértices?



1 vértice 2 vértices 3 vértices 4 vértices

Constrói alguns exemplos de árvores, com cinco ou mais vértices, e discute com os teus colegas a resposta à questão e o modo como podem justificar a vossa conjetura.

Propriedades das árvores

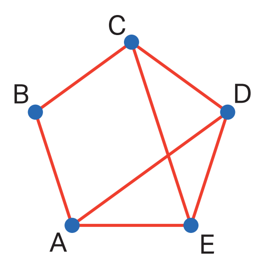
1. Um grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é uma árvore.
2. Numa árvore cada aresta é uma ponte. De forma recíproca, se todas as arestas de um grafo são pontes, então o grafo é uma árvore.

Nota: Ponte é uma aresta *de um grafo conexo que ao ser removida o torna desconexo.*

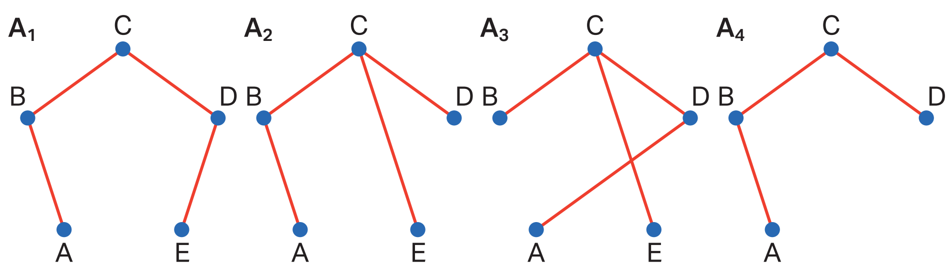
Uma **árvore abrangente** de um grafo é um subgrafo que é uma árvore e que contém todos os vértices do grafo.

Exemplo 20

Considera o grafo G.

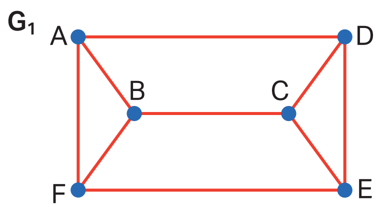


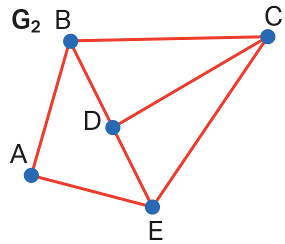
Todos os subgrafos A_1, A_2, A_3 e A_4 são árvores, mas apenas A_1, A_2 e A_3 são árvores abrangentes de G, uma vez que A_4 não contém o vértice E.



Exercício

65 Considera os seguintes grafos:

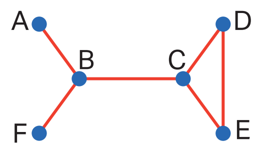




65.1. Identifica três árvores abrangentes distintas para cada um dos grafos.

65.2. Desenha um subgrafo de G_2 de ordem 4 e que seja uma árvore.

65.3. Considera o subgrafo de G_1 ao lado.
Indica, justificando, se se trata de uma árvore abrangente de G_1.



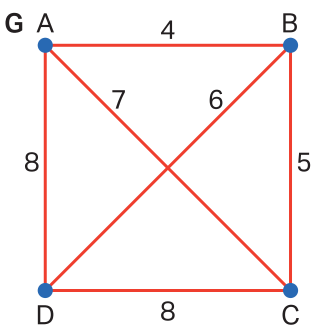
Observação
As árvores são grafos úteis em situações em que apenas importa garantir que se abrange todos os vértices. São usadas, por exemplo, na planificação de distribuições de fios de eletricidade, de rede de internet ou de tubos para distribuição de água.

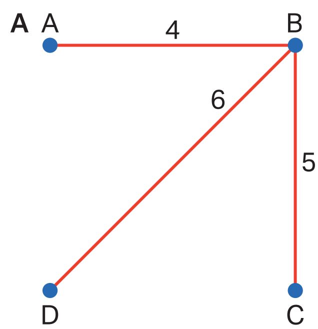
Árvore abrangente mínima

Uma **árvore abrangente mínima** é uma árvore abrangente para a qual é mínima a soma dos pesos das arestas.

Exemplo 21

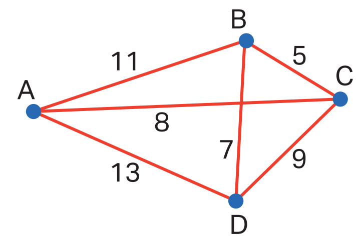
Dado o grafo G, o subgrafo A é uma árvore abrangente mínima de G.





Exercício

66 Identifica a árvore abrangente mínima do grafo ao lado. Qual é a soma dos pesos das suas arestas?



Algoritmo de Kruskal

No problema inicial dos computadores, o Sr. Adilson pretendia poupar nos recursos e no tempo de execução, pelo que o cabo de rede necessário para conectar os cinco computadores deveria ser mínimo, ou seja, era necessário definir a árvore abrangente mínima.

Este é um tipo de problema bastante comum, pelo que é importante termos uma estratégia para determinar a árvore abrangente que tem um custo mínimo – algoritmo de Kruskal.

A ideia do **algoritmo de Kruskal** é:

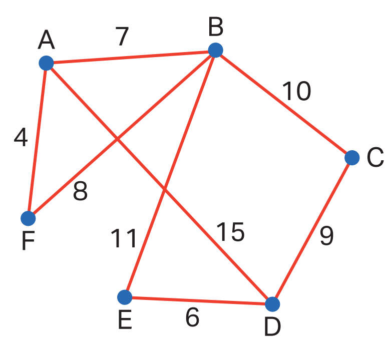
Dado um grafo G conexo:

Passo 1: Ordenar as arestas por ordem crescente do seu peso.

Passo 2: Escolher sucessivamente as arestas com o menor peso, tendo em conta que não se pode escolher arestas que fechem um circuito até estarem ligados todos os vértices do grafo.

Exemplo 22

O Nilton pretende substituir a rede de eletricidade da sua garagem. No grafo seguinte estão representados os pontos de luz e tomadas existentes e as distâncias, em metros, das canelagens que unem estes pontos existentes dentro das paredes.



A - lâmpada
B - tomada
C - tomada
D - lâmpada
E - tomada
F - tomada

Como quer poupar na compra de fio elétrico vai apenas substituir algumas ligações e necessita de descobrir quais as que lhe permitem minimizar a quantidade de fio a utilizar.

Procurar esta estrutura de ligações é equivalente a encontrar a árvore abrangente mínima do grafo da rede existente e, para isso, vamos usar o algoritmo de Kruskal.

Passo 1

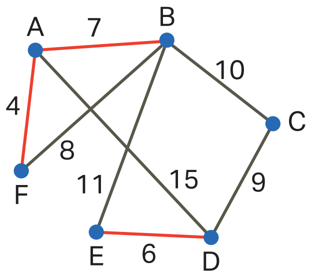
Ao ordenar as arestas por ordem crescente de peso, o Nilton obteve:

AF : 4   ED : 6   AB : 7   BF : 8   CD : 9   BC : 10   BE : 11   AD : 15

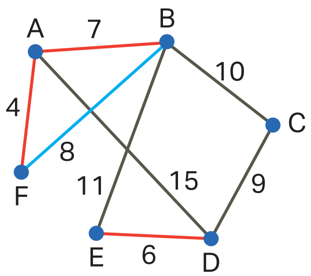
Passo 2

Depois começou a selecionar e a juntar arestas.

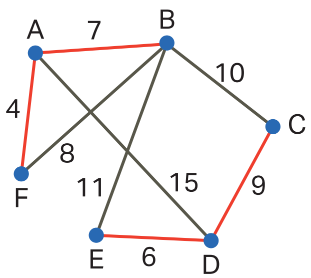
Primeiro, escolheu as arestas AF , ED e AB .



A aresta seguinte com menor peso seria a aresta BF , mas esta iria fechar um circuito sem terem sido percorridos todos os vértices, por isso não pode ser escolhida.

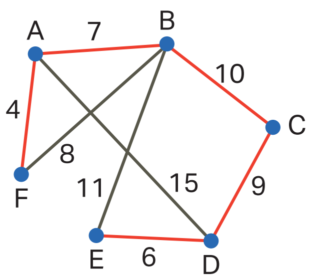


O Nilton escolheu, então, a aresta CD .



De seguida, o Nilton escolheu a aresta BC e verificou que com esta ligação já tinha percorrido todos os pontos de luz.

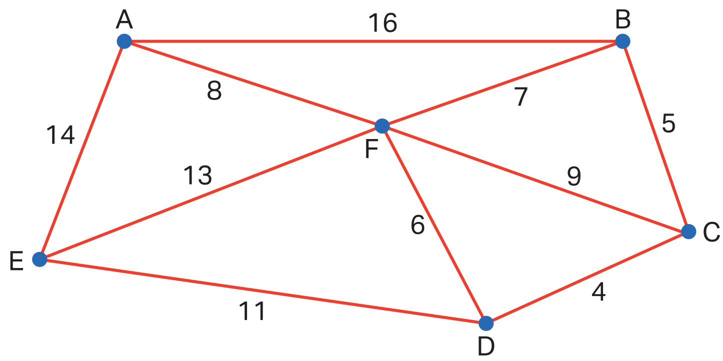
Encontrou a árvore abrangente mínima da sua rede elétrica! Bastaria substituir os fios destas ligações!



Exercícios

67 Depois da garagem, o Nilton decidiu também substituir a rede de eletricidade da arrecadação.

Observa o grafo que representa as ligações existentes na arrecadação.



Determina quais as ligações que o Nilton decidiu substituir para manter a rede elétrica em funcionamento, poupando na quantidade de fio a usar (árvore abrangente mínima).

68 Relembra a situação da escola, na qual existem sete computadores com algumas ligações entre si. Pretende-se instalar um novo circuito de rede, garantindo que todos os computadores são servidos por esta nova rede e utilizando os suportes de cabelagem já existentes.

Na tabela seguinte, estão representados os sete computadores e as distâncias, em metros, dos suportes de cabelagem existentes.

	A	B	C	D	E	F	G
A		9	–	–	–	3	5
B			8	–	8	11	–
C				3	5	–	–
D					6	11	–
E						9	–
F							6
G							

68.1. Representa a situação através de um grafo.

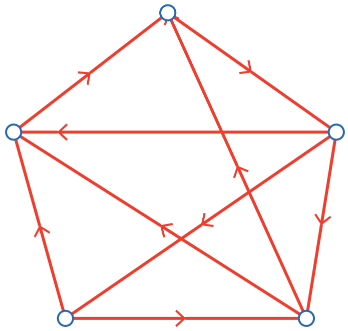
68.2. Determina a árvore abrangente mínima que permita minimizar a quantidade de fio a gastar para que todos os computadores sejam servidos pela nova rede.

1.4.2. Caminho crítico

Método do caminho crítico

Nos problemas anteriores, o sentido pelo qual se percorre as arestas de um grafo é relevante para encontrar a solução ótima do problema, mas, na verdade, as arestas podiam ser percorridas em qualquer sentido.

E, se tal não acontecer, mas apenas houver um sentido para percorrer uma aresta?

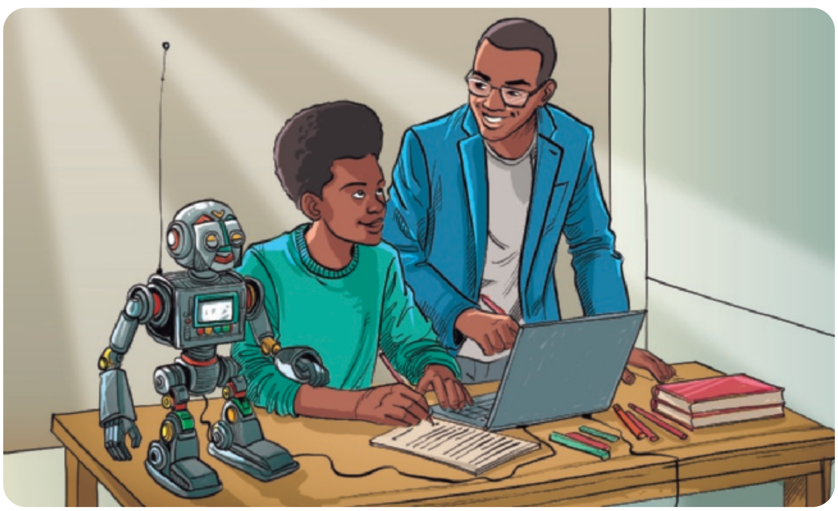


Um **dígrafo** ou **grafo dirigido** é um grafo em que as arestas têm sentido definido, ou seja, só podem ser percorridas num sentido.

Os dígrafos são, por exemplo, usados em situações em que pretendemos representar as diversas etapas na execução de um trabalho/projeto.

Exemplo 23

O Lucas e o Daniel estão a desenvolver um projeto para a escola e identificaram cinco tarefas que têm de realizar.



Algumas tarefas são independentes, contudo, há tarefas que dependem da execução prévia de outras:

– a tarefa T_3 só pode ser realizada depois de terem sido realizadas as tarefas T_1 e T_2;

– as tarefas T_4 e T_5 só podem ser realizadas depois de realizada a tarefa T_3.

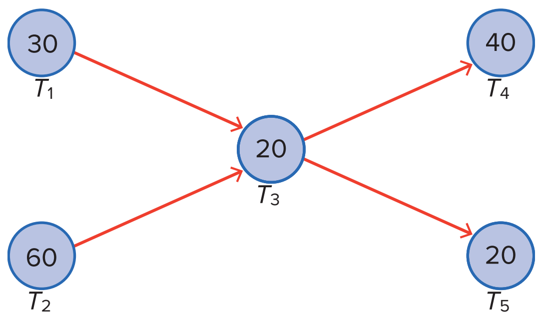
Os amigos organizaram numa tabela a informação sobre as tarefas, identificando a duração estimada de cada uma e a sua dependência de outras tarefas.

Tarefa	Tempo (minutos)	Dependência
T_1	30	Nenhuma
T_2	60	Nenhuma
T_3	20	T_1 e T_2
T_4	40	T_3
T_5	20	T_3

Qual é o tempo mínimo que irão demorar a concluir o projeto?

Numa primeira análise, os amigos irão necessitar, no máximo, de 170 minutos $(30+60+20+40+20)$ para completar o projeto. Mas será este o tempo mínimo?

Observa a informação da tabela traduzida através de um dígrafo:



Observando o dígrafo, os amigos concluíram que:

– as tarefas T_1 e T_2 podem ser feitas em simultâneo, demorando, no total, 60 minutos, nesta fase;

– depois, podem realizar a tarefa T_3, mais 20 minutos, num total de $60+20=80$ minutos;

– por último, podem realizar em simultâneo as tarefas T_4 e T_5, demorando mais 40 minutos (a tarefa T_5 fica pronta em 20 minutos, mas a tarefa T_4 demora 40 minutos), num total de $80+40=120$ minutos;

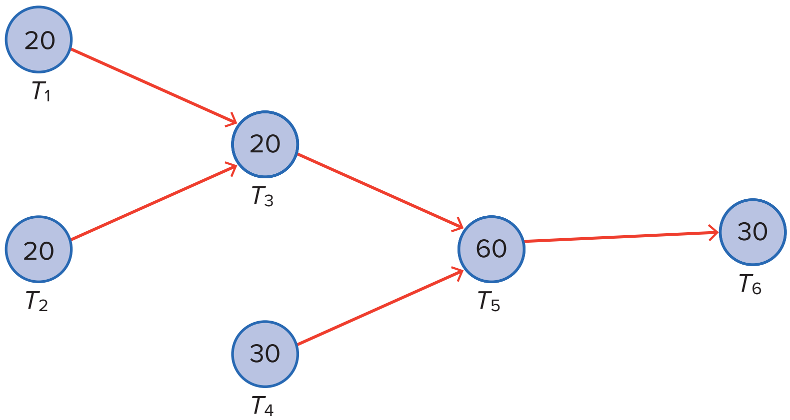
O projeto demora, no mínimo, um total de 120 minutos.

Método do caminho crítico

O método do **caminho crítico** é uma sequência de tarefas que pode ser visualizada através de um dígrafo, que permite determinar o tempo mínimo de execução de um projeto.

Exercícios

69 **A Luana e a Maria vão iniciar um projeto e construíram um dígrafo com as tarefas que terão de realizar.**



69.1. Representa por uma tabela a informação constante no dígrafo.

69.2. Ajuda as duas amigas a determinarem a sequência de tarefas que devem seguir e qual o tempo mínimo de que vão precisar para concluir o projeto.

70 **Num restaurante, a confeção de um prato especial envolve oito tarefas, com diferentes tempos de execução e em que umas tarefas só podem ser realizadas depois de outras. Esta informação está presente na tabela seguinte.**

Tarefa	Tempo (minutos)	Dependência
T_1	20	Nenhuma
T_2	10	Nenhuma
T_3	15	Nenhuma
T_4	5	T_1, T_2 e T_3
T_5	10	T_4
T_6	40	T_5
T_7	10	Nenhuma
T_8	5	T_6 e T_7

70.1. Representa num dígrafo a informação constante na tabela.

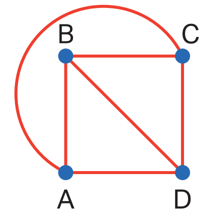
70.2. Qual é o tempo mínimo de confeção do prato especial?

Síntese

Circuitos e grafos de Hamilton

Um **circuito de Hamilton é um circuito que percorre todos os vértices do grafo uma única vez.**

Um **grafo de Hamilton** é um grafo em que existe, pelo menos, um circuito de Hamilton.



É um grafo de Hamilton.

A – B – C – D – A
é um circuito de Hamilton

Teoremas que ajudam a determinar se um grafo é de Hamilton

Teorema de Ore

Num grafo G simples, conexo e com ordem n superior a 3, se a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes é maior ou igual à ordem, n, então G é grafo de Hamilton.

Teorema de Dirac

Num grafo G simples, conexo e com ordem n superior a 3, se o grau de cada vértice é maior ou igual à metade da ordem n do grafo, então G é grafo de Hamilton.

Algoritmos para encontrar circuitos de Hamilton com peso mínimo

Algoritmo da cidade mais próxima

Dado um grafo G conexo:

- Escolher um vértice (cidade) para começar.
- Selecionar a aresta que leva até ao vértice (cidade) mais próximo.
- No novo vértice, repetir o processo e escolher a aresta que leva ao vértice seguinte mais próximo.
- Continuar este processo até ter percorrido todos os vértices do grafo.
- No final, regressar ao vértice de origem.

Síntese

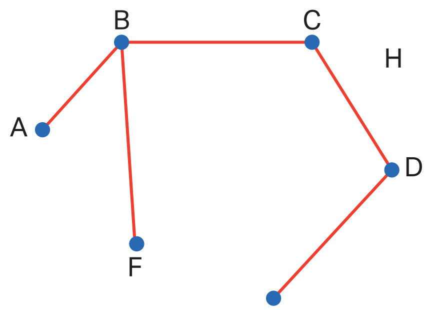
Algoritmo do peso das arestas

Dado um grafo G conexo:

- Ordenar as arestas por ordem crescente dos seus pesos.
- Escolher, sucessivamente, as arestas com o peso mais baixo, tendo em conta que:
  – não se pode escolher três arestas no mesmo vértice;
  – não se pode fechar um circuito antes de ter percorrido todos os vértices do grafo.

Árvores. Caminho crítico

Uma **árvore** é um grafo conexo em que não há circuitos.



H é uma árvore.

Propriedades:

1. Uma árvore de ordem n tem dimensão $n - 1$.
2. Um grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arestas é uma árvore.
3. Numa árvore cada aresta é uma ponte, ou seja, é uma aresta que se for excluída torna o grafo desconexo. De forma recíproca, se todas as arestas de um grafo são pontes, então o grafo é uma árvore.

Uma **árvore abrangente** de um grafo é um subgrafo que é uma árvore e que contém todos os vértices do grafo.

Uma **árvore abrangente mínima** é uma árvore abrangente para a qual é mínima a soma dos pesos das arestas.

Síntese

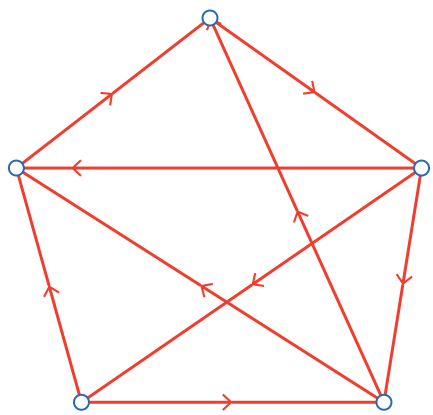
Algoritmo de Kruskal

Dado um grafo G conexo:

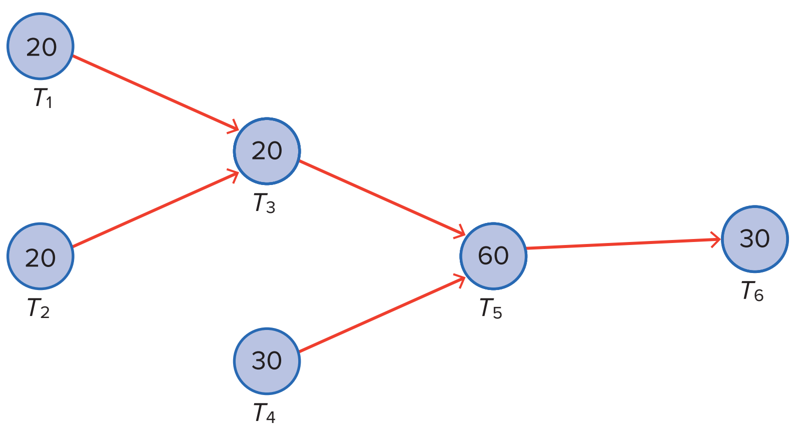
- Ordenar as arestas por ordem crescente do seu peso.
- Escolher, sucessivamente, as arestas com o menor peso, tendo em conta que não se pode escolher arestas que fechem um circuito até estarem ligados todos os vértices do grafo.

Caminho crítico

Um **dígrafo é um grafo em que as arestas têm sentido,** ou seja, só podem ser percorridas num sentido.

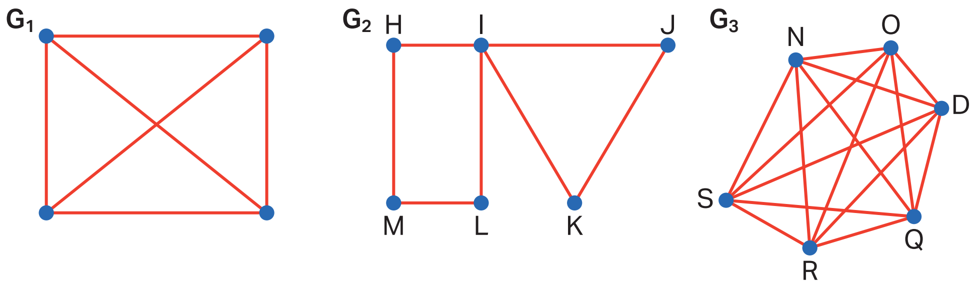


O **método do caminho crítico** envolve o uso de dígrafos para determinar o tempo mínimo para executar um conjunto de tarefas com diferentes dependências e tempos de execução (projeto).

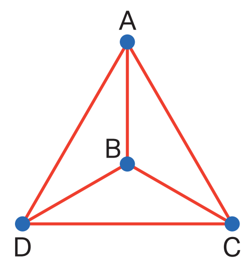


Para aplicar

1 **Os grafos seguintes admitem circuitos de Hamilton? Justifica a tua resposta.**



2 **Observa o grafo de Hamilton ao lado.**



2.1. Identifica um circuito de Hamilton com início no vértice A.

2.2. Quantos circuitos de Hamilton distintos, com início no vértice D, consegues identificar?

3 **A Ellen, no próximo domingo, quer visitar a sua avó e as suas três tias, Maira, Juceila e Daniela. Está a organizar um plano do percurso pelas quatro casas e construiu uma tabela com as distâncias, em metros, dos caminhos que ligam as casas. Partindo da sua casa, quer passar uma única vez por cada uma das quatro casas e voltar de novo à sua percorrendo a menor distância possível.**

	Ellen	Avó	Maira	Juceila	Daniela
Ellen		350 m	450 m	320 m	200 m
Avó			190 m	440 m	430 m
Maira				260 m	620 m
Juceila					340 m
Daniela					

3.1. Desenha um grafo que sirva de modelo às várias hipóteses de percurso possíveis e indica a sua ordem e dimensão.

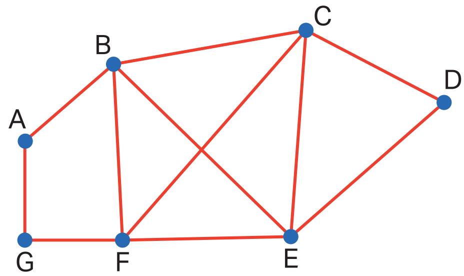
3.2. A Ellen está convencida de que, se tiver de visitar, em primeiro lugar, a tia Daniela, percorrendo depois as restantes casas, o percurso mais curto consiste em seguir da casa da tia Daniela para a casa da avó e só depois visitar as outras duas tias antes do regresso a casa. A Ellen terá razão? Justifica.

3.3. O grafo desenhado admite ciclos de Hamilton? Se sim, quantos?

3.4. Considerando o grafo apresentado, indica uma árvore abrangente.

Para aplicar

4 **Uma empresa de recolha de resíduos efetua diariamente a recolha em sete locais diferentes (A, B, C, D, E, F e G). Na figura, encontra-se o grafo que serve de modelo ao contexto do problema, em que cada aresta representa uma estrada que liga dois locais.**



4.1. Determina um circuito que percorra no mínimo quatro locais de recolha de resíduos.

4.2. O Sr. Filipe, motorista da empresa, quer verificar se existem resíduos abandonados ao longo das estradas existentes. Pretende partir do local representado pela letra D, percorrer todas as estradas, sem as repetir, e regressar ao mesmo local. É possível?

Explica a tua resposta.

4.3. Na tabela, encontram-se registadas as distâncias mínimas, em quilómetros, entre cada dois locais de recolha de resíduos sólidos, quando se percorrem as estradas representadas pelas arestas do grafo.

	A	B	C	D	E	F	G
A	–	–	–	–	–	–	–
B	14	–	–	–	–	–	–
C	–	22	–	–	–	–	–
D	–	–	10	–	–	–	–
E	–	13	11	15	–	–	–
F	–	9	24	–	16	–	–
G	12	–	–	–	–	5	–

A empresa vai ligar todos os locais de recolha de resíduos sólidos com um cabo de fibra ótica, utilizando algumas das estradas representadas no grafo.

Para usar a menor extensão de cabo possível, a empresa contactou dois especialistas em instalação de fibra ótica, o Leandro e o Enzo.

– O Leandro afirma, sem recurso a qualquer método, que a ligação que requer menos cabo é usando as arestas AB, BF, BE, FG, CE e CD.

– O Enzo propõe uma ligação apoiando-se no uso do algoritmo de Kruskal.

Indica qual das duas propostas a empresa deve escolher para utilizar a menor extensão de cabo possível.

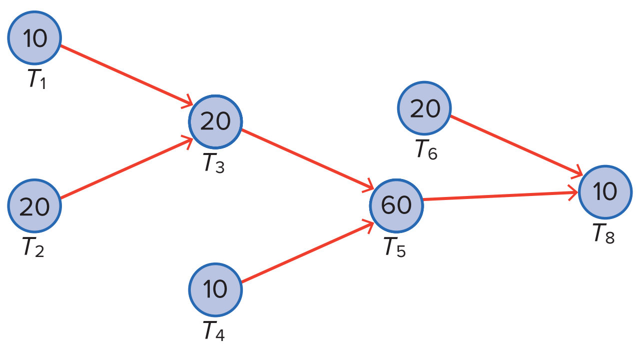
5 No restaurante da mãe da Kiara, a elaboração da sobremesa favorita dos clientes requer sete etapas, em que algumas só podem ser realizadas depois de outras. Esta informação e o tempo de duração de cada tarefa estão representados na tabela seguinte.

Tarefa	Tempo (minutos)	Dependência
T_1	2	Nenhuma
T_2	10	T_1
T_3	5	T_2
T_4	5	T_2 e T_3
T_5	8	Nenhuma
T_6	12	T_4 e T_5
T_7	2	T_6

5.1. Representa num dígrafo a informação da tabela.

5.2. Qual é o tempo mínimo para a elaboração da sobremesa?

6 Numa empresa de *marketing* vai ser iniciado um novo projeto e construiu-se um dígrafo com as tarefas que os *designers* terão de realizar.



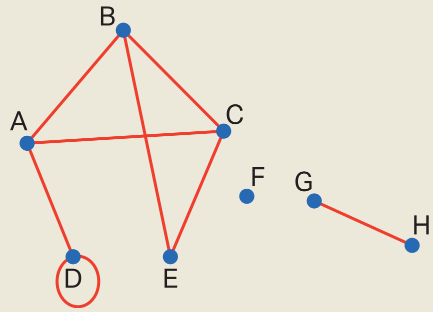
6.1. Representa por uma tabela a informação constante no dígrafo.

6.2. Qual é o tempo mínimo necessário para executar o projeto?

6.3. Com base na tua resposta, ajuda os *designers* a determinarem como poderão dividir as tarefas e qual a sequência que devem seguir.

Teste

1 Considera o grafo ao lado.



1.1. Indica:

a) a ordem e a dimensão do grafo;

b) um vértice isolado;

c) um par de vértices adjacentes;

d) um par de arestas adjacentes;

e) o grau dos vértices A, B, C, D e F.

1.2. Classifica de verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando a tua resposta.

A : O grafo é conexo.

B : O grafo é simples.

C : O grafo é regular.

1.3. Identifica dois subgrafos do grafo.

2 De um grafo H de ordem 4 completo, podemos afirmar que:

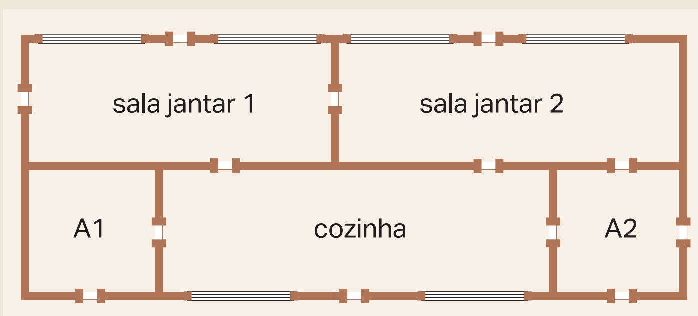
(A) Todos os vértices têm grau par.

(B) O grafo tem lacetes.

(C) O grafo tem dimensão 6.

(D) O grafo não é conexo.

3 A figura seguinte representa a planta de um restaurante.



A cozinha comunica com as duas salas de jantar, com as duas arrecadações e com o exterior.

3.1. Representa por um grafo a planta do restaurante, incluindo o exterior.

3.2. Numa inspeção ao restaurante, será possível, a partir do exterior, atravessar cada uma das portas apenas uma vez e terminar na cozinha? Justifica a tua resposta.

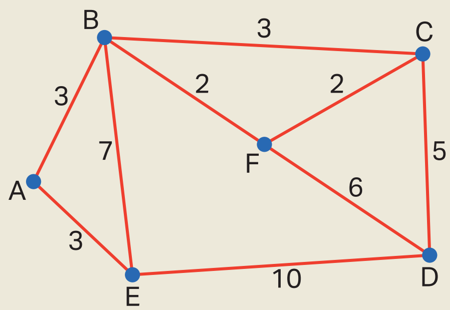
3.3. Se fosse possível retirar alguma das portas, alteraria a resposta à questão anterior?

4 Numa festa, estão 15 mulheres e um certo número de homens. Cada homem cumprimentou exatamente seis mulheres e cada mulher cumprimentou exatamente oito homens. Quantos homens estão na festa?

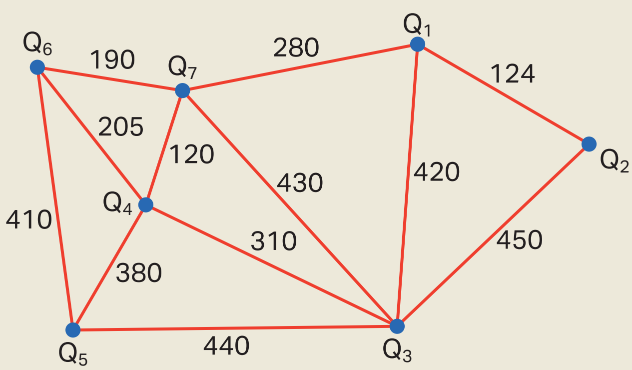
5 Considera o grafo ao lado.

5.1. Identifica duas árvores abrangentes do grafo.

5.2. Descobre a árvore abrangente mínima, identificando o seu peso.



6 Num parque aquático há sete pontos de visita fundamentais (Q_1 (receção), Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 e Q_7). O grafo seguinte representa esses pontos, bem como os percursos pedonais existentes entre esses pontos.



6.1. Quais são a dimensão e a ordem do grafo?

6.2. Quantas arestas seriam necessárias para que o grafo fosse completo?

6.3. Se o responsável pelo parque pretender definir um percurso pedonal que passe por todas as atrações e volte ao ponto de onde partiu, Q1 , de quantas formas diferentes o poderá fazer? Explica o teu raciocínio.

6.4. Uma empresa de eletricidade pretende renovar a rede de cabos elétricos que abastece os diferentes pontos do parque, colocando cabos junto aos percursos pedonais. Para tal, pretende determinar a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar. Determina essa quantidade mínima, em metros, necessária. Explica como pensaste.

2

Modelos populacionais

O que vou aprender neste tema

Neste capítulo, vamos conhecer e estudar populações e verificar que a evolução destas, por vezes, segue um padrão que nos permite, através de modelos, prever o futuro.

Um pouco de História...

O estudo da evolução das populações, ao longo do tempo, deu lugar a conceptualizações matemáticas que vamos descobrir. Comecemos por atentar em Fibonacci, que, entre outros, foi um matemático com trabalhos que, ainda hoje, são considerados importantes referências.

Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci, nasceu em Itália, por volta do ano de 1170, tendo morrido em 1241. Passou grande parte da sua juventude a viajar pelo Mediterrâneo, acompanhando o pai que era representante dos comerciantes da República de Pisa. Fibonacci aprendeu matemática com os sábios árabes nas suas paragens comerciais. Dele conhecem-se algumas obras que vieram a influenciar a matemática na Europa durante séculos. Referimo-nos a dois livros, o *Liber Abaci* (*Livro do Cálculo*), editado em 1202 e 1228, e *Practica Geometriae* (*Prática da Geometria*), editado entre 1219-1220.

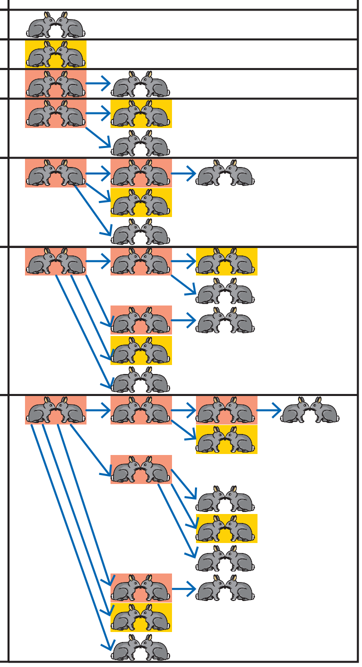
Sendo um bom observador, Fibonacci reparou no crescimento de determinados fenómenos à sua volta, como, por exemplo, a reprodução de certas espécies. Um problema conhecido é o da reprodução de coelhos que aparece no *Liber Abaci*. Neste problema, estuda-se a evolução de uma população de coelhos a partir de um casal, obedecendo a determinadas condições:

- um casal de coelhos, recém-nascidos, é colocado num meio propício à sua reprodução;
- cada casal de coelhos, desta espécie, começa a reproduzir-se ao final de dois meses, resultando em mais um casal de coelhos, a cada mês;
- o processo de reprodução acontece todos os meses, sem que ocorram mortes.

O objetivo reside em determinar a quantidade de casais de coelhos que esta população terá ao final de um ano.

NOTA: Observa e percebe o esquema ao lado.

	N.º de casais de coelhos	
INÍCIO	0	
1.º mês	1	
2.º mês	1	
3.º mês	2	
4.º mês	3	
5.º mês	5	
6.º mês	8	
7.º mês	13	



Legenda:
= casal de coelhos bebés
= casal de coelhos em amadurecimento
= casal de coelhos fase reprodutiva

À sequência do número de casais de coelhos, a cada mês, chama-se sequência de Fibonacci: 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 ...

Encontramos nos livros de aritmética prática, escritos em português, no século XVI, as progressões aritméticas e geométricas elaboradas por Fibonnaci, para fenómenos de crescimento,

O que vou aprender neste tema

assim como a progressão do galarim tratada pelo aritmético Bento Fernandes e, mais tarde, por Padre António Vieira na sua obra, no século XVII.

Os modelos populacionais podem ser discretos ou contínuos. Os modelos populacionais discretos dão-nos informações sobre uma população, por exemplo o estudo da sucessão que descreve o número de casais de coelhos de Fibonacci, bem como as progressões aritméticas e geométricas.

Já nos modelos contínuos, registam-se as mudanças na dimensão da população a todo o momento, considerando que o crescimento populacional, em cada instante, sofre alterações. Nestes modelos, usamos funções lineares, exponenciais, logarítmicas e logísticas, que desempenham um papel crucial na modelação matemática de fenómenos do mundo real, sendo amplamente utilizadas em diversas áreas do conhecimento, nomeadamente nas ciências sociais. Estas funções permitem descrever processos de crescimento e decaimento, sendo fundamentais para compreender e prever situações que afetam a sociedade e o meio ambiente. Por exemplo, a modelação do crescimento de uma população, a análise do nível de poluição de um rio ou o estudo do decaimento da eficiência dos painéis solares podem ser feitos através de funções exponenciais ou logarítmicas. Da mesma forma, o crescimento de uma epidemia, a evolução da inflação ou o aumento do nível do mar devido às alterações climáticas podem ser analisados com base nestas funções. A sua utilização permite que cientistas, economistas e analistas compreendam melhor os fenómenos já ocorridos e façam previsões fundamentadas sobre as suas consequências futuras. O estudo destas funções exige um conhecimento prévio das propriedades gerais das funções matemáticas, uma vez que pertencem a uma família específica de funções com características bem definidas. Ao longo deste capítulo, iremos explorar as propriedades fundamentais das progressões e das funções lineares, exponenciais, logarítmicas e logísticas, bem como as suas aplicações práticas, mostrando a sua relevância para a análise e resolução de problemas concretos do dia a dia.

2.1. Introdução ao crescimento populacional

- Saber o que é o crescimento populacional.
- Reconhecer a utilidade de um modelo matemático de crescimento populacional.

2.2. Progressões aritméticas

- Definir progressão aritmética.
- Encontrar o termo geral de uma progressão aritmética.
- Somar termos consecutivos de uma progressão aritmética.
- Trabalhar com progressões aritméticas na resolução de problemas.
- Calcular juros simples.
- Trabalhar com modelos de capitalização de juros simples.
- Determinar modelos de crescimento linear com recurso a *software* matemático.

2.3. Progressões geométricas

- Definir progressão geométrica.
- Encontrar o termo geral de uma progressão geométrica.

O que vou aprender neste tema

- Somar termos consecutivos de uma progressão geométrica.
- Trabalhar com progressões geométricas na resolução de problemas.
- Calcular juros compostos.
- Trabalhar com modelos de capitalização de juros compostos.
- Determinar modelos de crescimento exponencial com recurso a *software* matemático.

2.4. Modelo linear

- Definir a equação reduzida de uma reta.
- Determinar e utilizar uma reta de regressão.
- Utilizar o Excel para trabalhar com modelos lineares.

2.5. Modelo exponencial

- Conhecer o gráfico e as propriedades de funções exponenciais.
- Resolver, analítica e graficamente, equações e inequações com exponenciais.
- Determinar modelos de crescimento exponencial com recurso a *software* matemático.
- Trabalhar com modelos de crescimento exponencial na resolução de problemas.

2.6. Modelo logarítmico

- Conhecer o gráfico e as propriedades de funções logarítmicas.
- Resolver, analítica e graficamente, equações e inequações com logaritmos.
- Determinar modelos de crescimento logarítmico com recurso a *software* matemático.
- Trabalhar com modelos de crescimento logarítmico na resolução de problemas.

2.7. Modelo logístico

- Compreender o gráfico e as propriedades de funções logísticas.
- Resolver, graficamente, equações e inequações com funções logísticas.
- Determinar modelos de crescimento logístico com recurso a *software* matemático.
- Trabalhar com modelos de crescimento logístico na resolução de problemas.

2 Modelos populacionais

2.1. Introdução ao crescimento populacional

O crescimento populacional significa o aumento do número de indivíduos de uma determinada espécie, num determinado meio, ao longo do tempo. No caso da população humana, esta cresceu de forma lenta até à Revolução Industrial, quando os avanços na medicina, na agricultura e nas condições de vida impulsionaram um aumento significativo na taxa de crescimento. No século XX, o desenvolvimento tecnológico e a melhoria da qualidade de vida contribuíram para a aceleração desse processo, levando a um crescimento exponencial da população global. Este crescimento foi influenciado por fatores como a natalidade, a mortalidade, a migração e as políticas governamentais. Contudo, o crescimento populacional não ocorreu de maneira uniforme em todas as regiões. Enquanto alguns países apresentam altas taxas de natalidade e crescimento, outros enfrentam desafios como o envelhecimento da população e a diminuição das taxas de natalidade. O aumento da população gera impactos ambientais e socioeconómicos, exigindo que as políticas dos diferentes países garantam recursos sustentáveis e qualidade de vida para as futuras gerações. O problema da relação entre o crescimento populacional e os recursos disponíveis no planeta é uma preocupação a nível mundial. Observamos uma agravante nos nossos dias. Assistimos ao aumento do consumo por pessoa, que, por sua vez, aumenta a pressão sobre os recursos naturais, a necessidade de alimentar, vestir e hospedar uma população crescente que necessita de mais água, alimentos, madeira e energia, o que pode levar à escassez e à manipulação do meio ambiente com impactos, muitas vezes, irreversíveis. No jornal português *Diário de Notícias,* de 1 de agosto de 2024, podemos ver o título: *Humanidade esgotou recursos naturais da Terra e a partir de hoje começa a usar "cartão de crédito" ambiental*.

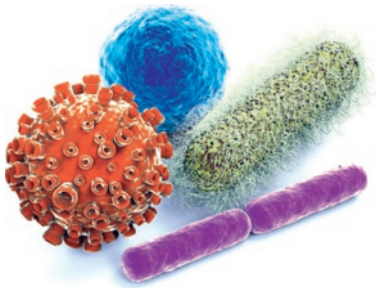
No caso de Cabo Verde, com condições climáticas secas em muitas regiões, a disponibilidade de água e solo fértil para a agricultura é limitada. Tal como a maioria dos países, Cabo Verde depende de importações de produtos agrícolas, combustíveis e outros bens essenciais. Por exemplo, para uma alimentação sustentável, os recursos marinhos, como os peixes e frutos do mar, são muito importantes, para além de contribuírem para o desenvolvimento da economia do país.

Compreender o crescimento populacional é essencial para planear o futuro da Humanidade ou de qualquer outra espécie, estabelecendo um equilíbrio entre o desenvolvimento, a sustentabilidade e o bem-estar.

2.1.1. Modelos de crescimento populacional

Os modelos de crescimento populacional são ferramentas matemáticas usadas para descrever como uma *população* muda ao longo do tempo, sendo essenciais para prever e, posteriormente, atuar de acordo com as características da população em causa.

Exemplo 1



As epidemias podem ser causadas por vírus, bactérias, fungos ou outros agentes infeciosos. Elas podem ocorrer devido a diversos fatores, como más condições sanitárias, baixa imunização da população ou mutações de patógenos. Alguns exemplos históricos de epidemias incluem surtos de gripe, dengue, cólera e ébola. Quando uma epidemia se espalha por vários países ou continentes, é chamada de pandemia, como ocorreu nos anos 2019/2020 com a covid-19. Para controlar esta pandemia, inicialmente, recomendou-se o isolamento e cuidados de higiene. Os vários tipos de vírus foram estudados e a ciência atuou para encontrar vacinas que vieram a demonstrar eficácia na prevenção de infeções sintomáticas da doença grave.

O crescimento populacional diz-se positivo quando há um aumento da população inicial. Geralmente, isso acontece, por exemplo, com a evolução de uma cultura de bactérias nocivas para a saúde sem a administração de medicação. O crescimento populacional negativo, também chamado declínio, acontece quando há uma diminuição da população inicial. Por exemplo, a presença de carbono-14 nos fósseis, com o passar do tempo.

2.2. Progressões aritméticas

Conta-se que o matemático Gauss (1777-1855), ainda criança e aluno dos primeiros anos da escola, conseguiu, em poucos minutos, somar os cem primeiros números naturais, aquando de uma tarefa dada à sua turma pelo professor. Sendo a matemática uma ciência de modelos e padrões, Gauss, perante os números naturais escritos de 1 até 100, reparou num padrão que se repetia.

Vejamos, então, o que acontece:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 49 \quad 50 \quad 51 \quad 52 \quad \dots \quad 98 \quad 99 \quad 100 \qquad (1)$$

Se somares os números equidistantes do centro da lista, um à esquerda e outro à direita, por exemplo, $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, o que verificas?

Exercício

1 **Sobre a tarefa de Gauss, responde às questões seguintes.**

1.1. Preenche a tabela para os pares indicados.

1.2. Quantos pares, naquelas condições, existem na sequência?

1.3. Qual é o valor da soma dos 100 números?

1.4. Completa a expressão para encontrares uma proposição verdadeira.

Soma dos 100 números $= 101 \times \ldots = \ldots$

$3+98=\ldots$
$4+97=\ldots$
$5+96=\ldots$
$6+95=\ldots$
$7+\ldots=\ldots$
$\ldots+93=\ldots$

Se repararmos ainda na mesma sequência, e chamarmos aos números que a constituem *termos* da sequência, eles são gerados da seguinte maneira:

1.º termo – $u_1 = 1$

2.º termo – $u_2 = 1+1 = u_1+1 = u_1 + 1\times 1$

3.º termo – $u_3 = 2+1 = u_2+1 = u_1+1+1 = u_1 + 2\times 1$

4.º termo – $u_4 = 3+1 = u_3+1 = u_1+2\times 1+1 = u_1 + 3\times 1$

Exercícios

2 **Depois de observares o padrão da sequência da tarefa de Gauss, escreve o 5.º termo em função do 1.º, preenchendo os espaços em branco:**

$$u_5 = u_1 + \_\_ \times 1$$

3 **Considerando agora a sucessão dos números naturais que contém a sequência da tarefa de Gauss, ou seja, $1, 2, 3, 4, \ldots, 100, \ldots,$ qual será a expressão para um termo de ordem n qualquer? Responde preenchendo os espaços em branco na seguinte expressão:**

$$u_n = u_1 + \_\_ \times 1$$

A sucessões que apresentam as características da anterior chamamos progressões aritméticas. Para gerar os termos, basta reparar que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante (no caso anterior, a constante é 1).

Progressão aritmética

Progressão aritmética é uma sucessão de números reais em que a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Essa diferença é chamada razão da progressão e, habitualmente, é designada por r. Simbolicamente, temos:

$$u_{n+1} - u_n = r, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 2

Considera a sucessão de termo geral $v_n = 2n - 3$. Vamos provar que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética e determinar a razão.

Comecemos por calcular alguns termos desta sucessão:

$v_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$

$v_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$

$v_3 = 2 \times 3 - 3 = 3$

$v_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$

Esta sucessão segue um padrão que nos mostra que, dado um termo, obtemos o termo seguinte somando 2 (razão da progressão aritmética).

$$-1 \xrightarrow[+2]{} 1 \xrightarrow[+2]{} 3 \xrightarrow[+2]{} 5 \xrightarrow[+2]{} \ldots$$

Vamos provar que temos uma progressão aritmética de razão 2. Para isso, calculamos a diferença entre qualquer termo e o termo anterior, ou seja, $v_{n+1} - v_n$, então:

$$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3) =$$
$$2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Sendo a diferença constante para todo o n, então a razão da progressão é igual a 2.

Exercícios

4 **Escreve os cinco primeiros termos das progressões de acordo com a informação de cada alínea.**

4.1. Sabendo que o primeiro termo é 3, soma 4 ao termo anterior para gerar o seguinte.

4.2. Sabendo que o primeiro termo é 6, soma (-2) ao termo anterior para gerar o seguinte.

5 **Entre os conjuntos de números que se seguem, indica os que podem representar progressões aritméticas e as respetivas razões.**

(A) $7, 11, 15, 19, \ldots$

(B) $1, 3, 5, 8, \ldots$

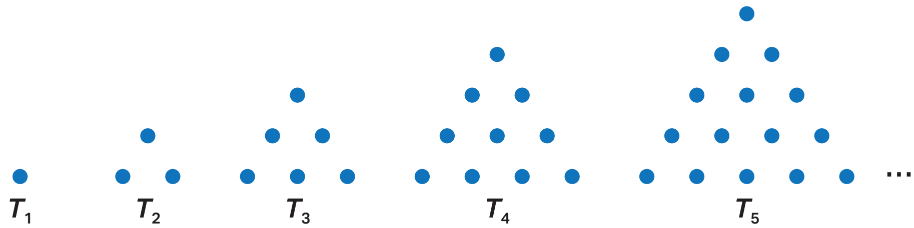
(C) $-2, 0, 2, 4, \ldots$

(D) $4, 7, 10, 13 \ldots$

Na Grécia Antiga, os pitagóricos tinham o culto dos números. Para eles, tudo era composto por números e acreditavam que eles eram a essência do Universo. Este interesse levou-os à descoberta de representações geométricas desses números, como, por exemplo, os chamados números poligonais: triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais, etc.

Exemplo 3

Observemos os cinco primeiros números triangulares.

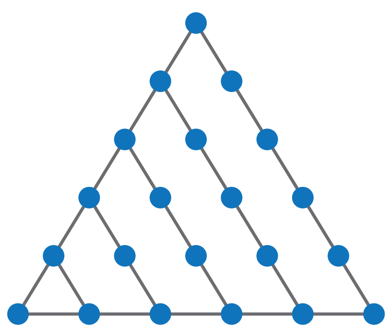


Na representação numérica atual, temos:

$T_1 = 1 \qquad T_2 = 3 \qquad T_3 = 6 \qquad T_4 = 10 \qquad T_5 = 15$

Qual é o padrão desta sequência numérica?

Vamos observar a figura e estabelecer uma relação entre os termos.



$T_1 = 1$

$T_2 = T_1 + 2$

$T_3 = T_2 + 3$

$T_4 = T_3 + 4$

$T_5 = T_4 + 5$

$T_6 = T_5 + 6$

...

$T_n = T_{n-1} + n$, ou seja, $T_n - T_{n-1} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que a diferença entre um termo e o anterior não é constante, a sucessão dos números triangulares não é uma progressão aritmética.

2.2.1. Termo geral de uma progressão aritmética

Tem muitas vantagens arranjar uma expressão que represente uma progressão aritmética. Esta expressão tem o nome de *termo geral* e permite calcular qualquer termo da progressão de forma direta sem precisar conhecer todos os termos anteriores. Como consequência, a resolução de problemas que requerem o uso de progressões aritméticas torna-se mais eficiente.

Exemplo 4

Se voltarmos à sucessão de termo geral $v_n = 2n - 3$ do exemplo anterior, qual é o valor numérico do vigésimo termo desta progressão? Basta fazer $n = 20$ e substituir para termos a resposta: $v_{20} = 2 \times 20 - 3 = 37$ é o vigésimo termo da progressão. Repara que não foi necessário calcular os termos anteriores, seguindo a longa caminhada de determinar termo a termo até chegarmos ao vigésimo!

Outra questão: 105 é um termo da progressão?

Para o saber, resolvemos a equação $v_n = 105$ em ordem a n:

$$v_n = 105 \Leftrightarrow 2n - 3 = 105 \Leftrightarrow 2n = 108 \Leftrightarrow n = \frac{108}{2} = 54$$

Como 54 é um número natural, então 105 é o termo de ordem 54 ou $v_{54} = 105$.

Vamos agora deduzir a expressão do termo geral de uma progressão aritmética qualquer.

No Exemplo 2, vimos que a sucessão apresentava o padrão seguinte:

$$-1 \xrightarrow[+2]{} 1 \xrightarrow[+2]{} 3 \xrightarrow[+2]{} 5 \xrightarrow[+2]{} \dots$$

Vamos substituir os números pelos respetivos termos:

$$v_1 \xrightarrow[+2]{} v_2 \xrightarrow[+2]{} v_3 \xrightarrow[+2]{} v_4 \longrightarrow \dots$$

Observamos que há uma relação entre dois termos consecutivos. Por exemplo:

$$v_2 = v_1 + 2 = v_1 + 2 \times 1$$
$$v_3 = v_2 + 2 = v_1 + 2 + 2 = v_1 + 2 \times 2$$
$$v_4 = v_3 + 2 = v_1 + 2 \times 2 + 2 = v_1 + 2 \times 3$$
$$\dots$$
$$v_n = v_1 + 2 \times (n - 1), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

A razão da progressão é igual a 2; designemos esta razão por $r \in \mathbb{R}$ e temos o termo geral da progressão:

$$v_n = v_1 + r \times (n - 1), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Termo geral da progressão aritmética

O termo geral de uma progressão aritmética (PA), $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é dado por:

$p_n = p_1 + r \times (n - 1)$, sendo r um número real não nulo.

- p_n é o enésimo termo da PA
- p_1 é o primeiro termo da PA
- r é a razão da PA
- n é a posição do termo na sequência

As progressões aritméticas podem ser classificadas de crescentes ou decrescentes. Se $r < 0$, a progressão é decrescente e se $r > 0$ é crescente.

Exemplo 5

Consideremos as duas sucessões definidas pelos termos gerais:

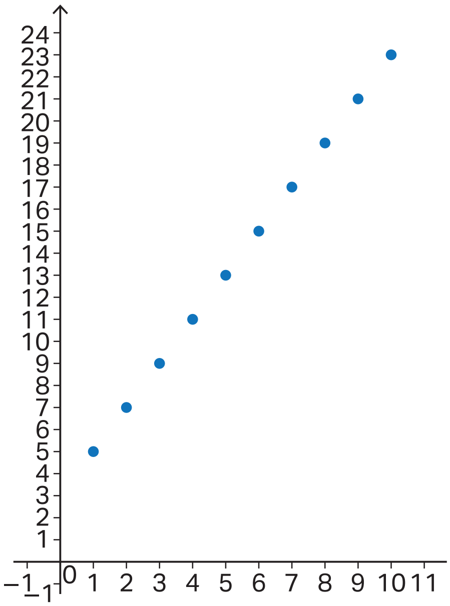
$p_n = 3 + 2n$ e $q_n = 19 - 2n$

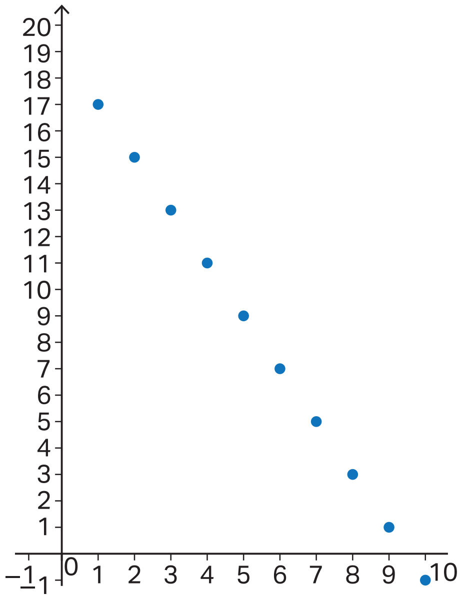
Podemos determinar os primeiros termos das sucessões e até representar graficamente os pontos (n, p_n) e (n, q_n).

Repara que p_n é estritamente crescente e q_n é estritamente decrescente.

n	p_n
1	$3 + 2 \times 1 = 5$
2	$3 + 2 \times 2 = 7$
3	$3 + 2 \times 3 = 9$
4	$3 + 2 \times 4 = 11$
5	$3 + 2 \times 5 = 13$
6	$3 + 2 \times 6 = 15$
7	$3 + 2 \times 7 = 17$
8	$3 + 2 \times 8 = 19$
9	$3 + 2 \times 9 = 21$
10	$3 + 2 \times 10 = 23$

n	q_n
1	$19 - 2 \times 1 = 17$
2	$19 - 2 \times 2 = 15$
3	$19 - 2 \times 3 = 13$
4	$19 - 2 \times 4 = 11$
5	$19 - 2 \times 5 = 9$
6	$19 - 2 \times 6 = 7$
7	$19 - 2 \times 7 = 5$
8	$19 - 2 \times 8 = 3$
9	$19 - 2 \times 9 = 1$
10	$19 - 2 \times 10 = -1$





Exercícios

6 **Considera os primeiros seis termos consecutivos de uma progressão aritmética: $62\,,\ 57\,,\ 52\,,\ 47\,,\ 42\,,\ 37\,,\ \ldots$**

6.1. Qual é a razão da progressão?

6.2. Qual é o maior termo negativo da progressão?

6.3. Escreve uma expressão do termo geral da progressão aritmética.

6.4. Calcula o 20.º termo da progressão aritmética.

7 **Averigua se são progressões aritméticas as sucessões de termos gerais seguintes e, em caso afirmativo, indica a sua razão.**

7.1. $a_n = n - 5$

7.2. $b_n = n^2 + 3n$

7.3. $c_n = (4n+1)^2 - (4n-1)^2$

8 **Calcula o 16.º termo da progressão aritmética com primeiro termo 3 e cuja razão é 5.**

9 **No problema da semana da sua escola, o Marcelo deparou-se com um "quebra--cabeças" em que se pedia para escrever os seis primeiros termos de uma progressão aritmética. O Marcelo escreveu cinco desses termos, 100, 108, 112, 118 e 124. Um destes termos está errado. Qual é o termo errado e quais são os seis primeiros termos desta progressão?**

10 **Obtém o valor de x sabendo que o terno $(-4x\,,\ 2x+1\,,\ 7+5x)$ é constituído por três termos consecutivos de uma progressão aritmética.**

2.2.2. Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

No início do capítulo falámos de Gauss e do pedido que lhe foi feito para somar os 100 primeiros números naturais. Foi fácil para Gauss reparar que estava perante um modelo. Será que este modelo é válido para outras progressões aritméticas? A resposta é sim!

Se quisermos somar os n primeiros termos de uma progressão aritmética, vamos designar essa soma por S_n e o processo é o mesmo. Ou seja, somamos os termos que estão nos extremos e multiplicamos por metade do número de termos que queremos somar. Assim, a expressão seguinte dá-nos essa soma:

$$S_n = \frac{p_1 + p_n}{2} \times n$$

Exemplo 6

Qual é o valor da soma dos números inteiros de 1 a 200?

Segundo a fórmula $S_n = \frac{p_1 + p_n}{2} \times n$, temos $S_{200} = \frac{1+200}{2} \times 200 = 20\ 100$.

Se preferires fazer como Gauss, observa o conjunto de números:

$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 196, 197, 198, 199, 200$

Efetuando a soma dos extremos e dos termos equidistantes desses extremos, temos:

$$1 + 200 = 201$$
$$2 + 199 = 201$$
$$3 + 198 = 201$$
$$4 + 197 = 201$$
$$5 + 196 = 201$$
$$\dots$$

Como temos 100 destas somas todas iguais, então o resultado será $201 \times 100 = 20\ 100$.

A fórmula $S_n = \frac{p_1 + p_n}{2} \times n$ simplifica muito o cálculo e o seu uso é aconselhado.

Exemplo 7

Uma progressão aritmética é definida pelo termo geral $u_n = 5 + 2n$.

Determina a soma dos 50 primeiros termos da progressão.

$u_1 = 5 + 2 \times 1 = 7$; $u_{50} = 5 + 2 \times 50 = 105$

A soma é $S_{50} = \frac{7+105}{2} \times 50 = 2800$.

Exemplo 8

De uma progressão aritmética $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sabe-se que $a_1 = -1$ e a soma dos 30 primeiros termos desta progressão é 1275. Determina o termo geral da progressão.

$a_1 = -1$

$a_{30} = a_1 + 29 \times r$

A soma dos 30 primeiros termos é dada por:

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \times 30 = \frac{a_1 + a_1 + 29r}{2} \times 30 = \frac{-2 + 29r}{2} \times 30 = (-2 + 29r) \times 15$$

Então, vem que:

$(-2+29r)\times 15=1275 \iff -2+29r=85 \iff 29r=87 \iff r=\frac{87}{29}=3$

Concluindo, o termo geral da progressão é dado por:

$a_n=-1+3(n-1)=-1+3n-3=-4+3n$

Exercícios

11 **Qual é o 25.º elemento da progressão aritmética de razão 4 em que a soma dos 20 termos iniciais é 1940?**

12 **O Lucas comprou uma porção de madeira para fazer uma escada na sua casa da árvore. Ele quer fazer 15 degraus e a peça tem o comprimento suficiente para cortar os 15 degraus.**
Os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética.
Se o primeiro degrau mede 60 cm e o último 20 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, determina o valor do comprimento mínimo da peça de madeira.

Há problemas em que não conhecemos o primeiro termo e a razão da progressão aritmética e pedem-nos para escrever a expressão do termo geral.

Sendo $k\in\mathbb{N}$, designamos o termo de ordem k por p_k e temos a relação:

$$p_n=p_k+r\times(n-k)$$

Exemplo 9

De uma progressão aritmética $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sabe-se que $p_{15}+p_{22}=113$ e $p_{20}+p_{25}=137$.

Vamos determinar a expressão do termo geral da progressão aritmética.

Usando $p_n=p_k+r\times(n-k)$, vamos estabelecer as relações seguintes:

$p_{22}=p_{15}+r\times(22-15) \iff p_{22}=p_{15}+7\times r$

$p_{20}=p_{15}+r\times(20-15) \iff p_{20}=p_{15}+5\times r$

$p_{25}=p_{15}+r\times(25-15) \iff p_{25}=p_{15}+10\times r$

Sabemos que $\begin{cases} p_{15}+p_{22}=113 \\ p_{20}+p_{25}=137 \end{cases}$, substituindo pelas expressões anteriores vem:

$$\begin{cases} p_{15}+p_{15}+7\times r=113 \\ p_{15}+5\times r+p_{15}+10\times r=137 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p_{15}+7\times r=113 \\ 2p_{15}+15\times r=137 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$\begin{cases} 2p_{15}+7r=113 \\ 2p_{15}+15r=137 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p_{15}=113-7r \\ 113-7r+15r=137 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ 8r=24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ r=\frac{24}{8}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{15}=\frac{113-7\times 3}{2}=46 \\ r=3 \end{cases}$$

O termo geral é $p_n=46+3\,(n-15)=3n+1$

Exercícios

13 **De uma progressão aritmética $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sabe-se que a soma dos primeiros dez termos é 295 e a soma $w_{18}+w_{22}$ é 204.**

Determina o primeiro termo da progressão.

14 **Numa residencial, o número de quartos ocupados, por dia, segue uma progressão aritmética $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ao fim de 30 dias, a residencial atinge a sua lotação máxima.**

Sabe-se que a soma do número de quartos ocupados ao 10.º dia com os ocupados ao 20.º dia é igual a 94 e a soma do número de quartos ocupados ao 5.º dia com os ocupados ao 7.º dia é igual a 40.

Determina a lotação máxima desta residencial.

2.2.3. As progressões aritméticas e o regime de capitalização de juros simples

Antes de iniciarmos este tema, convém conhecer algumas noções fundamentais.

O credor é alguém que disponibiliza um certo valor de capital, durante um determinado período. Durante esse tempo, não poderá usar o capital cedido, devendo ser recompensado através do juro, ou seja, o "rendimento do capital".

O devedor é aquele que beneficia do uso do capital disponibilizado, durante um certo período, e, como tal, deverá compensar quem lhe cedeu o capital através do pagamento de um juro.

O prazo de aplicação do capital é o período que decorre entre a cedência do capital e o seu reembolso, obviamente, acrescido do respetivo juro.

O juro é a diferença entre o valor entregue ao credor para saldar a dívida e o capital por este cedido.

A taxa de juro (t_j), habitualmente, é dada em percentagem e permite calcular o valor do juro. A taxa de juro está associada ao período (n) a que se refere. Por exemplo, 5% ao ano, $0{,}7\%$ ao trimestre.

O regime de capitalização de juros pode ser simples ou composto. Comecemos por tratar o cálculo de juros simples.

O modelo matemático para calcular os juros simples é dado por $j_n = C_0 \times t_j \times n$, em que j_n representa o juro simples num período n (podem ser dias, semanas, anos, etc.), t_j é a taxa de juros do período considerado, tal como foi já dito e C_0 representa o valor inicial.

A folha Excel é uma ferramenta útil para o cálculo de juros simples.

Tabela 1 – Cálculo de juros simples, no Excel.

	A	B	C	D	E	F
1		CALCULADORA DE JUROS SIMPLES				
2	**Investidores**	C0 valor inicial (em escudos)	tj taxa de juros mensal (%)	n tempo (n.º meses)	jn total de juros	Cn valor final
3	**Lopes**	3 000 000	0,80%	12	288000,00	3 288 000,00
4	**Gomes**	100 000	0,80%	24	19200,00	119 200,00
5	**Mendes**	5 000 007	1,75%	6	525000,74	5 525 007,74

Observando a Tabela 1, percebemos que o Sr. Lopes fez um investimento de um capital de $3\,000\,000\,\$$, a uma taxa de juro mensal de $0{,}80\%$. Ao fim de 12 meses, o Sr. Lopes arrecada a quantia de $288\,000\$$ de juros, sendo que passa a ter uma quantia final de $3\,288\,000\,\$$.

Como calcular estes valores? Preenchemos a coluna relativa ao valor inicial, à taxa de juro (em percentagem) e ao tempo. O valor total de juros obtém-se pelo produto:

$$j_{12} = 3\,000\,000 \times 0{,}80\% \times 12 = 288\,000$$

representado no Excel como =B3*C3*D3.

Quanto ao valor final, obtém-se, no Excel, por =B3+E3. Ou seja,

$$C_{12} = 3\,000\,000 + 288\,000 = 3\,288\,000$$

Exemplo 10

A Maria investiu numa poupança jovem, durante oito anos. O montante investido, 200 escudos cabo-verdianos, está sujeito a um regime de capitalização de juros simples, com uma taxa de 10% ao ano, sendo que, durante os oito anos, a Maria não poderá aceder ao capital.

Neste caso, temos, então:

$$C_0 = 200\$00\,;\; t_j = 10\%\,;\; n = 8$$

Ao final de oito anos, a Maria receberá de juros a quantia de:

$$j_8 = 200 \times 10\,\% \times 8 = 200 \times 0{,}10 \times 8 = 160$$

Ficando, por isso, com:

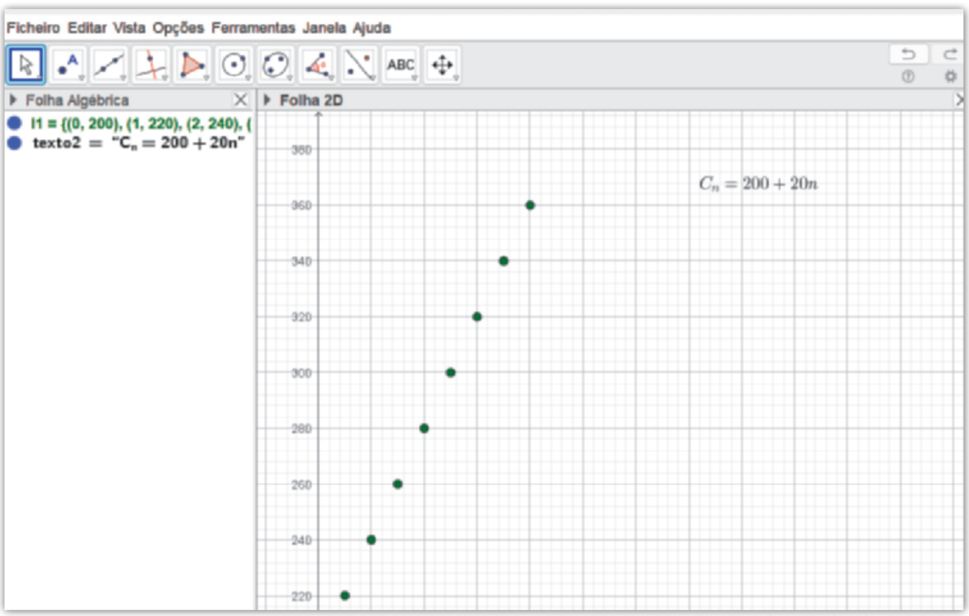
$$C_8 = 200\$00 + 160\$00 = 360\$00$$

Suponhamos que a aplicação prevê a continuação do ganho de juros simples, a cada ano, nas mesmas condições. Procuremos uma expressão que nos dê o capital final, ao fim de n anos.

$$C_n = C_0 + j_n = 200 + 200 \times 0{,}10 \times n = 200 + 20n$$

Podemos verificar que, a cada ano, a Maria recebe 20\$00 de juros.

A evolução do capital C_n pode ser representada, por recurso ao GeoGebra:



Representação da evolução do capital

Exercícios

15 Observa a Tabela 1 e descreve os casos dos investidores Gomes e Mendes, por palavras tuas, relativamente ao uso do Excel nos valores encontrados.

16 Calcula os juros e o capital final para um novo investidor, Sr. Silva, que aplica a quantia inicial de 250 000 \$ a uma taxa mensal de 0,50%, durante 24 meses.

2.3. Progressões geométricas

As progressões geométricas têm raízes antigas, mas a sua formalização e compreensão como conceito matemático ocorreram mais tarde, com o desenvolvimento da álgebra e da teoria das sucessões numéricas. Embora o termo "progressão geométrica" não fosse utilizado, a ideia de relações multiplicativas entre números estava bem estabelecida em obras escritas ao longo dos séculos. As progressões geométricas têm aplicações em diversas áreas da ciência moderna, como, por exemplo, na Física, na Economia e na Biologia. Na Física, estudamos fenómenos como o decaimento radioativo ou o crescimento populacional com modelos associados a progressões geométricas. Na Economia, usamos estes modelos em cálculos financeiros, como no cálculo de juros compostos, e, na Biologia, quando se analisa o crescimento exponencial de uma população ou o crescimento de células, por exemplo.

Exemplo 11 – A lenda do tabuleiro de xadrez

Há histórias ligadas às progressões geométricas. É o caso da invenção do jogo de xadrez. No capítulo XVI do livro *O homem que calculava*, de Malba Than, conta-se uma história sobre o seu inventor, Sessa, e o rei Iadava que muito apreciou o jogo e quis recompensar o jovem Sessa.

A descoberta do jogo de xadrez está ligada a uma lenda que envolve cálculos, números e ensinamentos notáveis. Conta-se que o xadrez foi inventado na Índia, há mais de 1500 anos.

Segundo Malba Than, Lahur Sessa, um hábil calculador, presenteou o rei Iadava com um grande tabuleiro quadrado, dividido em 64 quadradinhos, ou casas, iguais. Sobre esse tabuleiro colocavam-se, não arbitrariamente, dois conjuntos de peças que se distinguiam, um do outro, pelas cores branca e preta, repetindo os formatos. Essas peças estavam sujeitas a regras que lhes permitiam movimentar-se de vários modos.

Sessa explicou pacientemente ao rei e à sua corte as regras essenciais do xadrez. Todos os presentes sentiram-se maravilhados depois de jogarem, levando-os a recordar as grandes batalhas de outros tempos. O rei muito animado disse a Sessa que queria recompensá-lo pelo presente que lhe aliviou tantas angústias. Sessa não queria ouro, nem palácios, nem terras, mas apenas grãos de trigo. O rei pensou ser uma recompensa insignificante. Geralmente, todos desejavam ouro ou terras!...

Sessa esclareceu que o prémio seria dado assim: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta e assim dobrando sucessivamente, até à sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. Diz-se que as condições de Sessa provocaram risos entre os presentes. Contudo, o rei mandou chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes que calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.

Os sábios calculistas, ao fim de algumas horas dedicadas a grandes cálculos, apresentaram ao rei os resultados afirmando que o número de grãos de trigo era de uma grandeza inconcebível para a imaginação humana. A Índia inteira, mesmo que semeasse todos os seus campos, não produziria em 2000 séculos a quantidade de trigo a que Sessa tinha direito!

As duas listas da Tabela 2 mostram o número de grãos de trigo em cada casa do tabuleiro, segundo o pedido de Sessa.
O padrão consiste em duplicar sempre o número de uma casa do tabuleiro para preencher a seguinte. Imagina somar todos estes números!

Tabela 2 – Número de grãos de trigo em cada casa do tabuleiro

1:	1
2 :	2
3 :	4
4 :	8
5 :	16
6 :	32
7 :	64
8 :	128
9 :	256
10 :	512
11 :	1024
12 :	2048
13 :	4096
14 :	8192
15 :	16384
16 :	32768
17 :	65536
18 :	131072
19 :	262144
20 :	524288
21 :	1048576
22 :	2097152
23 :	4194304
24 :	8388608
25 :	16777216
26 :	33554432
27 :	67108864
28 :	134217728
29 :	268435456
30 :	536870912
31 :	1073741824
32 :	2147483648
33 :	4294967296
34 :	8589934592
35 :	17179869184
36 :	34359738368
37 :	68719476736
38 :	137438953472
39 :	274877906944
40 :	549755813888
41 :	1099511627776
42 :	2199023255552
43 :	4398046511104
44 :	8796093022208
45 :	17592186044416
46 :	35184372088832
47 :	70368744177664
48 :	140737488355328
49 :	281474976710656
50 :	562949953421312
51 :	1125899906842624
52 :	2251799813685248
53 :	4503599627370496
54 :	9007199254740992
55 :	18014398509481984
56 :	36028797018963968
57 :	72057594037927936
58 :	144115188075855872
59 :	288230376151711744
60 :	576460752303423488
61 :	1152921504606846976
62 :	2305843009213693952
63 :	4611686018427387904
64 :	9223372036854775808

Tarefa

1 Um grão de trigo pesa, aproximadamente, 0,06479891 gramas.

Determina, em gramas, o peso do trigo presente nas primeiras 10 casas do tabuleiro. Quantos quilogramas de trigo existem na casa 64 ?

Como transportar esta quantidade de grãos de trigo no avião cargueiro Antonov An-124 Ruslan sabendo que o peso máximo de carga que ele suporta é de 150 toneladas?

Exemplo 12

A história das progressões geométricas está profundamente ligada ao fascínio deste "grande" crescimento que escapava às grandezas usadas no dia a dia. Nos primeiros livros de matemática, no século XVI, as progressões geométricas eram representadas como sequências de listas de números, como podes observar na figura seguinte.

1	2	3
2	6	12
4	18	48
8	54	192
16	162	768
32	486	3072

Progressões: «dois dobrada, três dobrada e quatro dobrada» no tratado de aritmética escrito por Ruy Mendes em 1540 (f. 25 f).

À lista $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ chamavam progressão "dois dobrada", uma vez que o primeiro termo é 1 e a regra era passar de um termo para o seguinte multiplicando por 2, a mesma ideia do tabuleiro de xadrez. A lista $2, 6, 18, 54, 162, 486, \ldots$ é a progressão "três dobrada", ou seja, sendo o primeiro termo igual a 2, passamos de um termo ao seguinte multiplicando por 3, como mostra o esquema abaixo:

$$2 \xrightarrow[\times 3]{} 6 \xrightarrow[\times 3]{} 18 \xrightarrow[\times 3]{} 54 \xrightarrow[\times 3]{} 162 \xrightarrow[\times 3]{} 486 \ \ldots$$

Exercício

17 **Observa as colunas de números do Exemplo 12 para responderes às questões seguintes.**

17.1. Explica o padrão da progressão na terceira coluna da direita, a progressão "quatro dobrada".

17.2. Qual é a relação entre os três conjuntos de números em termos de "velocidade" de crescimento?

De conjuntos de números que cresciam muito depressa, passou-se à formalização das progressões geométricas, tendo sido estas aplicadas em diversos campos da ciência, como já referimos. Vamos, então, formalizar o conceito e ver algumas propriedades destes conjuntos de números a que damos o nome de progressões geométricas.

Progressão geométrica

Progressão geométrica é uma sucessão de números $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação do termo anterior por uma constante chamada razão da progressão. Habitualmente, dizemos que o quociente entre um termo e o termo anterior é igual à razão. Designamos esta razão por r, sendo r uma constante $(r \neq 0)$, e simbolicamente temos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 13

A sucessão de termo geral $u_n = 5 \times 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ é uma progressão geométrica. Vejamos alguns termos:

$$u_0 = 5 \times 3^0 = 5 \qquad u_1 = 5 \times 3^1 = 15 \qquad u_2 = 5 \times 3^2 = 45 \qquad u_3 = 5 \times 3^3 = 135$$

Conseguimos ver que passamos de um termo ao termo seguinte multiplicando por 3. Este número é a razão desta progressão. Para determinarmos, formalmente, a razão da progressão geométrica não é suficiente considerar alguns termos. Então, tendo presente algumas propriedades, fazemos o cálculo:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3^{n+1-n} = 3,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Repare-se que quando escrevemos $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$ é o mesmo que afirmar que $u_{n+1} = 3 \times u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

2.3.1. Termo geral de uma progressão geométrica

Tal como para a progressão aritmética, também existem muitas vantagens em arranjar uma expressão que represente uma progressão geométrica, ou seja, um termo geral.

Termo geral da progressão geométrica

O termo geral de uma progressão geométrica (PG), $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dado por $p_n = p_0 \times r^n$, sendo r um número real não nulo. Onde:

- p_0 é o primeiro termo da PG
- p_n é o termo da PG que surge na posição de ordem $n+1$
- r é a razão da PG

Exemplo 14

Considerando o primeiro termo de uma progressão geométrica $a_0 = 2$ e a razão $r = 4$, a expressão do termo geral daquela progressão é $a_n = 2 \times 4^n$ ou, usando as propriedades das potências e simplificando, é $a_n = 2 \times 2^{2n} = 2^{2n+1}$.

Se agora quisermos calcular o 4.º termo da progressão, devemos calcular a_3, visto que começámos em $n = 0$, ou seja, $a_3 = 2^{2 \times 3 + 1} = 2^7 = 128$.

Exercícios

18 **Considera os primeiros três termos consecutivos de uma progressão geométrica $4, 12, 36, \ldots$**

18.1. Qual é a razão da progressão geométrica?

18.2. Escreve uma expressão do termo geral da progressão geométrica.

18.3. Calcula o décimo termo da progressão geométrica.

19 **Averigua se são progressões geométricas $(n \in \mathbb{N}_0)$ as sucessões de termos gerais seguintes e, em caso afirmativo, indica a sua razão.**

19.1. $a_n = -2 \times 4^n$

19.2. $b_n = n^2 + 4n$

19.3. $c_n = 6^{2n-1}$

20 **Calcula o 6.º termo da progressão geométrica cujo primeiro termo é 2 e cuja razão é $\frac{1}{2}$.**

2.3.2. Algumas propriedades das progressões geométricas

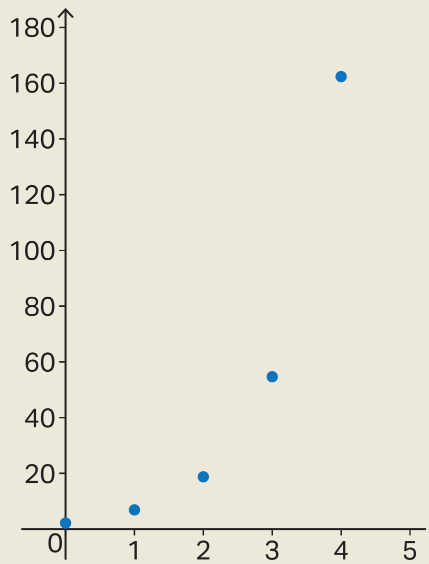
Estudemos a monotonia de uma progressão geométrica de termo geral $p_n = p_0 \times r^n$.

Começa por recordar que $r \neq 0$, caso contrário $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não seria uma PG.

Se $p_0 > 0$ e $r > 1$

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PG monótona crescente

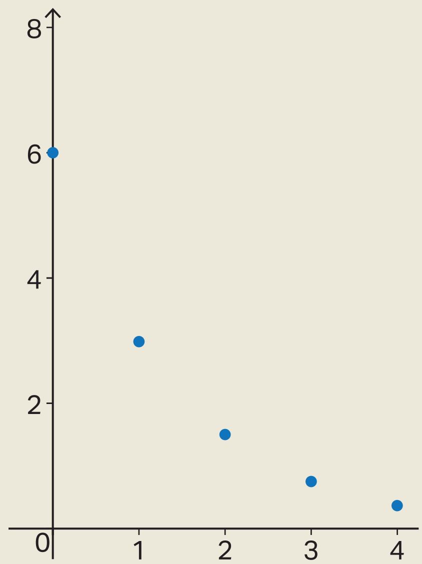
Exemplo: $a_n = 2 \times 3^n$



Se $p_0 > 0$ e $0 < r < 1$

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PG monótona decrescente

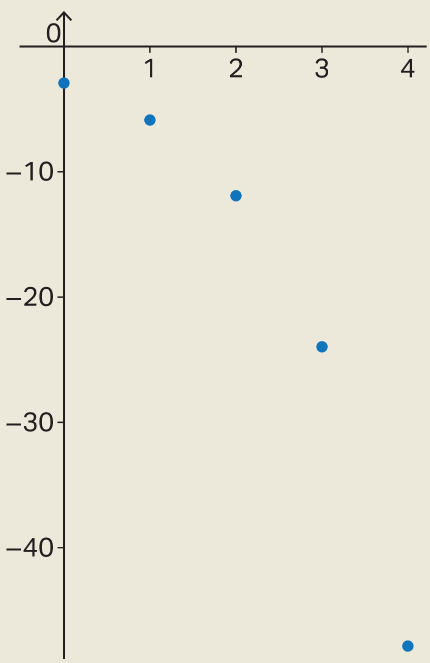
Exemplo: $b_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$



Se $p_0 < 0$ e $r > 1$

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PG monótona decrescente

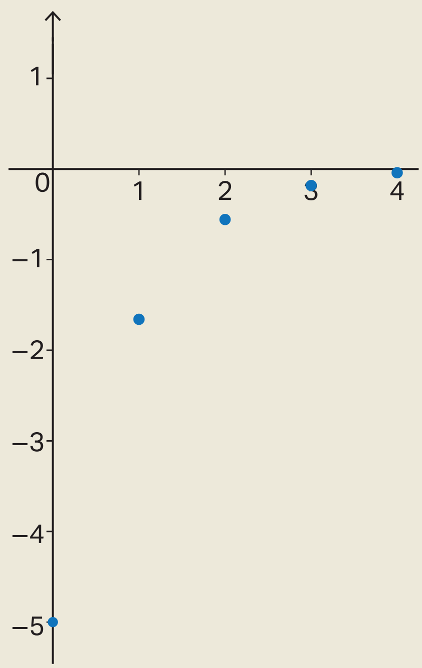
Exemplo: $a_n = (-3) \times 2^n$

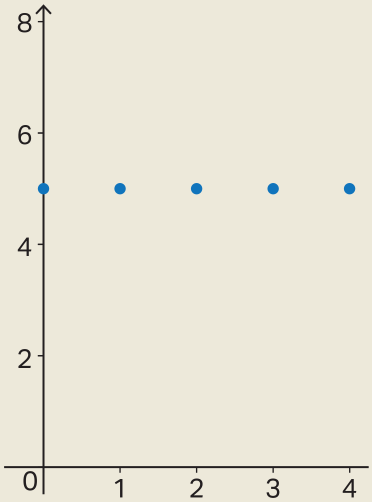
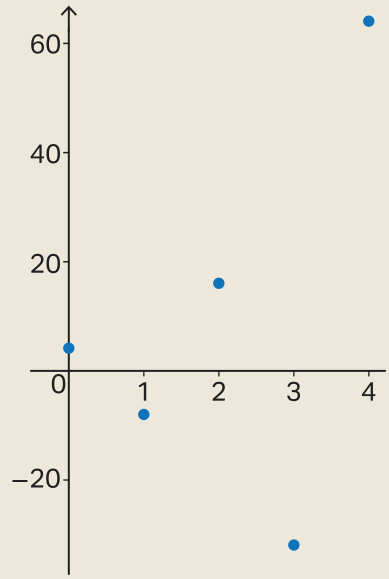


Se $p_0 < 0$ e $0 < r < 1$

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PG monótona crescente

Exemplo: $d_n = (-5) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$



Se $r = 1$ $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PG constante	**Se $r < 0$** $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PG não monótona. Diz-se oscilante, porque cada dois termos consecutivos da PG têm sinais contrários.
Exemplo: $a_n = 5 \times 1^n$ 	Exemplo: $b_n = 4 \times (-2)^n$ 

Tarefa

2 **Imaginemos a situação seguinte: uma pessoa, inicialmente, sabe uma notícia. Numa primeira etapa, ela transmite a notícia a duas pessoas.**

Cada uma das duas pessoas transmite a notícia a outras duas pessoas e assim por diante. A cada passo, o número de pessoas que sabe da notícia duplica. Se $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nos der o número de pessoas que sabem a notícia ao fim de n etapas:

2.1. Quais são os valores de p_0, p_1, p_2 e p_3? Interpreta estes valores no contexto do problema.

2.2. Escreve uma expressão que represente o número de pessoas que sabem a notícia no n-ésimo passo.

2.3. Qual é o número total de pessoas que sabem a notícia após oito passos?

2.3.3. Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

No exemplo da lenda do tabuleiro de xadrez, somar todos os grãos de trigo pedidos por Sessa era uma tarefa difícil, dado que envolvia parcelas com números muito grandes. A formalização do tema progressões geométricas trouxe-nos uma fórmula que nos dá a soma dos n primeiros termos de uma PG $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Designando essa soma por S_n, temos:

$$S_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1} = p_0 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Exemplo 15

Se $p_n = 3 \times 2^n$, a soma dos primeiros cinco termos é:

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$

Este cálculo pode ser efetuado com a aplicação da fórmula, fazendo:

$$S_5 = 3 \times \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 93$$

Exercícios

21 **O Marcelo chegou à ilha de São Nicolau com uma boa notícia! Ele contou a notícia a três amigos e cada um destes contou a outros três amigos e assim por diante; a notícia ia sendo triplicada em cada etapa.**

Sabendo que a ilha de São Nicolau tem 13 310 habitantes, quantas etapas foram necessárias para que a notícia chegasse a todos?

22 **Para cada um dos exercícios seguintes escolhe a opção correta.**

22.1. Uma progressão geométrica possui o primeiro termo igual a 5 e razão igual a 3. Qual é o 6.º termo dessa progressão?

(A) 60 **(B)** 243
(C) 405 **(D)** 1215
(E) 3645

22.2. Dada a progressão geométrica (1 , 2 , 4 , 8 , 16 ,...), a soma dos 10 primeiros termos é:

(A) 320 **(B)** 511
(C) 512 **(D)** 1023
(E) 1024

22.3. Durante a pandemia da covid-19, suspeitou-se que o número de pessoas contaminadas aumentava como uma progressão geométrica de razão $1{,}5$ de uma semana para a outra, na cidade da Praia.

Se numa determinada semana há 120 habitantes contaminados, supondo que a progressão seja mantida, na quarta semana o número de contaminados será igual a:

(A) 180

(B) 250

(C) 270

(D) 405

(E) 608

22.4. O número de bactérias de uma colónia dobra a cada dia que passa. Supondo que uma colónia tinha inicialmente 100 mil bactérias, o número de bactérias, após cinco dias, será de:

(A) 160 mil

(B) $1{,}0$ milhão

(C) $1{,}6$ milhões

(D) 10 milhões

(E) 16 milhões

22.5. Uma progressão geométrica é oscilante quando a sua razão é:

(A) um número entre 0 e 1.

(B) um número maior que 1.

(C) um número menor que 1.

(D) um número menor que 0.

(E) igual a 1.

22.6. O termo geral da progressão geométrica $(81, 27, 9, 3, \ldots)$ é:

(A) $p_n = 3 \times 81^{n-1}$

(B) $p_n = 81 \times (-3)^{n-1}$

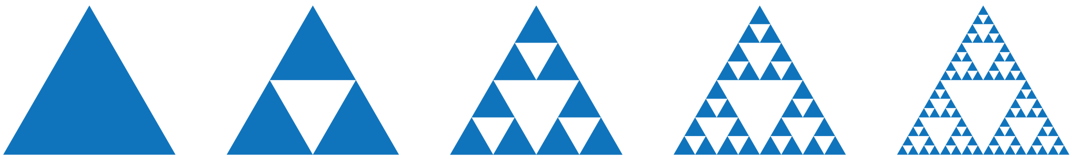
(C) $p_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(D) $p_n = \left(\frac{1}{3}\right) \times 81^{n}$

(E) $p_n = \left(\frac{1}{3}\right) \times 81^{n-1}$

23 Observa a figura, onde os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior.

Denominamos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, respetivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência.



Podemos afirmar que A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Qual é a razão dessa progressão?

24 O novo *website* da empresa Lagostim foi inaugurado no primeiro dia do mês de abril e recebeu três acessos. No segundo dia, teve nove acessos, no terceiro dia, 27 acessos, e assim por diante, sempre triplicando.

Em que dia de abril obteve 2187 acessos?

25 Na fábrica de automóveis Ferro Novo foram produzidos 200 carros, no mês de junho. Em outubro do mesmo ano, foram produzidos 3200 carros.

Sendo que a quantidade de carros produzidos a cada mês, ao longo do ano, forma uma progressão geométrica crescente, qual foi a produção de carros no mês de março desse mesmo ano?

2.3.4. As progressões geométricas e o regime de capitalização de juros compostos

No regime de capitalização composta, os juros acumulam ao capital. Há juros de juros (juro total = juro simples + juro de juro).

Exemplo 16

O Sr. Carlos recebeu uma proposta do gestor financeiro do seu banco para fazer um depósito a prazo com juro composto de $10\,000$ escudos cabo-verdianos. Este depósito capitalizava semestralmente. A taxa de juro semestral em vigor era de 2% durante três anos.

Considerando que não se prevê que a taxa vá sofrer alterações nesse período, quanto dinheiro deverá receber o Sr. Carlos se levantar o seu depósito ao fim de três anos?

Temos os seguintes dados:

Capital inicial: $C_0 = 10\ 000$

Taxa de juro no período: $t_j = 2\%$ a cada semestre

Passados seis meses, ou seja, na primeira capitalização, passará a ser:

$$C_1 = C_0 + C_0 \times 2\%$$

$$= 10\,000 + 10\,000 \times 2\,\% = 10\,000 \times (1 + 2\%)$$

Na capitalização seguinte, a taxa será aplicada a C_1, logo, passa a ser:

$$C_2 = C_1 + C_1 \times 2\%$$

$$= 10\,000 \times (1 + 2\%) + 10\,000 \times (1 + 2\%) \times 2\,\% = 10\,000 \times (1 + 2\%) \times (1 + 2\%)$$

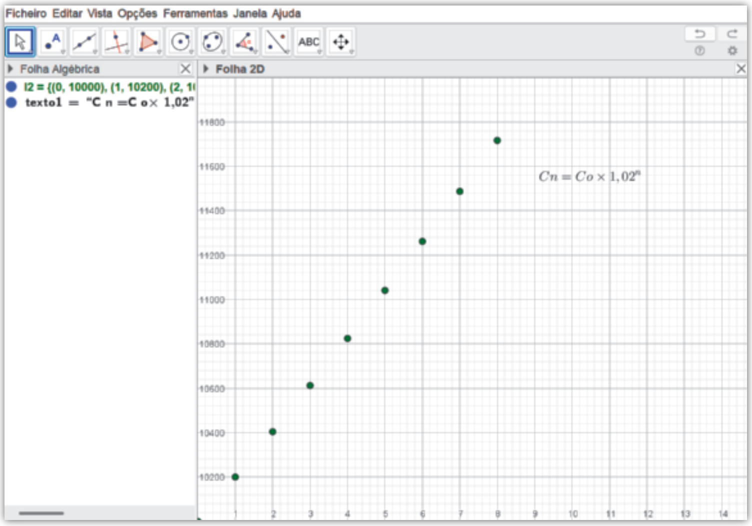
$$= 10\,000 \times (1 + 2\%)^2$$

Continuando esta análise, pode construir-se a tabela onde se registam as quantias de juros e as capitalizações ocorridas nos seis semestres, ao longo dos três anos do investimento.

Tabela 3 – Cálculo de juros compostos

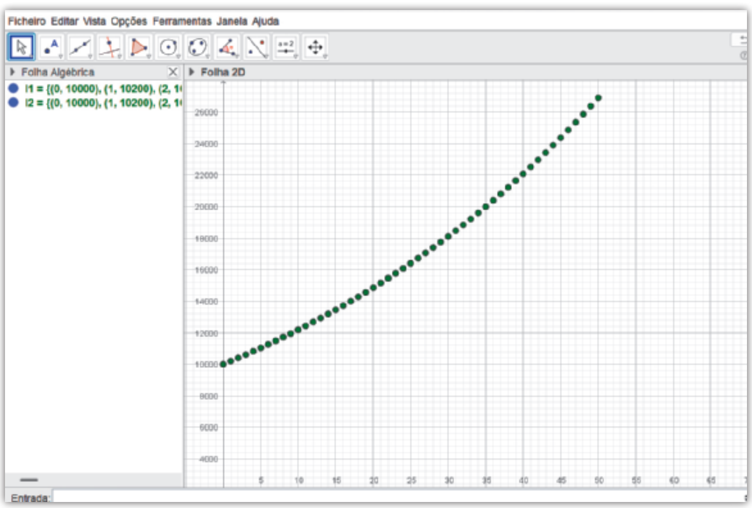
Momento **t**	**Juro** **$J_{n,\,n+1}$**	**Capital** **C_n**
0	0	$C_0 = 10\,000$
1 – 1.º semestre	200	$C_1 = C_0 \times (1 + 2\%) = 10\,200$
2 – 2.º semestre	204	$C_2 = C_0 \times (1 + 2\%)^2 = 10\,404$
3 – 3.º semestre	208	$C_3 = C_0 \times (1 + 2\%)^3 = 10\,612$
4 – 4.º semestre	212,32	$C_4 = C_0 \times (1 + 2\%)^4 = 10\,824{,}32$
5 – 5.º semestre	216,49	$C_5 = C_0 \times (1 + 2\%)^5 = 11\,040{,}81$
6 – 6.º semestre	220,81	$C_6 = C_0 \times (1 + 2\%)^6 = 11\,261{,}62$
...	...	...

Trata-se de um modelo discreto dado que o juro vence ao fim de cada semestre. Há crescimento visto tratar-se de uma progressão geométrica de razão $1{,}02$, tal como podemos observar na expressão para o n-ésimo semestre. Vejamos a representação do crescimento do capital no gráfico seguinte.



Crescimento do capital.

O capital parece crescer em linha reta. Contudo, não é isso que acontece. Basta representarmos mais alguns termos da sucessão para perceber que se forma uma curva, se quisermos unir os pontos, tal como mostra a figura. Nos capítulos seguintes estudarás este tipo de crescimento.



Os pontos do gráfico encontram-se sobre uma curva.

Supondo que o depósito continua com capitalizações semestrais a uma taxa de 2%, podemos encontrar um modelo que indique a quantia resultante na *n*-ésima capitalização:

$$C_n = 10\,000 \times (1 + 2\%)^n = 10\,000 \times (1 + 0{,}02)^n = 10\,000 \times 1{,}02^n$$

Este modelo retrata um crescimento análogo ao de uma progressão geométrica, de razão $1{,}02$, cujo termo inicial é $10\,000$.

2.3.5. Progressão geométrica *versus* progressão aritmética

Thomas Malthus (1766-1834), um clérigo inglês, na sua época com influência na economia política e na demografia, escreveu, na sua obra *An Essay on the Principle of Population*, publicada em 1798, o seguinte:

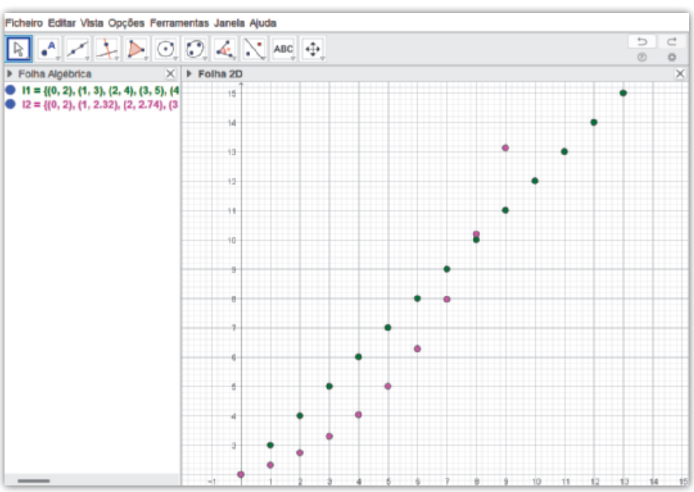
A população, quando não controlada, aumenta em progressão geométrica. A subsistência aumenta apenas em progressão aritmética. Um pequeno conhecimento dos números mostrará a imensidão do primeiro poder em comparação com o segundo.

Thomas Malthus (1766-1834)

Em Nápoles, S. (2018), *O crescimento exponencial de populações: Euler ou Malthus? Revista Ciência Elementar*, V6 (02):041

Imaginemos que temos as condições seguintes: o modelo para a quantidade de recursos é dado por $a_n = n + 2$ e o modelo de crescimento populacional é dado por $c_n = 2^{0,4n} + 1$, $n \geqslant 0$. No GeoGebra, o primeiro modelo é representado pelos pontos de cor verde e o segundo pelos pontos de cor fúcsia.

Se considerarmos o tempo em anos, durante aproximadamente sete anos, os pontos verdes, relativos aos recursos, estão abaixo dos pontos que representam a população. Ou seja, os recursos são suficientes para aquela população. Contudo, há uma mudança na situação depois do 7.º ano: os recursos serão escassos e, como consequência, a população passará fome. Voltaremos a este tema mais à frente nos modelos contínuos.



Um possível modelo discreto de Malthus.

Será que a questão levantada por Malthus ainda é colocada na nossa época? A resposta é sim! Como foi dito na introdução deste capítulo, há um desequilíbrio entre as nossas necessidades, os hábitos de consumo e os recursos do planeta Terra.

2.4. Modelo linear

O modelo populacional linear é uma abordagem simples para descrever o crescimento de uma população ao longo do tempo. Diferente de modelos mais complexos, como, por exemplo, o modelo logístico, o modelo linear mostra que a taxa de crescimento da população é constante. Isso significa que a população aumenta ou diminui a uma taxa fixa em cada período de tempo.

A equação básica do modelo populacional linear é:

$$P(t) = P_0 + r\,t$$

em que $P(t)$ é o tamanho da população no tempo t, P_0 é o tamanho inicial da população e r é a taxa de crescimento (ou decrescimento) constante.

2.4.1. Recordar as retas e as equações que as representam

Função linear

Uma função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = mx + b$$

em que m e b são números reais, é uma função linear.
As funções lineares são representadas graficamente por retas e m é o declive da reta relativamente ao eixo das abcissas e b é a ordenada na origem, ou seja, $b = f(0)$.

Sendo o gráfico uma reta, bastam dois pontos para a determinar.

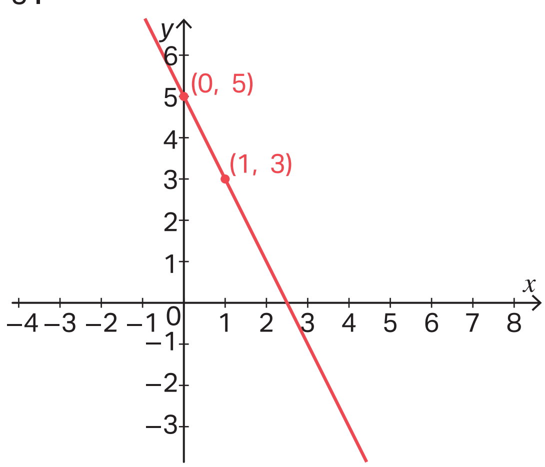
Exemplo 17

Seja f a função definida por $f(x) = -2x + 5$.

Vamos determinar o gráfico desta função.

Repare-se que a ordenada na origem é 5, isto é, $f(0) = 5$. Então, já temos um ponto do gráfico, o ponto $(0, 5)$. Basta agora encontrar um outro ponto para podermos traçar o gráfico.

Se $x = 1$, $f(x) = f(1) = -2 + 5 = 3$, logo, outro ponto do gráfico será $(1, 3)$. Com estes dois pontos podemos traçar a reta que representa o gráfico da função.



Reta que contém os pontos $(0, 5)$ e $(1, 3)$.

Repare-se que o declive desta reta é -2 e que pode ser calculado usando os mesmos dois pontos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{1-0} = -2$$

Olhando para este gráfico, podemos dizer que à medida que x aumenta y diminui: trata-se de uma função decrescente. E se m fosse positivo, o que poderias dizer sobre a função?

As retas são muito simples de interpretar e, por isso, muito úteis quando há dados que podem ser modelados por retas.

2.4.2. Reta de regressão linear

A reta de regressão linear é uma ferramenta estatística utilizada para modelar a relação entre duas variáveis. Ela é representada por uma equação linear que descreve como uma variável dependente y varia em função de uma variável independente x. A equação da reta de regressão linear é dada por:

$$y = mx + b$$

em que m é a inclinação da reta e b é o ponto de interseção da reta com o eixo Oy (quando $x = 0$).

Uma curiosidade para investigar: A reta de regressão linear é determinada através do método dos mínimos quadrados, que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela reta. Este método garante que a reta encontrada seja a melhor representação possível da relação entre as duas variáveis de acordo com os dados disponíveis.

Exemplo 18

Nos últimos anos, a população em Cabo Verde tem mantido uma taxa de crescimento praticamente constante, como se pode constatar nas tabelas 4 e 4.1.

Tabela 4 – População de Cabo Verde nos últimos quatro anos

Ano	População
2022	519 741
2023	522 331
2024	524 877
2025	527 326

Fonte: www.worldometers.info

O aumento de população de 2022 para 2023 foi de $522\,331 - 519\,741 = 2590$.

Esse aumento corresponde a uma taxa de crescimento de, aproximadamente, $0{,}5\%$.

$$\frac{2590}{519\,741} \times 100 \cong 0{,}5\%$$

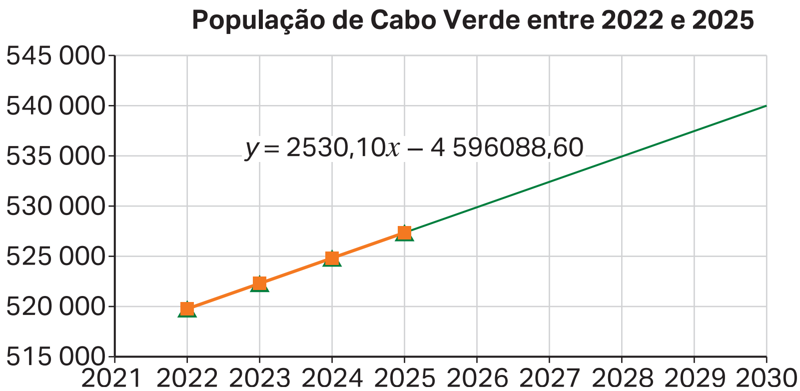
Podemos acrescentar duas colunas à tabela 4, incluindo estas variações:

Tabela 4.1. – Variação da população de Cabo Verde nos últimos quatro anos

	População	% variação anual	Mudança anual
2025	527 326	0,47%	2449
2024	524 877	0,49%	2546
2023	522 331	0,5%	2590
2022	519 741	0,49%	2531

É possível registar os dados num gráfico de dispersão, usando, por exemplo, a ferramenta Excel, e procurar encontrar um modelo matemático que aproxime a evolução da população.

Usando este modelo $P(t) = 2530{,}1t - 4\,596\,088{,}60$ podemos estimar a população de Cabo Verde num futuro próximo.



Com a modelação da evolução da população por uma reta, é possível, por exemplo, prever que, em 2029, a população será aproximadamente de:

$2530{,}10 \times 2029 - 4\,596\,088{,}60 \cong 537\,484$ habitantes.

2.4.3. Uso do Excel para traçar retas de regressão linear

Para encontrar uma função que modele um conjunto de dados, os pontos são representados num diagrama de dispersão no Excel. Em seguida, escolhe-se a curva que melhor se ajusta aos dados, entre as opções disponibilizadas pela ferramenta: linear, polinomial, exponencial ou logarítmica.

Vamos ilustrar a utilização da ferramenta Excel usando um exemplo concreto, com dados retirados do Instituto Nacional de Estatística (INE) de Cabo Verde. Começamos por colocar os dados numa tabela como a seguinte.

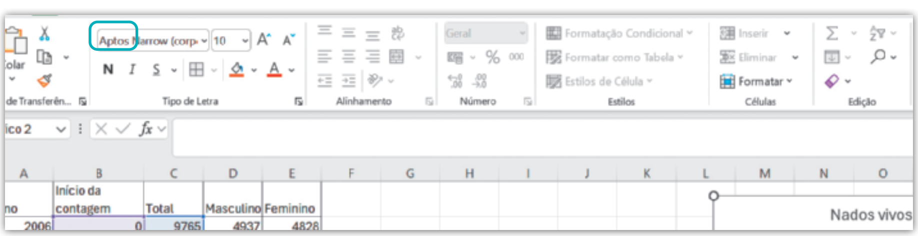
Tabela 5 – Dados sobre nados-vivos no período 2006 a 2018

Ano	Início da contagem	Total	Masculino	Feminino
2006	0	9765	4937	4828
2007	1	10 421	5347	5074
2008	2	10 165	5154	5011
2009	3	9962	5054	4908
2010	4	10 568	5381	5187
2011	5	10 777	5534	5243
2012	6	10 050	5185	4865
2013	7	9845	5035	4810
2014	8	9868	4959	4909
2015	9	9695	4885	4810
2016	10	9849	4920	4929
2017	11	9795	5018	4777
2018	12	9208	4582	4626

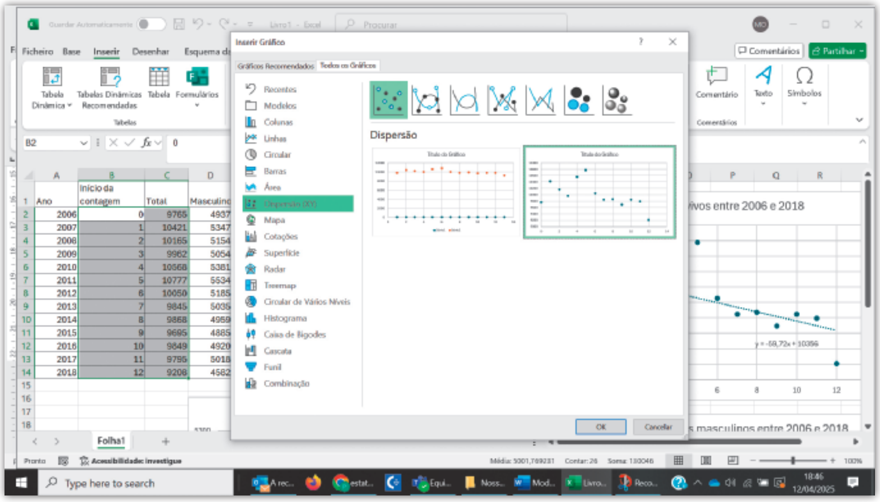
Podemos trabalhar com a coluna 1, com os anos no formato 2006, 2007, … ou considerar como ano zero o início da contagem e usar a segunda coluna. Neste exemplo, temos vários dados que podemos analisar quanto à sua variação ao longo dos anos: nados-vivos no total, nados-vivos por sexo e até o índice de masculinidade, quociente entre o número de nados-vivos masculinos e o número de nados-vivos femininos: $\dfrac{\textit{nados-vivos masculinos}}{\textit{nados-vivos femininos}}$.

Vamos usar, na nossa análise, o número de nados-vivos total e a contagem de anos, considerando o ano 2006 como ano zero, ou seja, as 2.ª e 3.ª colunas da tabela.

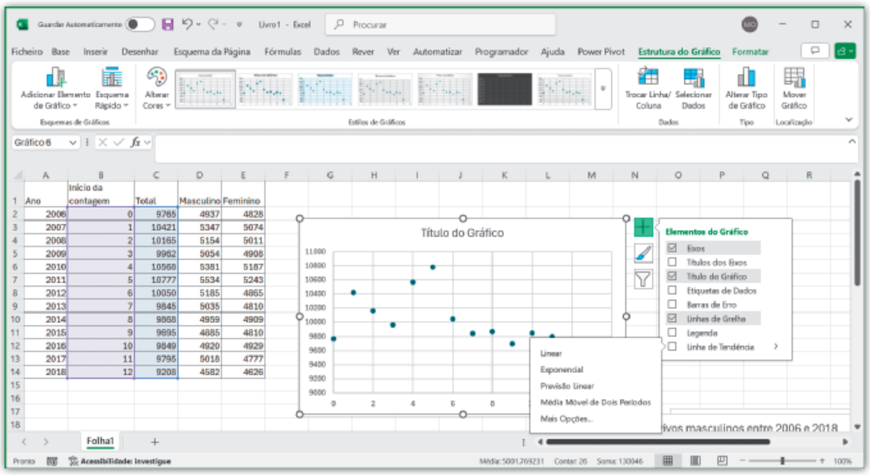
Selecionam-se as duas colunas e escolhe-se *inserir* do menu superior:



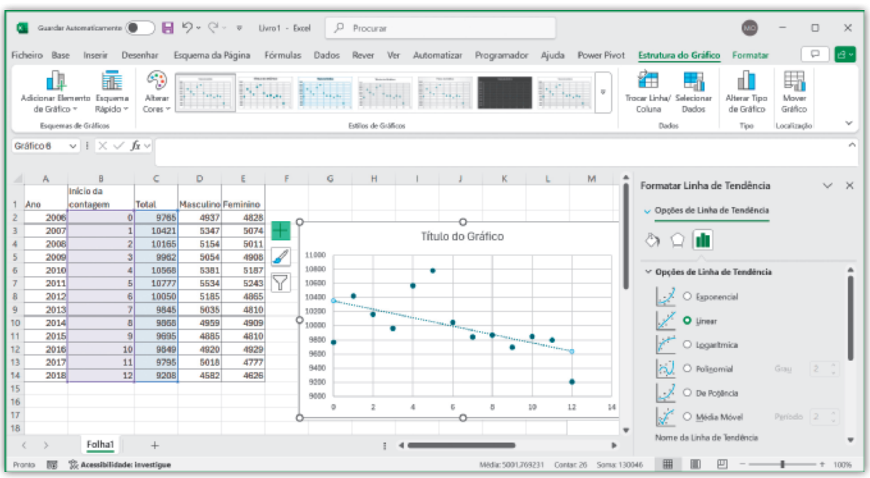
De seguida, seleciona-se gráfico de dispersão.



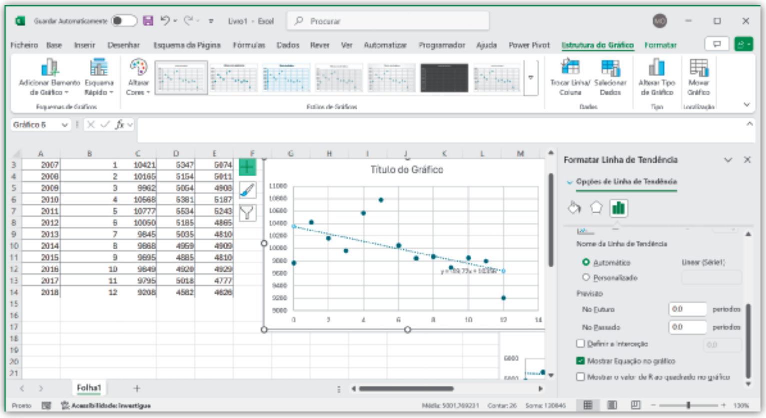
No gráfico de dispersão, seleciona-se + e na linha de tendência *Mais opções*.



Seleciona-se opção linear.



Existe ainda a possibilidade de apresentar a equação da reta no gráfico.

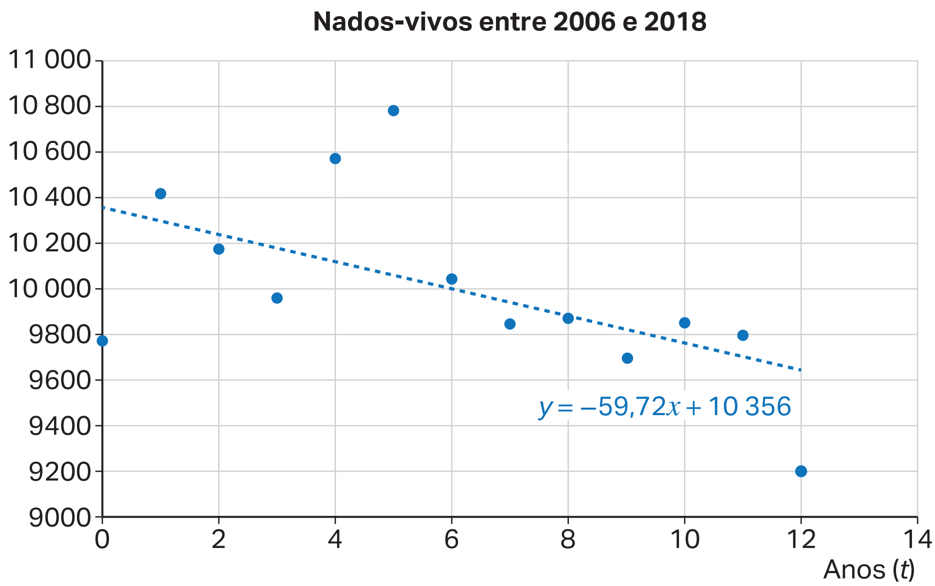


Com esta reta poderemos fazer previsões para o futuro! Com este modelo qual seria a previsão para o número de nados-vivos em 2025?

Usando a reta $y = -59{,}72x + 10\,356$, e pensando que $2025 - 2006 = 19$, poderíamos estimar para 2025 um número de nados-vivos dado por:

$$y = -59{,}72 \times 19 + 10\,356 \approx 9221$$

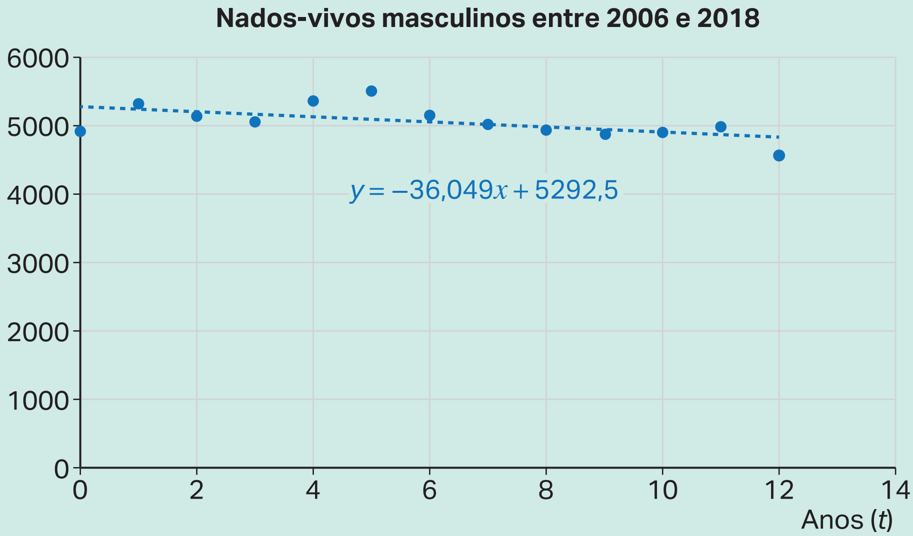
Podes confirmar se este valor está ou não próximo da realidade.

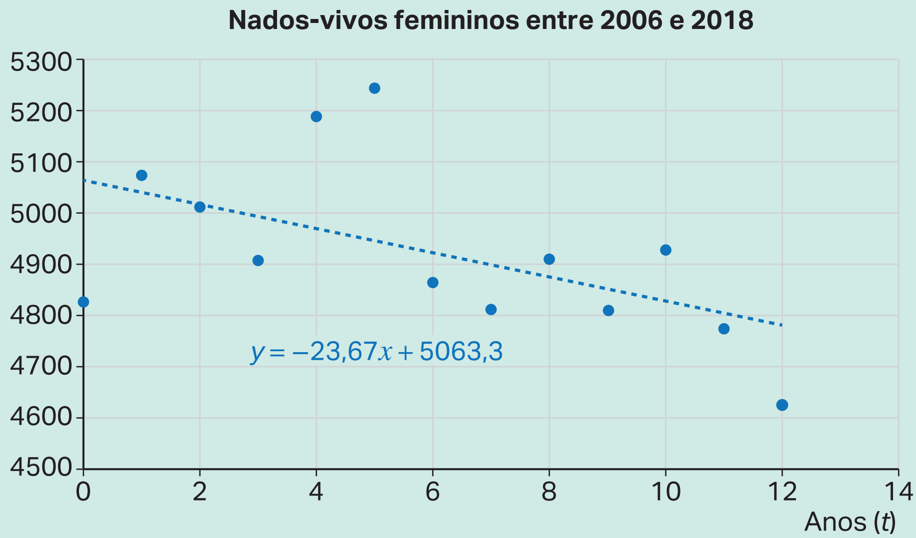


Deve-se ter em conta que nem sempre a reta de regressão se ajusta aos dados recolhidos. Devemos registá-los num gráfico de dispersão e tentar perceber que tipo de curva se poderá ajustar melhor à representação gráfica desses dados.

Tarefa

3 Com os dados da Tabela 5 podemos fazer a análise da evolução dos nados-vivos femininos e masculinos de forma semelhante ao que fizemos para os nados-vivos no global. Nas três situações referidas, o caso em que a reta ajusta melhor os dados registados é nos nados-vivos masculinos. Quer no caso ilustrado dos nados-vivos femininos, quer os nados-vivos global, a reta de regressão linear não se ajusta tanto aos dados, podendo aqui o modelo não traduzir de uma forma tão fiável a previsão para o futuro.





Podes prever o número de nados-vivos masculinos e femininos para 2025? Consulta os dados estatísticos referentes ao ano de 2025 e reflete sobre a boa ou má aproximação deste modelo nos vários casos.

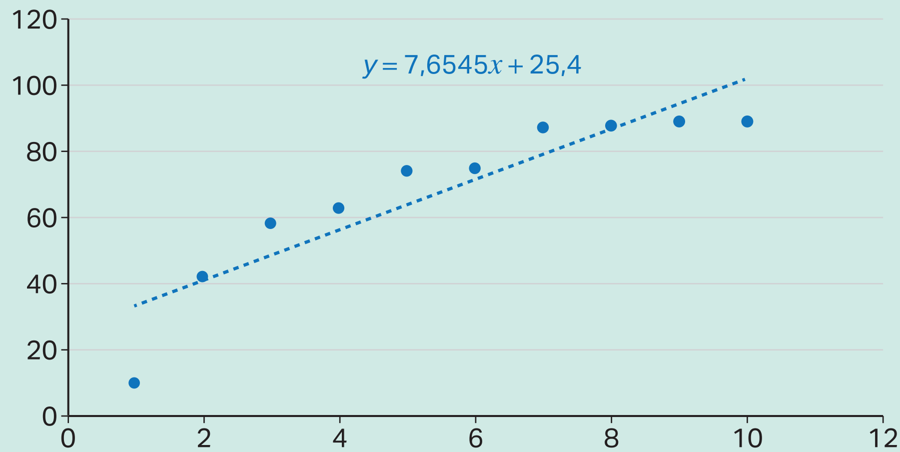
Tarefa

4 Depois de um teste de Matemática, o professor Mário questionou os seus alunos sobre o número de horas de estudo despendidos para o teste e registou numa tabela a relação entre o número de horas que estudaram e as notas dos alunos.

N.º de horas de estudo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nota do teste em %	10	42	58	63	74	75	87	88	89	89

Em seguida, pediu-lhes que marcassem esses pontos no Excel e tirassem conclusões a partir dos dados.

Número de horas estudadas e nota do teste



O Cesário, que é muito perspicaz, disse ao professor: "Estudar pouco tempo não resulta, mas estudar mais do que oito horas não compensa".

Concordas com a observação do Cesário?

Achas que, neste caso, usar uma reta para tirar conclusões sobre o número de horas de estudo e a nota de um teste será útil?

O modelo populacional linear é útil para situações em que as mudanças na população são previsíveis e constantes. No entanto, não leva em consideração fatores como a capacidade de suporte do ambiente ou variações na taxa de crescimento, o que pode limitar a sua aplicabilidade em cenários mais complexos.

Exercícios

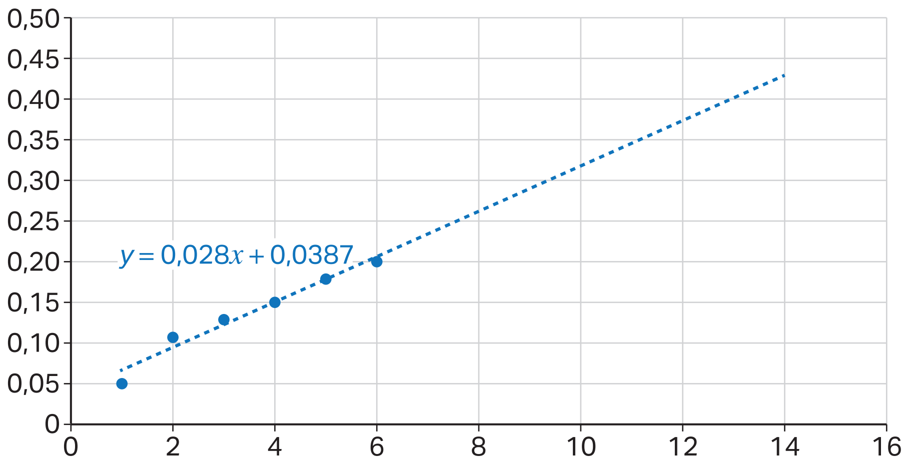
26 A taxa de aprendizagem L de uma língua estrangeira, medida em número de palavras por minuto, depende do número de palavras p que já foram aprendidas, seguindo a equação $L = 20 - 0{,}4p$.

A taxa de aprendizagem está a crescer ou a decrescer? Faz sentido a tua resposta no contexto do problema? Explica porquê.

27 Na tabela, está a relação entre o número de cervejas de 25 cl bebidas e a percentagem de álcool no sangue de um adulto de compleição mediana.

Número de cervejas bebidas (25 cl)	1	2	3	4	5	6
% de álcool no sangue	0,05	0,11	0,13	0,15	0,18	0,2

% de álcool no sangue/número de cervejas



27.1. Qual será a percentagem de álcool no sangue de quem beber oito cervejas estimada por este modelo?

27.2. Investiga qual a taxa de alcoolemia permitida para conduzir e diz quantas cervejas poderá um adulto consumir sem pôr em risco a sua vida e a vida das outras pessoas.

28 Um rio que corre em Santo Antão consegue manter uma população de 8500 peixes se se mantiver sem poluição, como até agora. Contudo, por cada 100 quilogramas de poluentes lançados no rio essa capacidade baixa em 170 peixes.

28.1. Supondo que esta relação é linear, escreve a equação que nos permite calcular a população de peixes P em função do número x de 100 kg de poluente.

28.2. Quantos quilogramas de poluente serão suficientes para acabar com a população de peixes no rio?

29 **Uma empresa de publicidade concluiu que, ao lançar um produto novo numa cidade, a taxa de variação do número de pessoas que conhecem o produto, R, depende do número de pessoas que já o conhecem, x, através da regra:**

$$R = 4960 - 0{,}08x$$

29.1. Supondo que lançam o produto no Mindelo, que tem cerca de 62 000 habitantes, quando será que a taxa de variação se anula?

29.2. A taxa de variação cresce ou diminui com o número de habitantes?

30 **No portal do Instituto Nacional de Estatística de Cabo Verde, constam os dados da variação da inflação ao longo dos anos, desde 1990 até 2024.**

Ano	Taxa de Inflação Nacional	Ano	Taxa de Inflação Nacional	Ano	Taxa de Inflação Nacional
1990	9,0	2002	1,9	2014	– 0,2
1991	6,4	2003	1,2	2015	0,1
1992	5,2	2004	– 1,9	2016	– 1,4
1993	5,9	2005	0,4	2017	0,8
1994	3,3	2006	5,4	2018	1,3
1995	8,4	2007	4,5	2019	1,1
1996	6,0	2008	6,8	2020	0,6
1997	8,7	2009	1,0	2021	1,9
1998	4,3	2010	2,1	2022	7,9
1999	3,9	2011	4,5	2023	3,1
2000	– 2,4	2012	2,5	2024	1,4
2001	3,7	2013	1,5		

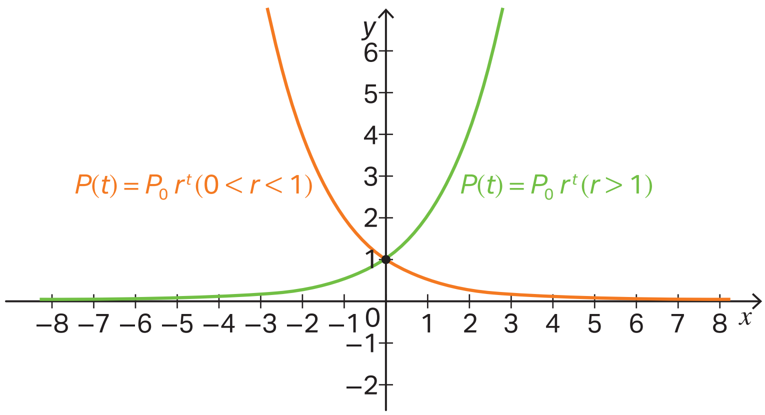
30.1. Submete estes dados no Excel e traça a reta de regressão linear.

30.2. O modelo linear será adequado para prever a inflação nos próximos anos? Discute este tema com os teus colegas.

2.5. Modelo exponencial

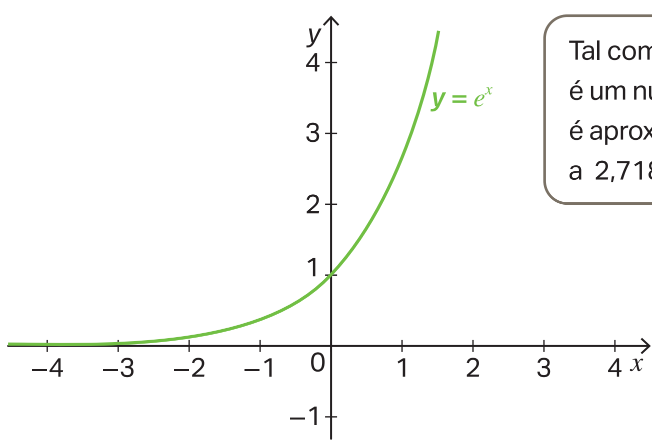
Um modelo exponencial contínuo é definido por uma expressão algébrica do tipo $P(t) = P_0 \cdot r^t$, em que $P_0 \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, $t \in \mathbb{R}$.
A constante r chama-se taxa de crescimento/decrescimento.

- Se $r > 1$, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta (existe crescimento).
- Se $0 < r < 1$, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta (existe decrescimento).



As situações de crescimento exponencial caracterizam-se por uma variação inicial lenta, no caso de um crescimento positivo, que vai aumentando progressivamente até atingir um ritmo muito rápido, a partir de determinado ponto. Por essa razão, o crescimento exponencial é frequentemente associado a cenários de crescimento descontrolado. No caso de um crescimento negativo (decrescimento), observa-se uma rápida redução inicial, seguida por uma variação cada vez mais lenta.

Em particular, em alguns exemplos de uso do modelo exponencial, a constante r corresponde a um número irracional, denominado por número de Neper ou número de Euler, que é representado pela letra e. Assim, é habitual o estudo de funções do tipo $P(t) = P_0 . e^{kt}$.



Tal como π, também e é um número irracional e é aproximadamente igual a 2,718.

Leonard Euler

O símbolo e foi usado pela primeira vez por Leonard Euler, em 1739.

Embora não haja uma certeza absoluta, pensa-se que escolheu este símbolo por ser a letra inicial da palavra *exponencial*.

Curiosidade histórica

Thomas Malthus (1766-1834), já referido na secção anterior, no seu ensaio *An Essay on the Principle of Population* (1798), formulou o modelo:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

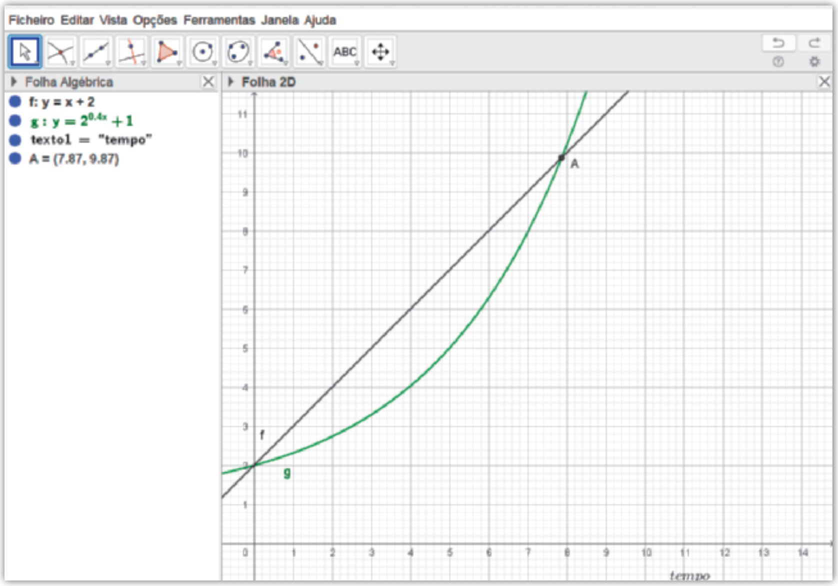
para descrever o tamanho de uma população presente num determinado ambiente em função do tempo, t, contado a partir de um certo instante inicial. N_0 representa o tamanho inicial da população e r é uma constante que varia com a espécie da população.

Malthus argumentou que a população cresce exponencialmente, enquanto os recursos aumentam aritmeticamente, podendo levar à escassez e a crises.

No entanto, Malthus não considerou a capacidade humana de desenvolver tecnologias agrícolas, de se industrializar ou de explorar melhor os recursos naturais. Embora a explosão demográfica dos anos 50 tenha dado origem às teorias neomalthusianas, estudos recentes indicam que, em vez de um crescimento exponencial, a população mundial tem mostrado uma tendência de estabilização.

Exemplo 19

Imaginemos que estamos nas condições seguintes: o modelo para a quantidade de recursos é dado por $y = x + 2$ e o modelo de crescimento populacional é dado por $y = 2^{0,4x} + 1$, $x \geqslant 0$. No GeoGebra, o primeiro modelo é representado pela função f e o segundo pela função g. Se considerarmos o tempo em anos, durante aproximadamente sete anos, o gráfico dos recursos está abaixo do que representa a população, ou seja, os recursos são suficientes para aquela população. No ponto de interseção dos dois gráficos, A, a situação inverte-se: os recursos serão escassos e, como consequência, a população passa fome.



Um possível modelo contínuo de Malthus.

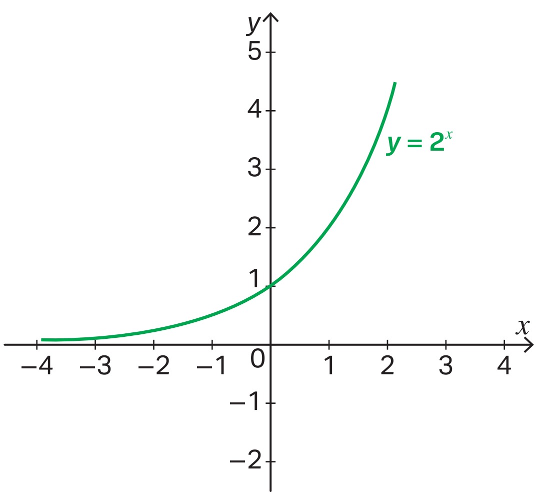
Será que a questão levantada por Malthus ainda é uma questão que colocamos na nossa época?

2.5.1. Estudo das propriedades da família de funções definidas por $f: t \longmapsto P_0 \cdot r^t$ $(P_0 \neq 0\,,\ r > 1)$

Comecemos por estudar, por exemplo, a função real de variável real definida por:

$$f(x) = 2^x$$

Graficamente, temos:



Observando o gráfico, podemos conjeturar que:

- Domínio: $D_f = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R}^+$
- O gráfico da função f é uma linha contínua.
- $2^x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}:$ a função f é positiva em $\mathbb{R}$, logo, não tem zeros.

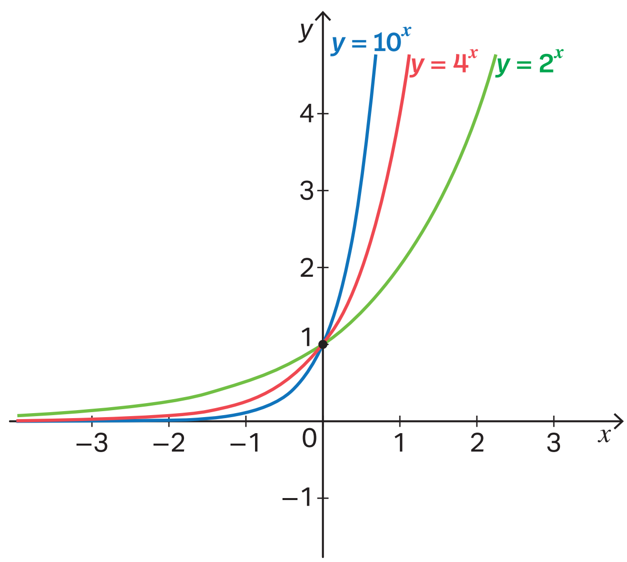
- A função é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Da observação do gráfico, podemos conjeturar que:

- se escolhermos valores de x suficientemente grandes, obtemos como imagens valores tão grandes quanto queiramos;
- se escolhermos para x valores negativos, com valor absoluto muito grande, obtemos valores de 2^x tão próximos de zero quanto queiramos. A curva aproxima-se, cada vez mais, do eixo Ox. Em linguagem matemática dizemos que o gráfico da função tem uma assíntota horizontal de equação $y = 0$ quando x tende para $-\infty$.

Todas as funções exponenciais de base $r > 1$ apresentam características análogas às da função definida por $f(x) = 2^x$.

Observemos algumas representações gráficas.



Quanto maior for a base da exponencial, mais rápido será o seu crescimento.

Para qualquer função exponencial de base r superior a 1:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = \mathbb{R}^+$
- É positiva em $\mathbb{R}$.
- Não tem zeros.
- É estritamente crescente.
- O gráfico tem uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.
- $f(1) = r$ e $f(0) = 1$

2.5.2. Equações e inequações exponenciais

O arquipélago de Cabo Verde recebe um novo modelo de telemóvel e o número de pessoas que o compram duplica a cada mês. Supõe que, no primeiro mês, foram vendidas 200 unidades. O número de telemóveis vendidos após t meses é dado por:

$$N(t) = 200 \cdot 2^t$$

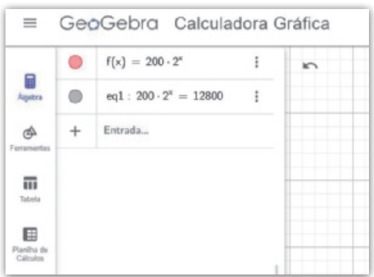
Após quantos meses o número total de telemóveis vendidos atingirá $12\,800$ unidades?

Para responder a esta questão, teremos de resolver a equação:

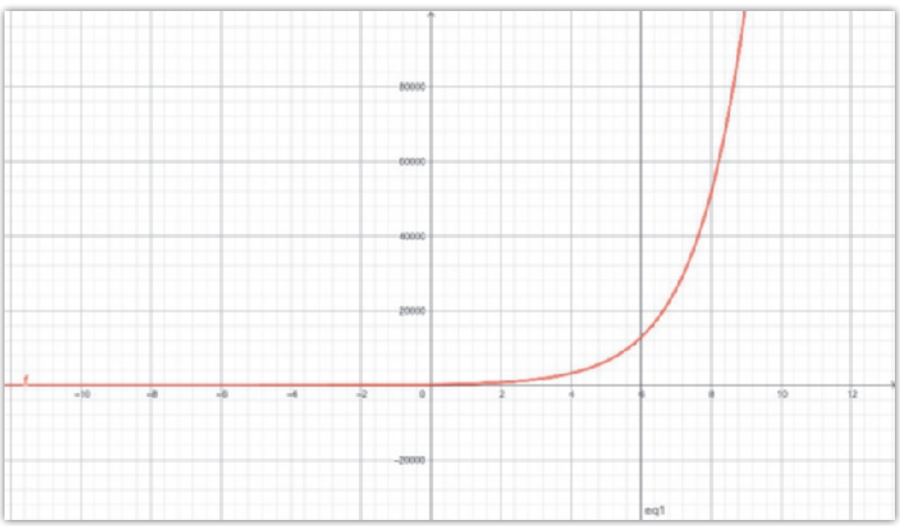
$$200 \times 2^t = 12\,800 \iff 2^t = \frac{12\,800}{200} \iff 2^t = 64 \iff 2^t = 2^6$$

Podemos concluir que $t = 6$.

Com recurso ao GeoGebra (www.geogebra.org), poderás, na barra de entrada, escrever a equação $f(x) = 200 * 2 \wedge x$, seguida de $200 * 2 \wedge x = 12\,800$.



Obterás o gráfico seguinte onde podes verificar que o resultado é $t = 6$.



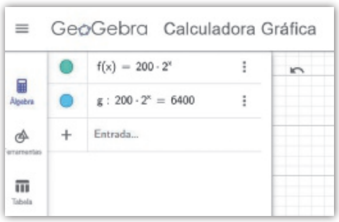
Em relação à situação modelada pela função definida por $N(t) = 200 \cdot 2^t$, ao fim de quantos meses se venderam mais de 6400 telemóveis?

Neste caso, temos de resolver a seguinte inequação:

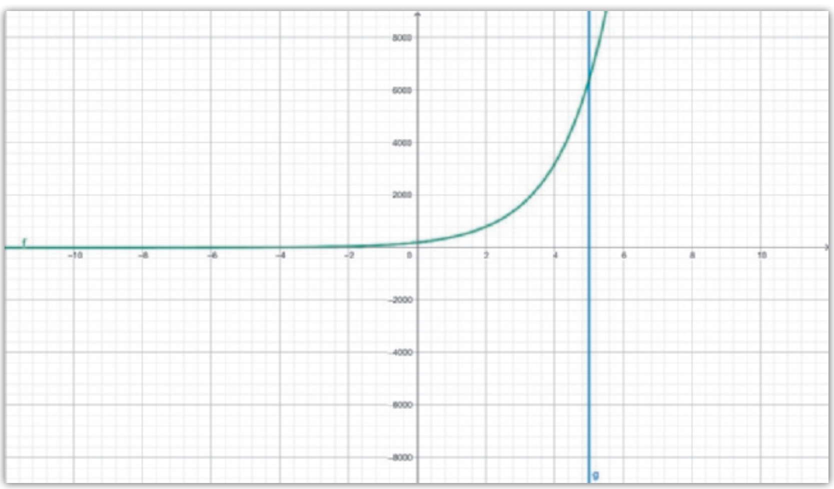
$$200 \times 2^t > 6400 \iff 2^t > \frac{6400}{200} \iff 2^t > 32 \iff 2^t > 2^5$$

Como a função definida por $y = 2^t$ é crescente, temos $t > 5$, concluindo-se que, a partir do 5.º mês, venderam-se mais de 6400 telemóveis.

Graficamente, a resolução consiste em encontrar o conjunto de números reais que verifica a condição $200 \times 2^t > 6400$. Recorrendo à calculadora gráfica do GeoGebra (www.geogebra.org), na barra de entrada escreve-se a equação $f(x) = 200 * 2 \wedge x$ seguida de $200 * 2 \wedge x = 6400$.



Obterás o gráfico seguinte onde podes verificar que o ponto de interseção tem coordenadas $(5, 6400)$. Esse ponto mostra que ao fim de cinco meses venderam-se exatamente 6400 telemóveis. Como o que queres saber é ao fim de quanto tempo se venderam mais de 6400 telemóveis, a resposta será $t > 5$.



Tarefa

5 Um estudo conduzido por uma equipa de investigadores sociais analisou o crescimento da utilização diária de uma nova rede social chamada LinkZone entre jovens dos 15 aos 24 anos.

Observou-se que, após o lançamento, o número de utilizadores ativos desta rede cresce exponencialmente à medida que os jovens recomendam a plataforma uns aos outros.

Sabendo que:

– no dia do lançamento, havia 2000 utilizadores ativos;

– e que o número de utilizadores aumentava, em média, 18% por dia,

o modelo que descreve este crescimento é:

$$U(t) = 2000 \cdot e^{0,18t}$$

em que:

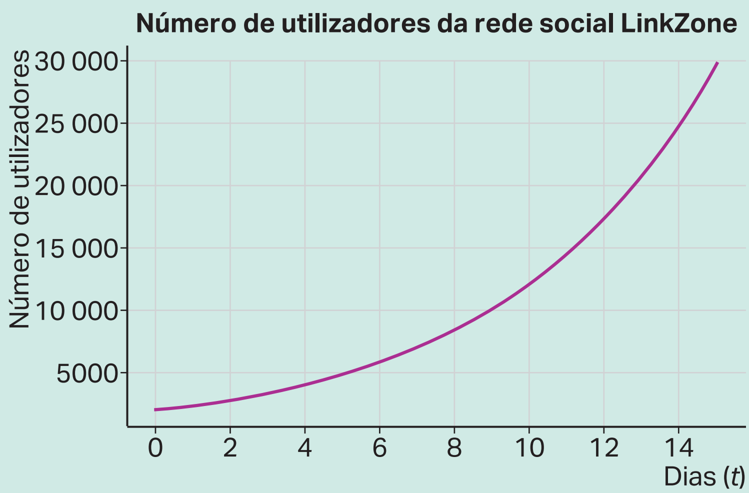
– $U(t)$ representa o número de utilizadores ativos ao fim de t dias;

– t é o tempo em dias.

5.1. Quantos utilizadores ativos haverá ao fim de sete dias?

5.2. Interpreta o valor $0,18$ no contexto do problema.

5.3. Observa o gráfico da função $U(t)$ para $t \in [0, 15]$.



a) Que tipo de crescimento se observa?

b) Qual a implicação deste tipo de crescimento para a propagação de uma rede social entre jovens?

5.4. Que fatores podem influenciar o crescimento real de uma rede social, fazendo com que este modelo deixe de ser adequado ao fim de algum tempo?

Tarefa

6 *Cabo Verde tornou-se em 2020 no segundo mais importante ponto de desova de tartarugas marinhas, com o número de ninhos a bater o recorde de quase 200 000 em todo o país, segundo números divulgados em março do ano passado pelas autoridades nacionais. O arquipélago viu o total de 10 725 ninhos de tartarugas detetados no arquipélago em 2015 aumentar para 198 787 ninhos em 2020, quase 19 vezes mais.*
Com a educação ambiental, vigia de mais de 180 quilómetros de praias e aplicação da nova legislação que criminaliza a caça e o consumo das tartarugas, a taxa de captura diminuiu significativamente, de 8,25% em 2015 para 1,54% em 2020, segundo os dados oficiais mais recentes.
Tradicionalmente, a tartaruga era um recurso alimentar para as pessoas em Cabo Verde nos períodos de seca. Nos últimos 20 anos tem mudado bastante, porém, o consumo de tartaruga ainda acontece, mas o Governo criou leis que tornam mais difícil que as pessoas apanhem tartarugas, reconheceu o biólogo da Bios.CV.
Por outro lado, explicou Pedro Diaz, também ***existe agora "mais consciência ambiental, sobretudo na população mais jovem"*** *do país e a atividade envolvendo as tartarugas marinhas "está a atrair turistas para Cabo Verde". "Os turistas gostam de ver as tartarugas", sublinhou.*
O período de desova da tartaruga marinha nas ilhas cabo-verdianas acontece anualmente entre julho e novembro, sendo habitualmente os ninhos alvo da predação de cães ou caranguejos. Em 2021, os voluntários da Bios.CV monitorizaram 8431 tartarugas nas praias da Boa Vista e resgataram 132, com ações que levaram a que nenhuma tartaruga fosse caçada, garantiram. Além disso, ***1135 ninhos foram protegidos na incubação*** *e diferentes métodos foram testados para aumentar a produção masculina (que depende da temperatura nos ninhos), num total de 66 679 tartarugas bebés que nasceram na incubadora e foram libertadas no mar pelos voluntários cabo-verdianos e internacionais da Bios.CV.*

Cabo Verde a caminho da liderança mundial da nidificação de tartarugas marinhas
in Observador, 7 de fevereiro de 2022

A tabela ao lado apresenta os dados relativos ao número de ninhos de tartaruga entre 2015 e 2023. Considerando que $x = 0$ representa o ano de 2015, recorre ao Excel para encontrar:

Ano	N.º de ninhos
2015	10 725
2016	30 470
2017	44 035
2018	68 488
2020	109 126
2022	130 000
2023	198 787

6.1. um modelo exponencial $P(t) = P_0 \cdot r^t$ ou $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$;

6.2. com base no modelo encontrado na alínea anterior e supondo que este mantém a regularidade, determina (apresenta os resultados arredondados à unidade):

a) uma estimativa do número de ninhos de tartaruga para o ano 2025;

b) em que ano o número de ninhos de tartaruga será superior a um milhão.

Exercícios

31 **Numa experiência realizada num laboratório, observou-se que uma determinada colónia de bactérias se reproduzia segundo a lei:**

$$N(t) = 150 \cdot e^{0,4t}$$

em que $N(t)$ representa o número de bactérias ao fim de t horas.

31.1. Interpreta o significado do coeficiente 150 no contexto da situação.

31.2. Quantas bactérias existiam na colónia passadas cinco horas?

31.3. Ao fim de quantas horas existiam 1000 bactérias?

32 **Num determinado Estado, o pagamento de uma multa por estacionamento indevido obedece ao modelo $M(t) = 5000 \times 1,1^t$, em que t representa o número de meses decorridos depois de a sanção ser cometida.**

32.1. Qual será o custo da multa no caso do condutor a pagar no momento da infração?

32.2. Se o infrator só pagar a multa passado meio ano, qual será o valor?

33 **A temperatura de um objeto submerso no mar em Porto Novo ajusta-se a uma função exponencial de base e. Supõe que a temperatura $C(t)$, em °C, de um objeto é dada por:**

$$C(t) = 20 + 8 \cdot e^{-0,2t}$$

em que t é o tempo em minutos.

33.1. Qual é a temperatura inicial do objeto antes de ser submerso?

33.2. Qual é a temperatura do objeto ao fim de 10 minutos?

33.3. Justifica por que razão, com o decorrer do tempo, a temperatura se aproxima de 20 °C.

34 **Os biólogos marinhos que estudam o ecossistema marinho ao largo da ilha de São Vicente observaram que, sob condições ideais de temperatura e luminosidade, a população de fitoplâncton aumenta de forma exponencial. Numa experiência controlada, constatou-se que a taxa de crescimento populacional é de 12% por dia.**

A população inicial de fitoplâncton era de 5 mil indivíduos por mililitro de água.

A função que modela o número de indivíduos de fitoplâncton, $P(t)$, ao fim de t dias, é dada por:

$$P(t) = 5000 \cdot e^{0,12t}$$

34.1. Qual será a população de fitoplâncton ao fim de cinco dias?

34.2. Após quantos dias a população duplicará?

34.3. Interpreta o valor $0,12$ no contexto da situação.

34.4. Constrói o gráfico da função $P(t)$ para $t \in [0, 20]$. Que comportamento é possível observar?

34.5. Que fatores reais podem afetar o crescimento da população de fitoplâncton, levando a desvios do modelo exponencial?

2.6. Modelo logarítmico

Exemplo 20

Nos últimos anos, o uso das redes sociais tem aumentado significativamente entre os jovens cabo-verdianos. Um estudo realizado por um grupo de investigadores da área das ciências sociais procurou modelar o crescimento da popularidade de uma nova rede social em Cabo Verde ao longo do tempo, em função do número de semanas desde o seu lançamento.

A tabela seguinte apresenta os dados recolhidos.

Semanas após o lançamento (x)	Utilizadores ativos (em milhares) (y)
1	1,00
2	2,39
3	3,20
4	3,77
5	4,22
6	4,61
8	5,16
10	5,61
15	6,41
20	6,99

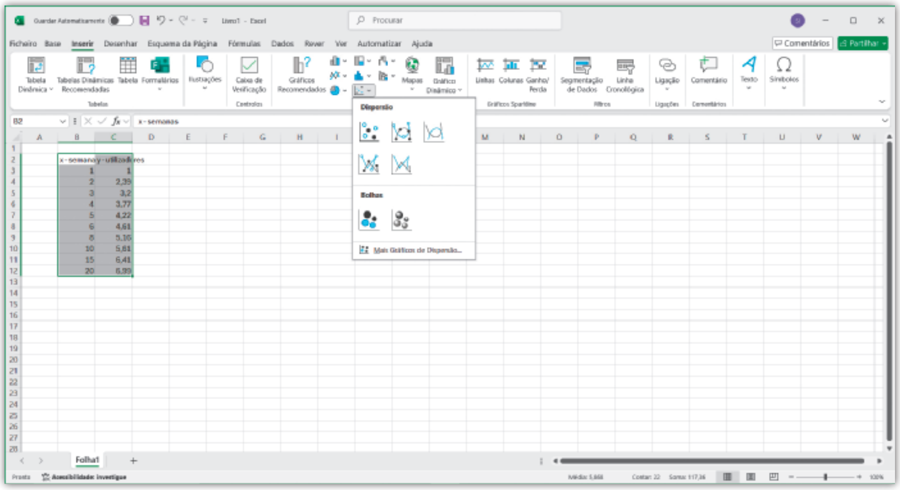
1. Representa graficamente os pontos (x, y) da tabela apresentada.
2. Consideras que o conjunto de dados revela as características próprias de um modelo linear? E de um modelo exponencial? Justifica.
3. Recorrendo ao Excel:
   a) encontra um modelo linear para este conjunto de pontos;
   b) encontra um modelo exponencial;
   c) comenta o ajustamento dos dois modelos ao conjunto de dados fornecido.
4. Dado que existem outros tipos de modelos matemáticos para além do linear e do exponencial, o Excel sugere outros modelos de regressão. Um deles é o modelo logarítmico que se ajusta a este conjunto de dados. Compara o seu ajustamento com os modelos anteriores.

Resolução/Discussão da atividade

1. Vamos recorrer ao Excel para obter o gráfico pedido.

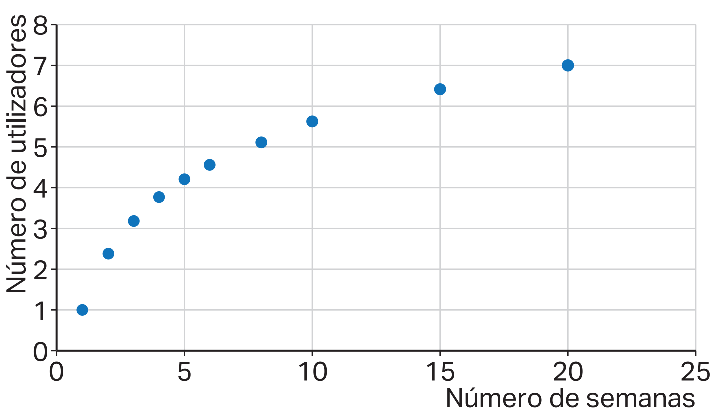
Começamos por colocar os dados numa tabela.

Em seguida, selecionam-se as duas colunas, escolhe-se ***inserir*** do menu superior e seleciona-se o gráfico de dispersão.



2. A principal característica do modelo linear é um crescimento (ou decrescimento) constante de semana para semana, enquanto o modelo exponencial se caracteriza por uma variação mais lenta no início que se vai acentuando à medida que o tempo passa, ou o contrário, dependendo do valor da taxa.

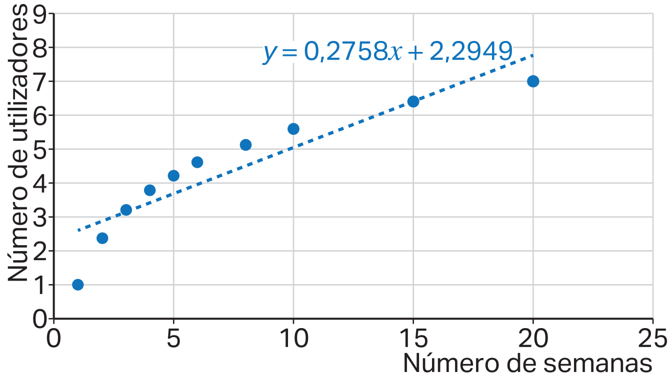
Este conjunto de dados não apresenta características de nenhum destes modelos.



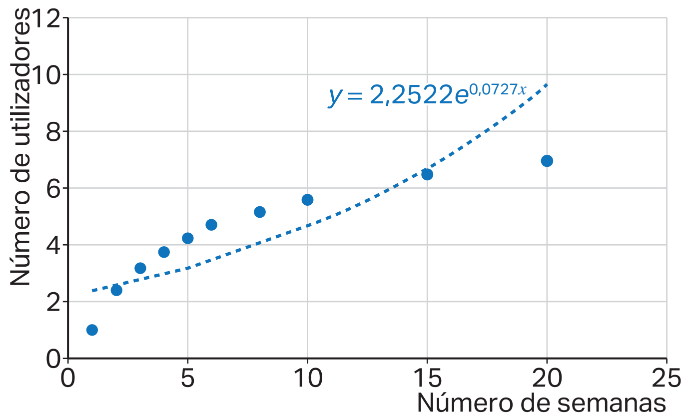
Observando o conjunto de dados verificamos que existe um crescimento mais acentuado no início que vai sendo cada vez menor com o passar das semanas.

3. O Excel fornece os seguintes modelos para o conjunto de dados relativos ao número de utilizadores da nova rede social:

a) Modelo linear



b) Modelo exponencial



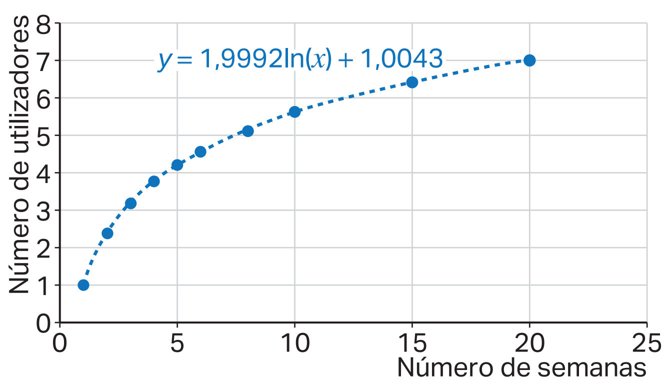
c) Tal como era de esperar, nenhum dos modelos parece ajustar-se aos dados.

4. Procurando o modelo logarítmico no Excel, obtém-se:

$$y = 1{,}9992 \ln (x) + 1{,}0043$$

Podemos aproximar a:

$$y = 2 \ln (x) + 1$$



Este modelo parece ajustar-se muito melhor ao conjunto dos dados do que os outros.

2.6.1. Logaritmo de um número

Para resolvermos uma equação de grau superior ou igual a 2, por exemplo, $x^3 = 64$, o valor de x é obtido aplicando a operação inversa da potenciação, ou seja, a radiciação:

$$x^3 = 64 \iff x = \sqrt[3]{64} \iff x = 4$$

Mas, para resolvermos uma equação exponencial, por exemplo, $4^x = 64$, procuramos mentalmente qual é o número a que devemos elevar 4 para obter 64, ou seja, $x = 3$, pois $4^3 = 64$.

Mas, se a equação fosse $4^x = 68$, a solução já não era tão evidente. A solução desta equação chama-se logaritmo de 68 na base 4 e é dada por:

$$4^x = 68 \iff x = \log_4 68$$

A calculadora permite-nos obter um valor aproximado para este logaritmo.

Chama-se **logaritmo** de um número positivo x na base a $\left(a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}\right)$ ao número y, tal que:

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

A partir do conceito de logaritmo, assim definido, é possível falar da **função logarítmica de base *a*** que a cada número real positivo x faz corresponder $\log_a x$.

Logaritmos especiais

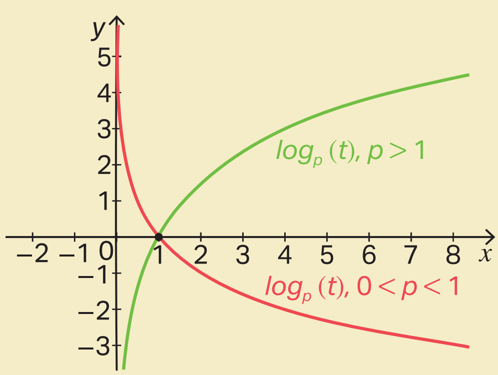
- Logaritmo na base 10: pode omitir-se a base e representa-se apenas por $\log(x)$.
- Logaritmo na base e (número de Neper): pode omitir-se a base e representa-se apenas por $\ln(x)$. Este logaritmo também é designado por logaritmo natural ou neperiano.

Existem imensos fenómenos que são modelados por expressões com logaritmos, sendo os mais utilizados o logaritmo de base 10 e o logaritmo de base e.

Definição

Pode definir-se um modelo logarítmico contínuo, para $t \in \mathbb{R}^+$, por uma expressão algébrica do tipo $P(t) = a + b \cdot log_p(t)$, em que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $p \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.

- Se $p > 1$, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta (existe crescimento).
- Se $0 < p < 1$, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta (existe decrescimento).



Características de um modelo logarítmico

- O modelo apenas está definido para valores positivos de t.
- Apresenta uma variação mais acentuada numa fase inicial, abrandando gradualmente à medida que o tempo passa.
- Apesar da sua variação se tornar gradualmente mais lenta, a função não atinge um valor constante nem estabiliza.

Um modelo logarítmico contínuo muito utilizado é o de base e:

$$y = a + b \cdot \ln(t)\text{, em que } a, b \in \mathbb{R}$$

Nota histórica

John Napier

John Napier, também conhecido por Neper (1550-1617), nascido na Escócia, foi um matemático que revolucionou o cálculo com a invenção dos **logaritmos** e a definição das suas propriedades. Em 1614, publicou a sua obra mais célebre, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, onde introduziu os logaritmos (com sete casas decimais) como uma ferramenta para simplificar cálculos, transformando multiplicações e divisões em somas e subtrações.

Pouco depois, o matemático inglês **Henry Briggs** (1561-1630) reconheceu o enorme valor do trabalho de Neper e colaborou com ele na adaptação e divulgação dos logaritmos. Briggs propôs a utilização da **base 10** para os logaritmos, o que facilitou ainda mais a sua aplicação em contextos científicos e comerciais.

Foi Briggs quem elaborou as primeiras **tabelas de logaritmos decimais** de grande precisão (com 15 casas decimais), publicadas em 1624, tornando os logaritmos uma ferramenta indispensável para astrónomos, navegadores, engenheiros e matemáticos, ao longo de vários séculos, até ao surgimento das calculadoras eletrónicas.

O conceito de logaritmo foi mais tarde aprofundado por Leonhard Euler (1707-1783), que introduziu o número e, dando origem aos **logaritmos naturais** ou **neperianos**.

Como exemplos reais de aplicabilidade, de entre as muitas relações envolvendo logaritmos, encontramos as que nos dão:

- a magnitude de um sismo (na escala de Richter): $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, em que A é a amplitude do sismo e A_0 é a amplitude de referência;
- a acidez de substâncias: $\text{pH} = -\log\left(H^+\right)$; em que H^+ representa a concentração de iões de hidrogénio na substância;
- a complexidade de algoritmos informáticos: o tempo de execução de uma pesquisa binária é proporcional a $\log_2(n)$, em que n é o número de dados disponível;
- a proteção de dados digitais com chaves criptográficas, diretamente relacionada com logaritmos.

Exemplo 21

1. Vamos determinar sem recorrer à calculadora:

a) $\log_3(9)$

b) $\log_2(1)$

c) $\log(10)$

d) $\log_5(\sqrt{5})$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(2)$

2. Agora, determinamos, recorrendo à calculadora, os seguintes logaritmos:

a) $\log(2)$

b) $\log(150)$

c) $\ln(8)$

d) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Resolução:

1. a) $\log_3(9) = 2$ porque $3^2 = 9$

b) $\log_2(1) = 0$ porque $2^0 = 1$

c) $\log(10) = 1$ porque $10^1 = 10$

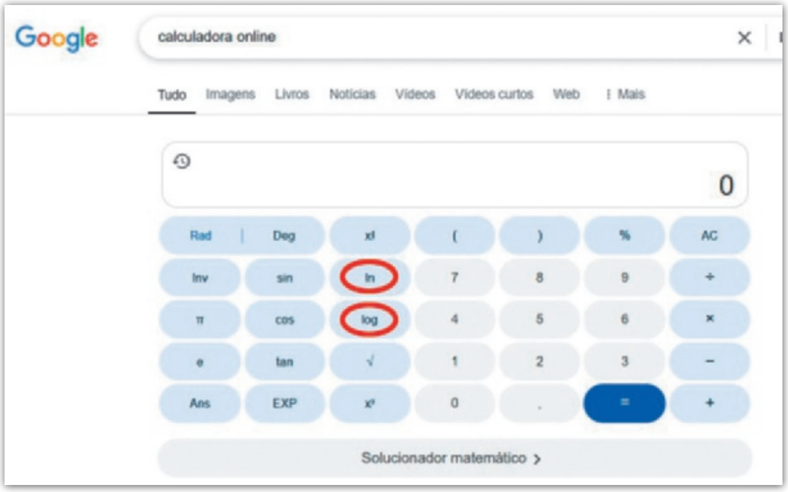
d) $\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ porque $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

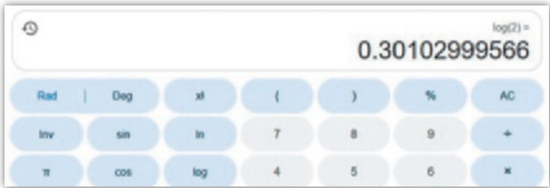
2. Todas as calculadoras científicas dispõem de:

- uma tecla LOG que permite obter os logaritmos de base 10;
- uma tecla LN que permite obter os logaritmos de base e.

Podemos, por exemplo, usar uma calculadora *online*:



a)



b)

c)

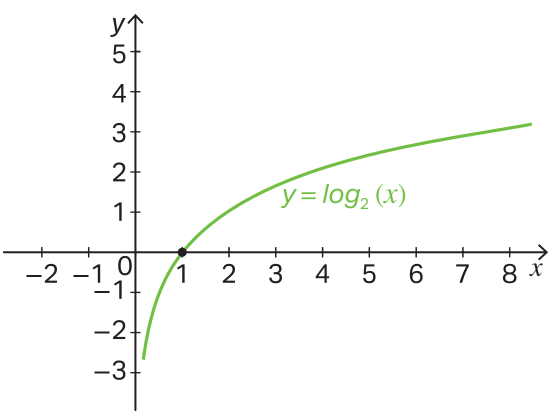
d)

2.6.2. Função logarítmica de base superior a 1

Comecemos por estudar, por exemplo, a função real de variável real definida por:

$$f: x \longmapsto \log_2(x)$$

Graficamente, temos:



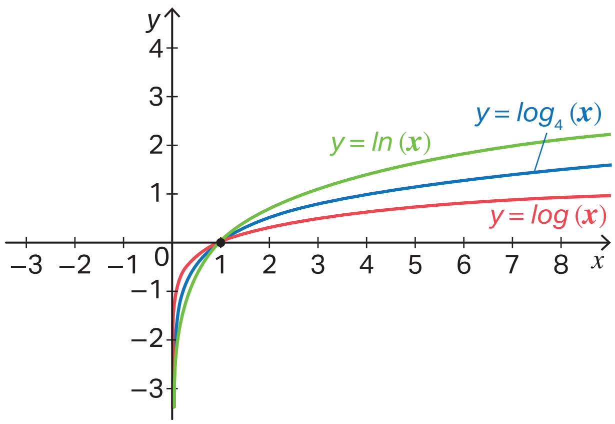
Observando o gráfico, podemos conjeturar que:

- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $D'_f = \mathbb{R}$
- O gráfico de f é uma linha contínua.
- Tem um zero (em $x = 1$), ou seja, o ponto $(1, 0)$ pertence ao gráfico.
- É positiva para $x \in]1, +\infty[$.
- É negativa para $x \in]0, 1[$.

- A função é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.
- Quando x se aproxima de zero por valores superiores a zero, o gráfico da função $\log_2(x)$ tende para $-\infty$. Dizemos que a reta vertical de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função.
- Quando x tende para valores tão grandes quanto se queira, o gráfico da função $\log_2(x)$ tende para $+\infty$.

Todas as funções logarítmicas de base $p > 1$ apresentam características análogas às da função definida por $f(x) = \log_2(x)$.

Observemos algumas representações gráficas.



Quanto menor for a base do logaritmo, mais rápido será o seu crescimento.

Para qualquer função logarítmica de base p superior a 1:

- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $D_f = \mathbb{R}$
- É positiva em $]1, +\infty[$ e negativa em $]0, 1[$.
- Tem um zero em $x = 1$, pois a função interseta o eixo Ox nesse ponto: $f(1) = 0$.
- É estritamente crescente.
- O gráfico tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$.

Algumas propriedades básicas dos logaritmos

Seja p tal que $p \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e a um número real positivo.

- $\log_p(1) = 0$
- $\log_p(p) = 1$
- $\log_p\left(p^k\right) = k$
- $\log_p(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(p)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(p)} = \dfrac{\log_b(a)}{\log_p(a)}$
- $p^{\log_p(a)} = a$

2.6.3. Equações e inequações logarítmicas

Na ilha de São Vicente, uma associação ambiental está a monitorizar a quantidade de lixo recolhido numa praia ao longo do tempo, com o objetivo de sensibilizar a população para a importância da preservação ambiental. Verificou-se que, após uma campanha de sensibilização, a quantidade de lixo (em quilogramas) recolhida semanalmente é dada por:

$$L(t) = 120 \log(t+1)$$

em que t representa o número de semanas após o início da campanha e $L(t)$ é a quantidade total de lixo recolhida até à semana t.

Sabendo que, ao fim de um certo número de semanas, tinham sido recolhidos 240 kg de lixo, determina quantas semanas passaram desde o início da campanha.

Para responder a esta questão, teremos de resolver a equação:

$$120 \times \log(t+1) = 240 \Leftrightarrow \log(t+1) = \frac{240}{120} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log(t+1) = 2 \Leftrightarrow t+1 = 10^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t+1 = 100 \Leftrightarrow t = 100-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = 99$$

Podemos concluir que passaram 99 semanas desde o início da campanha.

Em relação à situação modelada pela função definida por $L(t) = 120 \log(t+1)$, ao fim de quantas semanas se recolheu mais de 60 kg de lixo?

Neste caso, temos de resolver a seguinte inequação:

$$120 \times \log(t+1) > 60 \Leftrightarrow \log(t+1) > \frac{60}{120} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log(t+1) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t+1 > 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t > 10^{\frac{1}{2}} - 1 \Leftrightarrow t > 3{,}162 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t > 2{,}162$$

Como t representa semanas completas, podemos concluir que foram precisas três semanas para recolher mais de 60 kg de lixo.

Exemplo 22

Cabo Verde está localizado numa região de atividade sísmica moderada.
É importante entender o significado da **escala de Richter**, frequentemente mencionada nos noticiários, especialmente após pequenos tremores sentidos em ilhas como Fogo ou Sal.

A **escala de Richter**, criada em 1935 pelo norte-americano Charles Richter (1900-1985), mede a magnitude M de um sismo com base na fórmula:

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

em que:

- A é a amplitude do sismo;
- A_0 é a amplitude de referência.

1. Se um sismo tem amplitude $A = 1000 \times A_0$, qual é a sua magnitude M?

2. E se outro sismo tiver $A = 10\ 000 \times A_0$?

3. Foram registados dois sismos em Cabo Verde:

- um na ilha do Fogo, com magnitude $4{,}5$;
- outro na ilha do Sal, com magnitude $6{,}5$.

a) Qual é a diferença entre as magnitudes dos dois sismos?

b) Estabelece uma relação entre as amplitudes dos sismos na ilha do Sal e na ilha do Fogo.

(Sugestão: Usa a fórmula $\Delta M = \log\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$.)

Resolução:

1. $M = \log\left(\frac{1000A_0}{A_0}\right) = \log(1000) = 3$

2. $M = \log(10\ 000) = 4$

3. **a)** $\Delta M = 6{,}5 - 4{,}5 = 2$

b) $\Delta M = \log\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = 10^{\Delta M} \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = 10^2 \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = 100$

A amplitude do sismo da ilha do Sal foi 100 vezes maior que a do sismo da ilha do Fogo.

Exemplo 23

Nos últimos anos, o uso das redes sociais tem aumentado significativamente entre os jovens cabo-verdianos. Um estudo realizado por um grupo de investigadores da área das ciências sociais procurou modelar o crescimento da popularidade de uma nova rede social em Cabo Verde, ao longo do tempo, em função do número de semanas desde o seu lançamento.

No início desta secção vimos que o modelo logarítmico $y = 2\ln(x) + 1$ se ajustava aos dados recolhidos.

1. Com base no modelo encontrado:
   a) estima o número de utilizadores (em milhares) da nova rede social 25 semanas após o seu lançamento;
   b) estima o número de utilizadores (em milhares) da nova rede social 30 semanas após o seu lançamento;
   c) determina após quantas semanas se espera atingir os 8 mil utilizadores.
2. Comenta as limitações deste modelo para prever o número de utilizadores a longo prazo.

Resolução:

1. Recorrendo a uma calculadora *online*:

a)

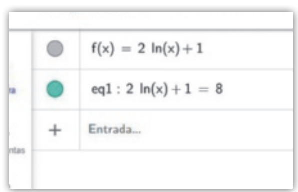
Ao fim de 25 semanas, estima-se que a rede social tenha, aproximadamente, 7438 utilizadores.

b)

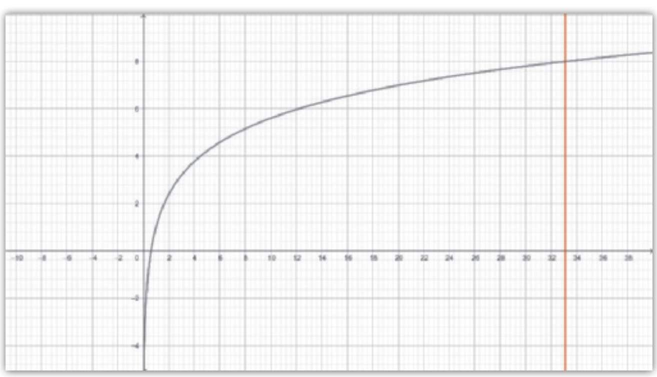
Ao fim de 30 semanas, estima-se que a rede social tenha, aproximadamente, 7802 utilizadores.

c) Queremos saber qual é o valor de x quando $y = 8$, ou seja, resolver a equação $8 = 2\ln(x) + 1$.

Podemos recorrer à calculadora gráfica do GeoGebra (www.geogebra.org) para resolver esta equação.
Na barra de entrada escreve a equação $f(x) = 2\ln(x) + 1$ seguida de $2\ln(x) + 1 = 8$.



Obterás o gráfico seguinte onde podes verificar que o resultado é, aproximadamente, $x = 33$.



2. Embora o modelo logarítmico se ajuste bem aos dados iniciais, **há limitações importantes quando tentamos fazer previsões a longo prazo**:
   - i. **O crescimento logarítmico é lento**: À medida que o tempo avança, o valor de $\ln(x)$ cresce muito lentamente. Isso significa que o número de utilizadores previsto pelo modelo vai aumentando, mas de forma cada vez mais lenta – o que pode não refletir a realidade.
   - ii. **A capacidade de saturação é ignorada**: O modelo não considera que possa existir um número máximo de utilizadores (por exemplo, a população jovem com acesso à internet em Cabo Verde). Ou seja, o modelo prevê um crescimento contínuo, mesmo quando na prática esse crescimento tenderá a estabilizar.
   - iii. **Não considera fatores externos**: O modelo ignora eventos que podem acelerar ou travar o crescimento (como campanhas de divulgação, alterações na app, concorrência, limitações tecnológicas ou económicas, etc.).
   - iv. **Extrapolação perigosa**: Usar este modelo para prever o comportamento daqui a muitos meses ou anos pode levar a **conclusões pouco realistas**, especialmente se não for ajustado com novos dados.

Exercícios

35 O número de turistas que visitam uma determinada ilha de Cabo Verde ao longo dos anos pode ser modelado pela função:

$$T(t) = 1000 \cdot \log(t+1)$$

em que $T(t)$ representa o número de turistas (em milhares) e t representa o número de anos desde 2020.

35.1. Quantos turistas (em milhares) visitaram a ilha em 2025?

35.2. Em que ano se atingirá a marca de 8000 turistas?

36 O crescimento da população de uma vila em Santiago pode ser modelado por:

$$P(t) = 2000 + 500 \cdot \ln(2t)$$

em que $P(t)$ representa a população e t os anos após 2018.

36.1. Qual era a população da vila em 2024?

36.2. E em 2025?

36.3. Em que ano a população atingirá os 4000 habitantes?

2.7. Modelo logístico

O modelo populacional logístico é um conceito fundamental em ecologia e dinâmica populacional, oferecendo uma estrutura mais realista para entender o crescimento populacional em comparação com o modelo exponencial. Diferente do modelo exponencial, que assume recursos ilimitados e crescimento contínuo, o modelo logístico incorpora o conceito de capacidade de suporte ou capacidade máxima – o tamanho máximo da população que um ambiente pode sustentar indefinidamente.

O modelo logístico é apropriado quando:

- **há crescimento inicial rápido**, mas depois esse crescimento abranda;
- existe um **limite natural ou ambiental** ao crescimento (como comida, espaço, recursos);
- se estudam **sistemas vivos ou sociais** que não crescem infinitamente;
- se quer **evitar previsões irreais** de crescimento ilimitado.

O modelo logístico é descrito por uma *equação diferencial* que se escreve da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

em que:

- P é o tamanho da população no instante t;
- r é a taxa de crescimento da população ao longo do tempo;
- K é a capacidade de suporte ou máxima do ambiente (ou seja, o limite de crescimento).

Mas usar o modelo logístico com esta equação não seria nada simples…

Numa matemática mais avançada, podemos *integrar esta equação diferencial* e a expressão da função que nos permite calcular a população num dado instante t é dada por:

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

em que e é a base do logaritmo natural designado por número de Neper e A é uma constante relacionada com a condição inicial; no instante $t = 0$ a população $P(0)$ é dada por:

$$P(0) = \frac{K}{1 + A} \Leftrightarrow A = \frac{K}{P(0)} - 1$$

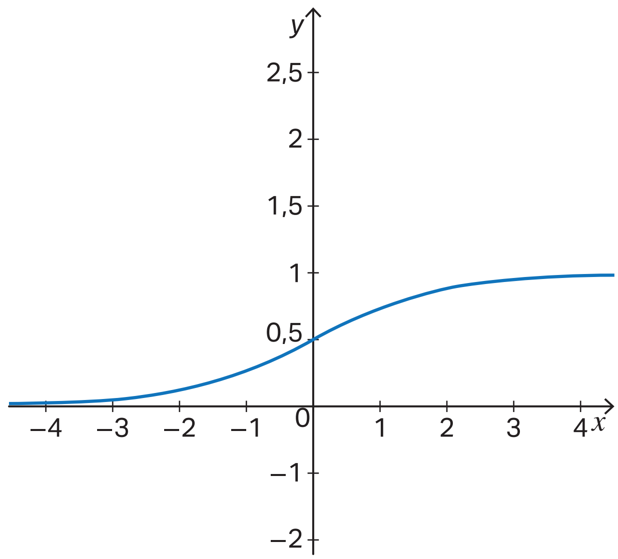
Nos estágios iniciais do crescimento populacional, quando P é muito menor que K, a população cresce aproximadamente de forma exponencial. No entanto, à medida que P se aproxima de K, a taxa de crescimento diminui, eventualmente chegando a zero quando o tamanho da população estabiliza na capacidade de suporte.

Este modelo é particularmente útil para entender como as populações interagem com o seu ambiente e as limitações impostas por recursos finitos. Tem aplicações em várias áreas, incluindo biologia, ecologia e conservação, ajudando pesquisadores e formuladores de políticas a tomarem decisões informadas sobre a gestão de espécies e a proteção ambiental.

A função logística mais simples, cujo gráfico tem a forma de um *S*, é a função:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

em que $K = A = r = 1$.



Função logística com todas as constantes iguais a 1.

Repare-se que quando x toma valores muito elevados (diz-se x a tender para infinito), a curva do gráfico da função aproxima-se da reta $y = 1$, sem nunca a tocar. A capacidade máxima nesta função logística é 1!

A curva que descreve a função logística tem um ponto de inflexão em $x = 0$, quando o crescimento começa a abrandar, até, praticamente, estabilizar, aproximando-se de 1.

Se calcularmos alguns valores da função f, conseguimos perceber o significado destes pontos: de inflexão e estabilidade.

x	− 3	− 2	− 1	− 0,5	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0,047	0,119	0,269	0,378	0,500	0,622	0,731	0,881	0,953	0,982	0,993	0,998	0,999
Variação média		0,072	0,150	0,217	0,245	0,245	0,217	0,150	0,072	0,029	0,011	0,004	0,002

A variação média cresce até $x = 0$, depois mantém-se até $x = 0{,}5$ e a partir desse ponto começa a decrescer. Se observarmos agora o que acontece com os valores da função a partir de $x = 3$, as variações já estão nas centésimas e a partir de $x = 5$ já se colocam na casa das milésimas, isto é, os valores de $f(x)$ estão muito próximos de 1. Podemos também perceber o que ocorre quando os valores de x são cada vez maiores: quando x tende para $+\infty$ a função $f(x)$ tende para 1.

Generalizando, temos a definição seguinte:

Função logística

Função logística é uma função definida em $\mathbb{R}$ por: $f(x) = \dfrac{K}{1 + ce^{-Rx}}$

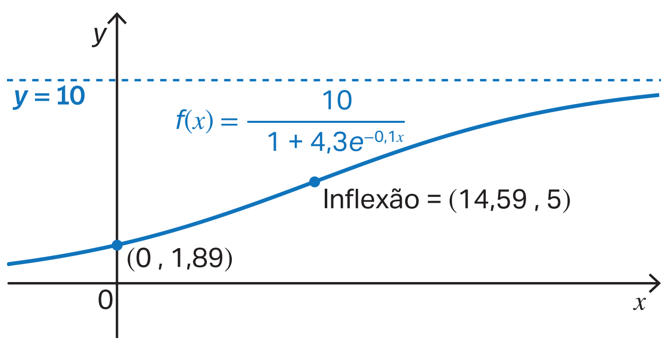
em que K, c e R são constantes reais positivas. K é designada por capacidade máxima ou de suporte.

A função logística é uma função crescente, com um crescimento inicial lento, crescendo depois exponencialmente, até estabilizar praticamente, quando está a atingir a capacidade máxima. A curva que descreve a função logística tem um ponto de inflexão $x_0 = \dfrac{\ln(c)}{R}$, onde a função logística toma o valor $\dfrac{K}{2}$, ou seja, metade da capacidade máxima, K.

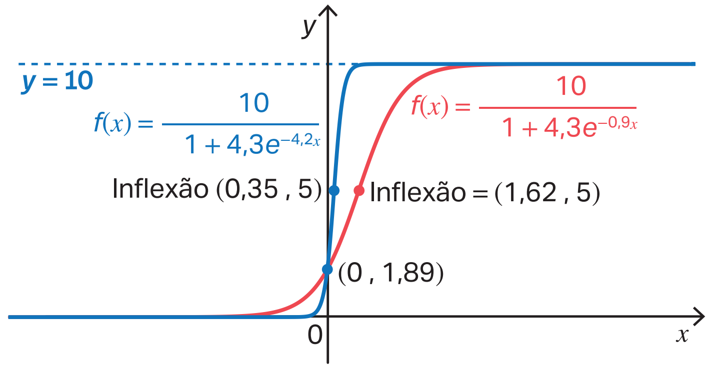
Até esse ponto a taxa de crescimento aumenta, começando depois a diminuir, como no caso do exemplo da função logística mais simples, $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

Nos exemplos das figuras seguintes manteve-se a capacidade máxima igual a 10, o coeficiente $c = 4{,}3$ e fez-se variar r.

Repare-se que no ponto de inflexão o valor da função é metade da capacidade máxima, 5, mas varia a sua abcissa, quanto maior for o valor de r mais rápido será o crescimento da função logística.

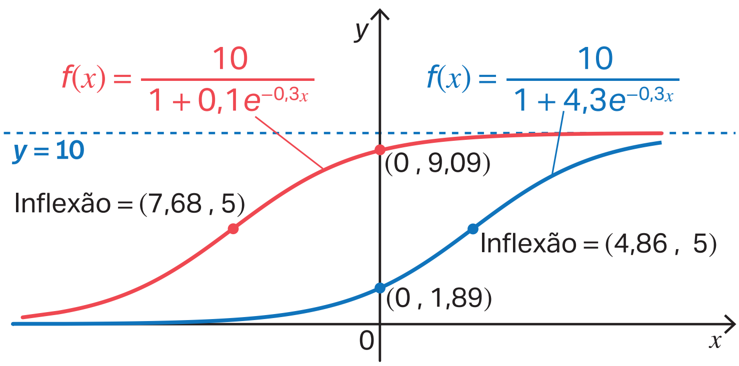


$K = 10$, $c = 4$ e $r = 0{,}1$



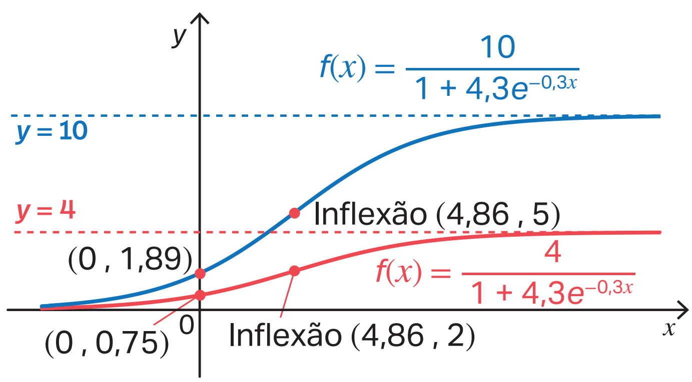
$K = 10$, $c = 4$ e $r = 0{,}9$

Mantendo agora o valor de r e fazendo variar c, vejamos o que acontece na figura seguinte.



Observa-se que o ponto de inflexão se desloca na horizontal.

Finalmente, fazendo variar K, a capacidade máxima, teremos para os mesmos c e r curvas com menor amplitude, como se pode observar comparando os gráficos seguintes.



Nota histórica

A função logística foi apresentada por Pierre François Verhulst (1804-1849), que a estudou relacionando-a ao crescimento populacional. O estágio inicial de crescimento é aproximadamente exponencial, então, conforme a saturação se inicia, o crescimento diminui e, na maturidade, o crescimento para. No livro *Correspondance Mathématique et Physique de L'Observatoire de Bruxelles*, publicado por A. Quetelet, em 1838, páginas 113 a 121, Verhulst explica e justifica o uso do seu modelo. Na imagem abaixo encontra-se um excerto desse livro.

Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, par P.-F. Verhulst.

On sait que le célèbre *Malthus* a établi comme principe que la population humaine *tend* à croitre en progression géométrique, de manière à se doubler après une certaine période, par exemple, tous les vingt-cinq ans. Cette proposition est incontestable, si l'on fait abstraction de la difficulté toujours croissante de se procurer des subsistances lorsque la population a acquis un certain degré d'agglomération, ou des ressources que la population puise dans son accroissement, même lorsque la société est encore naissante, telles qu'une plus grande division du travail, l'existence d'un gouvernement régulier et de moyens de défense qui assurent la tranquillité publique, etc.

Soit p la population : représentons par dp l'accroissement infiniment petit qu'elle reçoit pendant un temps infiniment court dt. Si la population croissait en progression géométrique, nous aurions l'équation $\frac{dp}{dt} = mp$. Mais comme la vitesse d'accroissement de la population est retardée par l'augmentation même du nombre des habitans, nous devrons retrancher de mp une fonction inconnue de p; de manière que la formule à intégrer deviendra

$$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p).$$

Excerto retirado do livro A. Quetelet, *Correspondance Mathématique et Physique de L'Observatoire de Bruxelles.* Société Belge de Libraire, 1938

Alguns exemplos de aplicação da função logística:

- Espalhar rumores ou doenças numa população limitada.
- Crescimento de bactérias ou da população humana quando os recursos são limitados.
- Em modelos de aprendizagem automática.
- Em medicina, na modelação do crescimento de tumores.
- Na agricultura, na modelação da resposta das culturas.

Exemplo 24 – Crescimento populacional

Num ilhéu, próximo de São Vicente, foi colocada uma população de 50 coelhos que cresce rapidamente devido à abundância de recursos. No entanto, à medida que a população aumenta, os recursos começam a diminuir e o crescimento desacelera. Se a capacidade de suporte do ilhéu é de 1000 coelhos, a seguinte função logística pode ser usada para modelar esse crescimento, em função do tempo, medido em meses:

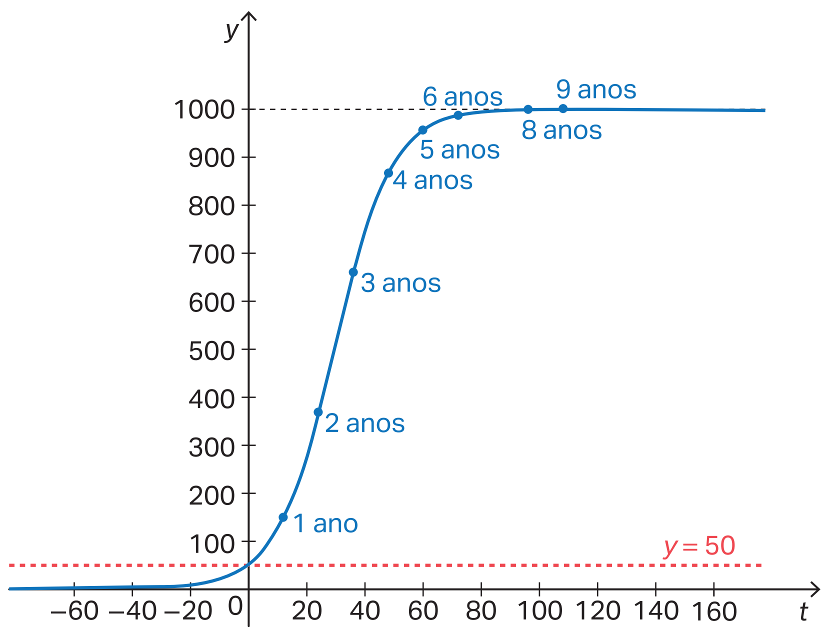
$$f(t)=\frac{1000}{1+19e^{-0{,}1t}}$$

Repare-se que $f(0)=50$. Ao fim de 1 ano (= 12 meses), o número de coelhos no ilhéu é, aproximadamente, 148. O crescimento é muito rápido nos primeiros quatro anos, começando a desacelerar, aproximando-se dos 1000 coelhos, mas nunca chegando a atingir esse número.

Ao fim de cinco anos, existem 955 coelhos; ao fim de oito anos, a população atinge os 998. No ano seguinte, cresce apenas mais um… Contudo, o número 1000 nunca será atingido – pelo menos, com este modelo de crescimento.

$$f(t)=1000 \Leftrightarrow \frac{1000}{1+19e^{-0{,}1t}}=1000 \Leftrightarrow 1+19e^{-0{,}1t}=1 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t}=0$$

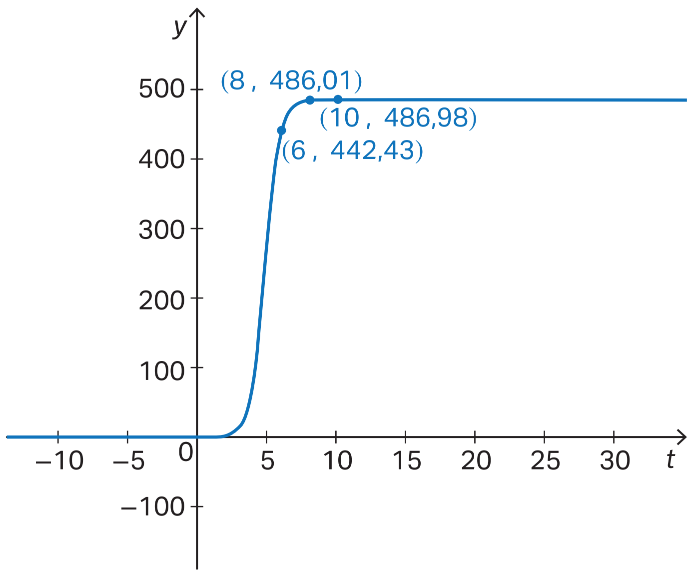
que é uma equação impossível!



Evolução da população de coelhos em nove anos.

Exercícios

37 O Luís regressou da cidade da Praia com a novidade de que um dos gigantes tecnológicos iria abrir uma sucursal na sua ilha, a ilha do Fogo. Ainda no barco, contou a novidade a três amigos que encontrou. Sabendo que os rumores se espalham à velocidade da função logística $f(t) = \dfrac{48\ 700}{1 + 12\ 147e^{-1{,}95t}}$ e que a ilha do Fogo tem $48\ 700$ habitantes, quantos dias demora para que praticamente toda a população da ilha tenha conhecimento da notícia?



38 Quantos anos serão necessários para que uma população de bactérias atinja 9000 se o seu crescimento for modelado por:

$$f(t) = \frac{10\ 000}{1 + e^{-0{,}12(t-20)}}$$

em que t é medido em anos?

Observação

Esta função logística tem uma variante no expoente de e, em vez de ter apenas a variável independente tem o número 20. Contudo, a função pode ser reescrita na forma:

$$f(t) = \frac{10\ 000}{1 + e^{-0{,}12(t-20)}} = \frac{10\ 000}{1 + e^{2{,}4}\,e^{-0{,}12t}}$$

em que a constante c é dada por $c = e^{2{,}4}$.

Observe-se que a capacidade máxima da população é $10\ 000$, que é o limite de $f(t)$ quando t tende para infinito.

2.7.1. Como usar o GeoGebra para aplicar o modelo logístico?

Considere-se um exemplo concreto para explicar como determinar uma função logística que modele um conjunto de dados usando o GeoGebra.

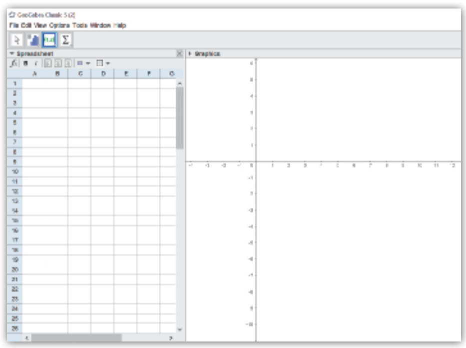
Em Cabo Verde, foi feito um estudo sobre a ligação da internet em casa das famílias. A percentagem de habitações que possuem ligação à internet nos últimos anos foi registada na seguinte tabela:

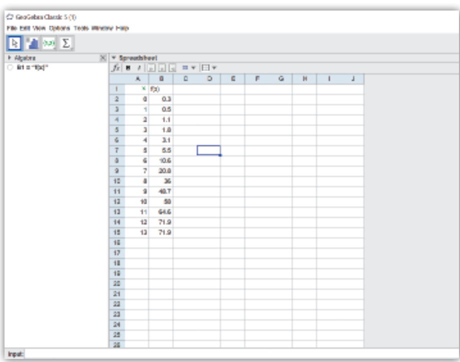
Ano	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Percentagem	0,3	0,5	1,1	1,8	3,1	5,5	10,6

Ano	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Percentagem	20,8	36,0	48,7	58,0	64,6	71,9	71,9

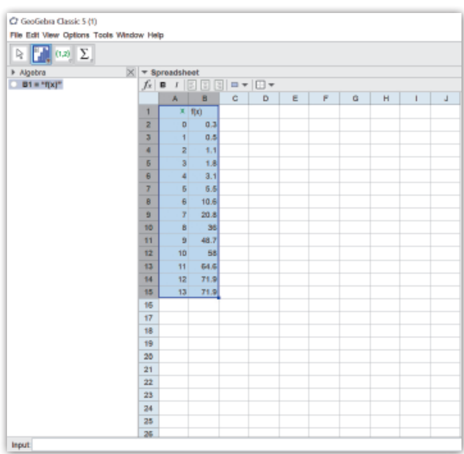
Pretende-se usar um modelo logístico para representar estes dados. Vamos recorrer ao GeoGebra para o fazer.

Abrir o GeoGebra e selecionar no menu *View: spreadsheet*.



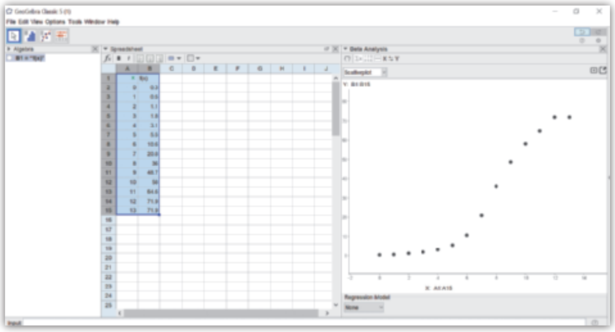


Preencher, nas duas colunas, os dados do problema, contudo, em vez de usar para x os anos em questão, considerar o primeiro registo no ano zero e assim sucessivamente.

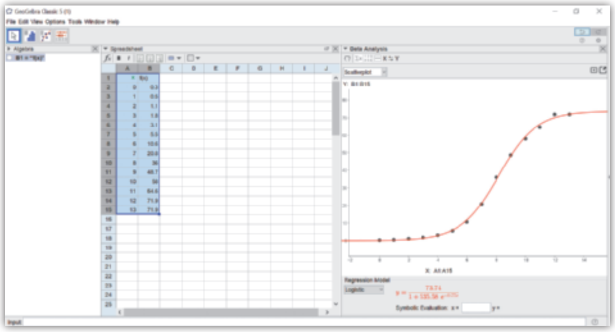


Selecionar, agora, os dados e, no menu gráfico assinalado, escolher Two variable regression analysis.

Surgirá, então, o *scatter plot*.

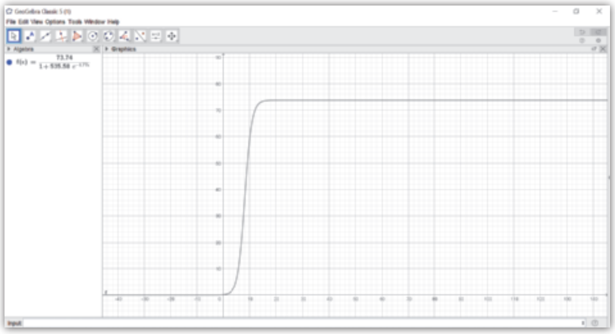


Em Regression Model (assinalado na imagem), escolher o modelo logístico.



Obtém-se, inclusivamente, a função logística que modela os dados.

Se pretendermos trabalhar com esta função para estimar valores ou projeções no futuro, copiamos a expressão para a área de Álgebra.



Com esta função, podemos estimar alguns valores. Vamos, por isso, usar a modelação apresentada:

$f(x)=\dfrac{73{,}74}{1+535{,}58e^{-0{,}77x}}$, em que x traduz o número de anos passados desde 2011.

Se quisermos saber a percentagem no mês de maio de 2021, então queremos a imagem deste modelo para $x=10+\dfrac{5}{12}$, uma vez que maio será o quinto mês do ano.

Assim, essa percentagem será de $f\left(\frac{125}{12}\right) \cong 62{,}71\%$.

Se pretendermos uma previsão para o futuro, por exemplo, para estimar a percentagem de habitações com ligação à internet em 2030, bastará determinar $f(19) \cong 73{,}72\%$.

E se for daqui a 100 anos? Mas será que este modelo é bom para representar os dados dos anos em análise?

Exercício

39 **O número total de pessoas infetadas com um vírus, por vezes, cresce segundo uma curva logística. Suponha-se que 25 pessoas estão inicialmente infetadas com o vírus e que, nas fases iniciais (com o tempo, t, medido em semanas), o número de pessoas infetadas está a crescer exponencialmente com t. Estima-se que, a longo prazo, aproximadamente 6500 pessoas venham a estar infetadas. Ao fim de duas semanas o número de infetados era de 675.**

39.1. Usa esta informação para encontrares uma **função logística** que modele esta situação.

39.2. Recorre ao GeoGebra para traçares o gráfico da função logística e determina um valor aproximado às décimas das coordenadas do ponto de inflexão.

Nem sempre a função logística recorre à exponencial de base e; por vezes, usa-se uma exponencial cuja base é outro número real superior a 1, a.

Função logística com exponencial de base $a > 1$

Função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{K}{1 + ca^x}$$

em que K, c e b são constantes reais positivas. K é designada por capacidade máxima ou de suporte.

Vamos ilustrar esta função com um exemplo.

Exemplo 25

A *Fábrica Imaginária* está a implementar um novo sistema de automatização industrial. No início, apenas uma pequena parte da produção é automatizada. Com o tempo, à medida que os sistemas são testados e integrados, a automatização cresce rapidamente, mas, eventualmente, atingirá um limite, pois nem todos os processos poderão ser automatizados.

Suponhamos que a função que modela a automatização da fábrica em função do número de meses decorridos é dada por:

$$f(x) = \frac{K}{1 + c3^{-rx}}$$

em que x é o número de meses que decorreu desde o momento em que se iniciou a automatização.

Se o número máximo de processos que podem ser automatizados é 400, o valor K do modelo será $K = 400$. Imaginando que se começou por automatizar dois procedimentos, qual será o valor de c?

$$f(0) = \frac{400}{1 + c} = 2$$

Assim, $c = 199$. Supondo que a taxa de automatização mensal é $1{,}2$, quando estarão automatizados metade dos processos?

O modelo, considerando todas as informações fornecidas, é dado por:

$$f(x) = \frac{400}{1 + 199 \times 3^{-0{,}4x}}$$

Pretende-se saber quando estarão automatizados metade dos processos, isto é, quando se terá $f(x) = 200$?

$$f(x) = 200 \Leftrightarrow \frac{400}{1 + 199 \times 3^{-0{,}4x}} = 200 \Leftrightarrow 1 + 199 \times 3^{-0{,}4x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 199 \times 3^{-0{,}4x} = 1 \Leftrightarrow 3^{-0{,}4x} = \frac{1}{199} \Leftrightarrow -0{,}4x = \log_3\left(\frac{1}{199}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\log_3(1/199)}{0{,}4}$$

Será, aproximadamente, um ano para que estejam automatizados metade dos processos.

Será que ao fim de dois anos todos os processos estarão automatizados?

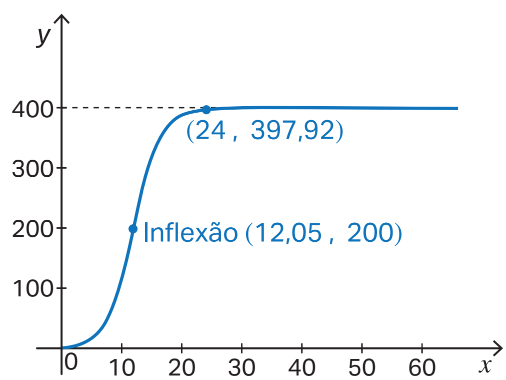


Gráfico da função logística representativa do modelo de automatização da Fábrica Imaginária.

Síntese

Modelos de crescimento populacional

Os modelos de crescimento populacional são ferramentas matemáticas usadas para descrever como uma população muda ao longo do tempo. Os modelos populacionais podem ser discretos ou contínuos.

Modelos discretos

Progressão aritmética

Progressão aritmética é uma sucessão de números em que a diferença (razão r) entre dois termos consecutivos é sempre a mesma:

$$u_{n+1} - u_n = r \, , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

O termo geral de uma progressão aritmética, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, é dado por:

$$p_n = p_1 + r(n-1)$$

em que p_1 é o primeiro termo da progressão e $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ é a razão da PA.

Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

$$S_n = \frac{p_1 + p_n}{2} \times n$$

Termo de ordem k numa progressão aritmética

Sendo $k \in \mathbb{N}$, definimos o termo de ordem k por p_k e temos a relação:

$$p_n = p_k + r \times (n-k)$$

Fórmula para o cálculo de juros simples

$$j_n = C_0 \times t_j \times n$$

em que C_0 é o capital inicial; t_j é a taxa de juros a um certo período de tempo e n é a quantidade de períodos de tempo passados em que o capital esteve investido.

Modelo linear discreto do capital

$$C_n = C_0 + C_0 \times t_j \times n$$

Síntese

Progressão geométrica

Progressão geométrica é uma sucessão de números $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ em que o valor do quociente entre dois termos consecutivos é sempre o mesmo. Esse valor, constante, é a razão r, $(r \neq 0)$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

O termo geral de uma progressão geométrica $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dado por:

$$p_n = p_0 \times r^n$$

sendo p_0 o primeiro termo da progressão e $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ é a razão da PG.

Soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica

$$S_n = p_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}, \ r \neq 0 \wedge r \neq 1$$

Fórmula para o cálculo de capitais aplicados com juros acumulados – Modelo exponencial discreto do capital

$$C_n = C_0 \times (1 + t_j)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

em que C_0 é o capital inicial; t_j é a taxa de juros a um certo período de tempo (juros esses que são capitalizados e acumulados) e n é a quantidade de períodos de tempo passados em que o capital esteve investido.

Modelos contínuos

Modelo linear

O modelo populacional linear descreve o crescimento de uma população ao longo do tempo quando a taxa de crescimento da população é constante.

A equação básica do modelo populacional linear é:

$$P(t) = P_0 + rt$$

em que: $P(t)$ é o tamanho da população no tempo t, P_0 é o tamanho inicial da população e r é a taxa de crescimento (ou decrescimento) constante.

Síntese

Modelo exponencial

Um modelo exponencial contínuo é definido por uma expressão algébrica do tipo $P(t) = P_0 \cdot r^t$, em que $P_0 \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ é a taxa de crescimento/decrescimento e $t \in \mathbb{R}$.

- Se $r > 1$, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta (existe crescimento).
- Se $0 < r < 1$, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta (existe decrescimento).

O modelo exponencial contínuo também pode ser definido por uma expressão algébrica do tipo $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, em que e é o número de Neper (ou número de Euler), $P_0 \in \mathbb{R}^+$ e $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Modelo logarítmico

Chama-se **logaritmo** de um número positivo x na base a $\left(a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}\right)$ ao número y, tal que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Um modelo logarítmico contínuo, em qualquer base, é definido por uma expressão algébrica do tipo $P(t) = a + b \cdot \log_p(t)$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

- Se $p > 1$, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta (existe crescimento).
- Se $0 < p < 1$, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta (existe decrescimento).

Um modelo logarítmico contínuo muito utilizado é o de base e: $y = a + b \cdot \ln(t)$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Modelo logístico

O modelo populacional logístico incorpora o conceito de capacidade de suporte ou capacidade máxima – o tamanho máximo da população que um ambiente pode sustentar indefinidamente. A equação que descreve este modelo é a seguinte:

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

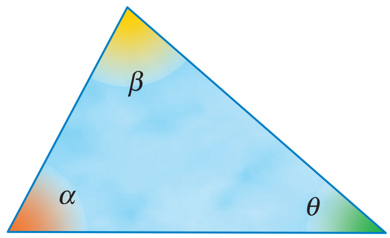
em que e é o número de Neper, A é uma constante relacionada com a condição inicial e K é a capacidade máxima.

Também se pode definir uma função que descreve o modelo populacional logístico usando uma exponencial de base $a > 1$, diferente do número de Neper:

$$P(t) = \frac{K}{1 + ca^t}$$

Para aplicar

1 **As medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética de razão $20°$.**



Qual é a amplitude do menor ângulo desse triângulo?

2 **A Luana e a Kiara decidiram fazer o percurso, a pé, entre a Praia e a Calheta de São Miguel e no sentido da Praia para a Calheta. A Luana andou cada dia 4 quilómetros enquanto a Kiara no primeiro dia andou 1 quilómetro e foi aumentando cada dia 1 quilómetro ao que fez no dia anterior. Apostaram que se encontrariam ao fim de sete dias na casa do amigo Telmo, que fica no percurso. Será que têm razão?**

3 **Seja $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma progressão geométrica. Sabemos que $u_4 = 4$ e $u_8 = 108$.**

Determina o valor de u_{10}.

4 **Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma sucessão definida por $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-n}$.**

Qual das afirmações é verdadeira?

(A) A sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão aritmética de razão 4.

(B) A sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão geométrica de razão 4.

(C) A sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão geométrica de razão $\left(\frac{1}{4}\right)$.

(D) A sucessão $(a_n)_{n \in IN_0}$ é uma progressão aritmética de razão $\left(\frac{1}{4}\right)$.

5 **Considera a progressão geométrica cujos primeiros três termos são 3, 21, 147 ,...**

5.1. Escreve uma expressão do termo geral da progressão geométrica.

5.2. Calcula o décimo termo da progressão geométrica.

5.3. Calcula a soma dos 10 primeiros termos.

6 **O Carlos propôs um quebra-cabeças ao seu colega Telmo. Pediu-lhe para escrever os quatro primeiros termos de uma progressão geométrica.**
O Telmo escreveu 10, 100, 300, 3000.

Será que a resposta do Telmo está correta?

7 **O Luís depositou 100 escudos cabo-verdianos. O regime de capitalização é de juros simples, com uma taxa de $2{,}5\%$ ao ano.**

Qual é o valor monetário do juro recebido pelo Luís no fim do primeiro ano?

8 **A Luana quer elaborar uma tabela para comparar a evolução de um certo capital tendo presente os sistemas de capitalização de juros simples e de juros compostos. Supondo que a Luana quer depositar 250 escudos cabo-verdianos e que a taxa de juro anual, quer no sistema de juros simples, quer no de juros compostos, é de $3{,}5\%$ ao ano e que a Luana quer guardar o seu dinheiro no banco por 10 anos, qual será o sistema mais vantajoso?**

Sugestão: Elabora uma tabela onde seja possível comparar os valores do capital nos dois casos.

9 **A Luísa fez um tabuleiro do jogo do ouri para jogar com a família na época da Páscoa.**

Ela convenceu o pai, a mãe e o irmão a jogarem com ela com a proposta de "Quem ganhar uma partida tem direito a amêndoas da Páscoa!".

E como vão ser distribuídas as amêndoas?

Nas casas dos tabuleiros, começamos por colocar duas amêndoas na primeira casa, e depois vamos duplicando o número de amêndoas em cada uma das casas seguintes.

Todos pensaram que era uma boa ideia. No fim do campeonato familiar, os resultados após quatro jogos foram os seguintes:

Luísa – venceu 3 jogos

Irmão – venceu 1 jogo

A mãe tinha em casa quatro pacotes com amêndoas e cada pacote tinha 30 amêndoas. Será que este número chegou para satisfazer os prémios ao fim dos quatro jogos?

Para aplicar

10 **A Paula coleciona bonecos regionais e sempre que viaja acrescenta um novo elemento à sua coleção. Em média, faz cinco viagens por ano, por isso a sua coleção cresce anualmente. Sabendo que, nesta data, a coleção da Paula tem 210 elementos, quantos terá daqui a 12 anos?**

Daqui a quanto tempo a sua coleção alcançará os 300 bonecos?

11 **O carro é dos bens que mais desvalorizam com o tempo. Apesar de nos primeiros anos a desvalorização aumentar bastante, a partir do terceiro ano a desvalorização diminui de ritmo e varia a uma taxa constante. O Jonas comprou um carro, em 2015, por $800\,000$ escudos. No primeiro ano, o carro desvalorizou 20%; no segundo, 10%; e, nos anos seguintes, a desvalorização foi constante, a uma taxa de 4%.**

Ao fim de quanto tempo o carro do Jonas valerá metade do valor que ele pagou? Quando é que o carro do Jonas passa a valer 0 escudos?

12 **Diáspora Cabo-verdiana é o termo usado para designar o conjunto de "comunidades cabo-verdianas e seus descendentes que vivem fora do território nacional e que se encontram dispersas por várias regiões e países do mundo, que preservam, através das suas expressões cultural e identitária, o afeto, a língua e a ideia permanente de ligação e de regresso a Cabo Verde", define a Resolução n.º 44/2023, de 15 de junho, que aprova o início do processo de mapeamento para fins de produção de estatísticas. O INE lançou um estudo para determinar a população cabo-verdiana espalhada pelo mundo.**

Atualmente, supõe-se que vivem no estrangeiro cerca de 1 milhão de cabo-verdianos (e, em Cabo Verde, vivem cerca de $500\,000$). Se a taxa de cabo-verdianos a viver no estrangeiro aumentar $1{,}25\%$ ao ano, ao fim de quanto tempo teremos $1{,}7$ milhões de cabo-verdianos a residir fora de Cabo Verde?

13 **Uma empresa quer fazer uma análise da relação entre os gastos com publicidade e as vendas mensais.**

Gastos em publicidade em $10\,000$ escudos	Vendas em $10\,000$ escudos
1	8,5
2	10
3	12
4	13,5
5	15

13.1. Usando o Excel ou o GeoGebra, determina a reta de regressão linear que melhor ajusta estes dados.

13.2. Se a empresa investisse $60\,000$ escudos em publicidade, quanto teria de vendas?

13.3. Que investimento em publicidade seria necessário para que as vendas atingissem $300\,000$ escudos?

14 **A empresa de ecoturismo na ilha do Fogo criou uma página nas redes sociais. O número de seguidores $S(t)$, t meses após a criação da página, é modelado por:**

$$S(t) = 500 \cdot e^{0,3t}$$

14.1. Qual será o número de seguidores ao fim de seis meses?

14.2. Em que mês é que a página ultrapassa os 5000 seguidores?

15 **O Rui, um frequentador habitual do festival de cinema CineJov, partilhou numa rede social, às 8 horas de um certo dia, a lista de filmes que serão exibidos durante o ciclo de cinema. A partir desse momento, alguns dos seus amigos efetuaram novas partilhas dessa lista.**

Admite que o número total de novas partilhas da lista de filmes, ao fim de t horas após o instante em que o Rui a partilhou, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades:

$$P(t) = 12e^{0,38t} - 2\,,\ \text{com}\ t \in \left]0\,,\,12\right]$$

15.1. Determina o número total de novas partilhas realizadas entre as 13 e as 14 horas (inclusive).

15.2. A que horas o número total de novas partilhas foi, pela primeira vez, superior a 500?

16 **A rádio oficial do MaréFest transmite em direto a partir do recinto do festival. Uma das transmissões em direto iniciou-se às 20h00 e teve a duração de seis horas. Das pessoas que ouviam rádio nessa noite, a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest ao longo do programa, t horas após o início da transmissão, é dada por:**

$$r(t) = 14,8 + 0,7e^{0,6t}\ \ \text{com}\ \ 0 \leqslant t \leqslant 6$$

16.1. Qual foi a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest às 22h00? Apresenta a resposta arredondada às décimas.

Para aplicar

16.2. No início da atuação da banda principal, a percentagem de ouvintes da rádio oficial era de, aproximadamente, $25{,}2\%$, tendo aumentado 13 pontos percentuais até ao final da atuação da banda.

Determina a hora de início e a hora de conclusão da atuação da banda principal.

Apresenta o resultado em horas e minutos, arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorre às capacidades gráficas da tua calculadora e apresenta:

– o gráfico visualizado;

– as coordenadas de pontos relevantes arredondadas às décimas.

17 **Admite que o valor, em escudos cabo-verdianos, de um telemóvel, t anos após ter sido comprado, é bem aproximado pelo modelo seguinte:**

$$V(t) = 680 \times 0{,}43^t$$

Qual é o valor do telemóvel nove meses após ter sido comprado?

18 **A ilha de Dujai é um dos destinos de férias mais procurados pelos clientes da agência de viagens Ir&Voltar devido à diversidade da sua flora.**

Para preservar duas espécies de plantas, A e B, que, em dado momento, se encontravam em vias de extinção, foi criado, num viveiro, um projeto de reflorestação, com a duração de dois anos.

O número aproximado de plantas da espécie A e de plantas da espécie B, em centenas, existentes no viveiro, t meses após o início do projeto de reflorestação, é dado, respetivamente, pelas expressões:

$$A(t) = 30 + 10 ln\left(t^3 + 1\right) \quad \text{e} \quad B(t) = 10 + 1{,}26^t$$

Assim, por exemplo, como $A(7) \approx 88{,}406$ centenas, o número aproximado de plantas da espécie A existente no viveiro, sete meses após o início do projeto, é 8841.

18.1. Determina o valor da percentagem de aumento do número de plantas da espécie A existentes em viveiro durante os primeiros dois meses do projeto de reflorestação.

Apresenta o resultado arredondado às unidades. Caso procedas a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva três casas decimais.

18.2. Ao fim de 12 meses, o número de plantas da espécie A era, aproximadamente, o ____________ do número de plantas da espécie B.

Seleciona a opção que completa corretamente a frase.

(A) triplo **(B)** quádruplo

(C) quíntuplo **(D)** sêxtuplo

18.3. Determina ao fim de quantos dias, após o início do projeto, o número de plantas da espécie A era igual ao número de plantas da espécie B.

Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Admite que cada mês tem 30 dias.

19 **Um parque de diversões inaugurou uma bilheteira *online* às zero horas do dia 10 de junho de 2000.**

Admite que o número total de bilhetes vendidos, ao fim de t dias após a abertura da bilheteira *online*, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades:

$$b(t) = 140 + 602 \ln(0{,}5t + 2), \text{ com } 0 < t < 30$$

Por exemplo, ao fim de sete dias após a abertura da bilheteira *online*, tinham sido vendidos um total de 1166 bilhetes, uma vez que $b(t) \approx 1166{,}26$.

19.1. Quantos bilhetes foram vendidos no dia 12 de junho de 2000?

Na tua resposta, apresenta todos os cálculos que efetuares.

19.2. A empresa ComPromo disponibilizou uma bilheteira *online*, na qual também é possível comprar bilhetes para o parque de diversões.
As duas bilheteiras entraram em funcionamento no mesmo momento.

Admite que o número total de bilhetes vendidos pela bilheteira disponibilizada pela ComPromo, ao fim de t dias após a sua abertura, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades:

$$c(t) = 35\, e^{0{,}34t}, \text{ com } 0 < t < 30$$

Ao fim de quantos dias, após a abertura das duas bilheteiras, o número total de bilhetes vendidos na bilheteira *online* do parque foi, pela primeira vez, inferior ao número total de bilhetes vendidos na bilheteira disponibilizada pela ComPromo?

20 **O número total de pessoas infetadas com um vírus cresce frequentemente como uma curva logística. Suponha-se que 100 pessoas têm inicialmente o vírus e que, na fase inicial do vírus (com o tempo t medido em semanas), o número de pessoas infetadas aumenta exponencialmente com $r = 2$. Estima-se que, a longo prazo, cerca de 10 000 pessoas sejam infetadas.**

20.1. Utiliza esta informação para encontrares uma função logística que modele esta situação.

20.2. Esboça um gráfico da tua resposta. Utiliza o gráfico para calculares o período de tempo até que a taxa de infeção comece a diminuir.
Qual é a coordenada vertical neste ponto?

Para aplicar

21 **Num laboratório realizam-se experiências com uma cultura de bactérias. A população de bactérias existente numa placa de cultura celular é dada em função do tempo por:**

$$P(t) = \frac{15\ 000}{1 + Ce^{-5t}}$$

em que C é uma constante que depende da população inicial e t é medido em horas.

21.1. Qual é a capacidade máxima desta população na placa de cultura celular?

21.2. Supondo que inicialmente a população era constituída por 1000 bactérias, quanto tempo demoraria até a população atingir 80% da capacidade máxima?

22 **A instituição financeira PAGABEM vende aplicações no fundo GANHAR$^+$ com um grau de incerteza na obtenção de rendimento. Admite que, em cada dia, o número N de aplicações feitas no fundo GANHAR$^+$, em função do período de capitalização x, em meses, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades:**

$$N(x) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15x}} \quad (x = 1\,,\ 2\,,\ \ldots)$$

Determina o número de aplicações feitas no fundo GANHAR$^+$, num certo dia, por um período de capitalização igual a 10 meses, de acordo com o modelo apresentado.

23 **Uma determinada escola da ilha do Sal foi inaugurada no ano letivo 2020/21.**

Admite que, t anos após a inauguração da escola, o número de alunos matriculados no início de cada ano letivo é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades:

$$A(t) = \frac{2350}{1 + 5e^{-0,43t}} \quad (t = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots)$$

23.1. Determina o número de alunos matriculados no ano letivo $2024/2025$.

23.2. Em que ano o número de alunos matriculados foi superior a 800?

23.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, indica o valor de saturação.

24 **Uma empresa especializada em jogos de Sala de Fuga desenvolveu uma aplicação que permite participar num jogo de Sala de Fuga *online*. De 1 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2019, o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, é dado pela expressão:**

$$N(t) = 9{,}4 - 2{,}01\log_{10}(t+1)$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2016.
A partir de 1 de janeiro de 2020, o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, passa a ser dado pela expressão:

$$P(t) = \frac{30}{1+4e^{-0{,}2t}}$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2020.

24.1. O modelo P permite estimar para que valor tende o número de utilizadores da aplicação com o passar do tempo. Qual é esse valor?

24.2. Mostra que, no decorrer do ano 2021, houve um momento em que o número de utilizadores da aplicação atingiu o triplo do que existia a 1 de fevereiro de 2016.

Caso procedas a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva três casas decimais.

Para responder a esta questão, recorre às capacidades gráficas da tua calculadora e apresenta:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

24.3. No primeiro dia de alguns meses, o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900. Em quantos meses tal sucedeu?

25 **Existe um aplicação para telemóvel que permite aos utilizadores a monitorização, em tempo real, do percurso realizado durante uma caminhada. Admitindo que, em Cabo Verde, o número de utilizadores dessa aplicação, em milhares, decorridos t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo C, definido por:**

$$C(t) = 20 + 5\log(9t+10),\ (t \geqslant 0)$$

Completa o texto seguinte:

Verifica-se que no instante inicial $(t=0)$, o número de utilizadores era de ______________ mil. O valor constante 20 representa ______________, enquanto a expressão $5\log(9t+10)$ traduz ______________. Assim, por exemplo, decorridos 10 anos após o início do ano 2000, o número de utilizadores da aplicação é aproximadamente ______________ mil.

Teste

1 Numa progressão aritmética o primeiro termo é 2 e a razão é 5.
Escreve uma expressão do termo geral desta progressão.

2 Lê as afirmações p e q.
p: Se (a_n) é uma progressão aritmética com razão $r = -2$, então (a_n) é estritamente decrescente.
q: Se (a_n) é uma progressão geométrica com razão $r = -2$, então (a_n) é estritamente decrescente.

Sobre as duas afirmações, assinala a opção que te parece correta.

(A) p e q são ambas verdadeiras.
(B) p e q são ambas falsas.
(C) p é verdadeira e q é falsa.
(D) p é falsa e q é verdadeira.

3 No dia 1 de abril, conhecido por Dia das Mentiras, a Maria decidiu fazer uma partida às duas colegas de turma e contou-lhes que viu um gato cor-de-rosa na rua perto da escola, mas que o perdeu de vista. Na tentativa de encontrar o gato, as duas amigas decidiram, cada uma, contar a notícia a quatro colegas e, por sua vez, cada uma das quatro contou a outras quatro e assim sucessivamente. Sabendo que a escola tem 1200 alunos, ao fim de quantas etapas todos conheciam a notícia?

4 O modelo $M = 0{,}418H + 2{,}545$ relaciona o salário médio mensal das mulheres (M) com o salário médio mensal dos homens (H) em milhares de escudos.

4.1. Traça o gráfico que representa este modelo.

4.2. O ponto $(6\,;\ 5{,}05)$ pertence ao gráfico da função. O que significa?

4.3. Qual é o salário médio mensal das mulheres que corresponde ao salário médio dos homens de 3000 escudos?

5 Em Cabo Verde, a produção de energia solar tem vindo a crescer devido ao aumento do uso de painéis solares. No entanto, a eficiência dos painéis diminui com o tempo. Supõe que a eficiência $\mathrm{E}(t)$ de um painel solar, t anos após a instalação, é dada pela equação:

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}_0 \cdot e^{-0.05t}$$

em que E_0 é a eficiência inicial do painel (quando $t = 0$) e e é a base do logaritmo natural.

Se um painel solar foi instalado com 100% de eficiência, determina em quantos anos a sua eficiência descerá para 70%.

(**Nota:** Usa valores aproximados, se necessário, e apresenta o resultado com duas casas decimais.)

6 Em certas zonas costeiras de Cabo Verde, a profundidade de erosão do solo (E, em milímetros) ao longo do tempo pode ser modelada por:

$$E(t) = 10 \cdot ln(t+1)$$

em que t é o número de anos desde o início da monitorização.

6.1. Qual é a profundidade de erosão após três anos?

6.2. Em que ano a erosão acumulada atinge 30 mm?

7 A população de uma ilha tem uma taxa de crescimento de 1% ao ano e a capacidade máxima da ilha é de $50\,000$ habitantes. No ano em que se iniciou o registo, ano 0, a população era de 50% da capacidade máxima. Escreve uma função logística que represente o crescimento populacional da ilha.

Ao fim de quanto tempo a ilha atinge 90% da sua capacidade máxima?

8 O estudo do crescimento populacional pode ser descrito por modelos matemáticos. Considera os seguintes dados fictícios sobre a população (em milhares de habitantes) de uma pequena ilha, ao longo de alguns anos:

Ano após 2018 (t)	0	1	2	3	4	5	6	7
População $P(t)$	50	65	80	95	105	112	116	118

8.1. Admite que a população segue um modelo logístico da forma

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

em que K representa a capacidade máxima (suporte), A e r são constantes.

a) Supondo que a capacidade de suporte é $K = 120$, determina o valor de A sabendo que $P(0) = 50$.

b) Usando o valor $P(3) = 95$, calcula uma aproximação de r com duas casas decimais.

c) Escreve o modelo logístico ajustado.

8.2. Supõe agora que a população segue um modelo logarítmico da forma

$$P(t) = a + b\ln(t+1)$$

a) Explica, em poucas palavras, por que se usa $\ln(t+1)$ em vez de $\ln(t)$.

b) Usando os mesmos dados do modelo logístico, isto é, $P(0) = 50$ e $P(3) = 95$, determina a e b do modelo logarítmico.

8.3. Usando ambos os modelos, estima a população prevista no ano de 2028.

8.4. Qual dos dois modelos parece mais adequado para descrever esta situação? Justifica a tua resposta, tendo em conta a ideia de capacidade de suporte.

3

Probabilidade

O que vou aprender neste tema

A incerteza tem sido, ao longo dos tempos, motivação para o estudo das probabilidades. Essa incerteza é, no fundo, a motivação para muitos jogos, como, por exemplo, lotarias, roletas, etc.

O matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) interessou-se pelos jogos de azar, mas nessa época o conceito de probabilidade não tinha sido definido, pelo que o seu livro focou-se na justiça dos jogos de azar. Cardano era uma personagem extraordinária da História da Matemática, pois estudou e escreveu sobre aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. Escreveu, ainda, um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes sobre os jogos de azar; este registo, após um século, foi publicado em 1623 em forma de livro, *Liber de ludo aleae*. A palavra *aleae* refere-se a jogos de dados e tem a mesma raiz de *aleatorius,* que significa eventos sujeitos ao acaso, dependentes de fatores incertos. Este parece ter sido o primeiro trabalho sobre princípios estatísticos de probabilidade.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Galileo Galilei (1564-1642) seguiu o percurso dos resultados de Cardano e fez um estudo completo do número possível de resultados em jogos de dados no seu trabalho *Sopra le scorpeta dei dadi* (*Sobre o jogo de dados*).

Outros matemáticos trocaram correspondência sobre problemas relacionados com os jogos de azar, nomeadamente Pierre Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). Desta correspondência destaca-se um problema colocado a Pascal por um nobre francês, que ficou conhecido como o problema do cavaleiro De Méré. Quis o acaso que, durante uma viagem à região de Poitou, Pascal encontrasse Antoine Gombaud, também conhecido por cavaleiro De Méré, famoso jogador profissional da época, com uma habilidade notável para problemas matemáticos. De Méré apresentou a Pascal um problema que tinha fascinado os jogadores desde a Idade Média e que vários matemáticos notáveis, como Pacioli (1494), Tartaglia (1556) e Cardano (1545), tinham já discutido:

"Dois jogadores com igual perícia são interrompidos enquanto jogam um jogo de azar para uma certa quantia. Dada a pontuação do jogo, como deve ser dividida a aposta?"

O problema apaixonou Pascal que, mais tarde, o apresentou a Fermat, desencadeando-se uma troca de correspondência entre os dois que se tornou histórica. As cartas trocadas entre ambos, contendo reflexões sobre a resolução de problemas nos jogos de azar, são consideradas documentos fundadores da Teoria das Probabilidades.

Mais tarde, já no século XVIII, surge a definição clássica de probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, atribuída ao matemático francês Pierre-Simon Laplace. Cardano já tinha usado uma ideia aproximada deste conceito, mas sem o formalizar com rigor matemático.

O que vou aprender neste tema

3.1. Fenómenos aleatórios

3.1.1. Experiências aleatórias e experiências deterministas

3.1.2. Espaço de resultados ou espaço amostral

3.1.3. Acontecimentos

3.1.4. Operações com acontecimentos

3.2. Probabilidade

3.2.1. Definição frequencista de probabilidade

3.2.2. Definição clássica de probabilidade

3.2.3. Propriedades da probabilidade

3.3. Probabilidade condicionada

3.3.1. Probabilidade condicionada

3.3.2. Acontecimentos independentes

3.4. Modelos de probabilidade em espaços finitos

3.4.1. Variável aleatória

3.4.2. Distribuições de probabilidades

3.5. Modelo normal

3.5.1. Modelo normal

3.5.2. Distribuição normal $N(0\,,\,1)$

3 Probabilidade

3.1. Fenómenos aleatórios

No dia a dia, somos confrontados com situações que nos levam a realizar previsões, tais como: "Será que amanhã chove?" ou "Qual é a possibilidade de ganhar na lotaria?", entre muitas outras. Estas situações têm uma característica comum: não sabemos o que acontece antes de realizar a experiência. Esta é a característica fundamental das experiências aleatórias.

Tarefa

1 **Numa caixa fechada estão 13 bolas coloridas indistinguíveis ao tato: quatro verdes, quatro vermelhas, três amarelas e duas azuis.**
Considera a experiência aleatória que consiste em "retirar, sem ver, uma bola do saco e registar a sua cor".

1.1. Indica as cores das bolas que podem sair nesta experiência.

1.2. Indica, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes.

a) É mais provável sair uma bola verde do que uma vermelha.
b) É mais provável sair uma bola amarela do que uma azul.
c) É tão provável sair uma bola vermelha como sair uma bola verde.
d) É provável sair uma bola preta.

3.1.1. Experiências aleatórias e experiências deterministas

Experiências aleatórias

Uma experiência que, apesar de ser repetida nas mesmas condições e serem conhecidos os resultados possíveis, não conseguimos determinar, *a priori*, o resultado de cada uma delas chama-se **experiência aleatória**.

Uma experiência aleatória da qual se tem interesse em estudar a probabilidade de ocorrer tem as características seguintes:

- pode ser repetida tantas vezes quantas se queira, sempre nas mesmas condições;

- são conhecidos os resultados possíveis;
- não é possível determinar, *a priori*, o resultado de cada uma das experiências realizadas.

Exemplo 1

1. Lançar uma moeda, não viciada, ao ar e registar a face que fica virada para cima.
2. Lançar um dado equilibrado e verificar a face que fica voltada para cima.
3. Retirar, ao acaso, uma carta de um baralho completo e registar a carta de saída.

Experiências deterministas

Uma experiência que se caracteriza pela obtenção de resultados previsíveis, desde que se mantenham sempre as mesmas condições, diz-se **experiência determinista**.

Exemplo 2

1. Sujeitar a água pura a uma temperatura superior a $100\ °C$: é sabido que se transformará em vapor de água.
2. Largar, no ar, uma caneta, assumindo que esteja num ambiente com gravidade: sabe-se que a mesma vai cair.

Exercício

1 **Nas situações a seguir apresentadas, indica se se trata de uma experiência aleatória ou determinista:**

(A) Retirar uma bola de um saco com bolas brancas, amarelas e azuis e observar a sua cor.

(B) Medir o tempo de queda livre de um corpo, mantendo as condições.

(C) Lançar um dado cúbico equilibrado e registar a face que fica virada para cima.

(D) Retirar uma bola branca de um saco com três bolas brancas.

3.1.2. Espaço de resultados ou espaço amostral

O **espaço amostral** ou **espaço de resultados** de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência.

O espaço de resultados ou espaço amostral representa-se por S, E ou Ω.

Exemplo 3

1. "Lançar um dado equilibrado convencional e registar o número de pintas da face que fica voltada para cima"

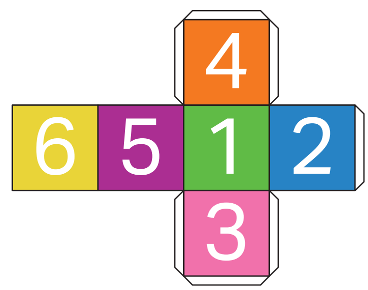
   Espaço de resultados:
   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. "Rodar o ponteiro da roleta e registar a cor do setor indicado pela seta"

   Espaço de resultados:
   $S = \{laranja, vermelho, roxo, azul\}$

Exercício

2 **A figura apresenta a planificação de um dado. Indica o espaço amostral associado às seguintes experiências aleatórias:**



2.1. "Lançar o dado e registar o número da face voltada para cima";

2.2. "Lançar o dado e registar a cor da face que fica voltada para cima".

Vamos focar-nos nas experiências aleatórias para descrever e construir modelos que nos permitam o estudo das mesmas.

3.1.3. Acontecimentos

Dada uma experiência aleatória, em que o espaço de resultados é S, chamamos acontecimento a qualquer subconjunto de S.

Exemplo 4

No lançamento de um dado equilibrado, consideramos a experiência aleatória que consiste em verificar o número de pintas da face que fica voltada para cima.

O espaço de resultados é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Observemos, agora, alguns dos acontecimentos possíveis associados a esta experiência aleatória:

A: "Sair um número ímpar de pintas" $A = \{1, 3, 5\}$

B: "Sair um número de pintas múltiplo de 2" $B = \{2, 4, 6\}$

C: "Sair um número de pintas que seja número primo" $C = \{2, 3, 5\}$

D: "Sair quatro pintas" $D = \{4\}$

E: "Sair oito pintas" $E = \{\}$

F: "Sair um número de pintas inferior ou igual a 6" $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$

Nos acontecimentos anteriores, podemos observar situações diferentes: acontecimentos associados a um conjunto com vários elementos, a um conjunto com um elemento ou ainda a um conjunto sem elementos.

Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Vamos definir diferentes tipos de acontecimentos:

Um **acontecimento elementar** é formado por um único elemento de S.
Um **acontecimento composto** é formado por mais de um elemento de S.
Um **acontecimento impossível** não tem elementos, é o conjunto vazio: $\{\}$ ou $\varnothing$.
Um **acontecimento certo** é formado por todos os elementos de S.

No exemplo anterior, podemos observar que os acontecimentos A, B e C são compostos; o acontecimento D é elementar; o acontecimento E é impossível; e o acontecimento F é um acontecimento certo.

Exercício

3 **Numa caixa, foram introduzidas 8 fichas numeradas e das cores indicadas na imagem. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma ficha da caixa e registar o número e a cor.**

Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Sair ficha vermelha"

B: "Sair número par"

C: "Sair ficha preta"

D: "Sair número que não seja múltiplo de cinco"

E: "Não sair uma ficha amarela"

3.1. Indica o espaço amostral associado a cada acontecimento:

a) relativo à observação da cor da ficha extraída;

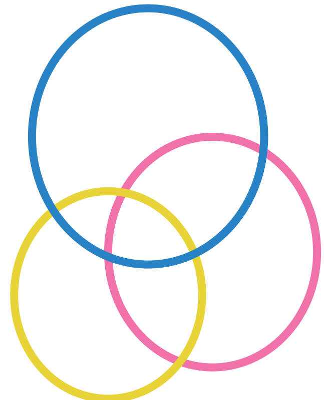
b) relativo à observação do número da ficha extraída.

3.2. Classifica cada um dos acontecimentos indicando o conjunto associado a cada um deles.

Num diagrama de Venn assinalam-se os elementos dos conjuntos, sem os repetir, e cada um dos conjuntos é limitado por uma linha fechada.

Estas representações foram desenvolvidas pelo matemático inglês John Venn e permitem visualizar relações entre conjuntos.

John Venn (1834-1923)



Formas de representar acontecimentos

Representação de acontecimentos usando um diagrama de Venn

Consideremos a experiência aleatória que consiste em lançar um dado com as faces pontuadas de 1 a 6 e verificar o número de pintas da face que fica voltada para cima.

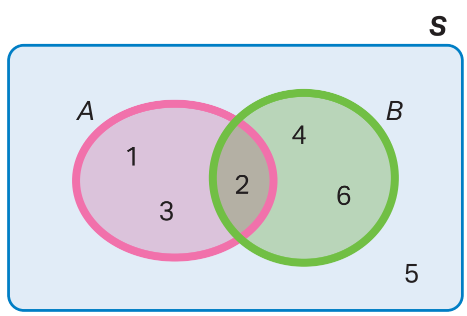
O espaço de resultados é $S=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$.

Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Sair um número de pintas inferior a 4" – o conjunto associado a este acontecimento é: $A=\{1\,,\,2\,,\,3\}$.

B: "Sair um número de pintas par" – o conjunto associado a este acontecimento é: $B=\{2\,,\,4\,,\,6\}$.

Representação dos acontecimentos recorrendo a um diagrama de Venn:



Na representação podemos observar: 2 pertence a A e a B; 5 não pertence a A nem a B mas pertence ao espaço de resultados.

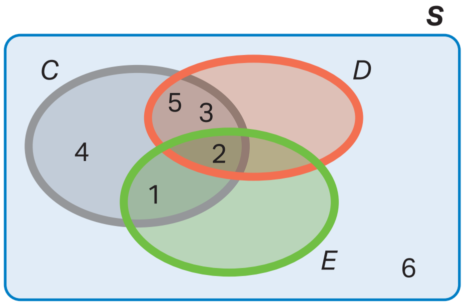
Na mesma experiência aleatória consideremos agora três novos acontecimentos:

C: "Sair um número de pintas inferior a 6" $C=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\}$

D: "Sair um número de pintas que seja número primo" $D=\{2\,,\,3\,,\,5\}$

E: "Sair um número de pintas divisor de 2" $E=\{1\,,\,2\}$

Diagrama de Venn:



Exercício

4 **Uma caixa contém cartões numerados de 1 a 10.**
Considera a seguinte experiência aleatória:
"Retirar, ao acaso, um cartão e registar o seu número".

4.1. Escreve o espaço de resultados.

4.2. Representa, num diagrama de Venn, o espaço de resultados e os seguintes acontecimentos:

A: "Sair um número ímpar"

B: "Sair um número superior a 6"

C: "Sair um número múltiplo de 3"

Representação de acontecimentos utilizando uma tabela de dupla entrada

Exemplo 5

Considera a seguinte experiência aleatória: "Lançar um dado cúbico duas vezes seguidas e registar a soma das pintas das faces que ficam voltadas para cima".

1. Escreve o espaço de resultados.
2. Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço de resultados e classifica-os.

A: "Obter soma igual ou superior a 11"

B: "Obter uma soma múltipla de 3"

C: "Obter uma soma que é um divisor de 2"

D: "Obter uma soma superior a 20"

E: "Obter uma soma inferior ou igual a 12"

Para facilitar a identificação das somas possíveis, podemos construir uma **tabela de dupla entrada**:

1.º lançamento

2.º lançamento

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Na tabela podemos verificar que temos 36 possibilidades de resultados, mas que alguns se repetem.

Resolução:

1. O espaço de resultados é $S=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
2. $A=\{11, 12\}$ e $B=\{3, 6, 9, 12\}$ são acontecimentos compostos; $C=\{2\}$ é um acontecimento elementar; $D=\{\}$ é um acontecimento impossível e $E=S$ é um acontecimento certo.

Exercício

5 **Considera a experiência aleatória seguinte: "Lançar um dado cúbico duas vezes seguidas e registar o produto das pintas das faces que ficam voltadas para cima".**

5.1. Escreve o espaço amostral ou espaço de resultados.

5.2. Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço amostral e classifica-os.

A: "Obter um produto múltiplo de 5"

B: "Obter um produto inferior ou igual a 36"

C: "Obter um produto igual a 1"

D: "Obter um produto maior que 40"

E: "Obter um produto que seja número primo"

Representação de acontecimentos utilizando um diagrama de árvore

Exemplo 6

Considera a seguinte experiência aleatória: "Lançar uma moeda ao ar três vezes consecutivas e registar a face que fica voltada para cima". Na figura observamos a moeda que será lançada ao ar, onde identificamos duas faces diferentes: face escudo (E) e face tartaruga (T).

1. Identifica o espaço de resultados.

2. Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço de resultados e classifica-os:

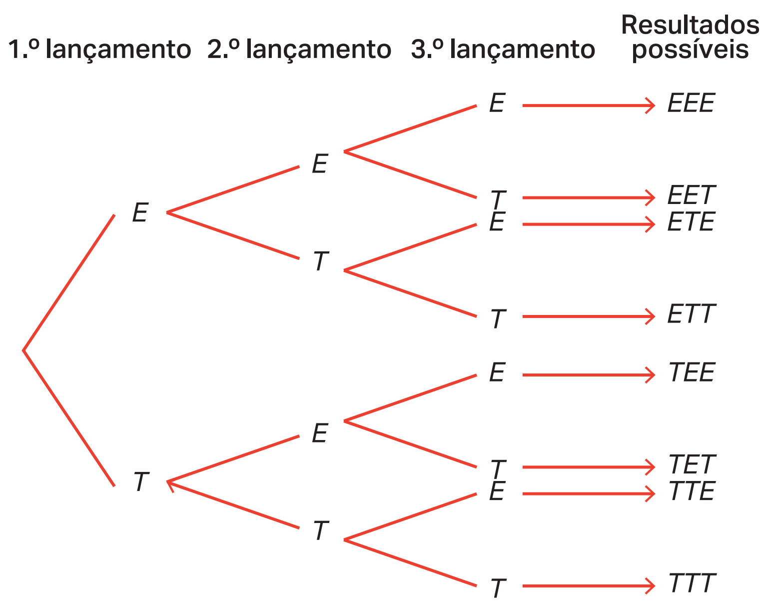
A : "Sair no máximo duas faces tartaruga"

B : "Não sair nenhuma face escudo"

C : "Saírem mais faces tartaruga que faces escudo"

D : "Saírem tantas faces tartaruga como faces escudo"

Para observar melhor o que acontece vamos construir um **diagrama de árvore:**



Resolução:

1. O espaço de resultados é formado por oito casos:

$S = \{EEE;\ EET;\ ETE;\ ETT;\ TEE;\ TET;\ TTE;\ TTT\}$

2.

a) Saírem no máximo duas faces tartaruga significa que podem sair duas, uma ou nenhuma das faces tartaruga.

$A = \{EET;\ ETE;\ ETT;\ TEE;\ TET;\ TTE,\ EEE\}$ – acontecimento composto

b) Não sair nenhuma face escudo significa que todas as faces são tartaruga.

$B = \{TTT\}$ – acontecimento elementar

c) Saírem mais faces tartaruga do que faces escudo significa que temos duas ou três faces tartaruga.

$C = \{ETT;\ TET;\ TTE;\ TTT\}$ – acontecimento composto

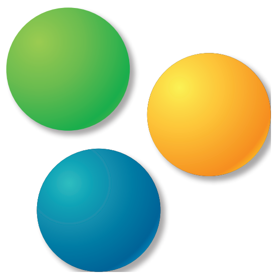
d) Saírem tantas faces tartaruga como faces escudo seria termos o mesmo número de faces escudo e faces tartaruga, o que não é possível nesta experiência aleatória de lançar três vezes a moeda.

$D = \{\ \}$ – acontecimento impossível

Exercícios

6 **Temos um saco com três bolas: uma laranja (L), uma verde (V) e uma azul (A).**

6.1. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola do saco e registar a cor, voltar a colocá-la no saco e retirar novamente uma bola.



a) Determina o espaço amostral desta experiência aleatória.

b) Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço amostral e classifica-os.

A : "Sair pelo menos uma bola verde"

B : "Saírem duas bolas laranja"

C : "Sair no máximo uma bola azul"

6.2. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola do saco e registar a cor, não voltar a colocá-la no saco e retirar novamente uma bola.

a) Determina o espaço amostral desta experiência aleatória.

b) Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço amostral e classifica-os.

A : "Sair pelo menos uma bola verde"

B : "Saírem duas bolas azuis"

C : "Saírem bolas de cores diferentes"

7 **Considera a experiência aleatória seguinte: "Escolher, ao acaso, um casal com três filhos e verificar quantos são raparigas e quantos são rapazes".**

7.1. Determina o espaço amostral.

7.2. Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço amostral e classifica-os.

a) "O casal tem três filhos do mesmo sexo"

b) "O casal tem só um rapaz"

c) "O casal tem no máximo dois rapazes"

3.1.4. Operações com acontecimentos

Vimos que é possível estabelecer uma relação entre acontecimentos e conjuntos, assim como realizar operações entre acontecimentos recorrendo aos conjuntos.

Consideremos novamente a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado cúbico e registar o número de pintas da face que fica voltada para cima. Definimos os seguintes acontecimentos:

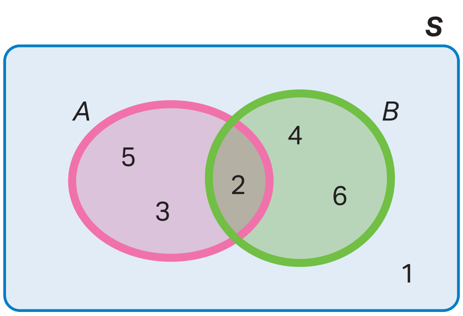
A : "Sair face com um número de pintas que seja número primo" $A = \{2, 3, 5\}$

B : "Sair face com um número de pintas que seja número par" $B = \{2, 4, 6\}$

União de acontecimentos

A união de dois acontecimentos A e B é o acontecimento formado pelos elementos que pertencem a, pelo menos, um deles e representa-se por $A \cup B$.

No nosso caso:

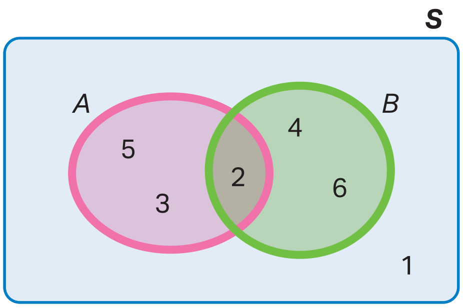


$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Neste, observamos que 2, 5 e 3 pertencem ao conjunto A e 2, 4 e 6 pertencem ao conjunto B, logo, o conjunto $A \cup B$ tem como elementos: 2, 3, 4, 5 e 6.

Interseção de acontecimentos

A interseção de dois acontecimentos A e B é o acontecimento formado pelos resultados que pertencem simultaneamente aos dois acontecimentos e representa-se por $A \cap B$.

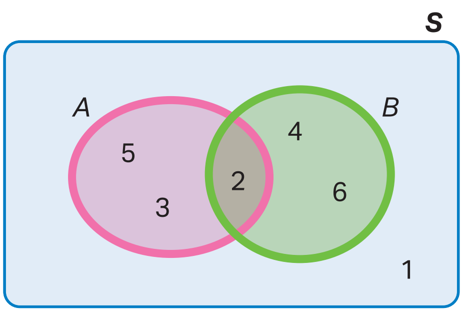


$A \cap B = \{2\}$

Neste caso, 2 é o único elemento que é, ao mesmo tempo, par e primo, logo, $A \cap B$ tem um único elemento que é o 2.

Diferença de acontecimentos

A diferença de dois acontecimentos A e B é o acontecimento formado pelos resultados que pertencem a A e não pertencem a B e representa-se por $A \setminus B$.



$A \setminus B = \{5, 3\}$

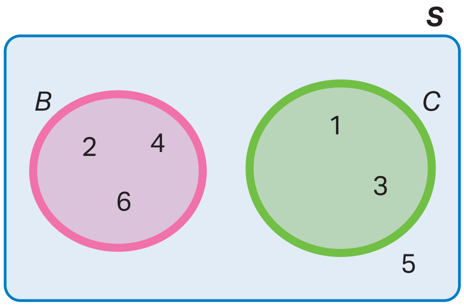
Aqui, podemos observar que os elementos que pertencem a A e não pertencem a B são o 5 e o 3. Analogamente, podemos definir $B \setminus A = \{4, 6\}$.

Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos

Na mesma experiência aleatória, consideremos um novo acontecimento:

C: "Sair uma face com um número de pintas que seja divisor de 3" $C = \{1, 3\}$

No diagrama de Venn, observamos que os acontecimentos B e C não têm nenhum elemento em comum:



Isto ocorre porque não existe nenhum número que seja, simultaneamente, par e divisor de 3, logo, $B \cap C = \varnothing$. Acontecimentos cuja interseção é o conjunto vazio designam-se por acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos.

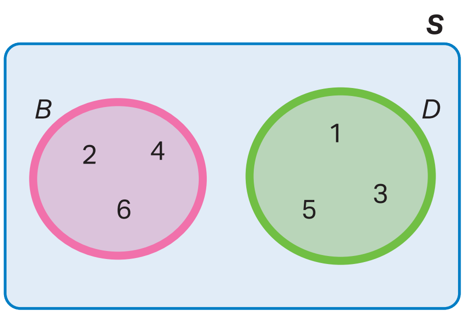
Em geral, numa experiência aleatória, quaisquer dois acontecimentos A e B dizem-se disjuntos quando não têm elementos em comum, ou seja, quando a sua interseção é o conjunto vazio, $A \cap B = \varnothing$.

Acontecimentos contrários ou complementares

Na mesma experiência aleatória, consideremos agora um outro acontecimento:

D: "Sair face com um número ímpar de pintas" $D = \{1, 3, 5\}$

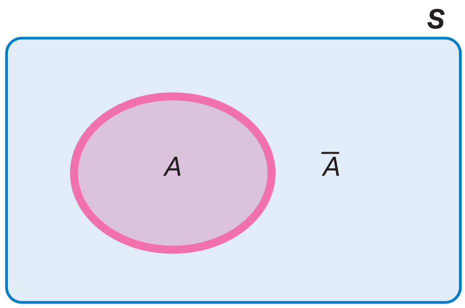
No diagrama de Venn, representamos os conjuntos B e D:



Observamos que B e D não têm nenhum resultado em comum, $B \cap D = \varnothing$, logo, são disjuntos, mas observamos também que a reunião dos dois é igual ao espaço amostral $B \cup D = S$, por isso, dizemos que são complementares ou contrários.

Em geral, numa experiência aleatória, dois acontecimentos A e B dizem-se contrários ou complementares quando a sua interseção é o conjunto vazio $A \cap B = \varnothing$ e a sua reunião é o espaço amostral $A \cup B = S$.

O acontecimento contrário de A é representado por $\bar{A}$.



$$A \cap \bar{A} = \varnothing \text{ e } A \cup \bar{A} = S$$

Observa que anteriormente definimos $A \backslash B$ como o acontecimento formado pelos resultados dos elementos que estão em A e os que não estão em B, assim:

$$A \backslash B = A \cap \bar{B}$$

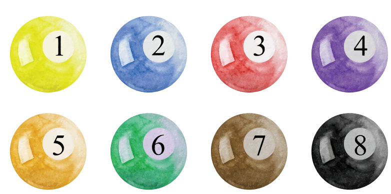
Leis de De Morgan para conjuntos

Dados dois acontecimentos A e B de um espaço amostral S, tem-se que:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Exemplo 7

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola de uma caixa, onde se encontram oito bolas iguais, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 8.



Considera os acontecimentos:

A: "Sair uma bola com um número par"

B: "Sair uma bola com um múltiplo de 4"

C: "Sair uma bola com um número ímpar"

D: "Sair uma bola com um número primo"

1. Representa os acontecimentos dados em extensão.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{4, 8\}$

$C = \{1, 3, 5, 7\}$ $D = \{2, 3, 5, 7\}$

2. Representa as seguintes reuniões de acontecimentos em extensão.

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$ $A \cup C = S$

$A \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$

$B \cup D = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ $C \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

3. Representa as seguintes interseções de acontecimentos em extensão.

$A \cap B = \{4, 8\}$ $A \cap C = \varnothing$ $A \cap D = \{2\}$

$B \cap C = \varnothing$ $B \cap D = \varnothing$ $C \cap D = \{3, 5, 7\}$

4. Determina $A \backslash B$.

$A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{2, 6\}$

5. Determina $\overline{A \cup B}$.

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}$

6. Indica os acontecimentos que são disjuntos.

A e C; B e C; B e D, visto que $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ e $B \cap D = \varnothing$.

7. Indica os acontecimentos que são contrários.

A e C, visto que $A \cap C = \varnothing$ e $A \cup C = S$.

Exemplo 8

Considera os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leqslant 3\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{N} : 2(x-1) < \frac{x}{2} + 2\right\}$.

1. Determina, em extensão, os conjuntos dados.

$|x| \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant 3 \wedge x \geqslant -3$, assim, queremos os números inteiros que estão entre -3 e 3, inclusive ambos. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$2(x-1) < \frac{x}{2} + 2 \Leftrightarrow 2x - 2 < \frac{x}{2} + 2 \Leftrightarrow 4x - 4 < x + 4 \Leftrightarrow 3x < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$

Pretendemos todos os números naturais inferiores a $\frac{8}{3}$.

$B = \{1, 2\}$

2. Definir, em extensão, os conjuntos A união com B e A interseção com B.

$A \cup B = A$; $A \cap B = B$

Exercícios

8 Em 2020, foi decidido, devido à pandemia associada ao covid-19, que as substituições num jogo de futebol seriam no máximo cinco e não três como era até esse momento.

A medida inicialmente seria temporária, mas em 2022 foi ratificada e atualmente são possíveis cinco substituições durante cada jogo.

Em relação à seleção de Cabo Verde, escolhe-se ao acaso um jogo e verifica-se o número de substituições realizadas pela seleção nesse jogo.

Considera os seguintes acontecimentos:

A: "A seleção fez mais de quatro substituições"

B: "A seleção fez menos de três substituições"

8.1. Indica, na forma de conjunto, o espaço de resultados.

8.2. Representa, na forma de conjunto, $A \cap B$ e indica o seu significado em linguagem corrente.

8.3. Indica, justificando, o valor lógico da afirmação: "Os acontecimentos A e B são contrários".

9 Considera a experiência aleatória que consiste em: "Lançar um dado octaédrico com as faces numeradas de 1 a 8 e observar o número da face que fica voltada para baixo".

9.1. Escreve o espaço amostral desta experiência aleatória.

9.2. Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Sair um número par"

B: "Sair um número divisor de 13"

C: "Sair o número 0"

D: "Sair um número múltiplo de 3"

E: "Sair um número inferior a 10"

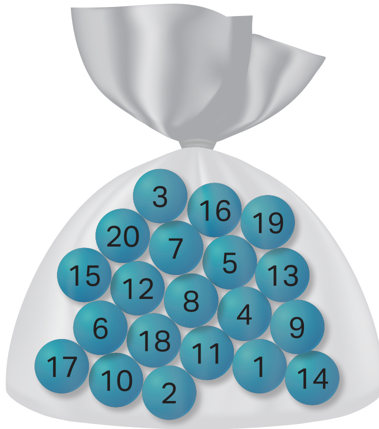
F: "Sair um número primo"

a) Escreve todos os acontecimentos como subconjuntos do espaço amostral.

b) Representa, num diagrama de Venn, os acontecimentos A, B, D e F. Averigua os elementos que pertencem a cada um dos conjuntos: $A \cap F$; $A \cup B$ e $\bar{D}$ e escreve-os como subconjuntos, em extensão, do espaço amostral.

9.3. Define, justificando convenientemente, dois acontecimentos contrários.

10 **Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola de um saco opaco, com bolas iguais, indistinguíveis ao tato e numeradas de 1 a 20.**



10.1. Considera os acontecimentos:

A: "Sair uma bola com número par"

B: "Sair uma bola com número múltiplo de 10"

a) Representa, em extensão, os acontecimentos $A \cup B$ e $A \cap B$.

b) Os acontecimentos A e B são disjuntos? E são contrários? Justifica a tua resposta.

10.2. Indica dois acontecimentos que sejam contrários e dois acontecimentos que sejam disjuntos, mas não sejam contrários.

11 **Considera os conjuntos A e B definidos da seguinte forma:**

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ : \ |2 + x| < 3\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{N} : \ -x^2 + 2x + 3 > 0\}$$

Define, em extensão, os conjuntos: A; B; $A \cup B$; $A \cap B$ e $\overline{B}$.

12 **Num saco opaco estão 12 bolas numeradas de 1 a 12. Faz-se uma experiência aleatória que consiste em tirar uma bola do saco, ao acaso, e registar o número saído. Considera os seguintes acontecimentos:**

A: "Sair uma bola com número par"

B: "Sair uma bola com número primo"

C: "Sair uma bola com número múltiplo de 3"

D: "Sair uma bola com um número divisor de 12"

Define, em extensão, os conjuntos:

12.1. $A \cup B$; $B \cup C$; $A \cup D$

12.2. $A \cap B$; $B \cap C$; $B \cap D$

12.3. $\overline{A}$; $\overline{C}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{B \cap C}$

Para aplicar

1 **Uma caixa contém cinco bolas iguais ao tato, duas marcadas com o número 1 e três marcadas com o número 2. Retiramos uma bola ao acaso e anotamos o número que saiu. Em seguida lançamos um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e somamos os números obtidos.**

Constrói uma tabela de dupla entrada para determinar as somas possíveis.

2 **Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registar o número da face que fica voltada para cima.**

2.1. Indica o espaço de resultados.

2.2. Escreve os seguintes acontecimentos como subconjuntos do espaço de resultados:

A: "Sair quadrado perfeito"

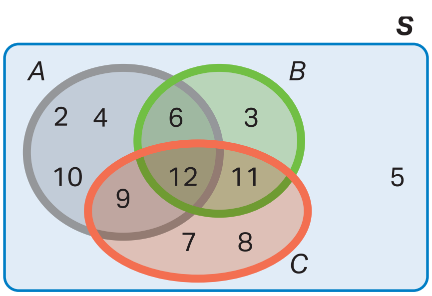
B: "Sair um número que seja, simultaneamente, par e primo"

C: "Sair um número inteiro menor ou igual a 6 e maior ou igual a 1"

D: "Sair um número que seja, simultaneamente, par e divisor de 7"

2.3. Classifica cada um dos acontecimentos anteriores.

3 **Considera a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados cúbicos equilibrados, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, e no registo dos números de pintas das faces que ficam voltadas para cima. Considera os acontecimentos A, B e C que estão representados no diagrama de Venn ao lado.**



3.1. Escreve o conjunto de resultados dos acontecimentos seguintes:

a) A **b)** B **c)** C

d) $\overline{B}$ **e)** $A \cap B$ **f)** $B \cup C$

3.2. Os acontecimentos A e B são disjuntos? Justifica convenientemente a tua resposta.

4 **Na porta de um supermercado, o João fez um inquérito a 200 pessoas, perguntando se compravam carne ou peixe nesse supermercado. Obteve os seguintes resultados: das pessoas inquiridas, 110 compravam peixe e 120 compravam carne.**

4.1. Constrói um diagrama de Venn com a informação obtida.

4.2. Quantas pessoas compraram apenas peixe?

4.3. Determina a percentagem de pessoas inquiridas que tanto compram carne como peixe nesse supermercado.

5 **Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um dado tetraédrico, com as faces numeradas de 1 a 4, e registar o produto dos números que ficam voltados para baixo.**

5.1. Quais são os resultados possíveis?

5.2. Quantos elementos tem o espaço amostral?

5.3. Define um acontecimento elementar.

5.4. Define um acontecimento composto.

5.5. Define um acontecimento impossível.

5.6. Define um acontecimento certo.

6 **Um saco contém uma bola azul e uma bola verde, indistinguíveis ao tato. A Luana vai realizar a seguinte experiência aleatória: Retirar, ao acaso, uma bola do saco e registar a cor da bola, colocar novamente a bola no saco e voltar a retirar outra bola do saco e registar a sua cor.**

Determina o número de elementos do espaço de resultados.

7 **Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado com a forma de um dodecaedro, com as faces numeradas de 1 a 12, e registar o número da face que fica voltada para cima.**

Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Sair número ímpar"

B: "Sair número par"

C: "Sair um número primo"

D: "Sair um número divisor de 7"

7.1. Indica dois acontecimentos que sejam complementares.

7.2. Indica dois acontecimentos disjuntos, mas não complementares.

7.3. Determina, na forma de conjunto, $\overline{C}$.

3.2. Probabilidade

O termo "probabilidade" é utilizado, no nosso dia a dia, de forma intuitiva, quando referimos "provavelmente chove", "não é provável que vá à praia", etc., já que, em muitos momentos da nossa vida, nos confrontamos com situações que têm uma característica em comum: não conseguimos prever com exatidão o que vai acontecer.

3.2.1. Definição frequencista de probabilidade

Exemplo 9

Observa o círculo da imagem que está dividido em quatro partes iguais, coloridas com cores diferentes.

Realizamos a experiência aleatória que consiste em rodar a seta e registar o número de vezes que ela indica a parte colorida a amarelo.

Número de vezes que rodamos	Frequência absoluta*	Frequência relativa**
100	20	$20 : 100 = 0{,}20$
500	109	$109 : 500 = 0{,}22$
1000	231	$231 : 1000 = 0{,}23$
2000	481	$481 : 2000 = 0{,}24$
3000	748	$748 : 3000 = 0{,}25$
4000	1010	$1010 : 4000 = 0{,}25$

*A frequência absoluta é o número de vezes que se verificou o acontecimento.
** A frequência relativa é o quociente entre o número de vezes que se verificou o acontecimento e o número total observado.

Se continuássemos a realizar a experiência um número indeterminado de vezes, observávamos que a frequência relativa do acontecimento "Indicar amarelo" tenderia a ser próximo de $0{,}25$.

Assim, pode escrever-se: $P(\text{seta aponta para amarelo}) = 0{,}25 = 25\%$.

Quando o número de repetições de uma experiência aleatória é elevado e a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor determinado, a esse valor designamos por probabilidade do acontecimento A.

Definição frequencista de probabilidade

A probabilidade de um acontecimento A, associado a uma experiência aleatória, é o valor para que tende a frequência relativa da realização do acontecimento A quando o número de vezes que se realiza a experiência tende para infinito e representa-se por $P(A)$. Observamos que a frequência relativa é necessariamente um valor entre 0 e 1, inclusive ambos, assim podemos afirmar que $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

A probabilidade pode também apresentar-se na forma de percentagem, bastando para isso multiplicar o numeral decimal $P(A)$ por 100.

Exemplo 10

Sabe-se que, numa roleta, a probabilidade de saída de cada um dos números é $\frac{1}{40}$. Quantas vezes se estima que saia o número 10 em 2000 jogadas?

Consideramos x: "N.º de vezes que sai 10".

$$\frac{x}{2000} = \frac{1}{40} \Leftrightarrow x = \frac{2000}{40} \Leftrightarrow x = 50$$

Estima-se que sair 10 deverá acontecer 50 vezes.

Exercícios

13 O João lançou um dardo, a um alvo, 60 vezes e obteve os seguintes resultados:

1	2	2	2	3	3	3	3	3	1
2	2	3	3	3	3	2	1	2	1
2	3	3	3	2	2	2	2	2	1
1	2	2	3	2	2	1	3	3	1
2	1	2	2	1	3	2	2	3	3
1	3	3	2	3	2	3	1	1	2

13.1. Constrói uma tabela com as frequências absolutas e relativas.

13.2. Um amigo do João referiu que no próximo lançamento a probabilidade de acertar no 1 é $\frac{1}{6}$. Será que o amigo do João tem razão? Justifica convenientemente.

13.3. Imagina que o João continua a jogar e ao fim de 2200 jogadas verificou que o 3 saía 965 vezes e o 2 saía 481 vezes. Apresenta um valor, em percentagem arredondado às unidades, para a probabilidade de, ao lançar um dardo, acertar no número:

a) 3 **b)** 2

14 Um saco contém várias bolas com o número 1, várias bolas com o número 2, várias bolas com o número 3 e várias bolas com o número 4. As bolas são indistinguíveis ao tato. Realizamos 30 vezes o seguinte procedimento: retirar, ao acaso, uma bola do saco, registar o número inscrito na bola e colocar novamente a bola no saco. Calculamos a frequência relativa com que se registou cada um dos números 1, 2, 3 e 4 e elaboramos a seguinte tabela, em que substituímos a frequência relativa do número 3 por x.

N.º inscrito na bola	Frequência relativa
1	0,40
2	0,25
3	x
4	0,15

14.1. Determina, justificando convenientemente, o valor de x.

14.2. Supondo que o saco tinha um total de 1000 bolas, quantas bolas há no saco com o número 3?

3.2.2. Definição clássica de probabilidade

Uma outra definição de probabilidade é dada pela Lei de Laplace e só pode ser aplicada quando os acontecimentos elementares são equiprováveis, ou, de outra forma, quando todos os acontecimentos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Exemplo 11

O Lucas e os seus pais, a Luana e o Rafael, estão a jogar um jogo que consiste em lançar dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e adicionar os números das faces que ficam voltadas para cima. Em cada lançamento, ganham da seguinte forma:

- o Lucas, se a soma for igual a 2, 3, 4 ou 5;
- a Luana, se a soma for igual a 6, 7 ou 8;
- o Rafael, se a soma for igual a outro valor diferente dos anteriores.

O Lucas disse aos seus pais que o jogo não era justo. Terá razão?

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Podemos observar que a Luana tem 16 casos em que pode ganhar e o Lucas e o Rafael têm 10 casos em que cada um pode ganhar. Assim, o jogo não é justo porque a Luana tem 16 possibilidades de ganhar em 36 possibilidades $\left(\frac{16}{36}\right)$, o Lucas e o Rafael têm 10 possibilidades de ganhar em 36 possibilidades $\left(\frac{10}{36}\right)$.

Regra de Laplace

Numa experiência aleatória, em que o espaço de resultados S tem um número finito de elementos, todos com igual probabilidade de acontecer, definimos probabilidade de um acontecimento A, e representamos por $P(A)$, o quociente entre o número de resultados favoráveis ao acontecimento A e o número de resultados possíveis da experiência.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de resultados favoráveis a } A}{\text{n.º de resultados possíveis da experiência}}$$

Exemplo 12

Observa a roleta ao lado, dividida em oito setores de igual amplitude, como mostra a figura.

1. Considera a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta uma vez e registar o número indicado pela seta.

   Cada número tem a mesma probabilidade de acontecer porque a roleta está dividida em partes iguais.

   O número de resultados possíveis desta experiência são oito, assim, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Na tabela seguinte temos alguns exemplos de acontecimentos e a sua respetiva probabilidade.

Acontecimentos	Resultados favoráveis	Resultados possíveis	Probabilidade
"Sair o número 1" $A=\{1\}$	1	8	$P(A)=\frac{1}{8}$
"Sair um número par" $B=\{2,4,6,8\}$	4	8	$P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
"Sair um divisor de 3" $C=\{1,3\}$	2	8	$P(C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$
"Sair o número 12" $D=\varnothing$	0	8	$P(D)=\frac{0}{8}=0$
"Sair um número superior ou igual a 1" $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$	8	8	$P(E)=\frac{8}{8}=1$

Repara que o acontecimento D é um acontecimento impossível, a sua probabilidade é zero, e o acontecimento E é um acontecimento certo, a sua probabilidade é 1. Verificamos que a probabilidade de um acontecimento satisfaz sempre:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

2. Considera agora a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta uma vez e registar a cor do setor indicado pela seta.

O espaço de resultados é $S=\{amarelo;\ verde;\ vermelho;\ azul\}$.

Observa que os acontecimentos A: "Sair amarelo"; B: "Sair azul" e C: "Sair verde" não são acontecimentos com a mesma probabilidade, logo, não é possível utilizar a regra de Laplace.

Para determinar a probabilidade destes acontecimentos devemos considerar outro espaço amostral, no qual os acontecimentos elementares tenham a mesma probabilidade de acontecer:

$S=\{Azul_2;\ Azul_4;\ Azul_6;\ Amarelo_5;\ Verde_1;\ Verde_8;\ Vermelho_3;\ Vermelho_7\}$

Assim, os casos possíveis são oito.

O acontecimento A: "Sair amarelo" tem um caso favorável, $P(A)=\frac{1}{8}$.

O acontecimento B: "Sair azul" tem três casos favoráveis, $P(B)=\frac{3}{8}$.

O acontecimento C: "Sair verde" tem dois casos possíveis, $P(C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Exercícios

15 **Considera a experiência aleatória que consiste em lançar sobre uma mesa dois dados cúbicos, equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6 e registar o número das faces que ficam voltadas para cima.**

Calcula a probabilidade de cada um dos acontecimentos e apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

15.1. A: "Sair o mesmo número em ambos os dados"

15.2. B: "Sair dois números cuja soma seja 7"

15.3. C: "Sair dois números cujo produto seja um número ímpar"

16 **Num saco, estão três bolas iguais, indistinguíveis ao tato, com os números: 1, 2, 3.**

16.1. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, duas bolas do saco e registar a soma dos números que saíram.

a) Recorre a uma tabela de dupla entrada e indica o espaço de resultados desta experiência.

b) Calcula, na forma de fracção irredutível, a probabilidade dos seguintes acontecimentos:

A: "Obter soma 4"
B: "Obter soma ímpar"
C: "Obter soma par"
D: "Obter soma 6"
E: "Obter soma número inteiro"

16.2. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar três bolas do saco, uma a seguir à outra, repondo a anterior antes de retirar a seguinte, e registar o produto dos números das bolas que saíram.

a) Elabora um diagrama de árvore e indica os resultados da experiência aleatória.

b) Calcula, na forma de fração irredutível, a probabilidade de cada um dos acontecimentos A, B, C, D, E e F, sabendo que:

A: "Obter produto 0"
B: "Obter produto não negativo"
C: "Obter produto não nulo"
D: "Obter produto igual a 2"
E: "Obter produto número primo"
F: "Obter produto igual a 1"

16.3. Considera agora a experiência aleatória que consiste em retirar as três bolas do saco, uma a seguir à outra, sem reposição, e registar o produto dos números das bolas que saíram.

a) Elabora um diagrama de árvore e indica os resultados da experiência aleatória.

b) Calcula, na forma de fração irredutível, a probabilidade de cada um dos acontecimentos A, B, C, D, E e F, sabendo que:

A: "Obter produto 0"
B: "Obter produto não negativo"
C: "Obter produto não nulo"
D: "O produto é 6"
E: "O produto é número par"
F: "O produto é múltiplo de 5"

17 **Na figura, estão representados 14 balões, cinco vermelhos, quatro azuis e cinco amarelos, numerados de 1 a 14, como se observa.**

Os balões estão presos a uma estaca através de um fio. De cada vez que cortamos um fio, o balão solta-se e sobe.

Considera a experiência aleatória que consiste em cortar aleatoriamente um dos fios e registar o balão que se solta.

Considera os acontecimentos:

A: "Soltar um balão azul"

B: "Soltar um balão com número par"

17.1. Indica o espaço amostral do acontecimento A.

17.2. Determina $P(A)$ e $P(\bar{A})$.

17.3. Indica o espaço amostral do acontecimento B.

17.4. Determina $P(B)$ e $P(\bar{B})$.

18 **Cinco amigos, a Daniela, a Kiara, o Rafael, a Bruna e o Carlos, foram ao cinema.**

18.1. Decidem sortear um dos amigos para comprar os bilhetes.
Qual é a probabilidade de ser o Carlos?
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

18.2. Dois dos bilhetes são para lugares na fila B. Decidem sortear os amigos que se vão sentar nessa fila.
Qual é a probabilidade de serem sorteados um rapaz e uma rapariga?
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3.2.3. Propriedades da probabilidade

Probabilidade da união de acontecimentos

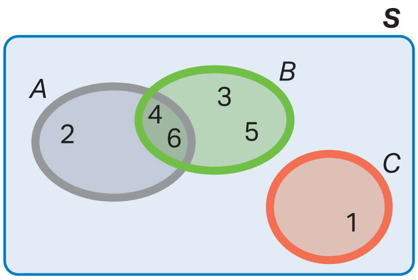
Exemplo 13

Na experiência aleatória que consiste em lançar um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, definimos os seguintes acontecimentos:

A: "Sair um múltiplo de 2" $A=\{2,4,6\}$

B: "Sair um número maior que 2" $B=\{3,4,5,6\}$

C: "Sair um número menor que 2" $C=\{1\}$



No diagrama de Venn ao lado estão representados os acontecimentos A, B e C.

O espaço de resultados é $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Podemos observar que:

- A e C são disjuntos $A\cap C=\varnothing$
- B e C são disjuntos $B\cap C=\varnothing$
- A e B não são disjuntos $A\cap B=\{4,6\}\neq\varnothing$

Vamos determinar a probabilidade de cada acontecimento.

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $P(C)=\frac{1}{6}$

Vamos, agora, determinar a probabilidade dos acontecimentos: $A\cup C$; $B\cup C$ e $A\cup B$.

$A\cup C$: "Sair um múltiplo de 2 ou sair um número menor que 2"

$A\cup C=\{1,2,4,6\}$ $P(A\cup C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Podemos observar que $P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

$B\cup C$: "Sair um número maior que 2 ou sair um número menor que 2"

$B\cup C=\{1,3,4,5,6\}$ $P(B\cup C)=\frac{5}{6}$

Podemos observar que $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

$A\cup B$: "Sair um múltiplo de 2 ou sair um número maior que 2"

$A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$ $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

Neste caso, observamos que $P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$, já que:

$P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$

Isto acontece porque os acontecimentos não são disjuntos.

Probabilidade da união de acontecimentos disjuntos

Dados dois acontecimentos A e B, disjuntos, de um espaço amostral S, a probabilidade de A ou B ocorrer é igual à soma das probabilidades de A e B acontecerem.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{, sempre que } A \cap B = \varnothing$$

Exemplo 14

Em determinada experiência aleatória, definimos dois acontecimentos A e B, disjuntos.

Sabe-se que $P(A) = 0{,}25$ e $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Determina a probabilidade do acontecimento B na forma de fração irredutível.

Como os acontecimentos são disjuntos, sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{25}{100} + P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Exercícios

19 Em determinada experiência aleatória, definimos os acontecimentos A e B, disjuntos. Sabe-se que $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(\overline{B}) = \frac{4}{5}$.

Determina o valor de $P(A \cup B)$.

20 O Lucas tem várias opções para se vestir usando um par de calças e uma camisola, como podes observar na figura.

Para sair, escolheu ao acaso um par de calças e uma camisola.

Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Está vestido com uma peça vermelha"

B: "Está vestido com uma peça roxa"

20.1. Os acontecimentos A e B são disjuntos? Justifica convenientemente.

20.2. Determina $P(A \cup B)$.

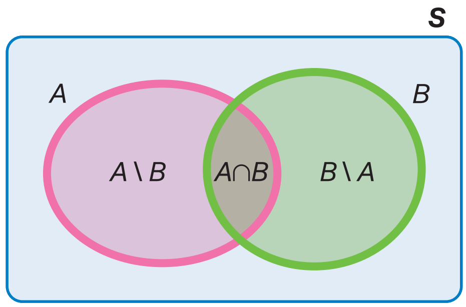
Probabilidade da união de acontecimentos não disjuntos

Dados dois acontecimentos A e B, quaisquer, de um espaço amostral S, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prova

No diagrama de Venn podemos observar que:



- $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são acontecimentos disjuntos já que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

  $P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$

- $A \setminus B$ e $A \cap B$ são acontecimentos disjuntos já que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

  $P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$

- $B \setminus A$ e $A \cap B$ são acontecimentos disjuntos já que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

  $P[(B \setminus A) \cup (A \cap B)] = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$

Tal como o diagrama sugere: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, assim:

$P(A) = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ **(1)**

$P(B) = P[(B \setminus A) \cup (A \cap B)] = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$ **(2)**

Observamos que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$P\left[((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \cup (B \setminus A)\right] = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] + P(B \setminus A)$

Os acontecimentos $[(A \setminus B) \cup (A \cap B]$ e $(B \setminus A)$ são disjuntos porque

$[(A \setminus B) \cup (A \cap B]$ é o acontecimento formado por todos os elementos de A e $(B \setminus A)$ é o acontecimento formado pelos elementos que estão em B e não estão em A.
Como $P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$, temos que:

$P(A \cup B) = P\left[((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \cup (B \setminus A)\right] =$

$= P\left[(A \setminus B) \cup (A \cap B)\right] + P(B \setminus A) =$

$= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$

Por (1) e (2), temos que:

$$P(A) + P(B) = \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)}_{P(A \cup B)} + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade do acontecimento certo

Seja S o espaço amostral de uma determinada experiência aleatória e A um acontecimento certo do espaço amostral dado. Se A é um acontecimento certo, sabemos que todos os elementos do espaço amostral são elementos de A, assim, o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis é sempre 1.

Se A é o acontecimento certo, então $P(A)=1$ e temos que $P(S)=1$.

Probabilidade do acontecimento impossível

Seja S o espaço amostral de uma determinada experiência aleatória e A um acontecimento impossível do espaço amostral. Como A é um acontecimento impossível, sabemos que o conjunto associado a este acontecimento não tem elementos, assim, o quociente entre os números de casos favoráveis e de casos possíveis é zero.

Se A é o acontecimento impossível, então $P(A)=0$.

Probabilidade do acontecimento contrário

Seja S o espaço de resultados S e seja A um acontecimento do espaço amostral.

Se $\bar{A}$ é o acontecimento contrário de A, temos que $P\left(\bar{A}\right)=1-P(A)$.

Como A e $\bar{A}$ são acontecimentos contrários, sabemos que:

$$A \cup \bar{A} = S \text{ e } A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Temos que: $P\left(A \cup \bar{A}\right) = P(S) \Leftrightarrow P(A) + P\left(\bar{A}\right) = 1 \Leftrightarrow P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$.

Exemplo 15

Sejam A e $\bar{A}$ acontecimentos contrários.

Determina $P(A)$ sabendo que $P\left(\bar{A}\right)=\frac{1}{3}$.

$$P(A) = 1 - P\left(\bar{A}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 16

Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço amostral S.

Determina $P(A \cup B)$ sabendo que:

$$P(\overline{A}) = 0{,}6\,;\ P(B) = 0{,}3 \text{ e } P(A \cap B) = 0{,}1$$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \iff P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 \iff$

$\iff P(A \cup B) = 0{,}6$

Exemplo 17

Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço amostral S.

Sabemos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}5\,;\ P(A) = 0{,}3 \text{ e } P(B) = 0{,}2$$

Determina $P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff 0{,}5 = 0{,}3 + 0{,}2 - P(A \cap B) \iff$

$\iff P(A \cap B) = 0$

Ou seja, concluímos que, neste caso, A e B são acontecimentos disjuntos.

Exercício

21 Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço amostral S.
Sabemos que:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8}\,;\ P(A \cap B) = \frac{1}{4}\,;\ P(\overline{B}) = \frac{5}{8}$$

Determina:

21.1. $P(B)$

21.2. $P(\overline{A \cup B})$

21.3. $P(\overline{A} \cap B)$

21.4. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

21.5. $P(\overline{A \cup B})$

Para aplicar

1 **Na figura está representado um quadrado formado por nove quadrados iguais, de menor tamanho. Nesse quadrado, existem três filas horizontais e três filas verticais. Consideramos a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso uma fila vertical ou uma fila horizontal e multiplicar os três números dessa fila.**

1	2	1
3	1	5
1	7	1

Qual é a probabilidade de o produto ser um número primo? Apresenta o resultado em forma de fração irredutível.

2 **Num saco com 16 bolas verdes foram introduzidas algumas bolas amarelas. A probabilidade de tirar do saco uma bola verde é $\frac{2}{3}$.**

O número de bolas amarelas introduzidas no saco foi:

(A) 12 **(B)** 15 **(C)** 8 **(D)** 24

3 **Um saco contém cinco bolas numeradas de 0 a 4, indistinguíveis ao tato. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola do saco e, de seguida, lançar um dado com as faces numeradas de 1 a 6. Os números saídos na bola e na face são registados na forma de par ordenado.**

3.1. Quantos pares ordenados diferentes se podem obter?

3.2. Em quantos pares ordenados o produto dos dois números é um número par?

3.3. Determina a probabilidade de o par ordenado obtido ser formado por dois números primos diferentes.

4 **Considera dois acontecimentos A e B de um espaço amostral S.**

Sabemos que: $P(A)=\frac{1}{3}$; $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ e $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Determina $P(B)$ e $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)$.

5 **Das 20 alunas de uma turma, seis jogam futebol. Considera a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma aluna da turma e verificar se joga futebol ou não.**

Qual é a probabilidade de a aluna escolhida não jogar futebol?

Apresenta o resultado em percentagem.

6 **Num saco com seis bolas, duas são azuis, três são verdes e uma é preta. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar consecutivamente três bolas do saco, sem reposição, e registar a cor das bolas retiradas.**

6.1. Constrói um diagrama de árvore e indica as sequências de cores que podem acontecer.

6.2. É mais provável as bolas retiradas terem a mesma cor ou terem cores diferentes? Justifica a tua resposta.

7 **Três amigos, Pedro, Nilza e Carlos, fizeram uma experiência usando as vogais. Representaram cada uma das cinco vogais, a, e, i, o, u, num cartão e introduziram num saco. Consideraram a experiência aleatória que consiste em retirar um cartão, ao acaso, e registar a vogal escrita nesse cartão.**

Seja S o espaço amostral desta experiência e A, B e C os acontecimentos:

A: "Sair uma vogal do nome Nilza"

B: "Sair uma vogal do nome Pedro"

C: "Sair uma vogal do nome Carlos"

7.1. Representa, na forma de conjunto, os acontecimentos A, B e C.

7.2. Elabora um diagrama de Venn representativo desta experiência.

7.3. Os acontecimentos A e B são contrários? Justifica a tua resposta.

7.4. Qual é a probabilidade de sair uma vogal que não esteja em nenhum dos nomes dos três amigos?

8 **Os três amigos quiseram fazer um jogo, que consiste em lançar dois dados, com as faces numeradas de 1 a 6. Cada um dos amigos escolhe um valor para a soma das pontuações das faces dos dados que ficam viradas para cima. Após o lançamento verifica-se se há um ganhador, um empate ou se ninguém acertou. O Carlos apostou no 7, a Nilza apostou no 4 e o Pedro apostou num número diferente, mas que tem a mesma probabilidade de acontecer que o número 4.**

8.1. Constrói uma tabela de dupla entrada que te permita analisar a situação.

8.2. A aposta do Carlos foi boa? Justifica.

8.3. Em que número apostou o Pedro?

8.4. O jogo é justo? Justifica.

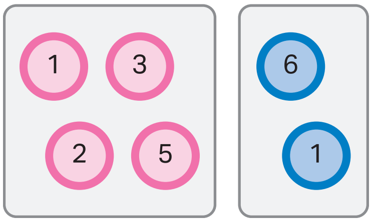
Para aplicar

9 **Em relação a uma experiência aleatória, consideramos dois acontecimentos A e B, disjuntos. Sabe-se que $P(\overline{A}) = 0{,}8$ e $P(A \cup B) = 0{,}6$.**

Qual das seguintes opções representa $P(B)$?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** 0,4 **(C)** 0 **(D)** $\frac{4}{5}$

10 **Na figura estão representadas duas caixas com bolas numeradas. Uma das caixas tem quatro bolas numeradas com 1, 2, 3 e 5, a outra tem duas bolas numeradas com 1 e 6. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa e calcular a soma dos números das bolas retiradas. Considera os seguintes acontecimentos:**



A: "A soma é múltiplo de 3"

B: "A soma é múltiplo de 4"

C: "A soma é número par"

Determina:

10.1. $P(A)$ **10.2.** $P(B)$ **10.3.** $P(C)$

10.4. $P(\overline{B})$ **10.5.** $P(A \cup B)$ **10.6.** $P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{C}}\right)$

11 **O diretor de uma escola perguntou a todos os seus alunos qual a disciplina preferida.**
Os resultados obtidos constam da tabela ao lado.

Disciplina	Rapazes	Raparigas
Português	90	70
Matemática	64	138
Biologia	34	96
Inglês	45	37
Outra	98	43

11.1. Quantos alunos tem a escola em causa?

11.2. Escolhendo um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de (apresenta os resultados em percentagem arredondados às unidades):

a) ser rapariga;

b) preferir matemática;

c) ser rapariga e preferir matemática;

d) ser rapaz ou preferir inglês.

11.3. O Luís é um aluno da turma. Qual é a probabilidade de a sua disciplina favorita ser biologia?

3.3. Probabilidade condicionada

Como já vimos, determinar a probabilidade de um acontecimento depende da informação que se tem sobre os números de casos possíveis e de casos favoráveis. Contudo, se tivermos mais informações sobre os acontecimentos (informações que não estavam disponíveis inicialmente), a probabilidade pode-se «alterar», conseguindo obter-se um resultado mais adequado à realidade do problema.

Observa o exemplo a seguir.

Exemplo 18

A tabela a seguir apresenta uma descrição dos 949 estudantes de uma determinada vila.

	Rapazes	**Raparigas**	**Total**
1.º ciclo	121	327	448
2.º ciclo	350	151	501
Total	471	478	949

Para a festa de final de ano, vai ser escolhido, aleatoriamente, um estudante para falar em público, em representação dos jovens estudantes da vila. Qual é a situação mais provável: ser escolhido um rapaz ou ser escolhida uma rapariga?

Como já sabes, a probabilidade será muito próxima, uma vez que o número de rapazes é praticamente igual ao número de raparigas. Se considerarmos A: "Ser rapaz" e B: "Ser rapariga", tem-se, então:

$P(A)=\frac{471}{949}\approx 0{,}4963\ (49{,}63\%)$ e $P(B)=\frac{478}{949}\approx 0{,}5037\ (50{,}37\%)$

Contudo, se soubermos que foi escolhido um estudante do 2.º ciclo, a mesma questão terá uma resposta totalmente diferente: a probabilidade de ser escolhido um rapaz é muito maior do que a probabilidade de se escolher uma rapariga, uma vez que estas são em muito menor número neste ciclo de escolaridade.

A diferença está no facto de que, agora, não devemos considerar todos os estudantes da vila, mas apenas os 501 estudantes que frequentam o 2.º ciclo. Se considerarmos P: "Ser do 1.º ciclo" e S: "Ser do 2.º ciclo", tem-se, então:

Probabilidade de ser rapaz, dado que foi selecionado um aluno do 2.º ciclo, é:

$P(A\,|\,S)=\frac{350}{501}\approx 0{,}6986\ (69{,}86\%)$

Probabilidade de ser rapariga, dado que foi selecionado um aluno do 2.º ciclo, é:

$P(B\,|\,S)=\frac{150}{501}\approx 0{,}3014\ (30{,}14\%)$

Repara que a notação "$P(A|S) =$", como será formalizada mais à frente, deve ser lida do seguinte modo: "*a probabilidade de* A, *sabendo que aconteceu* S, *é igual a*", ou seja, nesta situação em concreto, tem-se que "a probabilidade de ser escolhido um rapaz, sabendo que se escolheu um aluno do 2.º ciclo, é de 70%, aproximadamente".

3.3.1. Probabilidade condicionada

Nas páginas que se seguem, iremos formalizar e resolver este tipo de situações em que se pretende determinar probabilidades de acontecimentos que estão "condicionados" à ocorrência, ou não, de outros acontecimentos.

Probabilidade condicionada

Sejam A e B dois acontecimentos no espaço de resultados S, com $P(B) > 0$. Designa-se por probabilidade de A dado B ou probabilidade condicionada de A se B ou probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B, e representa-se por $P(A|B)$, o número real:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como veremos mais adiante, por vezes, na resolução de certos exercícios, pode ser útil considerar a igualdade acima na seguinte forma: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$. De facto, podemos considerar o seguinte resultado:

Probabilidade da interseção de dois acontecimentos

Sejam A e B dois acontecimentos não impossíveis no espaço de resultados S. Então, verifica-se que:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) \text{ e } P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Uma vez que $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$, tem-se, ainda:

$$P(A \cap B) < P(A) \text{ e } P(A \cap B) < P(B)$$

Regra de Bayes

Sejam A e B dois acontecimentos não impossíveis no espaço de resultados S. Das igualdades anteriores, verifica-se facilmente que:

$$P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

Assim, tem-se ainda que:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Thomas Bayes (1701-1761)

Exemplo 19

Vejamos agora um exemplo muito simples: o lançamento de um dado convencional com as faces numeradas de 1 a 6.

Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Sair 1"

B: "Sair 2"

C: "Sair um número ímpar"

D: "Sair um número par"

E: "Sair um número menor ou igual a 3"

1. Vamos, então, determinar as seguintes probabilidades condicionadas:

a) $P(A|C)$ **b)** $P(B|C)$ **c)** $P(A|B)$

d) $P(C|A)$ **e)** $P(C|B)$ **f)** $P(A|E)$

g) $P(C|E)$ **h)** $P(D|E)$ **i)** $P(\bar{E}|C)$

2. Sem usar a definição de probabilidade condicionada, justifica que:

$$P\left(\bar{E}|A\right)=P\left(\bar{E}|B\right)=0$$

Resolução:

1. a) Pela definição, tem-se que: $P(A|C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\dfrac{1}{3}$

De facto, este é o resultado esperado. Se ocorreu C, ou seja, se saiu número ímpar, então o número de possibilidades diminuiu para metade, havendo apenas três acontecimentos possíveis (1, 3 ou 5) e, portanto, a probabilidade de sair o número pretendido 1 é substancialmente maior (sem esta indicação teríamos apenas uma possibilidade favorável em seis possíveis).

b) Pela definição, tem-se que: $P(B|C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{0}{6}}{\frac{3}{6}}=\dfrac{0}{3}=0$

Mais uma vez, este resultado podia ser determinado sem recorrermos à definição, bastava observar que se aconteceu C ("Sair um número ímpar"), então é impossível ter saído o número 2 (como vimos anteriormente, a probabilidade de um acontecimento impossível é zero).

Nota: Repara que A e B eram inicialmente equiprováveis $\left(P(A)=P(B)=\frac{1}{6}\right)$.

Contudo, quando se considera uma probabilidade condicionada com um terceiro acontecimento C, estas podem ser diferentes, como se observa nos dois exemplos agora considerados.

c) Tem-se que: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{0}{6}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{0}{1}=0$

Mais uma vez, sendo A e B incompatíveis (isto é, não podem acontecer os dois simultaneamente no lançamento de um dado), se sabemos que um acontece, é impossível acontecer o outro.

d) Tem-se que: $P(C|A)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1$

Se sabemos que saiu o número 1 no dado, podemos garantir com toda a certeza que saiu um número ímpar e, por isso, esta probabilidade terá de ser 1 (relembra que a probabilidade de um acontecimento certo é 1).

Nota: Em geral, a probabilidade condicionada não é "comutativa", como podes observar pelos exemplos $1.$ a) e $1.$ d).

$P(A|C)=\frac{1}{3}$ e $P(C|A)=1$

e) Tem-se que: $P(C|B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{\frac{0}{6}}{\frac{1}{6}}=0$

Se sabemos que saiu o número 2 no lançamento do dado, podemos garantir, com toda a certeza, que não saiu um número ímpar e, portanto, a probabilidade de isso acontecer é 0.

f) Note-se que $E=\{1,2,3\}$. Tem-se, então, que: $P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$

g) Note-se que $C\cap E=\{1,3,5\}\cap\{1,2,3\}=\{1,3\}$.

Tem-se, então: $P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$

h) Note-se que $D\cap E=\{2,4,6\}\cap\{1,2,3\}=\{2\}$.

Tem-se, então: $P(D|E)=\frac{P(D\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$

Se soubermos que aconteceu E, é mais provável que tenha saído um número ímpar (dois casos favoráveis) do que um número par (apenas um caso favorável).

i) Note-se que $\bar{E}\cap C=\{4,5,6\}\cap\{1,3,5\}=\{5\}$.

Tem-se, então: $P(\bar{E}|C)=\frac{P(\bar{E}\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$

2. Basta observar que A e B são incompatíveis com $\bar{E}$. Logo, se acontecer $\bar{E}$, é impossível acontecer A ou B e, portanto, $P(\bar{E}|A)=P(\bar{E}|B)=0$.

Exercícios

22 Determina as mesmas probabilidades do exemplo anterior, mas agora considera o dado numerado de 1 a 12 representado na imagem.

23 Diz se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, justificando convenientemente:
"Qualquer um dos acontecimentos considerados no exemplo anterior (A, B, C, D e E) é menos provável de acontecer neste dado de 12 faces".

Exemplo 20

Considerem-se dois determinados acontecimentos A e B.

1. Sabe-se que $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}75$ e $P(B|A) = 0{,}3$.
Determina $P(A \cap B)$ e $P(A|B)$.

2. Mostra que se $P(A) = P(B) \neq 0$, então $P(A|B) = P(B|A)$.

Resolução:

1. Pela fórmula da probabilidade condicionada, tem-se que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$$

Pela fórmula da probabilidade condicionada, tem-se que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overbrace{0{,}15}^{\text{Pela alínea anterior}}}{0{,}75} = 0{,}2$$

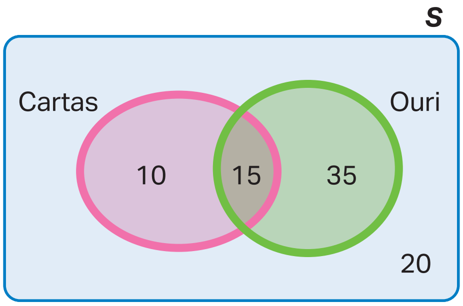
2. Já vimos que: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$
e, portanto, $P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$. Como pelo enunciado se tem:
$P(A) = P(B) \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por $P(A)$ e concluir que $P(A|B) = P(B|A)$ sempre que $P(A) = P(B) \neq 0$.

Exercícios

24 De um determinado acontecimento, sabe-se que $P(A) = 0{,}3$; $P(A|B) = 0{,}5$ e $P(B|A) = 0{,}4$.
Determina $P(B)$.

25 De um determinado acontecimento, sabe-se que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}2$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$.
Determina $P(B|A)$ e $P(A|B)$.

26 Numa escola, inquiriu-se os alunos sobre os jogos que tinham jogado na semana anterior. Os resultados obtidos são apresentados no diagrama seguinte.



26.1. Quantos alunos tem a escola?

26.2. Quantos alunos jogaram ouri? Quantos alunos jogaram cartas?

26.3. Escolhendo um aluno da escola aleatoriamente, qual é a probabilidade de se escolher um aluno que:

a) tenha jogado cartas;

b) tenha jogado cartas e ouri;

c) não tenha jogado nem ouri nem cartas;

d) tenha jogado ouri, sabendo que jogou cartas;

e) tenha jogado ouri, sabendo que não jogou cartas;

f) tenha jogado cartas, sabendo que jogou ouri.

26.4. Comenta a seguinte afirmação: "Na última semana, 75% dos alunos jogaram algum destes dois jogos", indicando o seu valor lógico.

27 A turma A de uma escola tem 10 raparigas e 6 rapazes, enquanto a turma B tem 9 raparigas e 11 rapazes. Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa destas duas turmas. Considera os acontecimentos:

A: "A pessoa escolhida é da turma A"; X: "A pessoa escolhida foi uma rapariga".

Determina os valores das probabilidades condicionadas $P(X|A)$ e $P(A|X)$.

28 Numa empresa agrícola, com 50 funcionários, a distribuição dos trabalhadores é feita de acordo com a tabela seguinte:

	Homens	Mulheres
Mais de 39 anos	9	31
Menos de 40 anos	4	6

28.1. Escolhendo um trabalhador desta empresa agrícola aleatoriamente, qual a probabilidade de:

a) ser homem;

b) ter mais de 39 anos;

c) ter mais de 39 anos, sabendo que é mulher;

d) ter mais de 39 anos, sabendo que é homem;

e) ser mulher, sabendo que tem mais de 39 anos;

f) ser mulher, sabendo que não tem mais de 39 anos.

28.2. Comenta, indicando o valor lógico, a seguinte afirmação sobre esta empresa: "A proporção de mulheres é substancialmente diferente nas duas faixas etárias consideradas".

29 Do Aeroporto Internacional Cesária Évora saiu um avião com destino à cidade da Praia.

Dos passageiros a bordo sabe-se o seguinte:

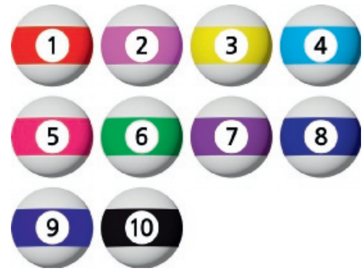
- 70% nunca tinham viajado de avião;
- $\frac{2}{5}$ já tinham estado na Praia;
- metade dos passageiros que já tinham estado na Praia já tinham viajado de avião.

A primeira pessoa que saiu do avião nunca tinha estado na Praia. Qual a probabilidade de esta ter sido a sua primeira viagem de avião?

Sugestão: Se te ajudar, começa por pensar que estavam 100 passageiros no avião e completa a seguinte tabela:

	Já esteve na Praia	Ainda não esteve na Praia
Já viajou de avião		
Ainda não viajou de avião		

30 O professor de Matemática colocou numa caixa as bolas representadas ao lado.



30.1. O professor tirou da caixa uma bola ao acaso, verificando que esta era um número primo. Qual é a probabilidade de esta bola ter número ímpar?

30.2. De seguida, o professor voltou a colocar a bola retirada inicialmente e disse aos seus alunos: "*Se sair um número par, não há trabalhos de casa*". O professor retirou então uma bola e disse aos seus alunos que a bola era um múltiplo de 3. Os alunos devem pedir ao professor para considerar "Sair ímpar" em vez de "Sair par" para aumentar a sua probabilidade de não terem trabalhos de casa?

31 A matriz curricular do ensino básico – 2.º ciclo é dada pela seguinte tabela:

Disciplinas e áreas disciplinares obrigatórias	Carga horária			
	5º ano	6ºano	7º ano	8º ano
Língua Portuguesa	4	4	4	4
Matemática	4	4	4	4
Ciências da Terra e da Vida + Atividades Científicas	3	3	2	2
História e Geografia de Cabo Verde	3	3	-	-
Geografia	-	-	2	-
História	-	-		2
Físico Química	-	-	3	3
Inglês	2	2	2	2
Francês	2	2	2	2
Educação Artística	2	2	3	3
Educação Física	2	2	2	2
TIC - Regime Modular (30/h Anuais)	2	2	2	2
TOTAL	**24**	**24**	**26**	**26**
Atividades de Enriquecimento curricular	Carga horária			
Apoio ao Estudo	2h	2h	2h	2h
Área de Projeto Local	1h	1h	1h	1h
Clubes	...	...	...	...

(Fonte: https://minedu.gov.cv/recursos_educativosorientacoes/8)

Considera os seguintes acontecimentos:

M: "Frequentar a disciplina de Matemática"

G: "Frequentar a disciplina de Geografia"

H: "Frequentar a disciplina de História"

P: "Frequentar o 7.º ano"

Q: "Frequentar o 8.º ano"

31.1. Escolhendo aleatoriamente um aluno do 2.º ciclo, determina as seguintes probabilidades:

a) $P(M)$ **b)** $P(H|P)$ **c)** $P(H|Q)$

d) $P(G|P)$ **e)** $P(G|Q)$

31.2. Mostra que a informação acima não é suficiente para justificar a seguinte afirmação: "Metade dos alunos do 2.º ciclo frequenta a disciplina de História e Geografia de Cabo Verde".

Exemplo 21

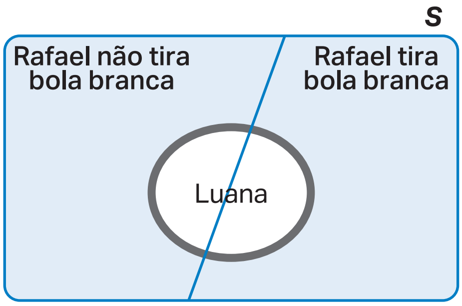
Observa a imagem que ilustra uma caixa com bolas de bilhar (6 bolas brancas, 4 azuis, 1 amarela, 1 verde, 1 vermelha, 1 castanha e 1 laranja).

Sem olhar, o Rafael tirou uma bola da caixa aleatoriamente e guardou-a no bolso; de seguida, a Luana retirou uma outra bola da caixa, também ao acaso.

1. Qual é a probabilidade de o Rafael ter tirado uma bola branca?
2. Qual é a probabilidade de a Luana ter tirado uma bola branca, sabendo que o Rafael tirou uma bola branca inicialmente?
3. Qual é a probabilidade de a Luana ter tirado uma bola branca, sabendo que o Rafael não tirou uma bola branca inicialmente?
4. Qual é a probabilidade de a Luana tirar uma bola branca?

Resolução:

1. Na caixa existem seis bolas brancas num total de 15 bolas. Sendo R o acontecimento "O Rafael tirou uma bola branca", tem-se $P(R)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=0{,}4$.
2. Na situação considerada agora, já sabemos que o Rafael tirou uma bola branca da caixa e, portanto, quando a Luana escolheu a sua bola, a caixa tinha apenas 14 bolas (destas, apenas cinco eram brancas). Assim, sendo L o acontecimento "A Luana tirou uma bola branca", tem-se $P(L|R)=\frac{5}{14}\approx 0{,}36$.
3. Nesta situação, já sabemos que o Rafael tirou uma bola não branca da caixa e, portanto, quando a Luana escolheu a sua bola, a caixa tinha ainda as seis bolas brancas (num total de 14). Assim, tem-se $P(L|\bar{R})=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}\approx 0{,}43$.



4. Nesta questão, pretende-se determinar $P(L)$ sem conhecermos o que aconteceu com a bola do Rafael. Para tal, note-se que R e $\bar{R}$ são mutuamente exclusivos e abarcam todas as possibilidades que podem acontecer na extração do Rafael. Logo,

$$P(L)=P(L\cap R)+P(L\cap\bar{R})=P(L|R)\times P(R)+P(L|\bar{R})\times P(\bar{R})=$$

$$=0{,}36\times 0{,}4+0{,}43\times 0{,}6\approx 0{,}40$$

O resultado aqui observado pode ser generalizado, para vários acontecimentos mutuamente exclusivos, da forma apresentada a seguir.

Probabilidade condicionada a acontecimentos mutuamente exclusivos

Seja B um acontecimento no espaço de resultados S. Seja $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ um conjunto de n acontecimentos **mutuamente exclusivos** (de probabilidade não nula), de tal modo que:

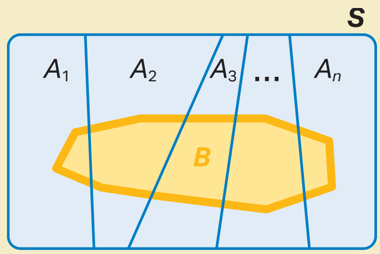
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

Então, verifica-se que:

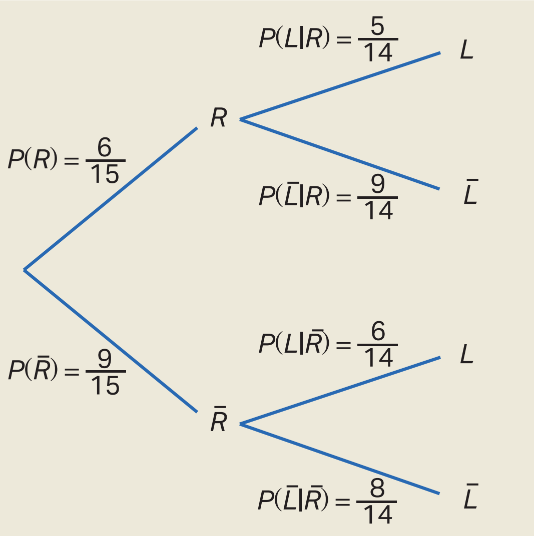
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

igualdade que ainda pode ser escrita como:

$$P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \times P(A_n)$$



Uma outra maneira de resolver o exercício anterior é recorrer a um **diagrama de árvore.** Nos "ramos" à esquerda, consideramos a extração do Rafael (a primeira a acontecer), nos "ramos" à direita, consideramos a extração da Luana (a segunda). Repara que, na extração da Luana, os dois "ramos" superiores correspondem ao caso em que o Rafael tirou bola branca; os dois inferiores correspondem ao caso contrário.



$$P(R \cap L) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} \approx 0{,}14$$

$$P(R \cap \bar{L}) = \frac{6}{15} \times \frac{9}{14} \approx 0{,}26$$

$$P(\bar{R} \cap L) = \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} \approx 0{,}26$$

$$P(\bar{R} \cap \bar{L}) = \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} \approx 0{,}34$$

Por outro lado, "multiplicando sucessivamente as probabilidades relativas aos ramos da esquerda para a direita" obtêm-se as probabilidades das interseções que estão apresentadas à direita. Note-se que estas quatro interseções são mutuamente exclusivas e, reunidas, completam todo o espaço de resultados.

$P(R \cap L) + P(R \cap \bar{L}) + P(\bar{R} \cap L) + P(\bar{R} \cap \bar{L}) = 0{,}14 + 0{,}26 + 0{,}26 + 0{,}34 = 1 = P(S)$

Exemplo 22

Uma determinada fábrica possui três máquinas para produzir pregos.

De cada uma das máquinas tem-se a seguinte informação:

- a máquina A é responsável por 25% da produção e apresenta uma taxa de peças defeituosas de 4%;
- a máquina B é responsável por 30% da produção e apresenta uma taxa de peças defeituosas de $2{,}5\%$;
- a máquina C é responsável por 45% da produção e apresenta uma taxa de peças defeituosas de 1%.

Escolheu-se, aleatoriamente, um prego produzido nesta fábrica.

1. Qual é a probabilidade de o prego não ser defeituoso?
2. Qual é a probabilidade de o prego ter sido produzido na máquina A, sabendo que é defeituoso?
3. Qual é a probabilidade de o prego ter sido produzido na máquina B, sabendo que não é defeituoso?

Resolução:

Considerem-se os acontecimentos D: "Ser defeituoso"; A: "Ser produzido na máquina A"; B: "Ser produzido na máquina B" e C: "Ser produzido na máquina C".

1. Então, como A, B e C são mutuamente exclusivos e compõem todo o espaço de resultados, tem-se:

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C)$

$= 0{,}04 \times 0{,}25 + 0{,}025 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}45 = 0{,}022$

Logo, a probabilidade de o prego não ser defeituoso é $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}022 = 0{,}978$.

2. Pela definição: $P(A|D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}04}{0{,}022} \approx 0{,}45$

3. Pela definição: $P(B|\bar{D}) = \dfrac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}975}{0{,}978} \approx 0{,}30$

Exemplo 23

O Leandro vai para a escola a pé (40% das vezes) ou de bicicleta. Quando vai a pé, a probabilidade de se atrasar é de 20%; quando vai de bicicleta, a probabilidade de se atrasar é apenas de 10%.

Escolhendo um dia ao acaso, qual é a probabilidade de:

1. o Leandro ter ido a pé e ter chegado atrasado;
2. o Leandro ter chegado atrasado à escola;
3. o Leandro ter ido de bicicleta, sabendo que ele chegou atrasado à escola?

Resolução:

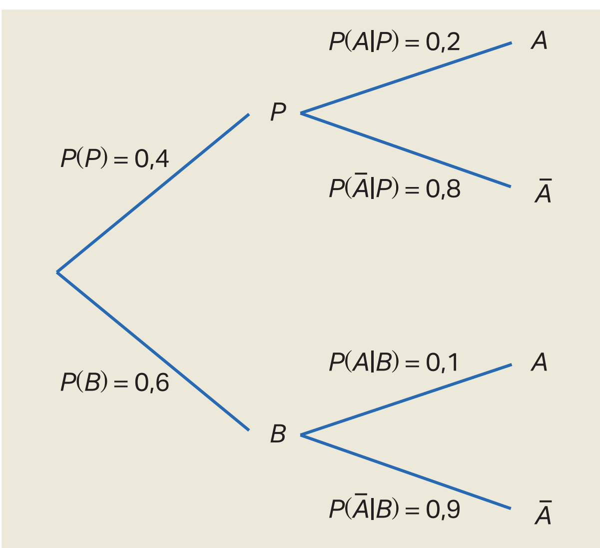
Comecemos por construir o diagrama de árvore correspondente a esta situação considerando os seguintes acontecimentos:

P: "O Leandro ir a pé para a escola"

B: "O Leandro ir de bicicleta para a escola"

A: "O Leandro chegar atrasado à escola"

Nota: Uma boa escolha das letras para designar os acontecimentos é muito importante para uma correta interpretação do diagrama de árvore.



$$P(P \cap A) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$$

$$P(P \cap \bar{A}) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$$

$$P(B \cap A) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

$$P(B \cap \bar{A}) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$$

Observando os valores da direita, conseguimos responder facilmente às questões.

1. Probabilidade de ter ido a pé e ter chegado atrasado: $P(P \cap A) = 0{,}08$
2. Probabilidade de ter chegado atrasado à escola:
   $P(A) = P(P \cap A) + P(B \cap A) = 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14$
3. Probabilidade de ter ido de bicicleta, sabendo que chegou atrasado à escola:
   $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}14} \approx 0{,}43$

Exercício

32 **Um saco contém três bolas vermelhas e duas azuis. Considera três extrações aleatórias sem reposição.**

32.1. Sem fazer qualquer cálculo, determina a probabilidade de:

a) saírem três bolas azuis;

b) sair pelo menos uma bola vermelha.

32.2. Usando um diagrama de árvore, determina a probabilidade de:

a) saírem três bolas vermelhas;

b) saírem exatamente duas bolas vermelhas e uma azul;

c) sair pelo menos uma bola azul.

32.3. Qual é a probabilidade de saírem as duas bolas azuis, sabendo que a primeira extração foi de uma bola vermelha?

Desafio

A Bruna tem no seu mealheiro as moedas da figura abaixo (uma de cada tipo).
A Bruna vai abanar o seu mealheiro até saírem, sucessivamente, duas moedas, sem reposição.
Qual é a probabilidade de a Bruna retirar uma quantidade de escudos que seja múltiplo de 10 ?

(Repara que tal só não acontecerá se sair do mealheiro a moeda de 5 escudos e/ou a moeda de 1 escudo.)

Aplicação na sociedade

Testes de diagnóstico de uma doença

Uma aplicação real das probabilidades condicionadas e do recurso a diagramas de árvore pode ser o estudo dos erros que existem quando se aplica um teste para averiguar se um paciente tem, ou não, uma determinada doença.

Quando se aplica um teste em saúde podemos ter um de quatro casos:

- o teste dá um resultado positivo e o paciente tem a doença (verdadeiro positivo);
- o teste dá um resultado positivo, mas o paciente não tem a doença (falso positivo);
- o teste dá um resultado negativo, mas o paciente tem a doença (falso negativo);
- o teste dá um resultado negativo e o paciente não tem a doença (verdadeiro negativo).

O resultado do teste está correto quando se obtém Verdadeiro positivo ou Verdadeiro negativo. Estas situações podem ser apresentadas em forma de tabela:

		Teste positivo?	
		Sim	**Não**
Doente?	**Sim**	Verdadeiro positivo	Falso negativo
	Não	Falso positivo	Verdadeiro negativo

Exemplo 24

Num determinado país, 10% da população está infetada com uma determinada doença. Neste país existe um teste médico com a seguinte eficácia:

- para uma pessoa infetada, o teste apresenta um resultado positivo em 94% dos casos (isto é, deteta corretamente a presença da doença);
- para uma pessoa não infetada, o teste apresenta um resultado positivo em 4% dos casos (isto é, deteta erradamente a presença da doença).

Escolheu-se, aleatoriamente, uma pessoa deste país para fazer o teste.

1. Qual é a probabilidade de o teste apresentar um resultado positivo?

2. Qual é a probabilidade de o teste estar errado?

3. Qual é a probabilidade de uma pessoa deste país, a quem o teste tenha dado resultado positivo, ter realmente a doença?

Resolução:

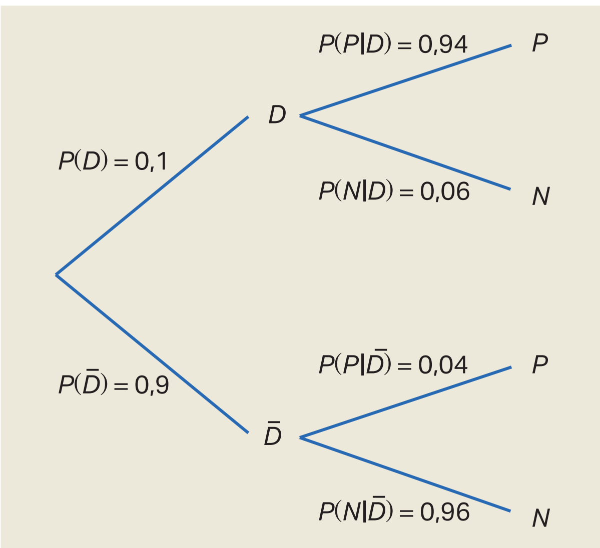
Considera os seguintes acontecimentos:

D : "Ter a doença"

P : "O teste dar resultado positivo"

N : "O teste dar resultado negativo"

Então, o diagrama de árvore que modela a situação apresentada é o seguinte:



$$P(D \cap P) = 0{,}1 \times 0{,}94 = 0{,}094$$

$$P(D \cap N) = 0{,}1 \times 0{,}06 = 0{,}006$$

$$P\left(\bar{D} \cap P\right) = 0{,}9 \times 0{,}04 = 0{,}036$$

$$P\left(\bar{D} \cap N\right) = 0{,}9 \times 0{,}96 = 0{,}864$$

Assim, tem-se:

1. Probabilidade de o teste apresentar um resultado positivo:

$$P(P) = P(D \cap P) + P\left(\bar{D} \cap P\right) = 0{,}094 + 0{,}036 = 0{,}13$$

2. Probabilidade de o teste estar errado:

$$\underbrace{P(D \cap N)}_{\text{Falso negativo}} + \underbrace{P\left(\bar{D} \cap P\right)}_{\text{Falso positivo}} = 0{,}006 + 0{,}036 = 0{,}042$$

Ou seja, o teste está errado em $4{,}2\%$ dos casos, o que significa que o resultado está correto em $95{,}8\%$ dos casos.

3. Probabilidade de uma pessoa deste país, a quem o teste deu resultado positivo, ter realmente a doença:

$$P(D|P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}094}{0{,}13} \approx 0{,}723$$

Exercícios

33 Em Cabo Verde, a percentagem de população que está infetada com HIV é de aproximadamente $0{,}6\%$, conforme a seguinte notícia:

> A prevalência do HIV/SIDA na população geral é de $0{,}6\%$, o que se considerou uma prevalência baixa. Outro passo importante foi a eliminação da transmissão do HIV de mãe para filho, tendo avançado que, neste momento, todas as crianças nascidas de mães seropositivas em Cabo Verde nascem livres do vírus.
>
> *O Dia Mundial de Luta Contra o HIV/SIDA é assinalado todos os anos a 1 de dezembro e este ano o lema é "Sigamos no caminho dos direitos".*

Fonte: Governo de Cabo Verde
https://www.governo.cv/governo-reafirma-compromisso-em-certificar-cabo-verde-como-pais-livre-da-transmissao-vertical-do-vih-e-eliminar-o-sida-ate-2030 (4 de dezembro de 2024)

Considera um teste de HIV com a seguinte eficácia:

– para uma pessoa infetada com HIV, o teste apresenta um resultado positivo em 97% dos casos (isto é, deteta corretamente a presença da doença);

– para uma pessoa não infetada com HIV, o teste apresenta um resultado positivo em 1% dos casos (isto é, deteta erradamente a presença da doença).

Escolheu-se aleatoriamente uma pessoa de Cabo Verde para fazer o teste.

33.1. Qual é a probabilidade de o teste apresentar um resultado positivo?

33.2. Qual é a probabilidade de o teste estar errado?

33.3. Qual é a probabilidade de esta pessoa estar infetada, sabendo que o teste deu positivo?

33.4. Qual é a probabilidade de esta pessoa estar infetada, sabendo que o teste deu negativo?

34 Uma outra empresa farmacêutica publicita o seguinte em relação ao seu teste para detetar o HIV:

"Os testes de HIV por fluido oral são muito precisos.
Em estudos realizados, o nosso teste detetou 100% das pessoas infetadas com HIV e $99{,}1\%$ das pessoas que não estavam infetadas com HIV."

34.1. Responde às perguntas do exercício anterior para este novo teste.

34.2. Comenta a veracidade da seguinte afirmação: "Este teste não dá origem a falsos positivos".

35 Uma companhia farmacêutica pretende testar a eficácia de um novo teste de gravidez. Para tal, efetuou um estudo envolvendo 50 mulheres grávidas e 50 mulheres não grávidas, obtendo os seguintes resultados:

		Teste positivo?	
		Sim	**Não**
Grávida?	**Sim**	Verdadeiro positivo 43	Falso negativo 7
	Não	Falso positivo 1	Verdadeiro negativo 49

35.1. Qual é a probabilidade de o teste estar errado?

35.2. Qual é a probabilidade de a mulher estar grávida, sabendo que o teste deu positivo?

35.3. Qual é a probabilidade de a mulher estar grávida, sabendo que o teste deu negativo?

35.4. Qual é a probabilidade de o teste ser positivo, sabendo que a mulher está grávida?

35.5. Qual é a probabilidade de o teste ser negativo, sabendo que a mulher está grávida?

36 O pai do Lucas tem um baralho com 52 cartas (13 cartas de cada naipe). Ele pediu ao Lucas para retirar uma carta do baralho, aleatoriamente; sem repor essa carta, pediu para retirar, também aleatoriamente, uma segunda carta do mesmo baralho.

Qual é a probabilidade de as duas cartas serem:

36.1. dois ases;

36.2. do mesmo naipe;

36.3. de naipes de cor diferente;

36.4. ambas figuras (isto é, serem dama, valete ou rei)?

37 No frigorífico da Eliane estão cinco iogurtes, mas, infelizmente, um deles já ultrapassou o prazo de validade. Por outro lado, sabe-se que:

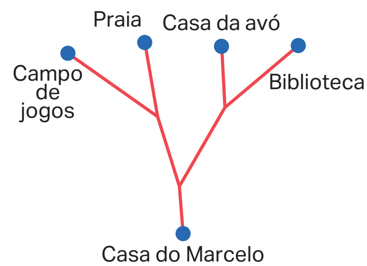
– a probabilidade de um iogurte dentro do prazo de validade estar estragado é de $0{,}5\%$;

– a probabilidade de um iogurte fora do prazo de validade estar estragado é de 65%.

A Eliane escolheu um dos iogurtes do frigorífico ao acaso. Qual é a probabilidade de o iogurte escolhido estar estragado?

38 **Sempre que não tem de estudar, o Marcelo sai de casa para ir a um dos seguintes sítios: campo de jogos, praia, casa da avó ou biblioteca.**

O esquema de ruas está representado ao lado e sabe-se o seguinte das suas escolhas: o Marcelo escolhe o seu caminho aleatoriamente, sendo que opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda.



38.1. Indica a probabilidade de ele ir ao campo de jogos.

38.2. Comenta a seguinte a afirmação da avó do Marcelo: "Vais mais vezes à praia do que visitar-me!".

39 **A Ellen tem as seguintes possibilidades de vestuário para levar para a escola: quatro blusas (duas brancas, uma azul e uma amarela), três saias (uma branca, uma azul e uma vermelha) e dois pares de sapatilhas (brancas e azuis).**

Ela vai escolher aleatoriamente a sua roupa.

39.1. Qual é a probabilidade de ela ir toda de branco?

39.2. Qual é a probabilidade de ela ir para escola com pelo menos uma peça de cor diferente das restantes peças?

Sugestão: Começa por determinar a probabilidade de ela ir vestida com todas as peças de uma mesma cor.

3.3.2. Acontecimentos independentes

Exemplo 25

Numa vila, fez-se um estudo com uma amostra de 200 pessoas para verificar quantas são fumadoras, obtendo-se os seguintes resultados:

	Fumador	Não fumador	Total
Mulher	21	79	100
Homem	50	50	100
Total	71	129	200

Uma questão que se pode colocar é saber se o género e a condição de fumador são dois acontecimentos independentes, isto é, por exemplo, saber se a proporção de mulheres fumadoras é maior, menor ou igual à proporção de homens fumadores.

Para este tipo de questão, podemos formalizar o conceito de acontecimentos independentes do seguinte modo:

Sejam A e B dois acontecimentos no espaço de resultados S.
Os acontecimentos A e B são independentes se e só se: $\boldsymbol{P(A|B)=P(A)}$.

Nota: Na definição acima também se pode considerar $P(B|A)=P(B)$ em vez de $P(A|B)=P(A)$.

Repara, então, que dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não interfere na probabilidade da realização do outro.

Como já vimos anteriormente, tem-se, por definição, que $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ e, portanto, em acontecimentos independentes, verifica-se que $P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, ou seja, pode-se considerar a seguinte definição alternativa:

Sejam A e B dois acontecimentos no espaço de resultados S.
Os acontecimentos A e B são independentes se e só se: $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$.

Voltando ao exemplo anterior, vamos analisar se os acontecimentos A: "Ser mulher" e B: "Ser fumador" são independentes.

1.º processo:

$P(A)=\dfrac{100}{200}=0{,}5$ e $P(A|B)=\dfrac{21}{71}\approx 0{,}30$

Logo, os acontecimentos não são independentes (como se vê claramente nos dados, a proporção de fumadores nas mulheres é bem menor do que nos homens).

2.º processo:

$P(A)\times P(B)=\dfrac{100}{200}\times\dfrac{71}{200}\approx 0{,}18$ e $P(A\cap B)=\dfrac{21}{200}\approx 0{,}105$

concluindo-se novamente que os acontecimentos não são independentes.

Observa que, neste exemplo, as conclusões seriam as mesmas se tivéssemos comparado:
– "Ser mulher" com "Ser não fumador" (não são independentes)
– "Ser homem" com "Ser fumador" (não são independentes)
– "Ser homem" com "Ser não fumador" (não são independentes)

Exemplo 26

Uma mesa de bilhar tem 16 bolas: uma branca, uma preta e duas bolas de cada cor (duas amarelas, duas azuis, duas vermelhas, etc.), conforme a figura ao lado.

Foi escolhida uma bola aleatoriamente. Considera os seguintes acontecimentos:

A : "Sair uma bola amarela"

B : "Sair uma bola com número menor que 9"

C : "Sair uma bola com número ímpar"

Verifica se os seguintes pares de acontecimentos são independentes entre si:

1. A e B **2.** A e C **3.** B e C

Resolução:

Como já vimos anteriormente, existem duas possibilidades de resolução. Na que se segue vai-se verificar a igualdade $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

1. $P(A) \times P(B) = \frac{2}{16} \times \frac{8}{16} = 0{,}0625$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, concluindo-se que os acontecimentos são independentes. De facto, se soubermos que aconteceu B, a probabilidade de sair uma bola amarela mantém-se inalterada (de dois casos favoráveis em 16, passa-se para um caso favorável em oito).

2. $P(A) \times P(C) = \frac{2}{16} \times \frac{8}{16} = 0{,}0625$ e $P(A \cap C) = \frac{2}{16} = 0{,}125$, concluindo-se que os acontecimentos não são independentes. De facto, este resultado é expectável: se verificamos que aconteceu C, aumenta a probabilidade de acontecer A (de dois casos favoráveis em 16, passa-se para dois casos favoráveis em oito).

3. $P(B) \times P(C) = \frac{8}{16} \times \frac{8}{16} = 0{,}25$ e $P(B \cap C) = \frac{4}{16} = 0{,}25$, concluindo-se que os acontecimentos são independentes. A proporção de bolas ímpares é a mesma no conjunto das 16 bolas como no conjunto das bolas com números inferiores a nove.

Exemplo 27

A população ativa de Cabo Verde é de, aproximadamente, 215 mil pessoas.
A distribuição entre mulheres-homens e urbano-rural está registada na seguinte tabela:

	Urbano	Rural
Mulher	78	18
Homem	96	23

População ativa de Cabo Verde (em milhares).
Adaptado de: *Expresso das Ilhas*, 21de outubro de 2024
https://expressodasilhas.cv/economia/2024/10/21/taxa-de-desemprego-fica-em-88-no-2-trimestre-de-2024/93835

Verifica se o acontecimento A: "Ser mulher" é independente do acontecimento B: "Ser rural".

Resolução:

Tem-se que $P(A) = \frac{\overbrace{78+18}^{\text{n.º total de mulheres}}}{215} \approx 0{,}45$ e $P(A|B) = \frac{18}{\underbrace{18+23}_{\text{n.º total rural}}} \approx 0{,}44$

Logo, pode afirmar-se que os acontecimentos, na prática, são independentes entre si, pois os dois valores estão muito próximos.

Nota importante: Repara que, em situações reais, muito dificilmente se terão valores exatamente iguais para estas duas probabilidades: $P(A)$ e $P(A|B)$. Assim, se houver uma boa aproximação, pode-se considerar que os acontecimentos são independentes.

Trabalho de pesquisa na tua escola

A recolha de dados fiáveis é uma tarefa muito importante para se aferir a realidade. Esta recolha, muitas vezes, exige a realização de questionários. Uma prática habitual é fazer questionários anónimos, para garantir que as pessoas respondem sem receio e em liberdade. Um exemplo deste procedimento é o caso de uma votação política como, por exemplo, na eleição dos deputados da Assembleia Nacional de Cabo Verde.

1. Prepara um pequeno boletim de voto* com as seguintes questões:

Qual é o teu género?	Masculino ☐	Feminino ☐
Gostas de futebol?	Sim ☐	Não ☐

*Também podes criar um *google forms*.

2. Distribui os boletins pelo maior número possível de alunos da tua escola (atenção: cada estudante só deve votar uma única vez).

3. Conta os resultados da votação, preenchendo, no final, a tabela ao lado.

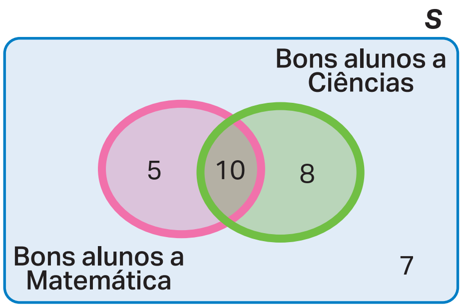
Verifica se os acontecimentos "Ser rapaz" e "Gostar de futebol" são **acontecimentos independentes** na tua escola.

	Gosta de futebol?		
	Sim	Não	Total
Rapaz			
Rapariga			
Total			

Com a ajuda do teu professor, escolhe outros acontecimentos como estes (pode ser, por exemplo, questões do tipo: *Gostas de ver televisão? Sabes andar de bicicleta? ou Gostas de Matemática?*), faz uma nova votação e determina a independência entre esses acontecimentos.

Exercícios

40 De uma turma do 5.º ano tem-se a informação que está representada no seguinte diagrama de Venn:



40.1. Verifica se os acontecimentos "Ser bom aluno a Matemática" e "Ser bom aluno a Ciências" são independentes.

40.2. Escolhe duas disciplinas e constrói, com os teus colegas, um diagrama similar ao apresentado neste exercício. Averigua se as boas notas das disciplinas que escolheste são independentes entre si.

41 O tio do Enzo vive nos Estados Unidos e vai para o seu trabalho de comboio. Contudo, muitas vezes, está mau tempo e nem sempre o comboio chega a horas à estação do tio do Enzo. Durante um ano, o tio do Enzo registou os seguintes dados:

	O comboio chegou atrasado?		
	Sim	**Não**	**Total**
Sol	3	119	
Chuva	7	101	
Neve	8	12	
Total			

Responde às seguintes questões:

41.1. Qual é a probabilidade de nevar na cidade do tio do Enzo?

41.2. Qual é a probabilidade de o comboio chegar atrasado, sabendo que está a chover?

41.3. Qual é a probabilidade de estar a chover, sabendo que o comboio se atrasou?

41.4. Os acontecimentos "Estar a nevar" e "O comboio chegar atrasado" são acontecimentos independentes?

Existem certos problemas em que, pela situação descrita, se pode concluir à partida que os acontecimentos são independentes e, por isso, podemos utilizar a fórmula $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Observa o exemplo apresentado a seguir.

Exemplo 28

A Luana tem dois estojos com lápis e canetas. No estojo azul tem duas canetas e três lápis; no estojo verde tem três canetas e um lápis. A Luana tirou, aleatoriamente, um objeto de cada um dos estojos.

1. Qual é a probabilidade de a Luana tirar duas canetas?
2. Qual é a probabilidade de a Luana tirar uma caneta e um lápis?

Resolução:

Vamos considerar os seguintes acontecimentos:

C_a: "Tirar uma caneta do estojo azul" e C_v: "Tirar uma caneta do estojo verde"

L_a: "Tirar um lápis do estojo azul" e L_v: "Tirar um lápis do estojo verde"

1. Uma vez que cada extração é independente da outra, tem-se:

$$P(C_a \cap C_v) = P(C_a) \times P(C_v) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0{,}3$$

2. A probabilidade pretendida é dada por:

$$P(C_a \cap L_v) + P(L_a \cap C_v) = P(C_a) \times P(L_v) + P(L_a) \times P(C_v) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = 0{,}55$$

Exercício

42 A Emily tem um jogo com quatro dados, como mostra a figura ao lado:

- um dado, com quatro faces, numeradas de 1 a 4;
- um dado, com oito faces, com as faces numeradas de 1 a 8;
- um dado com 12 faces, com as faces numeradas de 1 a 12;
- um dado com 20 faces, com faces numeradas de 1 a 20.

A Emily lançou os quatro dados, aleatoriamente, e anotou os números das faces que ficaram voltadas para baixo.

42.1. Qual é a probabilidade de sair o número 3 em todos os dados?

42.2. Qual é a probabilidade de sair um número par em todos os dados?

42.3. Qual é a maior soma que pode sair deste lançamento? Qual é a probabilidade de tal acontecer?

42.4. Qual é a probabilidade de a soma das quatro faces dar 5 (nota que para dar 5 tem de sair 1 em três dados e 2 no restante)?

Para aplicar

1 **Como sabes, uma moeda “normal” apresenta uma probabilidade de $0,50$ de sair cada uma das suas faces. Em quatro lançamentos consecutivos de uma moeda de 1 escudo, calcula as seguintes probabilidades (começa por construir um diagrama de árvore que represente a situação):**

1.1. Qual é a probabilidade de sair sempre tartaruga?

1.2. Qual é a probabilidade de nunca sair tartaruga?

1.3. Qual é a probabilidade de saírem exatamente duas tartarugas?

1.4. Qual é a probabilidade de saírem pelo menos duas tartarugas?

1.5. Qual é a probabilidade de sair sempre tartaruga, sabendo que saiu tartaruga no primeiro lançamento?

1.6. Qual é a probabilidade de sair sempre tartaruga, sabendo que saiu tartaruga nos dois primeiros lançamentos?

1.7. Qual é a probabilidade de sair sempre tartaruga, sabendo que saiu tartaruga nos três primeiros lançamentos?

1.8. Comenta, justificando, a veracidade da seguinte situação:
“Os acontecimentos “Sair sempre tartaruga” e “Nunca sair tartaruga” não são acontecimentos contrários.”

2 **O Lucas recebeu uma moeda antiga do seu avô. Como esta moeda já foi muito usada, já não é equilibrada, logo, as probabilidades de sair cada uma das duas faces não são equiprováveis.**

2.1. Como pode o Lucas fazer para determinar a probabilidade de saírem as palavras “Cabo Verde” num lançamento?

2.2. Supõe que a probabilidade de saírem as palavras “Cabo Verde” é de 60% e que o Lucas fez quatro lançamentos consecutivos.

a) Qual é a probabilidade de sair sempre “Cabo Verde”?

b) Qual é a probabilidade de saírem exatamente duas vezes as palavras “Cabo Verde”?

3 **O Governo decidiu dar uma bolsa de estudo a um aluno finalista do secundário para fazer um curso, de um mês, numa universidade europeia. Para tal, selecionou para um sorteio aleatório os melhores 40 alunos de Cabo Verde (15 rapazes e 25 raparigas).**
Para orgulho dos seus pais, os gémeos Maria e Tiago fazem parte deste grupo de alunos.

3.1. Qual é a probabilidade de ser selecionada a Maria?

3.2. Qual é a probabilidade de ser escolhido um dos gémeos?

3.3. Qual é a probabilidade de escolher um dos gémeos, se soubermos que foi selecionada uma rapariga?

3.4. Qual é a probabilidade de escolher um dos gémeos, se soubermos que foi selecionado um rapaz?

3.5. Justifica porque é que os valores das respostas das três alíneas anteriores são diferentes entre si.

4 **Num concurso, são colocadas cinco bolas vermelhas e cinco bolas azuis numa caixa. Existem três concorrentes que retiram, sucessivamente, uma bola ao acaso sem reposição, ganhando um prémio no caso de sair uma bola vermelha.**

4.1. Qual é a probabilidade de o primeiro concorrente ganhar prémio?

4.2. Qual é a probabilidade de o segundo concorrente ganhar prémio?

4.3. Qual é a probabilidade de o terceiro concorrente ganhar prémio?

4.4. Qual é a probabilidade de o segundo concorrente ganhar prémio sabendo que o primeiro ganhou prémio?

4.5. Qual é a probabilidade de o terceiro concorrente ganhar prémio sabendo que os dois primeiros ganharam prémio?

4.6. Comenta a veracidade da seguinte afirmação:
"Se fossem 10 concorrentes a tirar bolas da caixa, era impossível o 10.º concorrente conseguir prémio."

Para aplicar

5 A Direção de uma escola pediu aos pais para levarem bolos de milho e de banana para a festa de final de ano.
A escola tem 120 alunos e sabe-se ainda o seguinte:

– 80 alunos comeram bolo de milho;
– 60 alunos comeram bolo de banana;
– 45 alunos comeram bolo de milho e bolo de banana.

5.1. Quantos alunos não comeram bolo?
(Constrói primeiro um diagrama de Venn que represente a situação.)

5.2. Escolhendo aleatoriamente um aluno desta escola:

a) Qual é a probabilidade de ele ter comido bolo?

b) Sabendo que ele comeu bolo de banana, qual é a probabilidade de ele também ter comido bolo de milho?

c) Sabendo que ele comeu bolo de milho, qual é a probabilidade de ele também ter comido bolo de banana?

6 Numa escola da ilha de São Vicente, fez-se um estudo para saber quais os clubes de futebol preferidos pelos estudantes, obtendo-se os seguintes resultados:

	Mindelense	Ac. Mindelo	Sp. Praia	Outros
Rapazes	20	12	9	3
Raparigas	8	8	2	5

Selecionando ao acaso um destes adeptos:

6.1. Qual é a probabilidade de ser rapaz?

6.2. Qual é a probabilidade de ser rapaz, sabendo que é adepto do Mindelense?

6.3. Qual é a probabilidade de ser adepto do Sp. Praia?

6.4. Qual é a probabilidade de ser adepto do Sp. Praia, sabendo que é rapaz?

6.5. Mostra que os acontecimentos “ser rapaz” e “ser de outros clubes” não são independentes.

7 *"No que diz respeito a Cabo Verde, segundo país dos PALOP com mais candidatos inscritos nas IES em Portugal, do total de vinte e dois mil e quinhentos e noventa e dois (22 592) inscritos, encontram-se no ensino universitário nove mil cento e cinquenta e oito (9158) estudantes, dos quais 5106 mulheres e 4052 homens. No ensino politécnico, estão inscritos treze mil quatrocentos e trinta e quatro (13 434) estudantes, dos quais sete mil e quinhentos e vinte e cinco (7525) são mulheres e cinco mil novecentos e nove (5909) são homens."*

Fonte: *Relatório final do projeto Perfil do Estudante dos PALOP nas Instituições do Ensino Superior em Portugal: caracterização, expetativas, constrangimentos, 2015-2021. Instituto Camões*

7.1. Preenche a seguinte tabela com a informação acima.

	Universitário	Politécnico	Total
Mulher			
Homem			
Total			

7.2. Escolhendo, aleatoriamente, um aluno cabo-verdiano a estudar no ensino superior em Portugal (2015-2021):

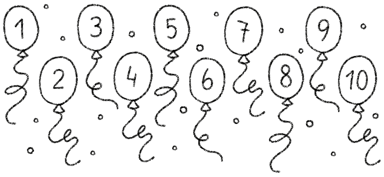
a) Qual é a probabilidade de ser mulher?

b) Qual é a probabilidade de estar matriculado(a) no ensino politécnico?

c) Os acontecimentos "ser homem" e "estar matriculado(a) no ensino universitário" são independentes?

8 **O pai da Luana sugeriu à filha o seguinte jogo:**

"Vou pensar num número entre 1 e 10 e escrever num papel sem tu veres qual é. Se adivinhares o número em três tentativas, ganhas o jogo."



8.1. Qual é a probabilidade de a Luana acertar no número à primeira tentativa?

8.2. Qual é a probabilidade de a Luana ganhar o jogo?

8.3. Qual é mais provável: acertar à primeira ou acertar à terceira tentativa?

Para aplicar

9 **No maior mercado da capital de Cabo Verde, é usual produzir-se roupa artesanal, com tecidos típicos, para vender.**

As conclusões de um estudo sobre a qualidade destas peças podem ser encontradas na seguinte tabela:

	Sem defeitos	Com pequenos defeitos	Total
Vestidos	267	33	300
Camisolas	170	30	200
Total	437	63	

9.1. Escolhendo uma destas peças aleatoriamente, qual é a probabilidade de:

a) a peça não ter defeitos;

b) a peça não ter defeitos, sabendo que foi escolhido um vestido;

c) a peça ser uma camisola, sabendo que foi escolhida uma peça com defeito;

9.2. verifica se os acontecimentos "ter defeito" e "ser um vestido" são independentes.

10 **A D. Rita, ganha a vida, a distribuir ovos pelos mercados de várias vilas. Os seus ovos têm a seguinte proveniência:**

– 20% são do fornecedor A;
– 30% são do fornecedor B;
– 50% são do fornecedor C.

Pela sua experiência, a D. Rita sabe ainda o seguinte:

– 4% dos ovos do fornecedor A não têm qualidade para serem vendidos;
– 1% dos ovos do fornecedor B não tem qualidade para serem vendidos;
– 2% dos ovos do fornecedor C não têm qualidade para serem vendidos.

Ao escolher um ovo da D. Rita, ao acaso, qual é a probabilidade de:

10.1. estar em condições para ser vendido;

10.2. ser do fornecedor A, sabendo que o ovo selecionado não está em condições;

10.3. estar em condições, sabendo que o ovo selecionado é do fornecedor B.

11 **Todos os aeroportos têm detetores de metais para garantir a segurança dos seus passageiros. O teste está preparado para detetar quando o passageiro leva metais consigo, mas não é 100% eficaz.**

De um determinado detetor de metais, sabe-se o seguinte:

		Teste positivo?	
		Sim	**Não**
Leva metais?	**Sim**	4,5%	0,5%
	Não	1%	94%

11.1. Qual é a percentagem de pessoas que são paradas por testarem positivo?

11.2. Qual é a percentagem de pessoas que levam metais?

11.3. Se um passageiro testar positivo, qual é a probabilidade de ele levar metais?

11.4. Se um passageiro levar metais, qual é a probabilidade de ele testar positivo?

12 **Considera a tabela ao lado que representa a quantidade de população estrangeira a viver em Cabo Verde.**

	Cabo Verde		Distribuição por sexo	
			Masc.	Fem.
	Total	%	%	%
Cabo Verde	10 869	100,0	68,4	31,6
Principais nacionalidades				
Angola	281	2,6	52,2	47,8
Brasil	379	3,5	54,0	46,0
China	501	4,6	63,1	36,9
EUA	248	2,3	66,7	33,3
Guiné - Bissau	3 947	36,3	75,5	24,5
Guine Conacri	319	2,9	59,0	41,0
Itália	406	3,7	62,1	37,9
Nigéria	515	4,7	72,4	27,6
Portugal	971	8,9	60,3	39,7
São Tomé e Príncipe	480	4,4	51,2	48,8
Senegal	1 188	10,9	78,6	21,4

Fonte: Mulheres e Homens em Cabo Verde, Factos e Números (2.ª edição, 2024), INE, 2024 (p. 96)

12.1. Quantas mulheres e quantos homens estrangeiros vivem em Cabo Verde?

12.2. Quantos mulheres e quantos homens portugueses vivem em Cabo Verde?

12.3. Escolhendo um estrangeiro ao acaso, indica qual a probabilidade de se escolher:

a) uma pessoa brasileira;

b) uma mulher italiana;

c) um homem, sabendo que foi escolhida uma pessoa chinesa;

d) uma pessoa portuguesa, sabendo que foi escolhida uma mulher.

12.4. Com a informação da tabela, é possível afirmar que é impossível escolher uma pessoa australiana?

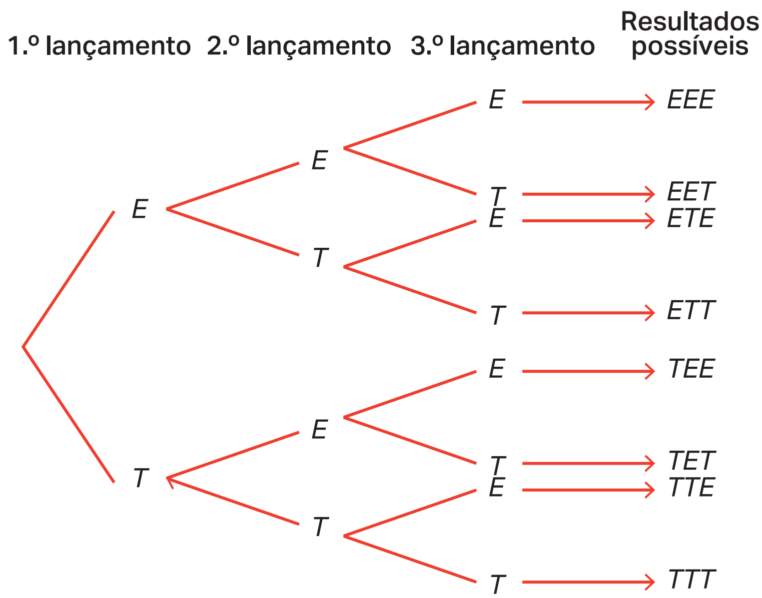
3.4. Modelos de probabilidade em espaços finitos

Exemplo 29

Recorda a experiência aleatória: "Lançar uma moeda ao ar, três vezes consecutivas, e registar a face que fica voltada para cima".

Na moeda que será lançada ao ar, identificamos duas faces diferentes: face escudo (E) e face tartaruga (T).

Para perceber melhor o que acontece, vamos recordar o seguinte diagrama de árvore:



Calcula a probabilidade de, no lançamento da moeda três vezes, sair uma face tartaruga. E de sair duas faces tartaruga? E de sair três faces tartaruga?

Como já sabes, o espaço de resultados para esta experiência aleatória é formado por oito casos:

$$\Omega = \{EEE;\ EET;\ ETE;\ ETT;\ TEE;\ TET;\ TTE;\ TTT\}$$

Com base no espaço amostral, sabemos que:

$P(\text{"não sair nenhuma face tartaruga"}) = \frac{1}{8}$

$P(\text{"sair uma face tartaruga"}) = \frac{3}{8}$

$P(\text{"saírem duas faces tartaruga"}) = \frac{3}{8}$

$P(\text{"saírem três faces tartaruga"}) = \frac{1}{8}$

Neste exemplo, focamos a nossa atenção no número de vezes que sai face tartaruga. Vamos, por isso, imaginar que é esse o motivo do nosso estudo, aquando do lançamento de uma moeda.

3.4.1. Variável aleatória

Nesta experiência aleatória, podemos considerar uma variável que será igual ao número de faces tartaruga obtidas no total dos três lançamentos.

Os valores possíveis dessa variável são 0, 1, 2 e 3. No entanto, cada vez que realizamos a experiência, não conseguimos prever antecipadamente qual será esse número. Por isso, designamos essa variável por variável aleatória.

Variável aleatória

Uma variável cujo valor numérico está associado ao resultado de uma experiência aleatória designa-se por variável aleatória.
Esta variável representa-se, geralmente, por uma letra maiúscula.
Em função dos valores que pode obter, a variável pode ser discreta ou contínua.

Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória diz-se discreta se o conjunto de valores que pode tomar for finito ou formado por vários valores isolados.
O mais habitual é utilizar o termo variável aleatória discreta para designar uma variável que assume um conjunto finito de valores distintos.

Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória diz-se contínua se o conjunto de valores puder assumir qualquer valor de um determinado intervalo ou conjunto de intervalos.

Exemplo 30

Dá exemplos de duas variáveis aleatórias discretas e de duas variáveis contínuas e refere os valores que elas podem tomar.

Resolução:

Por exemplo, no lançamento de um dado cúbico equilibrado (com seis faces), se considerarmos o número de pintas que aparece na face voltada para cima, temos uma variável aleatória discreta que pode tomar os valores 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Considera agora que retiras, aleatoriamente, uma bola que está numa caixa que tem três bolas com os números 1, 2 e 3. Neste caso, a variável aleatória discreta corresponde ao número da bola retirada e pode tomar os valores 1, 2 ou 3.

Podemos considerar agora a variável relativa ao estudo das massas dos alunos de uma turma. Os valores vão variar entre um conjunto, por exemplo, entre 30 kg e 80 kg. Trata-se, por isso, de uma variável contínua.

Outro exemplo de uma variável aleatória contínua pode ser a temperatura corporal, que varia igualmente entre valores de um intervalo, por exemplo, de $35\ ^\circ\text{C}$ a $42\ ^\circ\text{C}$.

Exercícios

43 Considera a seguinte experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda equilibrada e, em seguida, de um dado equilibrado de seis faces com as seguintes regras:

- se sair a face tartaruga regista-se o número de pintas que está na face do dado virada para cima;
- se sair a outra face, regista-se o número 0.

43.1. Indica a variável aleatória associada a esta experiência.

43.2. Refere o conjunto de valores que esta variável pode tomar.

44 Assume que a experiência aleatória é lançar um dado octaedro equilibrado (com oito faces numeradas de 1 a 8) e a variável aleatória associada é o número de pontos na face voltada para cima. Indica o conjunto de valores que esta variável pode tomar.

3.4.2. Distribuições de probabilidade

No mundo das ciências sociais – como a economia, a sociologia ou a geografia –, surgem frequentemente situações de incerteza:

- Qual é a probabilidade de uma pessoa ser escolhida para uma entrevista?
- Qual é a hipótese de um consumidor preferir certo produto?
- Como prever comportamentos ou tomar decisões com base em dados?

Nas próximas páginas, iremos abordar os modelos de probabilidade. Estes modelos matemáticos são utilizados na representação e interpretação de experiências ou fenómenos em que não sabemos, à partida, o que vai acontecer, ou seja, em fenómenos que não podem ser descritos por leis deterministas.

Em particular, vamos estudar os modelos de probabilidade em espaços finitos, ou seja, situações em que conseguimos identificar e contar todos os resultados possíveis. Exemplos simples incluem lançar uma moeda, tirar uma carta de um baralho ou escolher aleatoriamente uma pessoa num grupo restrito.

Suporte de um modelo de probabilidades

O suporte de um modelo de probabilidades corresponde ao conjunto formado pelos valores que uma variável aleatória X pode assumir, sendo que a todos eles se atribui uma probabilidade diferente de 0.

Exemplo 31

1. Para o modelo de probabilidades associado à variável aleatória $X =$ "número de faces tartaruga obtidas no total dos três lançamentos", o suporte é $\{0, 1, 2, 3\}$.
2. Seja $X =$ "Número de respostas corretas num teste com cinco perguntas". Neste caso, assumindo que nenhuma probabilidade será nula, o suporte é dado por $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Imagina agora a seguinte situação: todos os dias de manhã, um aluno dirige-se à paragem de autocarro para ir para a escola. No local onde ele vive, os autocarros passam uma vez por dia, mas costumam vir cheios. No entanto, de vez em quando, aparece um autocarro com lugares vazios.

Definimos a variável aleatória X como: "O número de dias até o aluno conseguir apanhar, pela primeira vez, um autocarro com lugar disponível".

Repara que, neste caso, a variável aleatória é discreta com suporte infinito, mas numerável, uma vez que sabemos que o número de dias é um número natural, mas não sabemos quantos dias o aluno terá de esperar para ter, pela primeira vez, uma oportunidade de encontrar um lugar no autocarro.

Voltemos agora à variável aleatória:

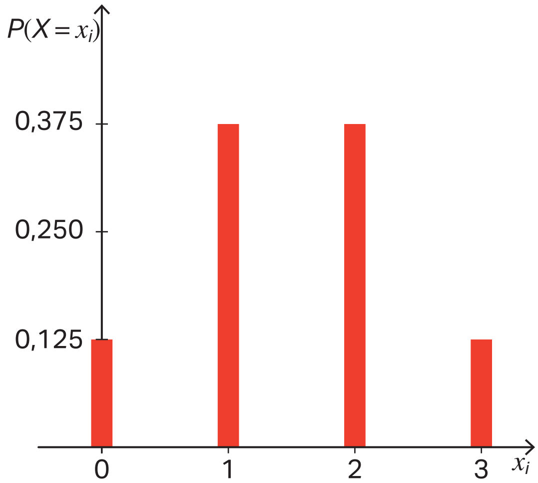
$X =$ "número de faces tartaruga obtidas no total dos três lançamentos de uma moeda"

Representando por p_i a probabilidade de X tomar o valor x_i, temos a seguinte representação em forma de tabela:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Observa que, nesta tabela, existe uma correspondência entre cada valor numérico possível para a variável aleatória e a sua probabilidade.

Graficamente, podemos representar no seguinte gráfico de barras:



Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória *X*

Chama-se **distribuição de probabilidade**, ou **modelo de probabilidade**, de uma variável aleatória quantitativa, $\boldsymbol{X}$, à correspondência que a cada valor $\boldsymbol{x_i}$ da variável aleatória $\boldsymbol{X}$ faz corresponder a sua probabilidade $\boldsymbol{p_i = P(X = x_i)}$.

As distribuições de probabilidade, também conhecidas como modelos de probabilidade, classificam-se em **discretas** ou **contínuas**, consoante o tipo de variável aleatória a que estão associadas.

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\boldsymbol{X}$ também é designada por **função massa de probabilidade**.

Esta fica conhecida quando, para cada valor de $\boldsymbol{x_i}$, temos a correspondência com a sua probabilidade: $\boldsymbol{p_i = P(X = x_i)}$.

Estas probabilidades devem satisfazer as seguintes condições:

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1 \,, \; i = 1 \,, \; \ldots \,, \; n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Esta correspondência $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{p_i})$ pode ser representada por uma tabela ou, graficamente, por um gráfico de barras.

Exemplo 32

Considera a experiência do lançamento de uma moeda duas vezes.

1. Define, por uma tabela e por um gráfico, a função massa de probabilidade associada à variável aleatória:

$X =$ "número de faces tartaruga obtidas no total dos dois lançamentos"

2. Com base na função definida na alínea anterior, calcula a probabilidade de se obter pelo menos uma face tartaruga.

Resolução:

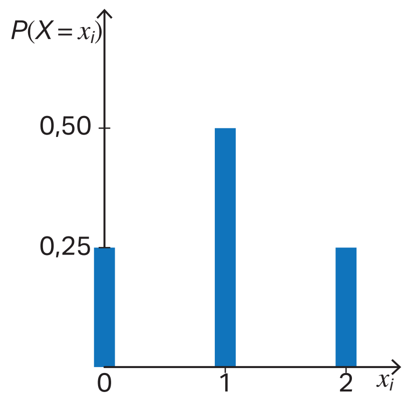
1. Agindo de forma semelhante ao que foi feito para o caso do lançamento de uma moeda três vezes, o nosso espaço de resultados agora é dado por:

$\Omega = \{EE, ET, TE, TT\}$

A variável aleatória pode tomar os valores 0, 1 ou 2.

$P(X=0) = \frac{1}{4}$ $\quad P(X=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \frac{1}{4}$



A função massa de probabilidade pode ser definida pela tabela ou pelo gráfico seguinte.

x_i	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. Quando se estuda a probabilidade de se obter, pelo menos uma vez face tartaruga, estamos a aceitar as opções de ter ocorrido 1 ou 2 saídas desta face. Assim, a probabilidade que se estuda é $P(X \geqslant 1) = P(X=1) + P(X=2) = 0{,}50 + 0{,}25 = 0{,}75$.

Exemplo 33

Determina se as seguintes tabelas podem representar função massa de probabilidade.

1.

x_i	4	6	8	10
$P(X = x_i)$	− 0,6	0,2	0,1	1,3

2.

x_i	8	9	12
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.

x_i	10	20	30
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,1

Resolução:

1. Não pode representar uma função massa de probabilidade.

   Observamos que $P(X=4)<0$ e $P(X=10)>1$ mas $P(X=x_i)$ não pode ser negativo nem superior a 1 e, por isso, esta tabela não pode representar uma função massa de probabilidade.

2. Sim, pode representar uma função massa de probabilidade porque verifica os vários requisitos:

   $P(X=x_i)>0\ ,\ i=1\ ,\ 2\ ,\ 3$

   $P(X=x_i)\leqslant 1\ ,\ i=1\ ,\ 2\ ,\ 3$

   $$\sum_{i=1}^{3} P(X=x_i)=1$$

3. $$\sum_{i=0}^{3} P(X=x_i)=0{,}3+0{,}5+0{,}1=0{,}9$$

   Também não se trata de uma função massa de probabilidade porque a soma das probabilidades dos diferentes x_i teria de dar 1 .

Exercício

45 Determina se as seguintes tabelas podem representar funções massa de probabilidade.

45.1.

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

45.2.

x_i	1	3	5	7	9
$P(X=x_i)$	0,3	0,1	0,2	0,4	– 0,2

Exemplo 34

Considera a seguinte experiência aleatória:

"Lançar uma moeda ao ar, quatro vezes consecutivas, e registar a face que fica voltada para cima".

Determina a função massa de probabilidade associada à variável aleatória $X=$ "número de faces tartaruga obtidas no total dos quatro lançamentos".

Resolução:

Como a variável aleatória pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 ou 4, calcula-se, por um processo semelhante ao que foi usado para o lançamento de uma moeda três vezes, as seguintes probabilidades:

$P(X=0)=\frac{1}{16}$

$P(X=1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$P(X=2)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$P(X=3)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$P(X=4)=\frac{1}{16}$

Com estas probabilidades já calculadas podemos representar a função massa de probabilidade da variável aleatória X através da seguinte tabela:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Exemplo 35

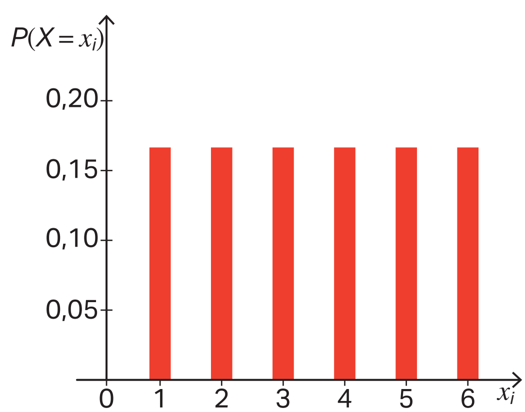
Considera a experiência aleatória do lançamento de um dado regular com seis faces numeradas. Seja X a variável aleatória que representa o número de pintas da face voltada para cima. Define, usando uma tabela e um gráfico, a função massa de probabilidade da variável aleatória X.

Resolução:

Uma vez que o dado é equilibrado e a variável aleatória tem seis valores possíveis, a probabilidade de sair cada umas das faces é de $\frac{1}{6}$.

Assim, a função massa de probabilidade é representada pela tabela:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Exemplo 36

Na ilha do Fogo, foi feito um inquérito a um grupo de famílias sobre o número de bicicletas que possuem. A variável aleatória X representa o número de bicicletas por família.

A função massa de probabilidade de X está representada na tabela seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,3	0,4	a	0,1

Determina o valor de a.

Resolução:

Sabemos que se trata de uma função massa de probabilidade e, por isso, tem de satisfazer as seguintes condições:

$0 \leqslant P(X=x_i) \leqslant 1 \, , \, i=1 \, , \, 2 \, , \, 3 \, , \, 4$

$\sum_{i=1}^{4} P(X=x_i) = 1$

Logo, $0{,}3 + 0{,}4 + a + 0{,}1 = 1 \iff a = 0{,}2$

Exercício

46 A variável aleatória X representa o número de irmãos de cada aluno, numa determinada escola, em Cabo Verde.

Sabe-se que a função massa de probabilidade é representada pela seguinte tabela:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,25	0,4	k	0,15

Determina o valor de k.

Exemplo 37

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados equilibrados convencionais, com as faces numeradas.

Seja X a variável aleatória que representa a soma do número de pintas das faces voltadas para cima.

Define, usando uma tabela, a função massa de probabilidade da variável aleatória X.

Resolução:

Como é possível verificar na seguinte tabela, as somas possíveis são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

		2.º dado					
	+	1	2	3	4	5	6
1.º dado	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Como sabemos que, para a soma ser 2, tem de sair face com uma pinta em cada um dos dados, então a probabilidade de a soma ser 2 é $\frac{1}{36}$.

Por exemplo, para que a soma seja 4, temos três possibilidades entre os 36 casos possíveis:

- no 1.º dado a face virada para cima ter uma pinta e no 2.º dado ter três pintas;
- no 1.º dado a face virada para cima ter duas pintas e no 2.º dado ter duas pintas;
- no 1.º dado a face virada para cima ter três pintas e no 2.º dado ter uma pinta.

Assim, a probabilidade de a soma ser 4 é de $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

Já a probabilidade de a soma ser 7 é de $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Usando o mesmo raciocínio para os restantes casos, a função massa de probabilidade é representada pela tabela:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Nota que, apesar de a variável aleatória poder assumir qualquer um dos 11 valores do conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, a probabilidade de cada um deles não é $\frac{1}{11}$, sendo a probabilidade de $X=7$ a maior.

Exercícios

47 A função massa de probabilidade da variável aleatória X, que representa o número de dias com chuva, numa determinada semana, na cidade da Praia, durante a estação das chuvas, é representada pela tabela:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,05	0,15	0,35	0,3	0,15

Responde às seguintes questões:

47.1. Qual é a probabilidade de chover menos de três dias durante a semana?

47.2. Qual é a probabilidade de chover pelo menos dois dias durante a semana?

47.3. Qual é a probabilidade de chover exatamente três dias durante a semana?

48 Supõe que uma família cabo-verdiana tem três filhos e que a probabilidade de nascer rapaz ou rapariga é a mesma. Considera a variável aleatória $X =$ "*número de rapazes*". Define a função massa de probabilidade.

49 Durante uma atividade na aula de MACSH, o professor propôs o seguinte jogo que envolve duas caixas. A caixa 1 contém bolas numeradas de 1 a 4 e a caixa 2 contém bolas numeradas de 1 a 5. Um aluno retira uma bola de cada caixa, ao acaso, e regista o valor do maior dos dois números. Considerando a variável aleatória $X =$ "*maior dos dois números obtidos nas bolas tiradas*", resolve os seguintes exercícios:

49.1. Define o espaço amostral.

49.2. Define, por uma tabela, a função massa de probabilidade de X.

49.3. Calcula $P(X \leqslant 3)$.

49.4. Calcula $P(X > 2)$.

49.5. Calcula $P(X = 4)$.

50 Foi realizado um inquérito, numa escola secundária da ilha de São Vicente, com o objetivo de perceber quantas vezes, por semana, os alunos utilizam o autocarro para se deslocarem para a escola. As respostas de 40 alunos foram registadas na seguinte tabela:

Número de viagens por semana	0	1	2	3	4
Frequência absoluta	4	8	15	9	4

Com base na frequência, define a função massa de probabilidade da variável aleatória $X =$ "número de vezes por semana que um aluno usa o autocarro para ir para a escola".

51 **Num torneio escolar de futebol, realizado entre várias escolas secundárias de Cabo Verde, a final é disputada entre duas equipas. A equipa vencedora é a primeira a ganhar quatro jogos. Isso significa que a final pode ter entre quatro e sete jogos, ambos inclusive, dependendo das vitórias alternadas entre as equipas.**

Foram analisadas 40 finais deste torneio. O número de jogos disputados, em cada final, é representado pela variável aleatória X.

Número de jogos	4	5	6	7
Frequência absoluta	8	7	9	16

51.1. Determina a probabilidade $P(X)$ para cada valor de X, com base nos dados fornecidos (frequência de cada número de jogos).

51.2. Define a função massa de probabilidade da variável X.

51.3. Representa graficamente a distribuição de probabilidade (por exemplo, usando um gráfico de barras).

Distribuição de frequências *versus* distribuição de probabilidades

Considera a seguinte situação:

Dez alunos de uma turma do 11.º ano de MACSH, na cidade da Praia, têm, à sua frente, um conjunto de dez cartões, de igual tamanho e espessura, indistinguíveis ao tato, com desenhos de frutas: quatro cartões com desenho de bananas, cinco cartões com desenho de mangas e um cartão com desenho de papaias.

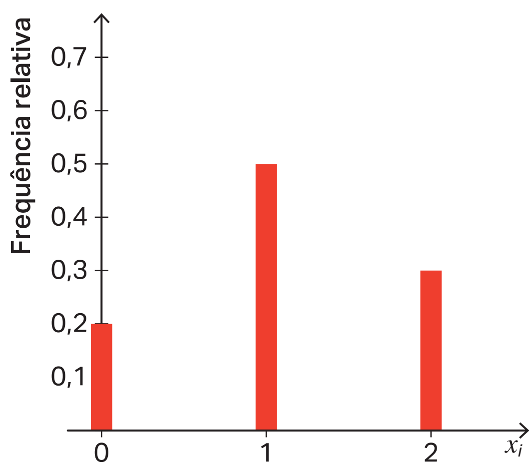
Foi pedido a cada um dos alunos que retirasse sucessivamente, sem ver e sem repor, dois cartões e registasse o número total de cartões com desenhos de mangas que tinham surgido nas suas escolhas.

Os resultados obtidos relativos à variável $X =$ "número de cartões com desenho de mangas" constam da tabela seguinte:

N.º de cartões com desenho de mangas (x_i)	0	1	2
Frequência absoluta	2	5	3
Frequência relativa	0,2	0,5	0,3

Nota: No caso de a experiência ser realizada novamente, os valores das frequências podem ser diferentes.

Representando os valores num gráfico de barras, temos:



Fazendo agora uma abordagem teórica, podemos calcular os valores de $P(X=x_i)$.

No conjunto de cartões temos cinco cartões com desenhos de mangas (M) e cinco cartões com desenhos de peças de fruta que não são mangas $(\bar{M})$.

Sejam:

M_1: o 1.º cartão tem o desenho de mangas.

M_2: "o 2.º cartão tem o desenho de mangas".

Logo,

$$P(X=0)=P\left(\bar{M}_1\cap\bar{M}_2\right)=P\left(\bar{M}_1\right)\times P\left(\bar{M}_2\,|\,\bar{M}_1\right)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}\approx 0{,}22 \quad (2\text{ c. d.})$$

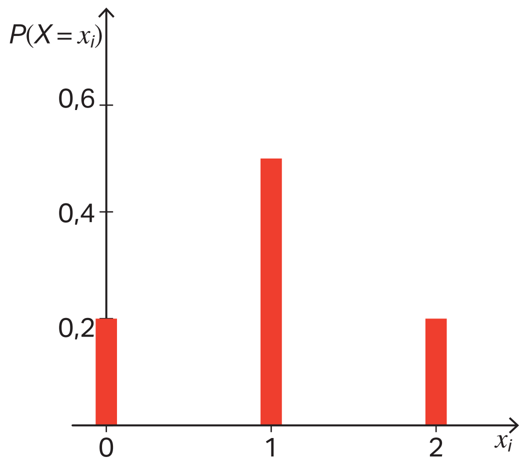
$$P(X=1)=P\left(M_1\cap\bar{M}_2\right)+P\left(\bar{M}_1\cap M_2\right)$$

$$P(X=2)=P(M_1\cap M_2)=P(M_1)\times P(M_2\,|\,M_1)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}\approx 0{,}22 \quad (2\text{ c. d.})$$

Assim, função massa de probabilidade para a variável aleatória X que representa o número de cartões com desenho de mangas após a extração de dois cartões sem reposição pode ser representada pela tabela seguinte:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Ou pelo gráfico:



Neste exemplo, foi recolhida uma amostra composta por alguns elementos da população. No entanto, quando se pretende conhecer a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta, é necessário obter uma amostra de dimensão suficientemente grande da população.

A partir dessa amostra, constrói-se a distribuição de frequências relativas, que dá uma aproximação da distribuição de probabilidades. Em seguida, com base nessas frequências, organiza-se a distribuição de probabilidades propriamente dita.

Este processo permite inferir a distribuição de probabilidades da população com base na distribuição observada na amostra.

Neste exemplo, isso não foi necessário, pois, com base nos conhecimentos já adquiridos, foi possível calcular as probabilidades de forma teórica. No entanto, em muitas situações reais, essa abordagem teórica não é viável, sendo a utilização de uma amostra a única forma possível de estimar as probabilidades.

Valor médio e variância populacional

No 10.º ano, estudaste três medidas importantes. Vamos recordá-las: média, variância e desvio-padrão. Vamos recordar como se calculam.

A média de um conjunto x_1, x_2, ..., x_n de n dados é dada pelo quociente entre a soma de todos os dados e o número de dados e representa-se por $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

A variância traduz o quociente entre a soma dos quadrados dos desvios das observações relativamente à média pelo número de observações e representa-se por s^2.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

O desvio-padrão é a raiz quadrada da variância e representa-se por s.

$$s = \sqrt{s^2}$$

Agora, no estudo de populações, é importante reconhecer que dois dos parâmetros populacionais mais relevantes são o valor médio (ou média populacional) e o desvio-padrão populacional, que se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente. Estes parâmetros ajudam a descrever, de forma numérica, o comportamento global de uma população.

Cálculo da média, do desvio-padrão e das variâncias populacionais

O **valor médio** (ou valor esperado ou esperança matemática) de um modelo de probabilidades de uma variável aleatória X, de suporte finito, obtém-se multiplicando cada valor de x_i pela respetiva probabilidade $p_i = P(X = x_i)$ e adicionando os resultados obtidos:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

em que n representa o número de valores distintos que x_i toma.

A **variância** populacional de um modelo de probabilidades de uma variável aleatória X, de suporte finito, obtém-se multiplicando cada resultado $(x_i - \mu)^2$ pela respetiva probabilidade $p_i = P(X = x_i)$ e adicionando os resultados obtidos:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . p_i$$

e o **desvio-padrão populacional** por $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, em que n representa o número de valores distintos que x_i toma.

Exemplo 38

Considera a experiência de lançar um dado e registar número de pontos das faces viradas para cima (X).

1. Determina o valor médio.

2. Determina a variância.

3. Determina o desvio-padrão.

Resolução:

Sabemos que a função massa de probabilidade se define do seguinte modo:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1. $\mu = \sum_{i=1}^{6} x_i \, . \, p_i = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$

2. Para facilitar a organização dos dados, podemos construir a seguinte tabela com os valores que estarão envolvidos no cálculo da variância:

x_i	p_i	$(x_i - \mu)$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 p_i$
1	$\frac{1}{6}$	$1 - 3{,}5 = -2{,}5$	$(-2{,}5)^2$	$(-2{,}5)^2 \times \frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$2 - 3{,}5 = -1{,}5$	$(-1{,}5)^2$	$(-1{,}5)^2 \times \frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$3 - 3{,}5 = -0{,}5$	$(-0{,}5)^2$	$(-0{,}5)^2 \times \frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$4 - 3{,}5 = 0{,}5$	$0{,}5^2$	$0{,}5^2 \times \frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$5 - 3{,}5 = 1{,}5$	$1{,}5^2$	$1{,}5^2 \times \frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$6 - 3{,}5 = 2{,}5$	$2{,}5^2$	$2{,}5^2 \times \frac{1}{6}$

Assim, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i =$

$= (-2{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (-1{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (-0{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + 0{,}5^2 \times \frac{1}{6} + 1{,}5^2 \times \frac{1}{6} + 2{,}5^2 \times \frac{1}{6} = \frac{17{,}5}{6} \approx 2{,}92$

3. Sabendo que $\sigma^2 \approx 2{,}92$, temos que $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{17{,}5}{6}} \approx 1{,}71$.

Exemplo 39

Um operador de telecomunicações, em São Nicolau, coligiu dados sobre o número de chamadas feitas, por dia, por jovens entre os 12 e os 14 anos.

A variável aleatória X representa o número de chamadas feitas, por dia, por um desses jovens escolhido ao acaso.

A função massa de probabilidade é dada na tabela seguinte:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,10	0,30	0,25	0,15	0,15	0,05

Determina:

1. O número esperado de chamadas feitas, por dia, e interpreta o resultado.

2. O desvio-padrão do número de chamadas feitas por dia.

3. A probabilidade de um jovem fazer pelo menos três chamadas por dia.

Resolução:

1. Como o valor médio também é muitas vezes referido como valor esperado, vamos calcular o valor médio:

$$\mu = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i = 0 \times 0{,}10 + 1 \times 0{,}30 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}15 + 4 \times 0{,}15 + 5 \times 0{,}05 = 2{,}1$$

Este resultado significa que, em São Nicolau, os jovens entre os 12 e os 14 anos fazem, aproximadamente, uma média de duas chamadas por dia.

2. $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (0-2{,}1)^2 \times 0{,}10 + (1-2{,}1)^2 \times 0{,}3 + (2-2{,}1)^2 \times 0{,}25 + (3-2{,}1)^2 \times$

$\times 0{,}15 + (4-2{,}1)^2 \times 0{,}15 + (5-2{,}1)^2 \times 0{,}05 = 1{,}89$

$\sigma = \sqrt{1{,}37} \approx 1{,}37$

3. $P(X \geqslant 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}35$

Assim, a probabilidade de um jovem fazer pelo menos três chamadas, por dia, é de $0{,}35$.

Exercícios

52 Foi feito um pequeno inquérito, numa escola da ilha do Fogo, sobre os hábitos de hidratação dos alunos.

A variável aleatória representa o número de garrafas de água de $1{,}5$ l bebidas, por semana, por um aluno do 11.º ano escolhido ao acaso.

A função massa de probabilidade é dada na tabela seguinte:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Determina:

52.1. O valor médio.

52.2. A variância populacional.

52.3. O desvio-padrão populacional.

53 **Temos dois sacos e, em cada um deles, há bolas numeradas de 1 a 6. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola de cada saco e anotar os números que saírem.**

53.1. Define o espaço amostral.

53.2. Seja X a variável aleatória que representa o valor absoluto da diferença dos números obtidos.

a) Define, por uma tabela e por um gráfico, a distribuição de probabilidades da variável X.

b) Calcula o valor médio e o desvio-padrão, apresentando o resultado com duas casas decimais.

c) Qual é a probabilidade de se obter uma diferença inferior ou igual a 1?

Jogo equitativo

Em muitas situações do dia a dia, as pessoas participam em jogos de sorte ou atividades nas quais existe uma possibilidade de ganhar dinheiro (lucro) ou perder dinheiro (prejuízo) ou ganhar prémios.

Seja em jogos tradicionais, lotarias ou mesmo em competições, é importante compreender se esses jogos são justos ou não para os jogadores.

Um conceito fundamental para analisar essa justiça é o de jogo equitativo.

Este conceito está ligado ao conceito de valor médio esperado dos ganhos do jogador, ou seja, aquilo que, em média, ele pode esperar ganhar ou perder, se jogar muitas vezes.

Seja X a variável aleatória cujos valores são os lucros ou prejuízos correspondentes aos resultados possíveis.

O valor médio de X ou a esperança de X, μ, representa o lucro médio em cada jogada, quando se considera um número muito elevado de jogadas.

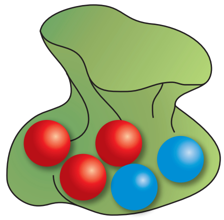
Se $\mu = 0$, diz-se que o jogo é equitativo.

Se $\mu > 0$, diz-se que o jogo favorece o jogador.

Se $\mu < 0$, diz-se que o jogo favorece quem o organiza (e, por isso, é desfavorável ao jogador).

Exemplo 40

Um jogo consiste em extrair uma bola de um saco que contém duas bolas vermelhas e três bolas azuis. Para poderes jogar este jogo pagas 200 escudos cabo-verdianos. Se retirares uma bola vermelha, recebes 500 escudos cabo--verdianos, mas, se retirares uma bola azul, não recebes nada.



Considera a variável aleatória X que faz corresponder a cada resultado o valor ganho.

1. Será o jogo equitativo?
2. Determina o desvio-padrão da distribuição de probabilidade da variável aleatória X e interpreta o resultado.

Resolução:

1. A variável aleatória X pode tomar dois valores: $+300$ (pagar 200 para jogar e ganhar 500) ou -200 (pagar os 200 para jogar e não receber nada).

$P(X=+300)=P(\text{“sair bola vermelha”})=\frac{2}{5}$

$P(X=-200)=P(\text{“sair bola azul”})=\frac{3}{5}$

A função massa de probabilidade é:

x_i	$+300$	-200
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Logo, o valor médio de X é dado por $\mu=+300\times\frac{2}{5}+(-200)\times\frac{3}{5}=\frac{600}{5}-\frac{600}{5}=0$.

Como $\mu=0$, o jogo é equitativo.

2. $\sigma^2=(+300-0)^2\times\frac{2}{5}+(-200-0)^2\times\frac{3}{5}=60\,000$;

$\sigma=\sqrt{60\,000}\approx 244{,}95$

Neste caso, o desvio-padrão mede o nível de incerteza ou risco financeiro associado a uma jogada. Embora o jogo seja justo, a longo prazo, numa jogada isolada, o jogador pode ficar numa situação de valores bastante afastados da média (que indica justiça, sendo, neste caso 0). Assim, podemos dizer que o jogador está a assumir um risco elevado, em cada jogada, já que o desvio-padrão é grande.

Exercícios

54 Na ilha do Sal, os alunos criaram um jogo com um dado equilibrado comum com faces numeradas de 1 a 6 com as seguintes regras:

- O jogador não paga para jogar.
- Se sair um número de 1 a 3, o jogador não ganha nem perde.
- Se sair 4 ou 5, o jogador ganha 150 escudos cabo--verdianos.
- Se sair 6, o jogador ganha 450 escudos cabo--verdianos.

Seja X a variável aleatória que faz corresponder a cada resultado o valor, em escudos cabo-verdianos, correspondente.

54.1. Define a função massa de probabilidade da variável aleatória X.

54.2. Determina o valor médio e indica se este jogo é equitativo.

54.3. Determina o desvio-padrão da variável aleatória X e interpreta o resultado.

55 Um jogo consiste em girar uma roleta que está dividida em quatro regiões de igual área, como se mostra na figura ao lado.

As regras do jogo são as seguintes:

- O jogador não paga para jogar.
- O jogo termina quando sair a cor verde ou forem feitas três jogadas (o que acontecer primeiro).
- Se sair verde na 1.ª jogada o jogador ganha 300 escudos cabo-verdianos, se sair na 2.ª jogada ganha 200 escudos cabo-verdianos, se sair na 3.ª jogada ganha 100 escudos cabo-verdianos e, se não sair até à 3.ª jogada, não ganha nada. Seja X a variável aleatória que representa o valor ganho pelo jogador.

55.1. Obtém a função massa de probabilidade de X.

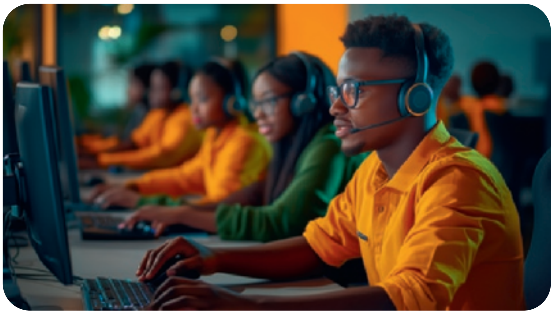
55.2. Determina o valor médio de X apresentando o resultado na forma de fração irredutível. Explica qual é o significado deste valor no contexto da situação descrita.

55.3. Determina o desvio-padrão.

Até aqui, os modelos de probabilidade que estudámos basearam-se em espaços amostrais finitos, como no caso do lançamento de um dado convencional, em que a variável aleatória "número obtido" pode assumir apenas um dos seis valores possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. O suporte desta variável é, portanto, um conjunto finito de resultados. Contudo, muitos fenómenos do mundo real não podem ser descritos por modelos com suporte finito.

Nestes casos, é necessário recorrer a modelos com suporte infinito, que podem ser de dois tipos principais:

- Suporte infinito discreto: por exemplo, o número de chamadas recebidas num *call center*, por hora, pode ser 0, 1, 2, 3, ... sem limite superior. O suporte é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.



- Suporte contínuo: por exemplo, o tempo que um aluno demora a responder a uma pergunta ou o comprimento do salto de um atleta. Nestes casos, a variável pode assumir infinitos valores reais positivos e o suporte é $\mathbb{R}^+$.

Assim, ao estudarmos variáveis aleatórias com suporte infinito, é importante distinguir entre dois grandes tipos de modelos de probabilidade: os modelos discretos e os modelos contínuos.

Podemos, também, verificar a existência de fenómenos em que a variável aleatória pode assumir infinitos valores dentro de um intervalo, como acontece, por exemplo, com a temperatura, o peso de uma pessoa ou o tempo necessário para realizar uma tarefa, que são variáveis aleatórias contínuas.

Estas variáveis aleatórias podem obedecer a diferentes modelos de probabilidade.

Na secção seguinte, iremos estudar um dos mais frequentes.

Para aplicar

1 **A Neilda anotou o valor que colocou no seu mealheiro durante 20 dias, obtendo os seguintes resultados:**

Valor colocado (CVE)	Frequência (número de dias)
100	6
50	10
0	4

Seja X a variável aleatória que representa o valor colocado no mealheiro num dia.

1.1. Determina a probabilidade associada a cada valor de X, com base na distribuição de frequências.

1.2. Calcula o valor médio do valor que a Neilda colocou no mealheiro por dia.

2 **Numa rua movimentada em São Vicente, a câmara municipal monitoriza o trânsito para melhorar a segurança e planear a instalação de semáforos. O número de carros que passam por esta rua, durante uma hora, é uma variável aleatória X, que pode assumir os valores indicados na tabela.**

Pretende-se estudar a distribuição das probabilidades para uma melhor gestão do trânsito.

N.º de carros (x_i)	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,3	p	0,5

2.1. Mostra que a probabilidade de numa hora, escolhida ao acaso, passar exatamente um carro é 0,2.

2.2. Calcula a probabilidade de passar um ou menos carros durante uma hora.

2.3. Em média, quantos carros passam nessa rua a cada hora?

3 **Numa certa região, considera-se que a probabilidade de nascer um rapaz ou uma rapariga é a mesma.**

Seja X a variável aleatória que representa o número de rapazes numa família com quatro filhos.

3.1. Define os diferentes valores que X pode tomar.

3.2. Determina a função massa de probabilidade de X.

3.3. Com base na alínea anterior, qual é a probabilidade de uma família com quatro filhos ter pelo menos dois rapazes?

4 **Uma pastelaria vende, por dia, entre uma e quatro dúzias de pastéis, ambos inclusive. A variável aleatória X representa o número de dúzias de pastéis vendidos num dia, com a seguinte distribuição de probabilidades:**

x_i **(dúzias vendidas)**	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,25	0,35	0,30	0,10

4.1. Qual é a probabilidade de a pastelaria vender mais de duas dúzias de pastéis num dia?

4.2. Qual é o número médio de dúzias de pastéis vendidos, por dia, naquela pastelaria?

4.3. Qual é a variância da variável aleatória X?

5 **Lançam-se dois dados comuns, equilibrados e independentes. Seja X a variável aleatória que representa a diferença entre o maior e o menor número de pintas obtidas nos dois dados. Se os dois números forem iguais, a diferença é 0.**

5.1. Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

5.2. Determina a função massa de probabilidade da variável aleatória X.

5.3. Qual é o valor médio de X?

5.4. Calcula o desvio-padrão de X.

6 **Numa caixa há 10 bolas: quatro brancas e seis pretas. Retiram-se duas bolas sucessivamente, com reposição. Seja X a variável aleatória que representa o número de bolas brancas retiradas nas duas extrações.**

6.1. Representa, através de uma tabela, a função massa de probabilidade relativa ao número de bolas brancas retiradas nas duas extrações.

6.2. Calcula a probabilidade de, no conjunto das duas extrações, se retirar pelo menos uma bola branca.

6.3. Calcula a variância de X.

6.4. Considera agora a variável Y correspondente ao número de bolas pretas retiradas nas duas extrações. Representa, através de uma tabela, a função massa de probabilidade de Y.

6.5. Calcula o valor médio de Y.

6.6. Representa, através de uma tabela, a função massa de probabilidade de Y, no caso de não haver reposição da primeira bola antes da segunda extração.

Para aplicar

7 **Numa escola de Cabo Verde, um professor utiliza uma caixa com bolas coloridas como recurso didático. Na caixa, há duas bolas vermelhas, duas bolas azuis e uma bola verde. Retiram-se duas bolas sucessivamente, sem reposição. Considera a variável aleatória X, que representa o número de cores (diferentes) obtidas nas duas bolas retiradas.**

7.1. Qual é a probabilidade de as bolas retiradas serem da mesma cor?

7.2. Qual é a probabilidade de as bolas retiradas serem de cores diferentes?

7.3. Quais os valores possíveis que X pode tomar?

7.4. Determina a função massa de probabilidade da variável aleatória X.

8 **Num pequeno negócio local em Cabo Verde, regista-se diariamente o número de chamadas recebidas entre as 10 h e as 11 h.**

Define-se a variável aleatória X como sendo o número de chamadas recebidas entre as 10 h e as 11 h nos dias da semana.

Após se registar durante vários dias, verificou-se que:

- os valores observados de X foram: 0, 1, 2 e 3;
- a probabilidade de não receber nenhuma chamada é igual à de receber uma chamada;
- a probabilidade de receber três chamadas é metade da probabilidade de receber duas chamadas;
- a probabilidade de receber duas chamadas é $0{,}28$.

8.1. Representa a função massa de probabilidade através de uma tabela e de um gráfico de barras.

8.2. Determina o valor-médio e o desvio-padrão de X.
Apresenta os resultados aproximados às centésimas.

9 **Numa feira, em São Nicolau, existe um jogo em que o jogador paga 200 escudos para jogar e depois retira uma carta de um conjunto de cartas numeradas de 1 a 4.**

As regras do jogo são:

- se sair o número 4, o jogador ganha 600 escudos;
- se sair o número 3, o jogador ganha 100 escudos;
- se sair os números 1 ou 2, o jogador perde 200 escudos. Define a variável aleatória X, correspondente ao lucro (em escudos) do jogador, em cada jogada.

9.1. Determina a função massa de probabilidade de X.

9.2. Calcula o valor médio do lucro do jogador.

9.3. O jogo é favorável ao jogador? Justifica com base no valor médio.

10 **Numa turma do 11.º ano em Cabo Verde, os resultados de uma prova de Matemática são analisados com o objetivo de identificar dificuldades comuns. A variável aleatória X representa o número de erros cometidos por aluno. A função massa de probabilidade é:**

x_i (erros)	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,15	p	0,25	q	0,1

Sabendo que $p=2q$:

10.1. Determina p e q.

10.2. Calcula a probabilidade de um aluno cometer menos de três erros.

10.3. Calcula o valor-médio e o desvio-padrão de X.

10.4. Explica o que significa o valor-médio obtido no contexto deste problema.

11 **Foram colocadas sobre uma mesa, viradas para baixo, seis peças do jogo de dominó que têm igual número de pintas em cada metade (com pelo menos uma pinta).**

Retiramos, aleatoriamente, uma peça e registamos o número de pintas que nessa peça tem.

Considera a variável aleatória X correspondente ao número de pintas.

11.1. Define a função massa de probabilidade de X.

11.2. Determina o valor médio e o desvio-padrão de X.

3.5. Modelo normal

Tal como no caso das variáveis aleatórias discretas, em que definimos a função massa de probabilidade para descrever a distribuição dos valores possíveis, também no caso das variáveis aleatórias contínuas existe uma função equivalente que descreve o comportamento probabilístico dessas variáveis. Essa função designa-se por função densidade de probabilidade e é dela que vamos falar a seguir.

Função densidade de probabilidade

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X define-se por uma função $y = f(x)$, que será designada por **função densidade de probabilidade** e cuja representação gráfica é uma curva que satisfaz as seguintes condições:

- nenhum ponto está abaixo do eixo dos xx;
- a área total compreendida entre a curva e o eixo dos xx é 1.

Notas:

1. O nome função densidade de probabilidade resulta do facto de, graficamente, ser facilmente visível quais são as regiões em que existe maior ou menor densidade de observações.
2. $P(a \leqslant X \leqslant b)$ corresponde à área compreendida entre a curva desta função, o eixo dos xx e as retas $x = a$ e $x = b$.
3. Num modelo de probabilidade contínuo, a probabilidade num dado ponto é zero, isto é, $P(X = k) = 0$, porque a área de um ponto é igual a zero.

A função densidade de probabilidade permite-nos descrever como os valores de uma variável aleatória contínua se distribuem ao longo de um intervalo de números reais.

Entre as muitas funções densidade possíveis, destaca-se uma com um papel especial na estatística e na modelação de fenómenos naturais e sociais: a função densidade da distribuição normal.

3.5.1. Modelo normal

Dizemos que uma variável aleatória contínua X denomina-se normal quando a sua distribuição de probabilidade (função densidade de probabilidade) é representada por uma curva em forma de sino, que é simétrica em relação a um eixo vertical que passa no valor médio.

Este tipo de curva é conhecido por curva de Gauss, em homenagem ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que a estudou amplamente.

O modelo de probabilidades que esta curva representa é o modelo normal. Este modelo (ou distribuição) de probabilidade fica caracterizado pelo valor médio μ e pelo desvio-padrão σ e representa-se por $N(\mu, \sigma)$.

Um pouco de História...

A curva que representa aquela que, hoje, chamamos distribuição normal tem a sua origem ligada ao estudo dos erros em medições físicas. No passado, os cientistas notaram que as pequenas imprecisões nas suas medidas não eram aleatórias, mas seguiam um padrão específico. Foi o matemático francês Pierre Simon Laplace quem começou a estudar essas distribuições de erros.

Mais tarde, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss aprofundou esses estudos e descreveu a famosa curva em forma de sino, que passou a ser chamada de curva de Gauss. Esta curva mostra como os valores de uma variável se agrupam à volta de um valor médio, com menos valores muito afastados desse centro.

Além das medições físicas, a distribuição normal aparece frequentemente em muitas áreas do nosso corpo e da nossa mente. Por exemplo:

- Em características morfológicas como a altura, o peso, a envergadura ou o tamanho do pé, numa população.
- Em características psicológicas, como os resultados de testes de inteligência (QI), tempo de reação a estímulos e níveis de atenção ou concentração.
- Em características fisiológicas, como a pressão arterial, o ritmo cardíaco, a capacidade pulmonar e os níveis de colesterol no sangue.

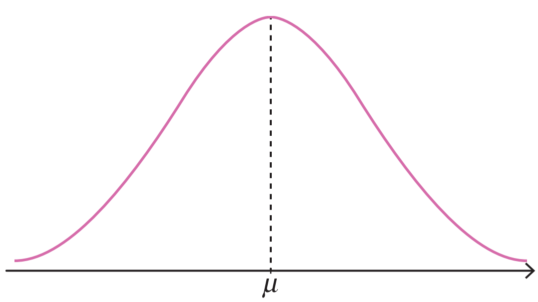
Nesses casos, os valores tendem a distribuir-se de forma equilibrada à volta de um valor médio, seguindo o padrão da curva de Gauss, o que facilita a análise estatística e a tomada de decisões em áreas como a saúde, a educação e o desporto.

Propriedades da curva normal

Seja X uma variável aleatória contínua que segue uma distribuição normal com valor médio μ e desvio-padrão σ.

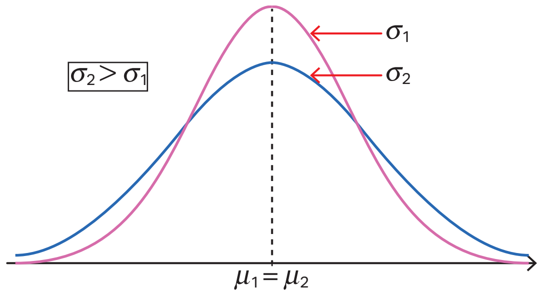
Então, esta distribuição:

1. É simétrica em relação ao valor médio.

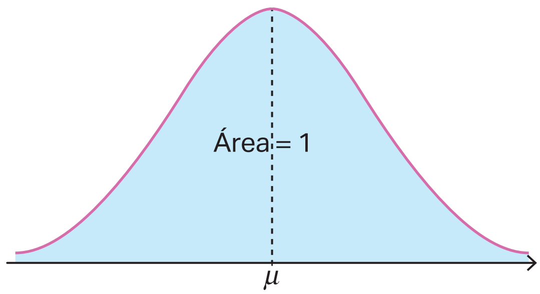


2. Tem um máximo para $x = \mu$.

3. Quanto maior for o desvio-padrão mais achatada é a curva, uma vez que isso significa que maior é a dispersão em torno do valor médio μ.

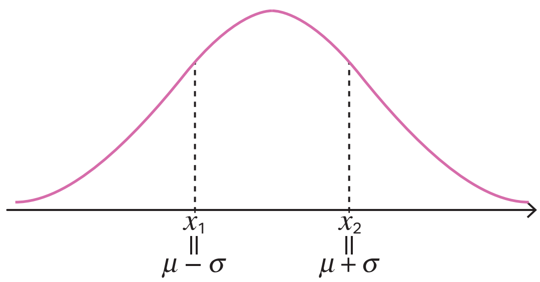


4. A área compreendida entre a curva e o eixo dos xx é igual a 1.



5. A probabilidade de a variável tomar valores pertencentes ao intervalo $[x_i, x_j]$ é igual à área definida pelo eixo dos xx, pela curva e pelas retas $x = x_i$ e $x = x_j$, $x_i < x_j$.

6. A concavidade da curva muda de sentido para $x_1 = \mu - \sigma$ e $x_2 = \mu + \sigma$.



7. O eixo dos xx é assíntota da curva.

8. Consideremos os seguintes intervalos:

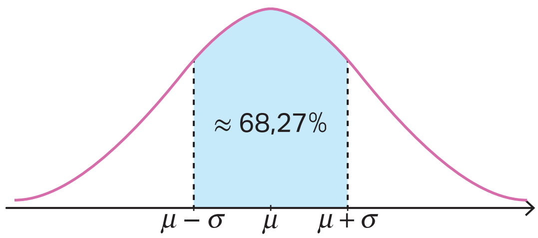
$[\mu - \sigma, \ \mu + \sigma]$

$[\mu - 2\sigma, \ \mu + 2\sigma]$

$[\mu - 3\sigma, \ \mu + 3\sigma]$

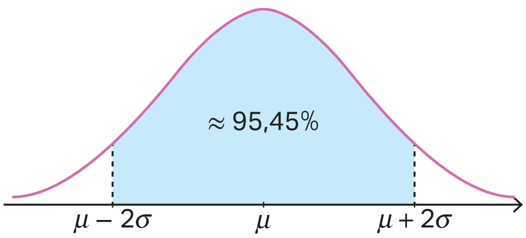
A área abaixo da curva traduz as probabilidades de X se situar nos intervalos em questão. Vejamos:

A área colorida é, aproximadamente, $68{,}27\%$ da área total abaixo da curva.

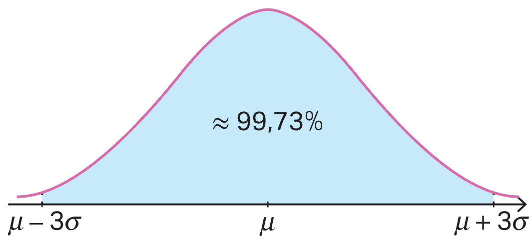


$$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0{,}6827$$

De forma semelhante, podemos concluir a probabilidade de X ter valores noutros intervalos, centrados no valor médio μ:



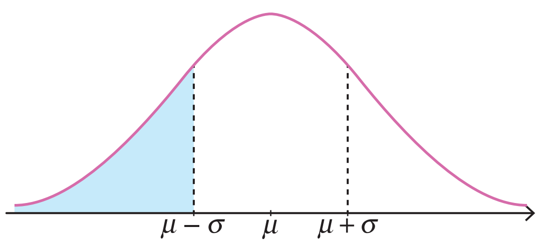
$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0{,}9545$$



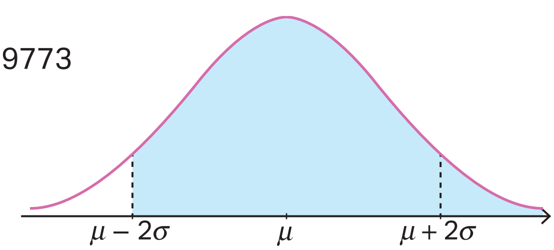
$$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0{,}9973$$

Continuando esta análise, podemos concluir, por exemplo:

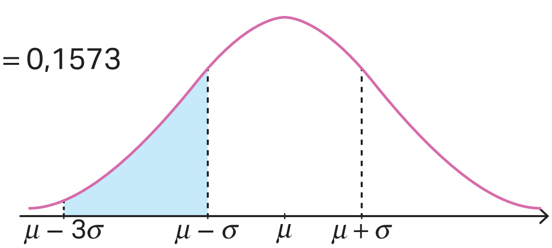
$$P(X \leqslant \mu - \sigma) = \frac{1 - 0{,}6827}{2} \approx 0{,}1587$$



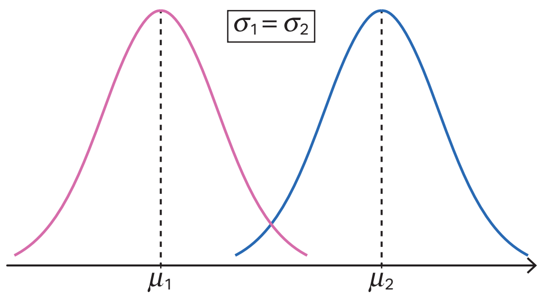
$$P(X \geqslant \mu - 2\sigma) = 0{,}9545 + \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}9773$$



$$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu - \sigma) = \frac{0{,}9973 - 0{,}6827}{2} = 0{,}1573$$

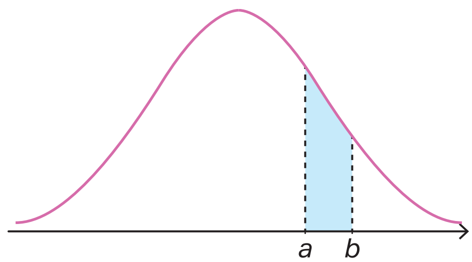


9. O valor médio define a posição do eixo de simetria no eixo dos xx.



10. Uma distribuição normal fica caracterizada pelo valor médio μ e pelo desvio-padrão σ e representa-se por $N(\mu, \sigma)$.

Para calcular o valor da probabilidade $P(a \leqslant X \leqslant b)$, determinamos o valor da área sob a curva no intervalo $[a, b]$, recorrendo, por exemplo, a tabelas próprias (em anexo) ou às capacidades de uma calculadora gráfica.



Observação

Como X é uma variável aleatória contínua, $P(X = a) = 0$ e $P(X = b) = 0$.
Logo, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b)$.

Exemplo 41

Uma empresa de eletricidade, em Cabo Verde, está a analisar a durabilidade das lâmpadas LED usadas em programas de eficiência energética nas habitações.

Estudos feitos mostram que a vida útil dessas lâmpadas (em anos) segue uma distribuição normal, com valor médio $\mu = 11$ anos e desvio-padrão $\sigma = 1$ ano.

Seja $X =$ "vida útil dessas lâmpadas (em anos)".

Determina:

1. $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ e apresenta o resultado na forma de percentagem com duas casas decimais.
2. $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$ e apresenta o resultado na forma de percentagem com duas casas decimais.
3. $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$ e apresenta o resultado na forma de percentagem com duas casas decimais.

Resolução:

Pelas propriedades referidas, podemos concluir que:

1. $P(11-1 \leqslant X \leqslant 11+1) = P(10 \leqslant X \leqslant 12) = 68{,}27\%$

   Ou seja, aproximadamente, $68{,}27\%$ das lâmpadas LED têm uma vida útil entre 10 e 12 anos.

2. $P(11-2 \leqslant X \leqslant 11+2) = P(9 \leqslant X \leqslant 13) = 95{,}45\%$

   Ou seja, aproximadamente, $95{,}45\%$ das lâmpadas LED têm uma vida útil entre 9 e 13 anos.

3. $P(11-3 \leqslant X \leqslant 11+3) = P(8 \leqslant X \leqslant 14) = 99{,}73\%$

   Ou seja, aproximadamente, $99{,}73\%$ das lâmpadas LED têm uma vida útil entre 8 e 14 anos.

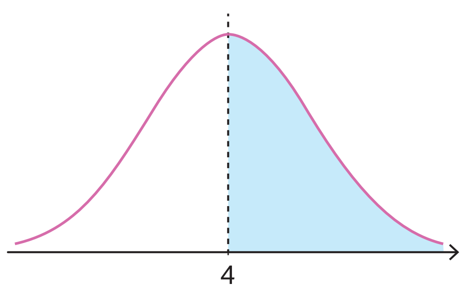
Exemplo 42

Admite que o número de cafés, consumido por um cabo-verdiano, diariamente, segue uma distribuição normal, com um valor médio de quatro cafés e com um desvio-padrão de um café.

1. Qual é a probabilidade de um cabo-verdiano consumir mais de quatro cafés por dia?
2. Qual é a probabilidade de um cabo-verdiano consumir entre três e cinco cafés por dia?
3. Qual é a probabilidade de um cabo-verdiano consumir menos de seis cafés por dia?

Resolução:

Seja $C =$ "número de cafés consumidos por um cabo-verdiano por dia".



1. Como 4 é o valor médio da distribuição, então $P(C > 4) = 0{,}5$. Assim, a probabilidade de um cabo-verdiano consumir mais de quatro cafés, por dia, é de $0{,}5$.

2. Notando que $\mu - \sigma = 4 - 1 = 3$ e $\mu + \sigma = 4 + 1 = 5$, então, pelas propriedades da curva normal, $P(3 \leqslant C \leqslant 5) \approx 0{,}6827$, ou seja, a probabilidade de um cabo-verdiano consumir entre três e cinco cafés por dia é, aproximadamente, de $0{,}6827$.

3. Notemos que $6 = \mu + 2\sigma = 4 + 2 \times 1$.

   O que se pretende determinar é $P(C < 6)$.

   Então, como: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0{,}9545$, vem que:

   $$P(C < 6) = P(2 < C < 6) + P(C < 2) = 0{,}9545 + \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}9773$$

Exemplo 43

Numa escola secundária de Cabo Verde, os resultados de um teste de Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Humanas (MACSH), de uma turma com 30 alunos, distribuíram-se de acordo com uma distribuição normal, com um valor médio $\mu = 12$ valores e desvio-padrão $\sigma = 3$ valores.

1. Calcula a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ter uma classificação inferior a 12 valores.

2. Calcula a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ter uma classificação entre 9 e 15 valores.

3. Quantos alunos tiveram classificação superior a 3 valores?

Resolução:

Seja $X =$ "Classificação de um aluno dessa turma".

1. Como 12 é o valor médio da distribuição, então $P(X < 12) = 0{,}5$.

2. Notando que $\mu - \sigma = 12 - 3 = 9$ e $\mu + \sigma = 12 + 3 = 15$, então, pelas propriedades da curva normal, $P(9 \leqslant X \leqslant 15) \approx 0{,}6827$.

3. Notemos que $\mu - 3\sigma = 12 - 3 \times 3 = 3$ e $\mu + 3\sigma = 12 + 3 \times 3 = 21$.
Então, $P(X > 3) = P(X < 21) = P(3 < X < 21) + P(X < 3) = 0{,}9973 + \dfrac{1 - 0{,}9973}{2} \approx 0{,}9987$.
Para saber quantos alunos tiveram classificação superior a 3 valores, multiplicamos o número total de alunos por $P(X > 3)$. Como $30 \times 0{,}9987 = 29{,}961$, podemos dizer que todos os alunos tiveram classificação superior a 3 valores.

Exemplo 44

Numa fábrica de produção de caixas, em Cabo Verde, o número diário de caixas produzidas X tem uma distribuição aproximadamente normal com média $\mu = 100$ e desvio-padrão $\sigma = 15$.

1. Qual é a probabilidade de, num dia escolhido ao acaso, a produção ser entre 85 e 115 caixas?

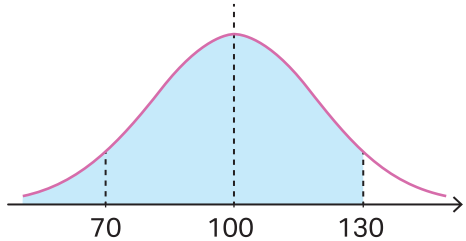
2. Qual é a probabilidade de a produção diária ser inferior a 130 caixas?

3. Se forem considerados 20 dias, em quantos dias se espera que a produção seja superior a 70 caixas?

Resolução:

Seja $X =$ "número de caixas produzidas num dia".

1. Notando que $\mu - \sigma = 100 - 15 = 85$ e $\mu + \sigma = 100 + 15 = 115$, então, pelas propriedades da curva normal, $P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0{,}6827$.



2. Como $130 = \mu + 2\sigma$, a distribuição é simétrica relativamente a 100 e $P(70 \leqslant X \leqslant 130) \approx 0{,}9545$.

Então, $P(X < 130) \approx 0{,}5 + \dfrac{0{,}9545}{2} = 0{,}99725$.

3. $P(X > 70) = P(X < 130) = 0{,}99725$

Para saber em quantos dias a produção foi superior a 70 caixas, multiplicamos o número total de dias por $P(X > 70)$.

Como $20 \times 0{,}99725 = 19{,}945$, podemos dizer que em quase todos os dias a produção foi superior a 70 caixas.

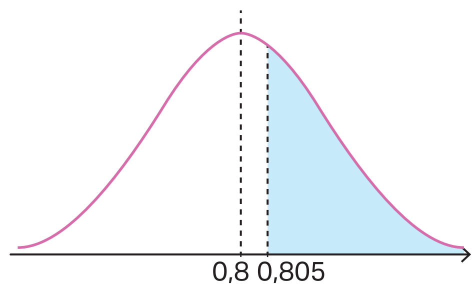
Exemplo 45

Num laboratório de controlo de qualidade de combustíveis, em Cabo Verde, está a ser analisado o índice de densidade de um tipo de gasóleo importado.

Este índice segue uma distribuição normal com média $0{,}8$ e desvio-padrão $0{,}01$ (em g/cm^3).

Usa a calculadora gráfica para determinar a probabilidade de uma amostra de gasóleo ter densidade superior a $0{,}805$ g/cm^3.

Resolução:



Na calculadora, a função normalcdf (a, b, μ, σ) permite calcular $P(a < X < b)$.

Como, neste caso, não temos dois limites, iremos calcular da seguinte forma:

$P(X > 0{,}805) = P(X > 0{,}8) - P(0{,}8 < X \leqslant 0{,}805) =$

$= 0{,}5 - P(0{,}8 < X \leqslant 0{,}805) =$

$= 0{,}5 - \text{normalcdf}\,(0{,}8\,;\,0{,}805\,;\,0{,}8\,;\,0{,}01) \approx 0{,}309$

Exercícios

56 **Num estudo, realizado numa zona da cidade da Praia, concluiu-se que o consumo semanal de água por família segue uma distribuição normal com um valor médio $\mu = 120$ litros e $\sigma = 15$ litros por semana.**

56.1. Qual é a probabilidade de uma família consumir menos de 120 litros por semana?

56.2. Qual é a probabilidade de uma família consumir entre 105 e 135 litros por semana?

56.3. Considerando 50 famílias, quantas consomem mais de 90 litros por semana?

57 **Numa cooperativa agrícola de Santiago, o peso dos cestos de fruta transportados, por dia, segue uma distribuição normal com média $\mu = 25$ kg e desvio-padrão $\sigma = 4$ kg.**

57.1. Qual é a probabilidade de um cesto pesar entre 17 e 33 kg?

57.2. Qual é a probabilidade de um cesto pesar menos de 17 kg?

57.3. Em 60 cestos, quantos deverão pesar mais de 33 kg?

58 **Uma máquina empacota arroz em embalagens grandes. Sabe-se que o peso dessas embalagens segue uma distribuição normal, com média de 10 kg e desvio-padrão de 2 kg. Recorre à calculadora gráfica para determinar a probabilidade de encontrar uma embalagem, embalada com esta máquina, com um peso inferior a 5 kg.**

3.5.2. Distribuição normal $N(0, 1)$

Exemplo 46

Sabemos que o resultado dos alunos nas provas de avaliação depende de vários fatores, incluindo o próprio enunciado do teste. Vamos assumir que, para o nosso estudo, esse é o único fator diferenciador.

A Joana e o António são amigos, mas frequentam escolas diferentes e, por isso, têm professores e provas diferentes. Na última prova de MACSH que realizaram, a Joana obteve 16,06 valores e o António 12,00 valores. Suponhamos que, em cada turma, as classificações seguem uma distribuição aproximadamente normal, caracterizada por:

	Teste da turma da Joana	Teste da turma do António
Valor médio	13	10
Desvio-padrão	1,2	1,5

Qual deles tem a melhor classificação dentro da própria turma?

Uma das possibilidades para responder a esta questão é medir o afastamento de cada valor em relação ao valor médio da turma. Em particular, esse afastamento pode ser medido usando o desvio-padrão como referência.

A classificação da Joana está 3,06 valores acima do valor médio $(16{,}06 - 13)$ da turma.

A classificação do António está 2 valores acima do valor médio $(12 - 10 = 2)$.

Se estudarmos a razão entre os desvios da classificação de cada um dos amigos e os desvios-padrão de cada uma das suas turmas, verificamos o seguinte:

Joana: $\dfrac{3{,}06}{1{,}2} = 2{,}55$; António: $\dfrac{2}{1{,}5} \approx 1{,}3$

A classificação da Joana distancia-se da média mais do dobro do que o desvio-padrão da sua turma.

A classificação da Joana está mais bem posicionada nas classificações da sua turma do que a classificação do António na turma dele.

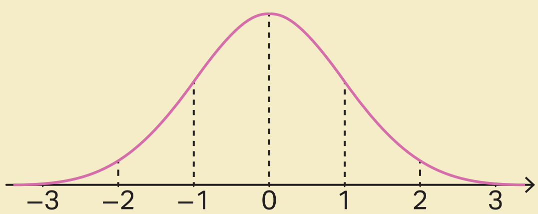
Generalizando, poderíamos para qualquer valor x_i de uma variável aleatória X que siga uma distribuição normal $N(\mu, \sigma)$ fazer corresponder um valor z_i dado por:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

E estes valores também constituem uma nova variável que tem distribuição normal com valor médio (média) 0 e desvio-padrão 1.

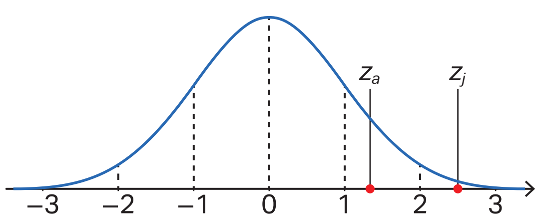
Distribuição normal estandardizada

Seja X uma variável aleatória contínua, que segue uma distribuição normal $N(\mu, \sigma)$. A variável aleatória Z, sendo $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, segue uma distribuição que designamos por distribuição normal estandardizada, distribuição *standard* ou distribuição tipificada. Esta distribuição Z tem valor médio 0 e desvio-padrão 1. A representação gráfica de Z que tem distribuição $N(0, 1)$ é a seguinte:



Voltando à tarefa inicial, teríamos:

Joana	António
$z_j = \frac{16,05 - 3}{1,2} = 2,55$	$z_a = \frac{12 - 10}{1,5} = \frac{4}{3} \approx 1,33$



Assim, visualmente, torna-se claro que a classificação da Joana tem menor percentagem de classificações superiores à sua, na respetiva turma, do que no caso do António.

Função de distribuição cumulativa

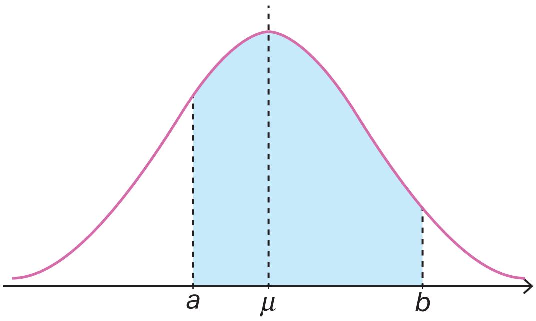
Dada uma variável aleatória X, define-se a função distribuição ou função distribuição cumulativa de X como sendo a função $F(x)$, definida para todo o real x da seguinte forma:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

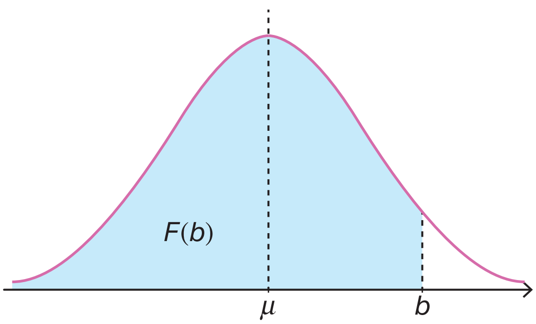
Sendo X uma variável aleatória contínua: $F(x) = P(X \leqslant x) = P(X < x)$.
Muitas vezes, esta função também é representada por $\Phi(x)$.

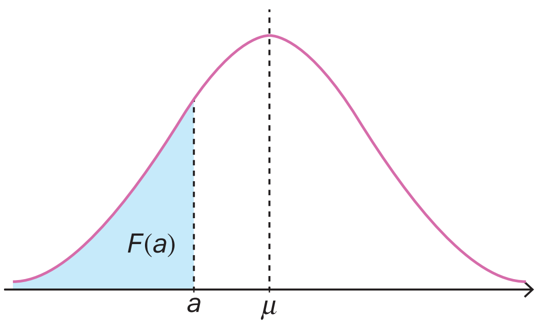
Para facilitar o cálculo de $F(x)$, para um determinado x, podemos recorrer à calculadora gráfica ou, para o caso da distribuição normal $N(0, 1)$, pode-se recorrer à tabela que se encontra no final do livro.

Quando queremos calcular, por exemplo, a área colorida da figura abaixo, correspondente a $P(a < X < b)$, calculamos $F(b)$, $F(a)$ e calculamos $F(b) - F(a)$, isto é, $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.



Nas figuras seguintes estão representadas as áreas correspondentes a $F(b)$ e a $F(a)$.





Para podermos comparar valores provenientes de diferentes distribuições normais, utilizamos o processo de estandardização (ou tipificação) da variável aleatória. Este processo transforma uma variável X, que segue uma distribuição normal com valor médio μ e desvio-padrão σ, numa nova variável Z, com distribuição normal estandardizada, isto é, com valor médio 0 e desvio-padrão 1.

A transformação é feita através da seguinte fórmula:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

Após esta transformação podemos usar a tabela da distribuição $N(0\,,\ 1)$.

Retomemos o exemplo anterior.

Na turma da Joana, a variável $X=$ "classificação na prova de MACSH na turma da Joana" segue uma distribuição normal com valor médio 13 e desvio-padrão $1{,}2$.

Assim, para calcular $P(X>16{,}06)$, começamos por estandardizar a variável para poder usar a tabela:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\,;\ Z=\frac{X-13}{1{,}2}$$

E temos $P(X>16{,}06)=1-P(X\leqslant 16{,}06)=1-P\left(Z\leqslant\frac{16{,}06-13}{1{,}2}\right)=1-P(Z\leqslant 2{,}55)$.

Para encontrar $P(Z\leqslant 2{,}55)$ por consulta da tabela, procuramos na coluna da esquerda $2{,}5$ (correspondente ao valor até às décimas) e na linha superior o valor $0{,}05$ correspondente às centésimas.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Assim, temos que $P(X>16{,}06)=1-P(Z\leqslant 2{,}55)=1-0{,}99461=0{,}00539$.

De forma análoga, se considerássemos $Y=$ "classificação na prova de MACSH na turma do António", que seguia uma $N(10\,;\ 1{,}5)$, para determinar $P(Y>12)$ poderia fazer-se:

$$P(Y>12)=1-P(Y\leqslant 12)=1-P\left(Z\leqslant\frac{12-10}{1{,}5}\right)=1-P(Z\leqslant 1{,}3)=1-0{,}90320=0{,}0968$$

Repara que, para determinar $P(Z\leqslant 1{,}3)$, recorremos à consulta das tabelas apresentadas em anexo.

Ou seja, é mais provável encontrar alguém com classificação superior à do António, na turma dele, do que alguém da turma da Joana com classificação superior à dela.

Exemplo 47

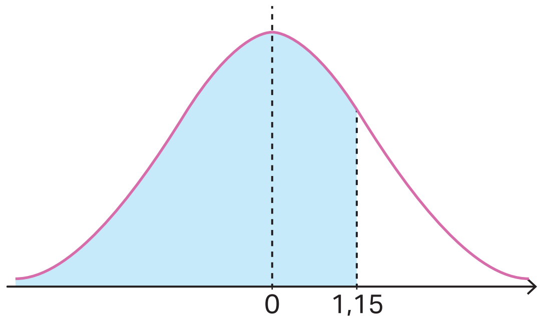
Determina $P(Z \leqslant 1{,}15)$.

Resolução:

Repara que podes obter esse valor por dois processos:

1.º Por consulta das tabelas, que tens em anexo.

Como $1{,}15 = 1{,}10 + 0{,}05$, começaremos por procurar na coluna da esquerda o número $1{,}10$ e na linha superior o número $0{,}05$.



Essa interseção dá-nos a probabilidade $P(Z \leqslant 1{,}15) = 0{,}87493$.

2.º Por recurso a uma calculadora gráfica:

Introduz $0{,}5 + \text{normalcdf}\,(0;\ 1{,}15;\ 0;\ 1)$.

Exercício

59 Determina $P(Z \leqslant 2{,}15)$.

Exemplo 48

Determina $P(Z > 1{,}15)$ com recurso à calculadora gráfica e por consulta das tabelas e compara os resultados.

Resolução:

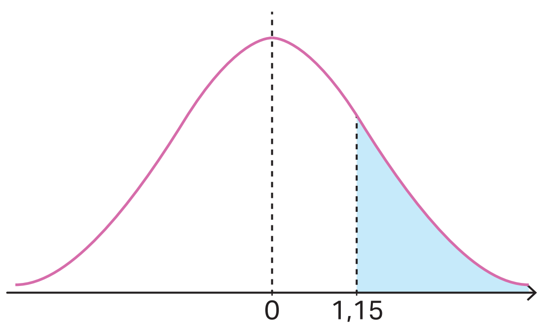
Como na tabela só temos probabilidade para $Z \leqslant a$, teremos de calcular através do complementar.

$P(Z > 1{,}15) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}15) =$

$= 1 - 0{,}87493 = 0{,}12507$

Na calculadora, introduzíamos:

$0{,}5 - \text{normalcdf}\,(0;\ 1{,}15;\ 0;\ 1)$.



Exercício

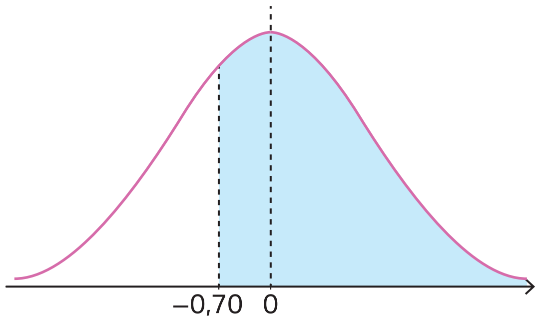
60 Determina $P(Z > 2{,}15)$.

Exemplo 49

Determina $P(Z \geqslant -0{,}7)$.

Resolução:

Como na tabela não temos diretamente esta informação, teremos de fazer alguns cálculos primeiro.



Sabemos que a curva é simétrica à reta $x = 0$ e por isso $P(Z \geqslant -0{,}7) = P(Z \leqslant 0{,}7)$.

Mas $P(Z \leqslant 0{,}7)$ já se encontra na tabela e tem o valor de $0{,}75804$.

Na calculadora, introduzíamos:

$0{,}5 + \text{normalcdf}\,(-0{,}7\,;\ 0\,;\ 0\,;\ 1)$.

Exercício

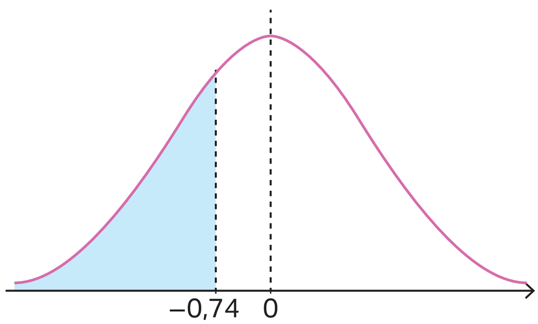
61 Determina $P(Z \geqslant -1{,}7)$.

Exemplo 50

Determina $P(Z \leqslant -0{,}74)$.

Resolução:

Como na tabela não temos diretamente esta informação, teremos de fazer alguns cálculos primeiro.



Sabemos que a curva é simétrica à reta $x = 0$ e por isso

$P(Z \leqslant -0{,}74) = P(Z \geqslant 0{,}74) = 1 - P(Z < 0{,}74)$.

Mas $P(Z \leqslant 0{,}74)$ já se encontra na tabela e tem o valor de $0{,}77035$.

Logo, $P(Z \leqslant -0{,}74) = 1 - 0{,}77035 = 0{,}22965$.

Na calculadora, introduzíamos:

$0{,}5 - \text{normalcdf}\,(-0{,}74\,;\ 0\,;\ 0\,;\ 1)$.

Exercício

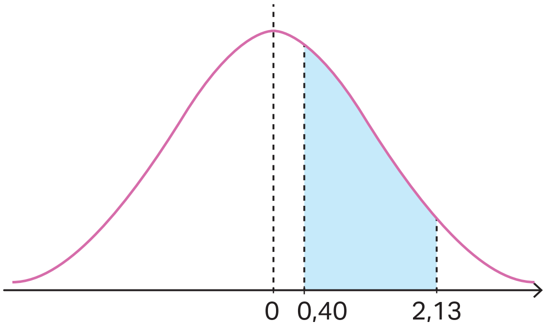
62 Determina $P(Z \leqslant -0{,}50)$.

Exemplo 51

Determina $P(0{,}40 \leqslant Z \leqslant 2{,}13)$.

Resolução:

Como na tabela só temos probabilidade para $Z \leqslant a$ e não entre estes dois valores, teremos de fazer alguns cálculos primeiro.



Observando a figura:

$P(0{,}40 \leqslant Z \leqslant 2{,}13) =$

$= P(Z \leqslant 2{,}13) - P(Z \leqslant 0{,}40) =$

$= 0{,}98341 - 0{,}65542 = 0{,}32799$.

Na calculadora, introduzíamos:

normalcdf $(0{,}40\,;\ 2{,}13\,;\ 0\,;\ 1)$.

Exercício

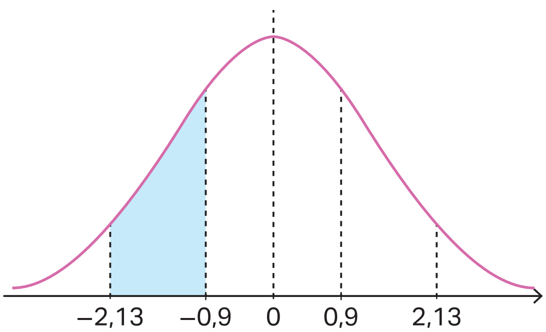
63 Determina $P(0{,}20 \leqslant Z \leqslant 3{,}43)$.

Exemplo 52

Determina $P(-2{,}13 \leqslant Z \leqslant -0{,}9)$.

Resolução:

Como na tabela não temos diretamente esta informação, teremos de fazer alguns cálculos primeiro.



Observando a figura:

$P(-2{,}13 \leqslant Z \leqslant -0{,}90) = P(0{,}90 \leqslant Z \leqslant 2{,}13) =$

$= P(Z \leqslant 2{,}13) - P(Z \leqslant 0{,}90) =$

$= 0{,}98341 - 0{,}81594 = 0{,}16747$.

Na calculadora, introduzíamos:

normalcdf $(-2{,}13\,;\ -0{,}9\,;\ 0\,;\ 1)$.

Exercício

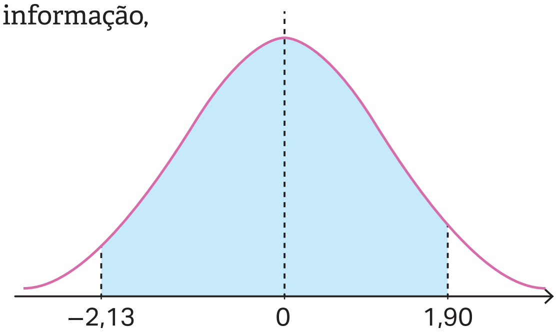
64 Determina $P(-2{,}20 \leqslant Z \leqslant -1{,}43)$.

Exemplo 53

Determina $P(-2{,}13 \leqslant Z \leqslant 1{,}90)$.

Resolução:

Como na tabela não temos diretamente esta informação, teremos de fazer alguns cálculos primeiro.



Observando a figura:

$P(-2{,}13 \leqslant Z \leqslant 1{,}90) =$

$= P(Z \leqslant 1{,}90) - P(Z < 2{,}13) =$

$= 0{,}97128 - P(Z > 2{,}13) =$

$= 0{,}97128 - (1 - P(Z \leqslant 2{,}13)) =$

$= 0{,}97128 - 1 + 0{,}98341 = 0{,}95469$.

Na calculadora, introduzíamos: normalcdf $(-2{,}13\,;\ -1{,}90\,;\ 0\,;\ 1)$.

Exercício

65 **Determina $P(-3{,}13 \leqslant Z \leqslant 1{,}9)$.**

Exemplo 54

Determina $P(Z \leqslant 4{,}1)$.

Resolução:

Esta probabilidade não está diretamente indicada na tabela. No entanto, uma análise mais detalhada da tabela mostra que, para $P(X \leqslant x)$, à medida que os valores de x se aproximam de 4, as probabilidades aproximam-se de 1. Assim sendo: $P(Z \leqslant 4{,}1) \approx 1$.

Na calculadora, introduzíamos: $0.5 +$ normalcdf $(0\,;\ 4{,}1\,;\ 0\,;\ 1)$.

Exercício

66 **Determina $P(Z \leqslant 4{,}5)$.**

Exemplo 55

O tempo (em minutos) que os estudantes demoram a resolver um teste segue uma distribuição normal, com valor médio de 40 minutos e desvio-padrão de 5 minutos. Queremos saber o tempo mínimo que define os 10% dos estudantes que demoram mais do que esse tempo. Seja X a variável aleatória que representa o tempo que os estudantes demoram a resolver um teste (em minutos).

Resolução:

Queremos o valor de x tal que $P(X \geqslant x) = 0{,}10 \iff P(X < x) = 0{,}90$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408

Consultando a tabela da normal $N(0\,,\,1)$, verificamos que a probabilidade mais próxima de $0{,}90$ (que é $0{,}89973$) corresponde a $z = 1{,}20 + 0{,}08 = 1{,}28$.

Fazendo a transformação ao contrário a partir de:

$$z = \frac{x - 40}{5} \iff 1{,}28 = \frac{x - 40}{5} \iff x = 1{,}28 \times 5 + 40 \iff x = 46{,}4 \text{ minutos.}$$

O tempo mínimo que define os 10% de estudantes que demoram mais tempo para resolver o teste é $46{,}4$ minutos.

Exercícios

67 O peso dos pacotes numa fábrica segue uma distribuição normal com valor médio igual a 10 kg e desvio-padrão igual a 2 kg.
Qual é o peso mínimo dos pacotes 10% mais pesados?

68 O tempo de espera por um táxi, num serviço urbano em Santiago, segue uma distribuição normal, com valor médio de 9 minutos e desvio-padrão de $2{,}1$ minutos.

68.1. Calcula a probabilidade de um cliente esperar menos de 7 minutos.

68.2. Qual é a probabilidade de esperar entre $6{,}5$ minutos e $9{,}5$ minutos?

68.3. Até que valor corresponde o tempo de espera dos 30% mais rápidos?

68.4. Se se registarem 100 clientes, em quantos se espera que aguardem mais de 12 minutos?

Síntese

Experiências aleatórias

É uma experiência que, apesar de ser repetida nas mesmas condições e serem conhecidos os resultados possíveis, não conseguimos determinar, a partida, o resultado de cada uma das experiências.

Experiências deterministas

Uma experiência determinista se caracteriza pela obtenção de resultados previsíveis, desde que se mantenham sempre as mesmas condições.

Espaço de resultados ou espaço amostral

O espaço amostral ou espaço de resultados de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência. O espaço de resultados ou espaço amostral representa-se por: S, E ou Ω.

Acontecimentos

Dada uma experiência aleatória, em que o espaço de resultados é S, chamamos acontecimento a qualquer subconjunto de S.

Um **acontecimento elementar** está formado por um único elemento de S.

Um **acontecimento composto** está formado por mais de um elemento de S.

Um **acontecimento impossível** não tem elementos, é o conjunto vazio $\{\ \}$ ou $\varnothing$.

Um **acontecimento certo** é formado por todos os elementos de S.

União de acontecimentos

A união de dois acontecimentos A e B é o acontecimento formado pelos elementos que pertencem a, pelo menos, um deles e representa-se por $A \cup B$.

Interseção de acontecimentos

A interseção de dois acontecimentos A e B é o acontecimento formado pelos resultados que pertencem simultaneamente aos dois acontecimentos e representa-se: $A \cap B$.

Diferença de acontecimentos

A diferença de dois acontecimentos A e B é o acontecimento formado pelos resultados que pertencem a A e não pertencem a B e representa-se por $A \setminus B$.

Síntese

Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos

Em geral, numa experiência aleatória, quaisquer dois acontecimentos A e B dizem-se disjuntos quando não têm resultados em comum, ou seja, quando a sua interseção é o conjunto vazio $A \cap B = \varnothing$.

Acontecimentos contrários ou complementares

Em geral numa experiência aleatória, dois acontecimentos A e B dizem-se contrários ou complementares quando a sua interseção é o conjunto vazio $A \cap B = \varnothing$ e a sua reunião é o espaço amostral $A \cup B = S$. O acontecimento contrário de A é representado $\overline{A}$

Leis de De Morgan para conjuntos

Dados dois acontecimentos A e B de um espaço amostral S tem-se que:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Definição frequencista de probabilidade

A probabilidade de um acontecimento A, associado a uma experiência aleatória, é o valor para que tende a frequência relativa da realização do acontecimento A quando o número de vezes que se efetua a experiência tende para infinito e representa-se por $P(A)$.

Observamos que a frequência relativa é necessariamente um valor entre zero e um, inclusive ambos, assim podemos afirmar que: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Regra de Laplace

Numa experiência aleatória, em que o espaço de resultados S, tem um número finito de elementos, todos com igual probabilidade de acontecer, definimos probabilidade de um acontecimento A, e a representamos por $P(A)$, o quociente entre o número de resultados favoráveis ao acontecimento A e o número de resultados possíveis da experiência.

$$P(A) = \frac{\text{n.}^{\text{o}} \text{ de resultados favoráveis a } A}{\text{n.}^{\text{o}} \text{ de resultados possíveis da experiência}}$$

Síntese

Probabilidade da união de acontecimentos disjuntos

Dados dois acontecimentos A e B, disjuntos, de um espaço amostral S, a probabilidade de A ou Bocorrer é igual à soma das probabilidades de A e B acontecer.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{, sempre que } A \cap B = \varnothing$$

Probabilidade da união de acontecimentos não disjuntos

Dados dois acontecimentos A e B, quaisquer, de um espaço amostral S temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade do acontecimento certo

Se A é o acontecimento certo, então $P(A) = 1$ e temos que $P(S) = 1$.

Probabilidade do acontecimento impossível

Se A é o acontecimento impossível, então $P(A) = 0$

Probabilidade do acontecimento contrário

Se $\bar{A}$ é o acontecimento contrário de A, temos que $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$.

Probabilidade Condicionada

Sejam A e B dois acontecimentos no espaço de resultados S, com $P(B) > 0$. Designa-se por probabilidade de A e B ou probabilidade condicionada de A e B ou probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B, e representa-se por $P(A|B)$, o número real:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Probabilidade da interseção de dois acontecimentos

Sejam A e B dois acontecimentos não impossíveis no espaço de resultados S. Então verifica-se que:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) \text{ e } P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A).$$

Síntese

Regra de Bayes

Sejam A e B dois acontecimentos não impossíveis no espaço de resultados S.

$$P(A|B)=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(B)}$$

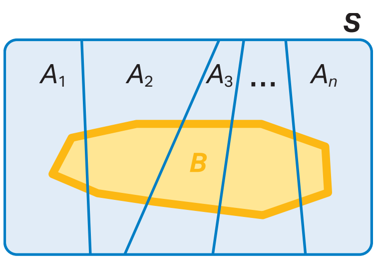
Probabilidade condicionada a acontecimentos mutuamente exclusivos

Seja B um acontecimento no espaço de resultados S. Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ um conjunto de n acontecimentos mutuamente exclusivos (de probabilidade não nula) de tal modo que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$. Então verifica-se que:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n),$$

igualdade que ainda pode ser escrita como

$$P(B)=P(B|A_1)\times P(A_1)+P(B|A_2)\times P(A_2)+\ldots+P(B|A_n)\times P(A_n).$$



Nota: Uma outra maneira de resolver exercícios com acontecimentos mutuamente exclusivos é recorrer a um **diagrama de árvore**.

Acontecimentos independentes

Sejam A e B dois acontecimentos no espaço de resultados S.

Os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A|B)=P(A)$.

Os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Nota: podes usar qualquer uma das duas igualdades acima para mostrar que dois acontecimentos são, ou não, independentes.

Variável aleatória

Uma variável cujo valor numérico está associado ao resultado de uma experiência aleatória, designa-se por variável aleatória.

Esta variável representa-se, geralmente, por uma letra maiúscula.

Em função dos valores que pode obter, a variável pode ser discreta ou contínua.

Síntese

Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória diz-se discreta se o conjunto de valores que pode tomar for finito ou formado por vários valores isolados.

O mais habitual é utilizar o termo variável aleatória discreta para designar uma variável que assume um conjunto finito de valores distintos.

Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória diz-se contínua se o conjunto de valores puder assumir qualquer valor de um determinado intervalo ou conjunto de intervalos.

Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória

Chama-se distribuição de probabilidade, ou modelo de probabilidade, de uma variável aleatória quantitativa, X à correspondência que a cada valor x_i da variável aleatória X faz corresponder a sua probabilidade $p_i = P(X = x_i)$. As distribuições de probabilidade classificam-se em **discretas** ou **contínuas**, consoante o tipo de variável aleatória a que estão associadas.

Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X também é designada por função massa de probabilidade.

Esta fica conhecida quando, para cada valor de x_i, temos a correspondência com a sua probabilidade: $p_i = P(X = x_i)$.

Estas probabilidades devem satisfazer as seguintes condições:

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1 \, , \quad i = 1 \, , \, \ldots \, , \, n \, , \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Valor médio de um modelo de probabilidades (ou distribuição de probabilidades)

O valor médio (ou valor esperado ou esperança matemática) de um modelo de probabilidades de uma variável aleatória X, de suporte finito, obtém-se multiplicando cada valor de x_i pela respetiva probabilidade $p_i = P(X = x_i)$ e adicionando os resultados obtidos: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, em que n representa o n.º de valores distintos que x_i toma.

Síntese

Variância populacional de um modelo de probabilidades (ou distribuição de probabilidades)

A variância populacional de um modelo de probabilidades de uma variável aleatória X, de suporte finito, obtém-se multiplicando cada resultado $(x_i - \mu)^2$ pela respetiva probabilidade $p_i = P(X = x_i)$ e adicionando os resultados obtidos:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

O desvio-padrão populacional é: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Em que n representa o n.º de valores distintos que x_i toma.

Função densidade de uma variável aleatória contínua

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X, define-se por uma função $y = f(x)$ que será designada por **função densidade de probabilidade** e cuja representação gráfica é uma curva que satisfaz as seguintes condições:

- Nenhum ponto está abaixo do eixo dos xx.
- A área total compreendida entre a curva e o eixo dos xx é 1.

Variável aleatória normal

Dizemos que uma variável aleatória continua X diz-se **normal** quando a sua distribuição de probabilidade (função densidade de probabilidade) é representada por uma curva em forma de sino, que é simétrica em relação a um eixo vertical que passa no valor médio. Este tipo de curva é conhecido por **Curva de Gauss (ou curva normal)**.

Mais algumas características da curva normal

Seja X uma variável aleatória contínua que segue uma distribuição normal com valor médio μ e desvio-padrão σ.

Então a curva normal tem, entre outras, as seguintes características:

- é simétrica relativamente ao valor médio μ da variável.
- tem um máximo para $x = \mu$.
- a probabilidade de a variável tomar valores pertencentes ao intervalo $[x_i, x_j]$ é igual à área definida pelo eixo dos xx, pela curva e pelas retas $x = x_i$ e $x = x_j$, $x_i < x_j$.

Síntese

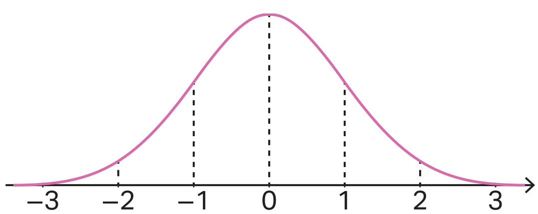
- a área abaixo da curva no intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ é de aproximadamente $0{,}6827$.
- a área abaixo da curva no intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ é de aproximadamente $0{,}9545$.
- a área abaixo da curva no intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ é de aproximadamente $0{,}9973$

Modelo normal

O modelo de probabilidades que a curva normal representa é o modelo normal. Este modelo (ou distribuição) de probabilidade fica caracterizado pelo valor médio μ e pelo desvio-padrão σ e representa-se por $N(\mu, \sigma)$.

Distribuição normal estandardizada

Seja X uma variável aleatória contínua que segue uma distribuição normal $N(\mu, \sigma)$. A variável aleatória Z, sendo $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, segue uma distribuição que chamamos distribuição normal estandardizada, distribuição standard ou distribuição tipificada. Esta distribuição de Z tem valor médio 0 e desvio-padrão 1. A representação gráfica de Z que tem distribuição $N(0, 1)$ é a seguinte:



Função de distribuição cumulativa

Dada uma variável aleatória X, define-se a função distribuição ou função distribuição cumulativa de X como sendo a função $F(x)$, definida para todo o real x da seguinte forma:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Sendo X uma variável aleatória contínua $F(x) = P(X \leqslant x) = P(X < x)$.

Muitas vezes esta função também é representada por $\Phi(x)$.

Para aplicar

1 **As temperaturas máximas diárias em julho, na cidade da Praia, seguem uma distribuição normal, com média de $29\ °C$ e desvio-padrão de $2\ °C$.**

1.1. Em média, a temperatura diária atinge os $29\ °C$ em julho. Em que percentagens, dos dias de julho, na cidade da Praia, podemos esperar temperaturas abaixo deste valor?

1.2. Estima a percentagem de dias em que a temperatura oscila entre um desvio-padrão abaixo e um desvio-padrão acima da média.

1.3. A que percentagem de dias corresponde uma temperatura acima de $33\ °C$?

1.4. Num mês típico de julho (31 dias), quantos dias terão temperaturas acima de $\mu + \sigma$?

2 **Numa localidade da ilha do Fogo, o consumo semanal de água, por residência, segue uma distribuição normal, com média de 115 litros e desvio-padrão de 15 litros.**

2.1. Em que proporção das casas o consumo é considerado "baixo", ou seja, inferior a 100 litros?

2.2. Quantas casas, em cada 100, têm consumos entre 110 e 130 litros?

2.3. Determina o valor de consumo a partir do qual se encontram os 5% das casas com maior consumo.

2.4. Considerando 50 casas, quantas consomem menos que $\mu - 2\sigma$ litros de água por semana?

3 **O tempo que os alunos demoram a chegar à escola segue uma distribuição normal, com média de 30 minutos e desvio-padrão de 5 minutos.**

3.1. Qual é a probabilidade de um aluno demorar mais tempo do que a média acrescida de um desvio-padrão?

3.2. Estima a percentagem de alunos cujo tempo de percurso se encontra entre 25 e 30 minutos.

3.3. Qual é o tempo máximo para os 15% dos alunos mais rápidos?

3.4. Numa escola com 100 alunos, quantos se espera que demorem mais que $\mu + 2\sigma$ minutos?

4 **O peso das mangas vendidas no mercado de Assomada segue uma distribuição normal com média de 420 g e desvio-padrão de 40 g.**

4.1. Qual é a probabilidade de uma manga pesar menos de 400 g?

4.2. Determina a probabilidade de uma manga pesar entre 390 g e 450 g.

4.3. Se considerarmos 200 mangas, quantas delas se espera que pesem mais de 480 g?

4.4. A que peso corresponde o peso das 25% mangas mais leves?

5 **A produção diária de blocos de gelo, numa fábrica em Mindelo, segue uma distribuição normal, com média de 180 blocos e desvio-padrão de 12.**

5.1. Qual é a probabilidade de produzir mais de 190 blocos num dia?

5.2. Calcula a probabilidade de produzir entre 170 e 185 blocos.

5.3. A partir de quantos blocos se considera que a produção está no *top* 20%?

5.4. Se considerarmos 25 dias, em quantos se espera que a produção seja inferior a 165 blocos?

6 **Sabe-se que a variável X segue uma distribuição normal com média 45. A probabilidade de um valor de X se encontrar entre 38 e 52 é de, aproximadamente, $68{,}27\%$.**

6.1. Determina o desvio-padrão.

6.2. Calcula a probabilidade de um valor de X ser inferior a 38.

6.3. Qual é a probabilidade de um valor de X ser superior a 52?

6.4. Se considerarmos 500 casos, em quantos se espera que o valor esteja entre 42 e 48?

7 **A Ana e o Luís estudaram e fizeram testes em escolas diferentes. A Ana obteve 16 valores, numa escola onde as classificações seguiram uma distribuição normal, com média de 14 e desvio-padrão de $1{,}5$. O Luís obteve 13 valores, noutra escola onde as classificações seguiram uma distribuição normal, com média de 10 e desvio-padrão de 2.**

7.1. Quem teve melhor desempenho relativo, isto é, dentro da própria escola? Justifica.

7.2. Qual seria a nota de um aluno noutra escola (com média de 11 e desvio-padrão de $1{,}2$) com o mesmo desempenho do Luís?

Teste

1 Lançam-se dois dados equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6.
Qual é a probabilidade de saírem dois números diferentes, sendo o maior deles superior a 3?
Assinala a opção que apresenta a resposta correta.

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{6}$

2 Uma turma de uma escola é formada por 12 rapazes e 10 raparigas.
Sabe-se que oito rapazes praticam desporto e três raparigas não praticam desporto. Escolhemos, ao acaso, um aluno dessa turma.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O aluno escolhido é um rapaz"

B: "O aluno escolhido não pratica desporto"

2.1. Determina o valor de $P(A)$ e $P(B)$.

2.2. Qual é o valor de $P(A|B)$?

2.3. Qual é o valor de $P(B|A)$?

3 Uma caixa tem cinco bombons, dois com recheio. Retiramos da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons. Considera X a variável "número de bombons com recheio que existem na amostra".
Apresenta a distribuição de probabilidades da variável X.

4 Numa competição de natação, participaram 130 atletas. Relativamente à totalidade dos atletas, sabe-se que:

- 35 atletas competiram no estilo mariposa;
- 50 atletas competiram no estilo bruços;
- 60 atletas não competiram em nenhum destes estilos.

Selecionamos, ao acaso, um dos atletas que participaram na competição.
Determina a probabilidade de o atleta selecionado ter competido nos estilos mariposa e bruços. Apresenta o resultado em forma de fração irredutível.

5 Uma caixa A contém nove bolas, numeradas de 1 a 9, e uma caixa B contém cinco bolas, numeradas de 1 a 5.
Lançamos um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.
Se sair um número múltiplo de 3 retiramos uma bola da caixa A; caso contrário, retiramos uma bola da caixa B.

Considera os acontecimentos:

A: "A bola retirada é da caixa A"

B: "A bola retirada tem um número par"

Mostra que os acontecimentos A e B não são independentes.

6 Uma fábrica produz, diariamente, baterias para telemóveis, de dois tipos (lítio e níquel), 65% das baterias produzidas são de lítio e 35% são de níquel. No controlo de qualidade da fábrica, verifica-se que, em média, 2% das baterias de lítio são defeituosas e 1% das baterias de níquel tem defeito.

De todas as baterias produzidas, num dia, escolhemos uma ao acaso.

6.1. Qual é a probabilidade de a bateria escolhida ser defeituosa?

6.2. Verificou-se que a bateria escolhida é defeituosa. Qual é a probabilidade de ser de níquel?

7 Um grupo de seis amigos decidiu fazer turismo em Cabo Verde. Quatro dos amigos preferem atividades no mar e os restantes preferem atividades fora do mar.

7.1. Queremos selecionar um amigo para ser o organizador de todas as atividades. Assinala a opção que apresenta a probabilidade de a pessoa selecionada preferir realizar atividades fora do mar.

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

7.2. Num dia dedicado a diferentes atividades, um grupo de turistas, na ilha do Sal, tem à sua escolha:

- quatro atividades no mar (mergulho, canoagem, *windsurf* e *surf*);
- duas atividades fora do mar (percurso a cavalo e visita às salinas de Pedra Lume).

O grupo de turistas pode escolher duas dessas atividades, mas estas têm de ser diferentes. Os elementos do grupo não conseguiram chegar a acordo e, assim, a seleção das duas atividades será feita por sorteio. Qual é a probabilidade de as duas atividades escolhidas serem realizadas no mar? Apresenta o resultado em forma de percentagem.

Teste

8 Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset S \text{ e } B \subset S)$, com $P(B) > 0$.

Mostra que $P(A \mid B) + \dfrac{P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} = 1$.

9 De forma aleatória, as torres de peças apresentadas na imagem ao lado vão ser encaixadas para construir uma única torre.

Determina a probabilidade de a parte vermelha ficar no meio da torre amarela e da torre verde.

10 O treinador de um atleta de salto em comprimento fez um estudo sobre os resultados obtidos, no último mês, pelo atleta.

Verificou que os resultados, medidos em metros, são bem modelados por uma distribuição normal, de média $8{,}21$ metros e desvio-padrão $0{,}16$ metros. O atleta está, neste momento, a participar numa competição e prepara-se para dar o último salto a que tem direito. Para se classificar para a fase seguinte, tem de ultrapassar $8{,}37$ metros.

Qual é a probabilidade de o conseguir?

11 Uma caixa A contém três bolas brancas e seis bolas pretas. Uma caixa B contém bolas brancas e pretas num total de dez bolas. Retiramos, ao acaso, uma bola de cada caixa e a probabilidade de serem ambas brancas é de 20%. Quantas bolas brancas estão, inicialmente, na caixa B?

Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Humanas 11.º ano

Criação intelectual
Dina Tavares
Hélder Pinto
Lucinda Serra
Maria Paula Oliveira
Mário Fernandes
Nuno Bastos
Rita Cadima
Sónia Pais
Teresa Costa Clain

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

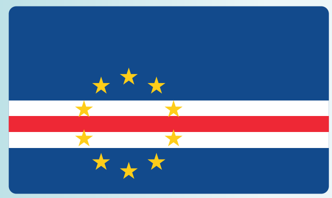
Créditos fotográficos
Porto Editora
© Pedro Moita

Edição
2025

Cabo Verde

Brasão

Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!

Este livro foi aprovado pelo Ministério da Educação para utilização obrigatória nas escolas