Matemática

11.º ano

11

Ministério da Educação

ONLINE
+OFFLINE
+DOWNLOAD

Manual Digital na app
EV Smart Book e em
www.escolavirtual.cv

Matemática

11.º ano

Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado pela Universidade de Cabo Verde.

Ministério da Educação

Explora o teu manual digital

https://escolavirtual.cv

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

DISPONÍVEL NO Google Play

Descarregar na App Store

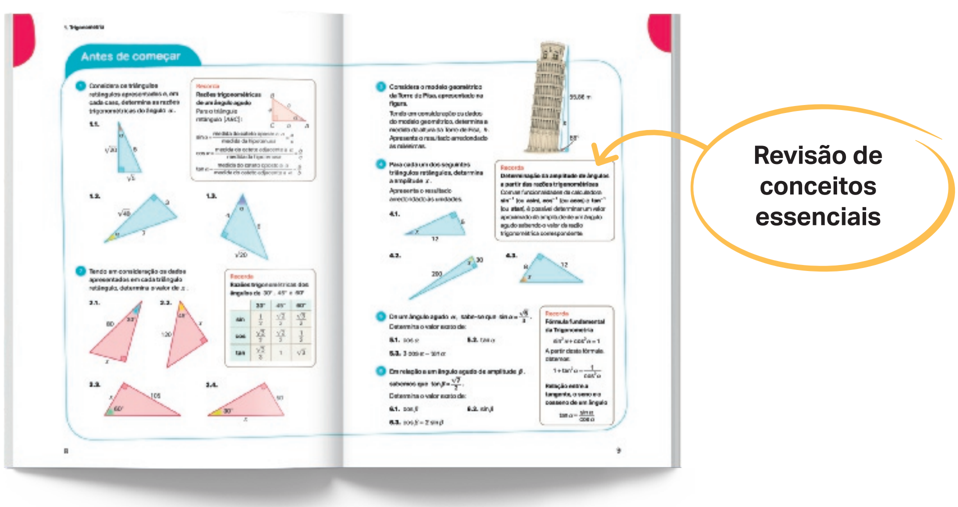
Conhece o teu manual

Este manual ajuda-te neste percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em quatro domínios, de acordo com o plano curricular do ensino secundário: **Trigonometria**, **Geometria analítica**, **Sucessões de números reais** e **Funções reais de variável real**. Cada domínio está dividido em temas.

Cada domínio é composto por:

Separador

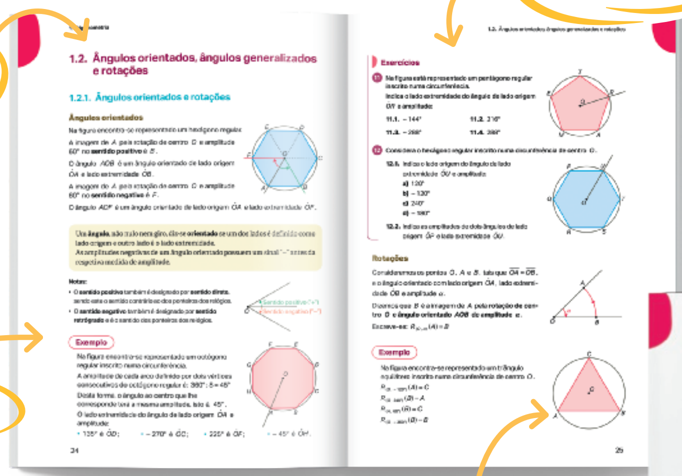
Antes de começar



Desenvolvimento dos conteúdos

Exercícios de aplicação

Explicação dos conteúdos



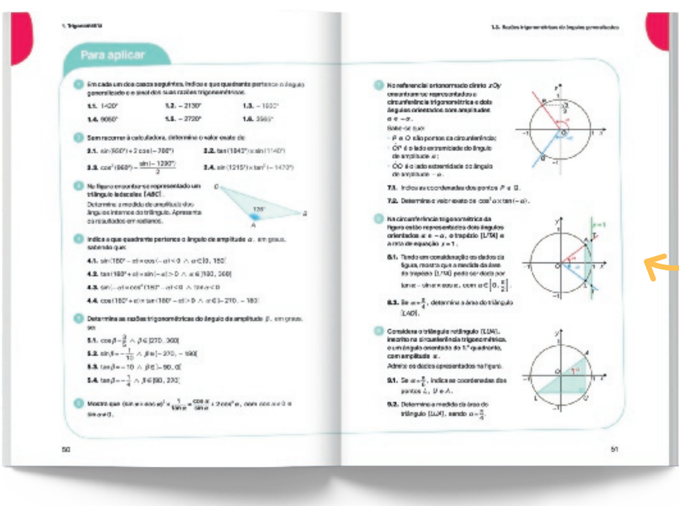
Exemplos

Tarefas sempre que oportuno

Imagens de apoio

No final de cada tema:

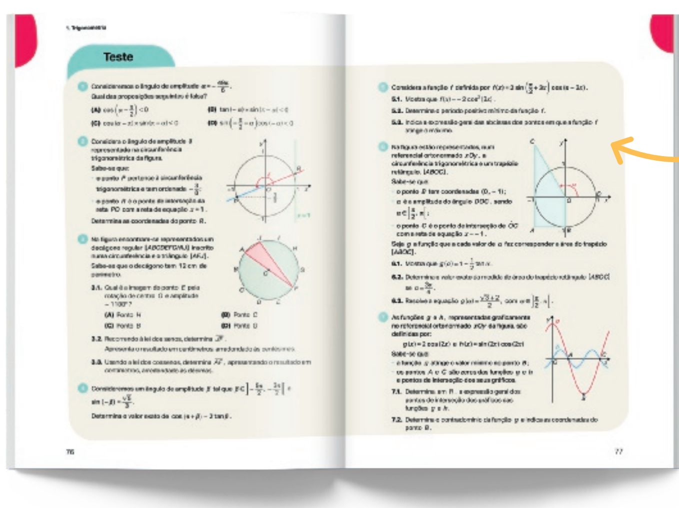
Para aplicar



Aplicação dos conteúdos aprendidos

No final de cada domínio:

Teste



Preparação para os momentos de avaliação

Índice

Índice

3 Sucessões

4 Funções reais de variável real

1

Trigonometria

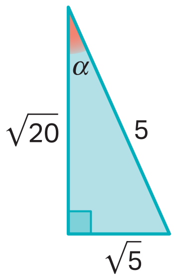
Manual Digital

Atividade
Antes de começar: Trigonometria

Antes de começar

1 Considera os triângulos retângulos apresentados e, em cada caso, determina as razões trigonométricas do ângulo α.

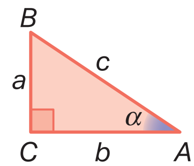
1.1.



Recorda

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Para o triângulo retângulo $[ABC]$:

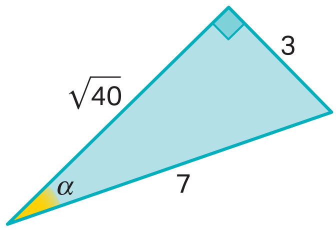


$$\sin\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

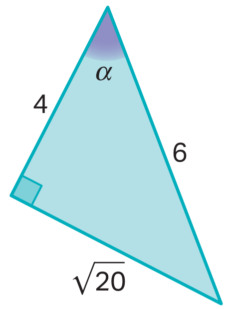
$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

1.2.

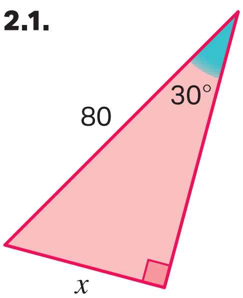


1.3.

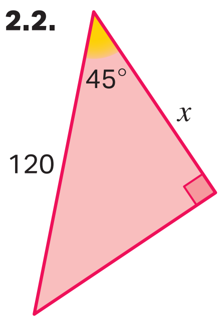


2 Tendo em consideração os dados apresentados em cada triângulo retângulo, determina o valor de x.

2.1.



2.2.

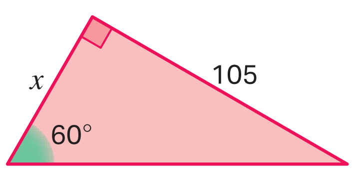


Recorda

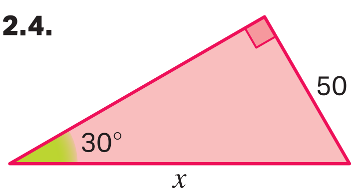
Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.3.

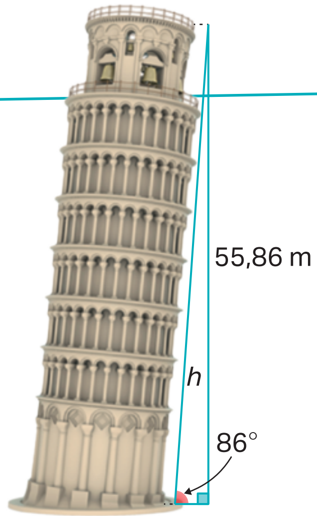


2.4.



3 **Considera o modelo geométrico da Torre de Pisa, apresentado na figura.**

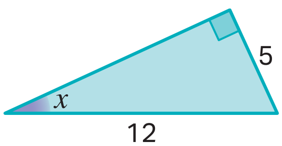
Tendo em consideração os dados do modelo geométrico, determina a medida da altura da Torre de Pisa, h.
Apresenta o resultado arredondado às milésimas.



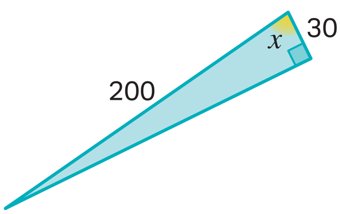
4 **Para cada um dos seguintes triângulos retângulos, determina a amplitude x.**

Apresenta o resultado arredondado às unidades.

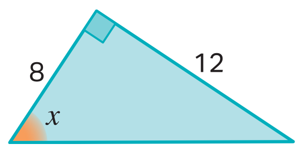
4.1.



4.2.



4.3.



> **Recorda**
> **Determinação da amplitude de ângulos a partir das razões trigonométricas**
> Com as funcionalidades da calculadora **sin**$^{-1}$ (ou **asin**), **cos**$^{-1}$ (ou **acos**) e **tan**$^{-1}$ (ou **atan**), é possível determinar um valor aproximado da amplitude de um ângulo agudo sabendo o valor da razão trigonométrica correspondente.

5 **De um ângulo agudo α, sabe-se que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.**

Determina o valor exato de:

5.1. $\cos\alpha$

5.2. $\tan\alpha$

5.3. $3\cos\alpha - \tan\alpha$

6 **Em relação a um ângulo agudo de amplitude β, sabemos que $\tan\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$.**

Determina o valor exato de:

6.1. $\cos\beta$

6.2. $\sin\beta$

6.3. $\cos\beta - 2\sin\beta$

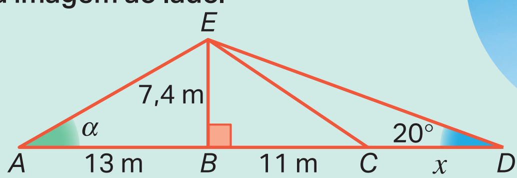
> **Recorda**
> **Fórmula fundamental da Trigonometria**
> $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
> A partir desta fórmula, obtemos:
> $$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
> **Relação entre a tangente, o seno e o cosseno de um ângulo**
> $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

1 Trigonometria

1.1. Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

Tarefa

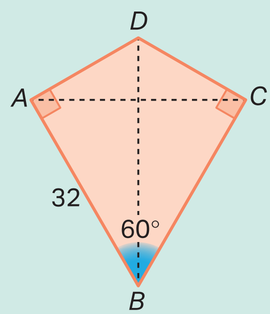
1 **Considera o seguinte modelo geométrico da parte superior da grua da imagem ao lado.**



1.1. Determina a amplitude do ângulo α. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

1.2. Determina $\overline{DC}$ em metros, arredondado às décimas.

2 **Na figura está representado um papagaio, $[ABCD]$.
Considerando os dados apresentados na figura, determina:**



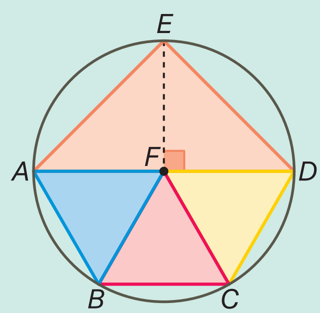
2.1. $\overline{AC}$

2.2. a amplitude do ângulo ADB, sabendo que $B\hat{A}D = 90°$;

2.3. o valor exato de $\overline{AD}$, com denominador racional.

3 **Na figura encontra-se representado um pentágono irregular inscrito numa circunferência de diâmetro $[AD]$ e centro F.
Sabe-se que:**

- **$[ABF]$, $[BCF]$ e $[CDF]$ são triângulos equiláteros;**
- **$\overline{AD} = 6$ cm**
- **o ângulo DFE é reto.**



3.1. Qual é a amplitude do ângulo AEF? Justifica a tua resposta.

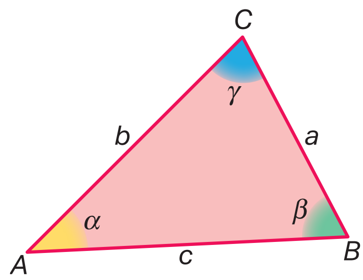
3.2. Mostra que $\overline{AE} = 3\sqrt{2}$ cm.

3.3. Mostra que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

1.1.1. Lei dos senos

Consideremos um triângulo acutângulo, $[ABC]$, tal que:

- $B\hat{A}C = \alpha$, $C\hat{B}A = \beta$ e $A\hat{C}B = \gamma$
- $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$

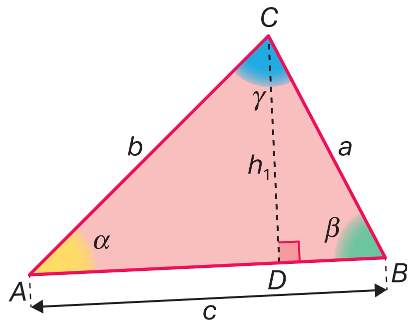


Manual Digital

Vídeo
Lei dos senos

Como sabemos, um triângulo possui três alturas (relativas às três bases).

Vamos decompor o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos, considerando a altura em relação ao lado $[AB]$.

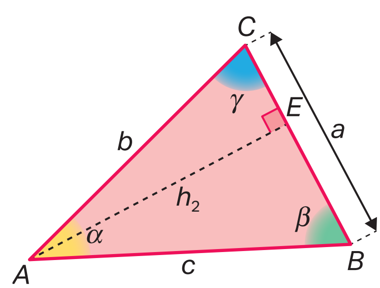


Assim, sabemos que:

- $\sin\alpha = \dfrac{h_1}{b} \Leftrightarrow h_1 = b\sin\alpha$
- $\sin\beta = \dfrac{h_1}{a} \Leftrightarrow h_1 = a\sin\beta$

Logo: $b\sin\alpha = a\sin\beta \Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$.

Ao decompormos o triângulo $[ABC]$ pela altura relativa ao lado $[BC]$, verificamos que:



- $\sin\beta = \dfrac{h_2}{c} \Leftrightarrow h_2 = c\sin\beta$
- $\sin\gamma = \dfrac{h_2}{b} \Leftrightarrow h_2 = b\sin\gamma$

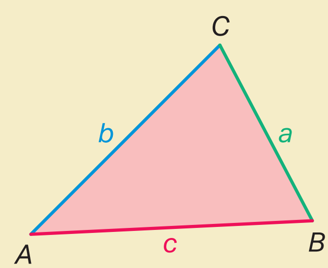
Logo: $c\sin\beta = b\sin\gamma \Leftrightarrow \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

Desta forma, podemos concluir que $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

Lei dos senos num triângulo acutângulo

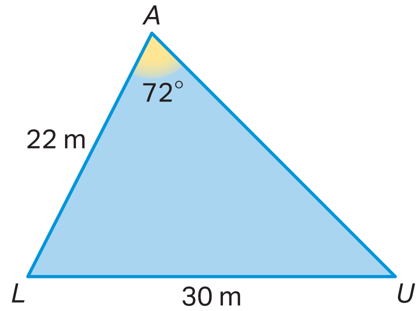
Num triângulo acutângulo $[ABC]$, verifica-se que:

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$



Exemplo

Observa o triângulo acutângulo $[LUA]$.



1. Ao considerar os dados apresentados na figura, conseguimos, facilmente, determinar as amplitudes dos ângulos desconhecidos.

Para tal, basta aplicar a lei dos senos:

$$\frac{\sin 72°}{30} = \frac{\sin \hat{L}}{\overline{AU}} = \frac{\sin \hat{U}}{22}$$

Assim, $\sin \hat{U} = 22 \times \frac{\sin 72°}{30}$.

Usando a funcionalidade **sin**$^{-1}$ (ou **asin**) da calculadora, obtemos: $\hat{U} \approx 44°$.

Logo, $\hat{L} \approx 180° - 72° - 44° = 64°$.

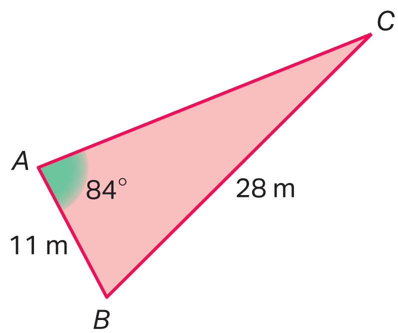
2. Para determinar a medida de comprimento do lado desconhecido do triângulo $[LUA]$, podemos usar de novo a lei dos senos.

$$\frac{\sin 72°}{30} = \frac{\sin 64°}{\overline{AU}} \Leftrightarrow \overline{AU} = \frac{30 \sin 64°}{\sin 72°}$$

Logo, $\overline{AU} \approx 28$ m.

Exercícios

1 **Considera o triângulo acutângulo $[ABC]$ representado e os dados apresentados na figura.**



1.1. Usa a lei dos senos para completar, no teu caderno, as igualdades seguintes.

$$\frac{\sin 84°}{\ldots} = \frac{\ldots}{\overline{AC}} = \frac{\sin \hat{C}}{\ldots}$$

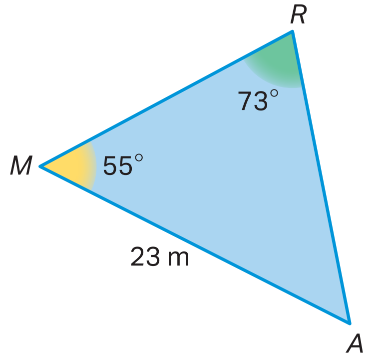
1.2. Determina a amplitude, em graus, do ângulo interno de vértice C. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

1.3. Calcula a medida do comprimento do lado $[AC]$. Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

2 **Na figura está representado o triângulo $[MAR]$. Considera os dados apresentados na figura e usa a lei dos senos para responderes às questões seguintes.**

2.1. Determina a amplitude, em graus, do ângulo interno de vértice A.

2.2. Determina as medidas, em metros, dos lados $[RA]$ e $[MR]$. Apresenta os resultados arredondados às centésimas.



Manual Digital

Vídeo
Definição de seno de um ângulo obtuso e de um ângulo reto

A lei dos senos e o seno de um ângulo obtuso

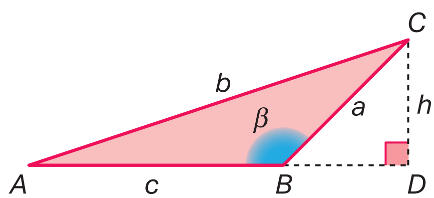
Consideremos, agora, um triângulo obtusângulo, $[ABC]$, tal que $C\hat{B}A = \beta$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Repara que $\sin \hat{A} = \frac{h}{b}$ e $\sin(180° - \beta) = \frac{h}{a}$.

Logo, $h = b \times \sin \hat{A}$ e $h = a \times \sin(180° - \beta)$.

Assim, $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin(180° - \beta)}{b}$.

Então, para a lei dos senos ser válida em triângulos obtusângulos, os senos de ângulos suplementares têm de ser iguais.



A saber:
Se α é a amplitude de um ângulo obtuso, então:

$$\sin \alpha = \sin(180° - \alpha)$$

A lei dos senos e o seno de um ângulo reto

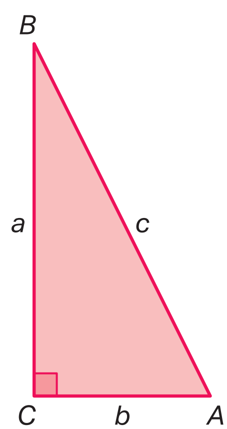
Consideremos um triângulo $[ABC]$ retângulo em C. Sabemos que:

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{c} \text{ e } \sin \hat{B} = \frac{b}{c}$$

Para que a lei dos senos seja verdadeira, a seguinte igualdade terá de acontecer:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}, \text{ isto é, } \frac{\frac{a}{c}}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{b} = \frac{\sin 90°}{c}$$

Desta forma, $\frac{1}{c} = \frac{1}{c} = \frac{\sin 90°}{c}$, resultando que a lei dos senos será válida se $\sin 90° = 1$.



A saber:

$$\sin 90° = 1$$

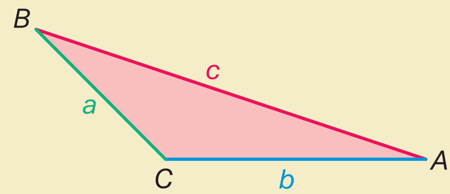
Manual Digital

Vídeo
Lei dos cossenos

Lei dos senos

Em qualquer triângulo $[ABC]$, tem-se que:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

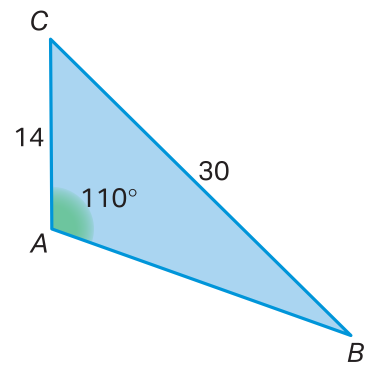


Exercícios

3 Considera o triângulo $[ABC]$ da figura e os dados nele apresentados.

3.1. Determina a amplitude do ângulo de vértice B. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

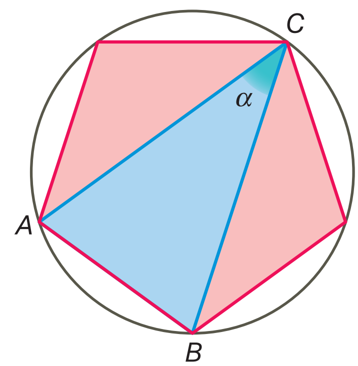
3.2. Determina a medida do lado $[AB]$, apresentando o resultado arredondado às centésimas.



4 Na circunferência da figura estão inscritos um pentágono regular e o triângulo $[ABC]$.
Fixada uma unidade de comprimento, $\overline{AC} = 6$ e a medida do perímetro do pentágono é 20.

4.1. Determina a amplitude do ângulo α.

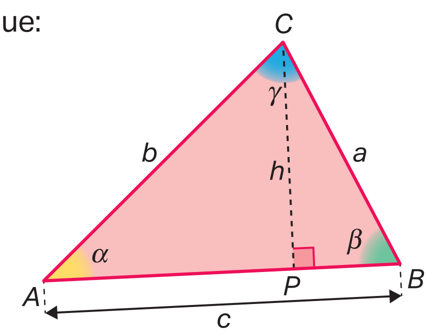
4.2. Determina a medida da área do triângulo $[ABC]$.



1.1.2. Lei dos cossenos

Consideremos um triângulo acutângulo, $[ABC]$, tal que:

- $B\hat{A}C = \alpha$, $C\hat{B}A = \beta$ e $A\hat{C}B = \gamma$
- $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$



Sejam P a projeção ortogonal de C sobre $[AB]$ e h tal que $h = \overline{CP}$.

Como $[APC]$ é um triângulo retângulo, então:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AP}}{b} \Leftrightarrow \overline{AP} = b \cos \alpha$$

Pelo Teorema de Pitágoras, vem: $\overline{AP}^2 + h^2 = b^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - (b \cos \alpha)^2$

Como $\overline{PB} = c - \overline{AP} = c - b\cos\alpha$ e sendo $[PBC]$ um triângulo retângulo, pelo Teorema de Pitágoras vem:

$$a^2 = h^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \iff h^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

Assim, concluímos que:

$b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2 \iff$

$\iff b^2 - b^2\cos^2\alpha = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha \iff$

$\iff a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Da mesma forma, é possível demonstrar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Manual Digital

Vídeo
Definição de cosseno de um ângulo obtuso e de um ângulo reto

A lei dos cossenos e o cosseno de um ângulo reto

Considerando um triângulo $[ABC]$, retângulo em C, pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que:

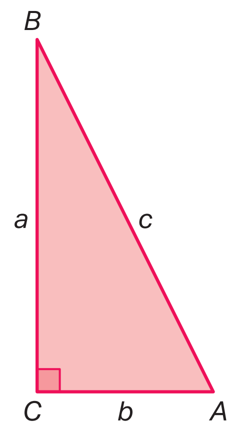
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para que a lei dos cossenos seja verdadeira, é preciso que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

isto é, $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

Daqui resulta que a lei dos cossenos será válida se $\cos 90° = 0$.



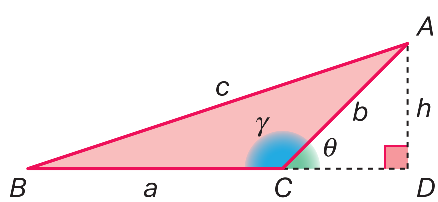
A saber:
$\cos 90° = 0$

A lei dos cossenos e o cosseno de um ângulo obtuso

Consideremos o triângulo $[ABC]$, obtusângulo em C, e a sua altura, h, em relação ao lado $[BC]$.

Atendendo à figura, sabemos que $\theta = 180° - \gamma$.

Repara que: $\cos\theta = \dfrac{\overline{CD}}{b} \iff \overline{CD} = b\cos\theta$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ACD]$, vem:

$b^2 = \overline{CD}^2 + h^2 \iff h^2 = b^2 - \overline{CD}^2 \iff h^2 = b^2 - (b\cos\theta)^2$

Como $\overline{BD} = a + \overline{CD}$, então $\overline{BD} = a + b\cos\theta$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABD]$, vem:

$$h^2 = c^2 - (a + b\cos\theta)^2$$

Logo:

$b^2 - (b \cos \theta)^2 = c^2 - (a + b \cos \theta)^2 \iff$

$\iff b^2 - b^2 \cos^2 \theta = c^2 - a^2 - 2ab \cos \theta - b^2 \cos^2 \theta \iff$

$\iff c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$

Ou seja, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(180° - \gamma)$.

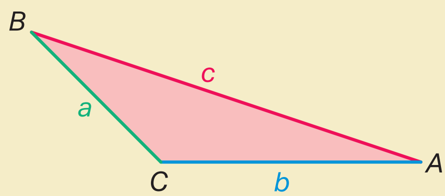
Então, para a lei dos cossenos ser válida em triângulos obtusângulos, os cossenos de ângulos suplementares têm de ser simétricos: $\cos \gamma = -\cos(180° - \gamma)$.

A saber:
Se α é a amplitude de um ângulo obtuso:
$\cos \alpha = -\cos(180° - \alpha)$

Lei dos cossenos

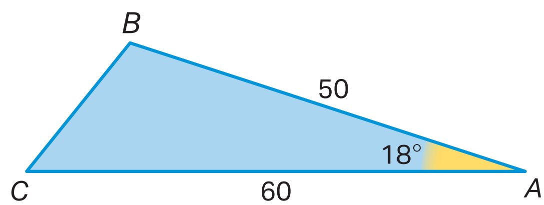
Em qualquer triângulo $[ABC]$, tem-se que:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



Exemplos

1. Relativamente ao triângulo obtusângulo $[ABC]$ da figura, conhecemos as medidas de dois lados e a amplitude do ângulo interno por eles formado.



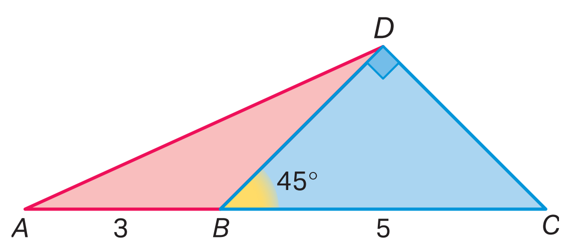
Para determinar a medida do lado desconhecido do triângulo, recorremos à lei dos cossenos:

$\overline{BC}^2 = 60^2 + 50^2 - 2 \times 60 \times 50 \times \cos 18° \iff \overline{BC}^2 = 6100 - 6000 \cos 18°$

Logo, como $\overline{BC} > 0$, $\overline{BC} \approx 19{,}8$ (valor arredondado às décimas).

2. Na figura encontram-se representados três triângulos: $[ABD]$, $[BCD]$ e $[ACD]$.

- Como o triângulo $[BCD]$ é retângulo e isósceles, podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar os seus lados desconhecidos.



Assim, considerando $\overline{BD} = \overline{CD} = l$:

$$l^2 + l^2 = 5^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow l = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \vee l = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Como $l > 0$, $l = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

- Para determinar $\overline{AD}$, vamos recorrer à lei dos cossenos.

  Sabemos que $D\hat{B}A = 180° - 45° = 135°$.

  Assim:

$$\overline{AD}^2 = 3^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \times 3 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \cos 135° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 9 + 12{,}5 + 15 \Leftrightarrow$$

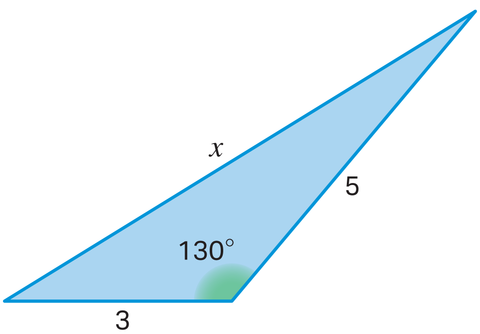
$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{36{,}5}$$

  Como $\overline{AD} > 0$, $\overline{AD} \approx 6{,}04$ (valor arredondado às centésimas).

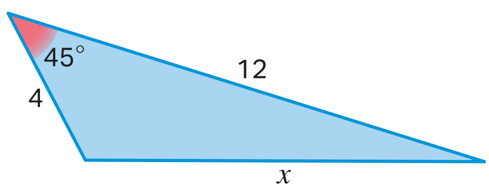
Exercícios

5 **Em cada uma das situações seguintes, determina o valor de x. Apresenta o resultado arredondado às décimas.**

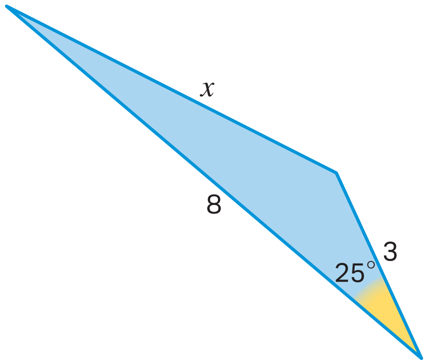
5.1.



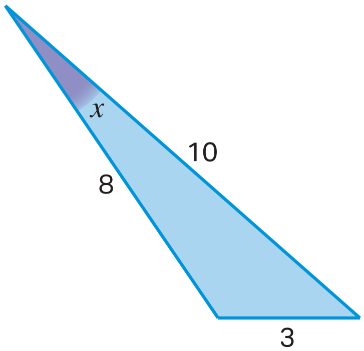
5.2.



5.3.

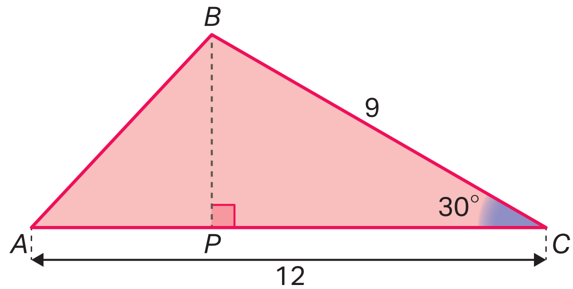


5.4.



6 Considera o triângulo $[ABC]$ representado na figura.

Tendo em consideração os dados da figura, determina:



6.1. $\overline{PC}$

6.2. $\overline{BP}$

6.3. $\overline{AB}$

7 Sem recorrer à calculadora determina o valor exato de:

7.1. $2 \sin 90° + \sin 150° - \cos 135°$

7.2. $\sin 135° \times \cos 120° + \sin 90°$

7.3. $\cos 90° \times \sin 140° + \sin 120° - 2 \cos 150°$

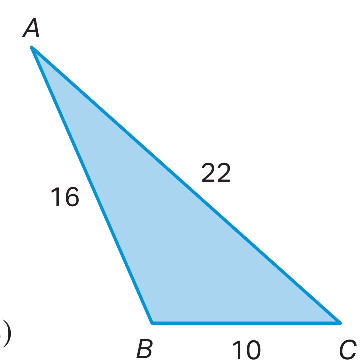
1.1.3. Resolução de triângulos

Resolver um triângulo consiste em determinar todos os seus elementos (comprimentos de lados e/ou amplitudes de ângulos), sendo conhecidos alguns deles.

Em seguida, usaremos a lei dos senos e a lei dos cossenos para resolver triângulos quando conhecemos as medidas dos três lados do triângulo (LLL), a medida de dois lados e a amplitude do ângulo interno por eles formado (LAL) ou a medida de comprimento de um dos lados e as amplitudes dos dois ângulos internos que lhe são adjacentes (ALA).

Exemplos

1. Do triângulo $[ABC]$ da figura, conhecemos as medidas dos seus lados. Para o resolvermos, temos de determinar a amplitude dos seus ângulos internos. Para tal, vamos usar a lei dos cossenos.



$22^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \times 16 \times 10 \cos \hat{B} \iff \cos \hat{B} = -0{,}4$

Logo, $\hat{B} \approx 113{,}6°$.

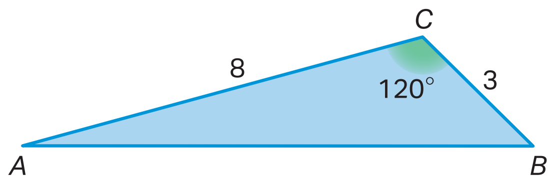
$16^2 = 22^2 + 10^2 - 2 \times 22 \times 10 \cos \hat{C} \iff \cos \hat{C} = 0{,}7(45)$

Logo, $\hat{C} \approx 41{,}8°$.

$10^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \times 16 \times 22 \cos \hat{A} \iff \cos \hat{A} = 0{,}(90)$

Logo, $\hat{A} \approx 24{,}6°$.

2. Para resolver o triângulo $[ABC]$, vamos começar por determinar o valor de $\overline{AB}$ usando a lei dos cossenos.



$\overline{AB}^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \cos 120°$

Logo, $\overline{AB} = \sqrt{97}$.

Pela lei dos senos, podemos determinar a amplitude do ângulo interno de vértice B.

$\dfrac{\sin 120°}{\sqrt{97}} = \dfrac{\sin \hat{B}}{8}$, logo $\hat{B} \approx 45°$.

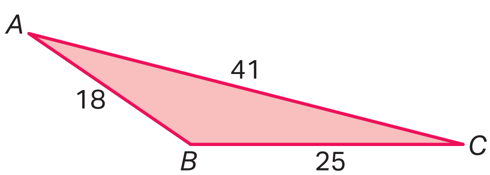
Resta apenas determinar a amplitude do ângulo interno de vértice A.

$\hat{A} \approx 180° - 120° - 45° = 15°$

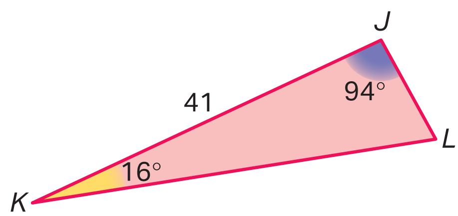
Exercícios

8 **Resolve os triângulos seguintes, apresentando os resultados arredondados às décimas.**

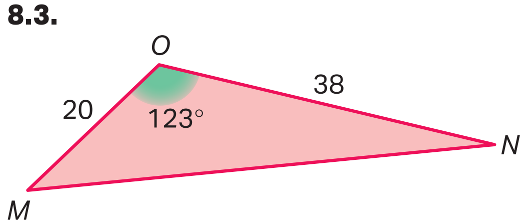
8.1.



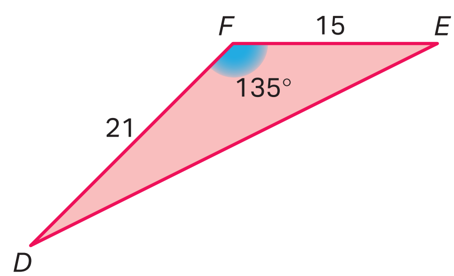
8.2.



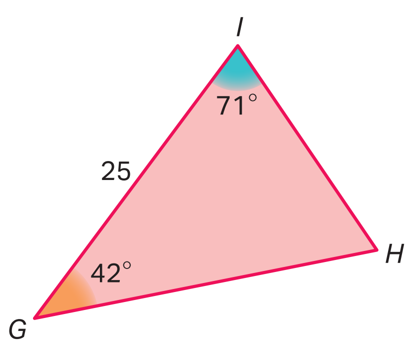
8.3.



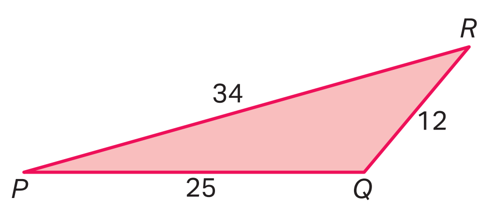
8.4.



8.5.

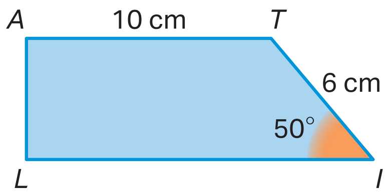


8.6.

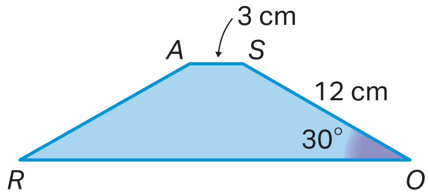


9 Tendo em consideração os dados apresentados, determina a área de cada um dos seguintes quadriláteros. Apresenta os resultados em centímetros quadrados, arredondados às décimas.

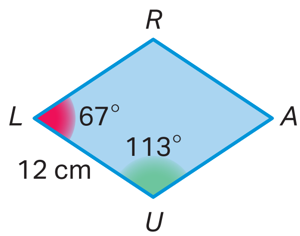
9.1. [*LITA*] é um trapézio retângulo.



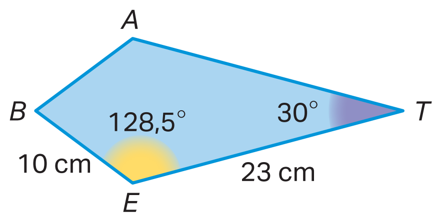
9.2. [*ROSA*] é um trapézio isósceles.



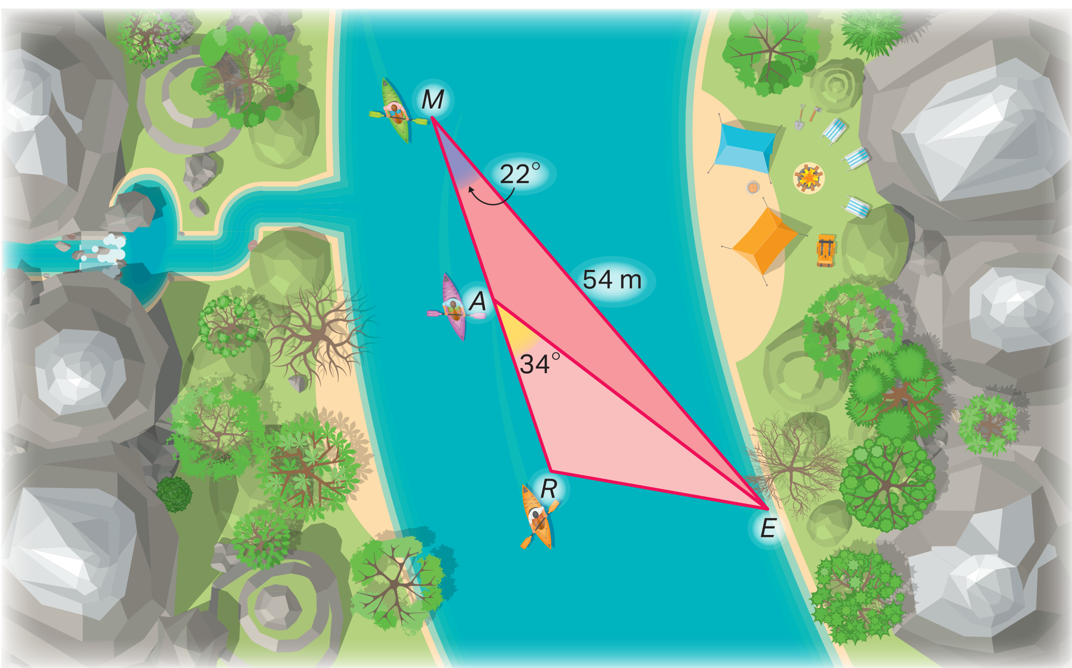
9.3. [*LUAR*] é um losango.



9.4. [*BETA*] é um papagaio.



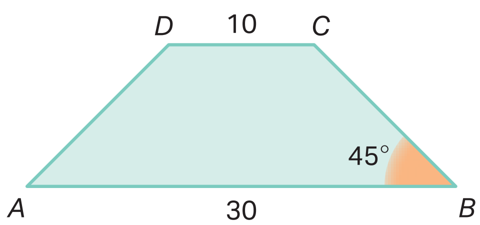
10 Observa os dados apresentados na figura e determina a distância entre os barcos verde e cor-de-rosa, $\overline{MA}$. Apresenta o resultado arredondado às unidades.



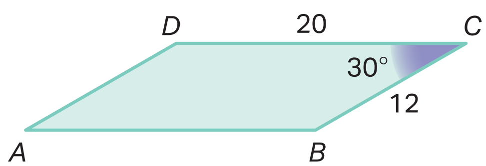
Para aplicar

1 Tendo em consideração os dados apresentados em cada uma das figuras seguintes, determina a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$ apresentado.

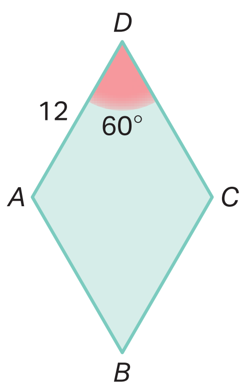
1.1. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles.



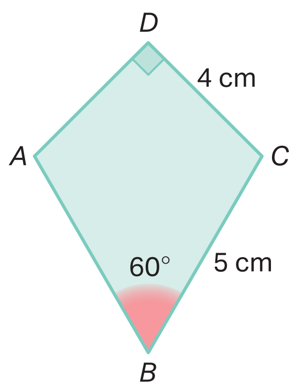
1.2. $[ABCD]$ é um paralelogramo.



1.3. $[ABCD]$ é um losango.



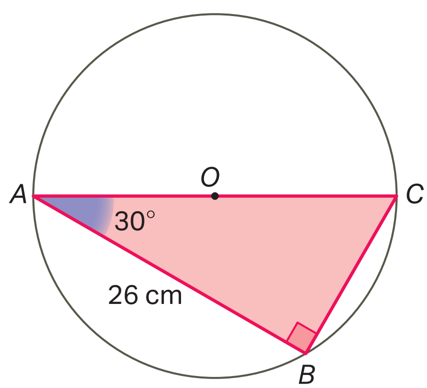
1.4. $[ABCD]$ é um papagaio.



2 Na figura está representado um triângulo retângulo, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro O e diâmetro $[AC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 26$ cm
- $B\hat{A}C = 30°$



2.1. Determina o valor exato de:

a) $\overline{CB}$

b) $\overline{AC}$

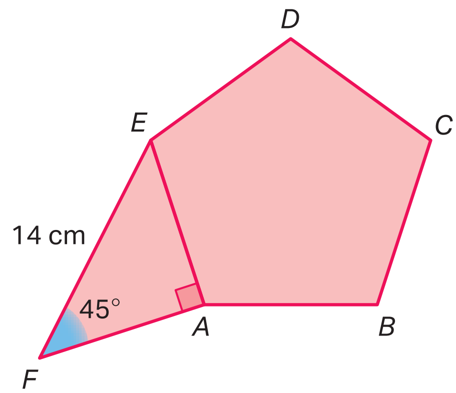
2.2. Mostra que a razão entre a medida da área do triângulo $[ABC]$ e a área do círculo é $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

Para aplicar

3 **O polígono da figura é constituído por um triângulo retângulo, $[FAE]$, e um pentágono regular, $[ABCDE]$.**

Sabe-se que:

- $\overline{FE} = 14$ cm
- $A\hat{F}E = 45°$



3.1. Determina a medida de comprimento do segmento de reta $[AE]$.

3.2. Determina o valor exato do perímetro do polígono $[ABCDEF]$.

3.3. Determina a área de um quadrado de lado $[FA]$.

4 **Considera o triângulo $[ACB]$ representado na figura.**

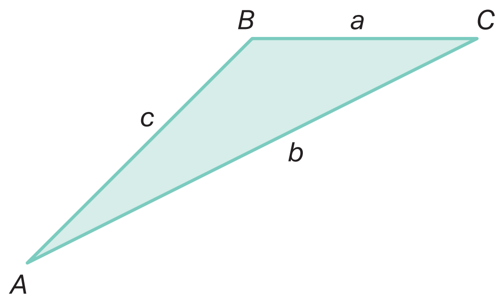
Determina os valores de x e de y, arredondados às décimas, admitindo que:

4.1. $\hat{A} = 30°$, $a = 2\sqrt{3}$, $\hat{B} = 40°$, $b = x$ e $c = y$;

4.2. $\hat{C} = 30°$, $\hat{B} = 100°$, $b = 10$, $c = x$ e $a = y$;

4.3. $a = 2\sqrt{2}$, $\hat{B} = 120°$, $b = 7\sqrt{2}$, $c = x$ e $\hat{A} = y$;

4.4. $\hat{A} = 20°$, $a = 5$, $\hat{C} = 40°$, $b = x$ e $c = y$.



5 **Na figura encontra-se representado o papagaio $[RAIO]$.**

Tendo em atenção os dados apresentados na figura, determina:

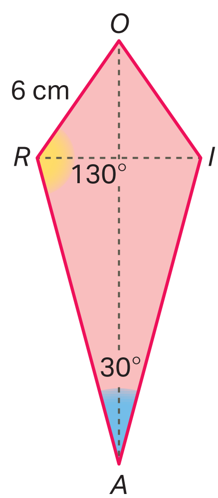
5.1. $\overline{AO}$, arredondado às milésimas;

5.2. a amplitude do ângulo ROI;

5.3. a medida da área do papagaio $[RAIO]$, arredondada às décimas.

5.4. Considera o ponto P tal que o quadrilátero $[RPIO]$ é um losango.

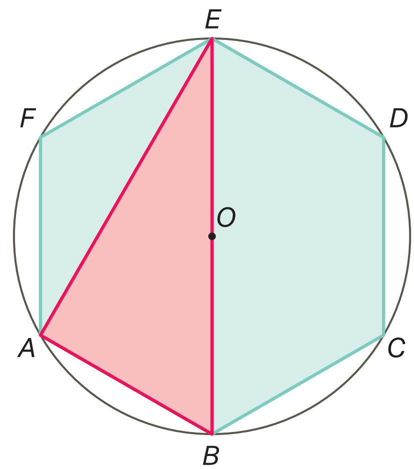
Determina a área do losango $[RPIO]$, apresentando o resultado arredondado às décimas.



6 **Na figura encontram-se representados um hexágono regular, $[ABCDEF]$, e um triângulo, $[ABE]$, inscritos numa circunferência de centro O.**

Sabendo que a medida do perímetro do hexágono $[ABCDEF]$ é 24 cm, resolve o triângulo $[ABE]$.

Caso necessário, arredonda os resultados às décimas.



7 **Em cada um dos casos, resolve o triângulo $[LUA]$. Apresenta os resultados arredondados às décimas, caso necessário.**

7.1. $\overline{LU} = 5$, $\overline{UA} = 4$ e $\overline{AL} = 2$

7.2. $\overline{LU} = 10$, $\overline{UA} = 12$ e $\overline{AL} = 5$

7.3. $\overline{LU} = 15$, $\overline{UA} = 8$ e $\overline{AL} = 20$

7.4. $\overline{LU} = 12$, $L\hat{A}U = 60°$ e $\overline{AL} = 8$

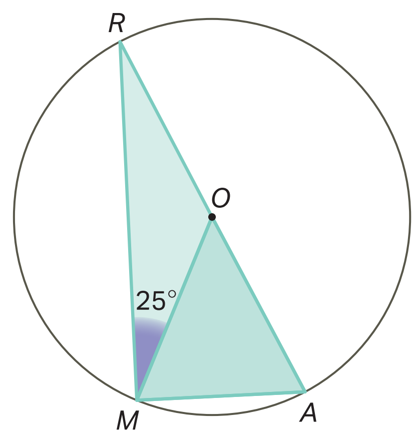
7.5. $\overline{UA} = 6$, $A\hat{L}U = 30°$ e $\overline{AL} = 10$

7.6. $\overline{LA} = 20$, $L\hat{U}A = 45°$ e $\overline{LU} = 6$

8 **Considera o triângulo $[MAR]$, inscrito na circunferência de centro O e diâmetro $[RA]$, e o triângulo $[AOM]$.**

Sabe-se que:

- $O\hat{M}R = 25°$
- $\overline{RA} = 10$ cm



8.1. Determina a medida de amplitude dos ângulos internos dos triângulos $[MAR]$ e $[AOM]$.

8.2. Determina $\overline{RM}$. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

8.3. Resolve o triângulo $[MAR]$. Se necessário, arredonda os valores às décimas.

1.2. Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações

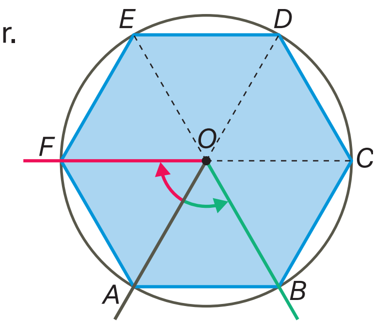
Manual Digital

Vídeo
Ângulo orientado

1.2.1. Ângulos orientados e rotações

Ângulos orientados

Na figura encontra-se representado um hexágono regular.



A imagem de A pela rotação de centro O e amplitude $60°$ no **sentido positivo** é B.

O ângulo AOB é um ângulo orientado de lado origem $\dot{O}A$ e lado extremidade $\dot{O}B$.

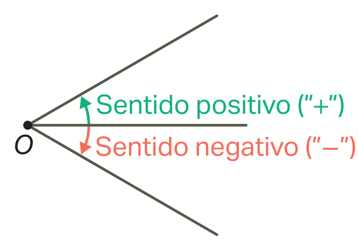
A imagem de A pela rotação de centro O e amplitude $60°$ no **sentido negativo** é F.

O ângulo AOF é um ângulo orientado de lado origem $\dot{O}A$ e lado extremidade $\dot{O}F$.

Um **ângulo**, não nulo nem giro, diz-se **orientado** se um dos lados é definido como lado origem e outro lado é o lado extremidade.
As amplitudes negativas de um ângulo orientado possuem um sinal "–" antes da respetiva medida de amplitude.

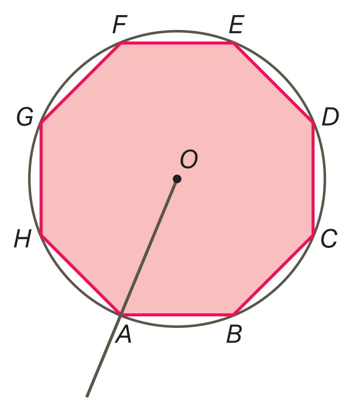
Notas:

- O **sentido positivo** também é designado por **sentido direto**, sendo este o sentido contrário ao dos ponteiros dos relógios.
- O **sentido negativo** também é designado por **sentido retrógrado** e é o sentido dos ponteiros dos relógios.



Exemplo

Na figura encontra-se representado um octógono regular inscrito numa circunferência.



A amplitude de cada arco definido por dois vértices consecutivos do octógono regular é $360° : 8 = 45°$.

Desta forma, o ângulo ao centro que lhe corresponde terá a mesma amplitude, isto é, $45°$.

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude:

- $135°$ é $\dot{O}D$;
- $-270°$ é $\dot{O}C$;
- $225°$ é $\dot{O}F$;
- $-45°$ é $\dot{O}H$.

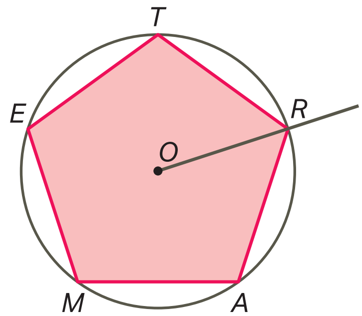
Exercícios

11 **Na figura está representado um pentágono regular inscrito numa circunferência.**

Indica o lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}R$ e amplitude:

11.1. $-144°$ **11.2.** $216°$

11.3. $-288°$ **11.4.** $288°$



Manual Digital

Atividade
Rotação segundo ângulo orientado

12 **Considera o hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O.**

12.1. Indica o lado origem do ângulo de lado extremidade $\dot{O}U$ e amplitude:

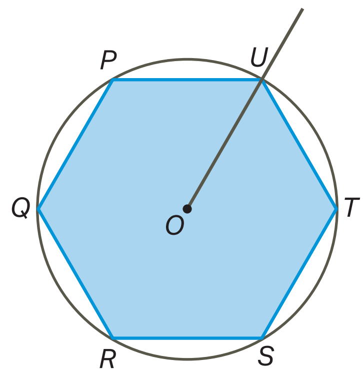
a) $120°$

b) $-120°$

c) $240°$

d) $-180°$

12.2. Indica as amplitudes de dois ângulos de lado origem $\dot{O}P$ e lado extremidade $\dot{O}U$.

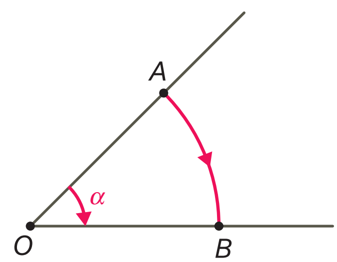


Rotações

Consideremos os pontos O, A e B, tais que $\overline{OA} = \overline{OB}$, e o ângulo orientado com lado origem $\dot{O}A$, lado extremidade $\dot{O}B$ e amplitude α.

Dizemos que B é a imagem de A pela **rotação de centro O e ângulo orientado AOB de amplitude α.**

Escreve-se: $R_{(O,\, \alpha)}(A) = B$



Exemplo

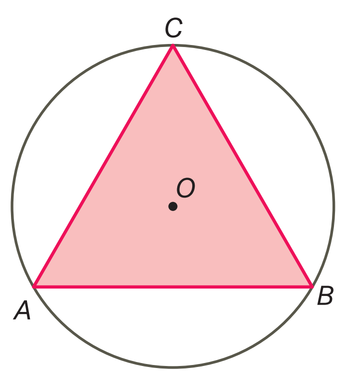
Na figura encontra-se representado um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O.

$R_{(O,\, -120°)}(A) = C$

$R_{(O,\, 240°)}(B) = A$

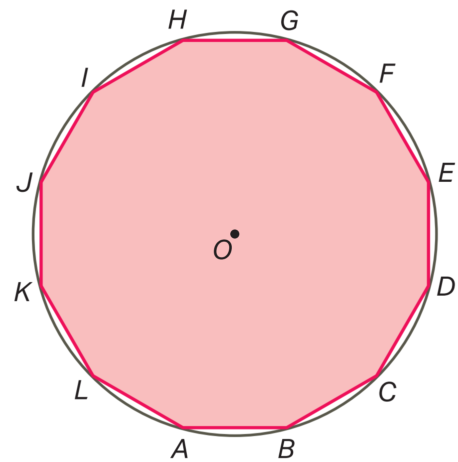
$R_{(A,\, 60°)}(B) = C$

$R_{(O,\, -360°)}(B) = B$



Exercício

13 Considera o dodecágono (polígono com 12 lados) regular da figura, que está inscrito numa circunferência de centro O.



13.1. Copia e completa as igualdades.

a) $R_{(O,\,-30°)}(E) = \ldots$

b) $R_{(O,\,120°)}(F) = \ldots$

c) $R_{(O,\,150°)}(A) = \ldots$

d) $R_{(O,\,-210°)}(J) = \ldots$

e) $R_{(O,\,180°)}(C) = \ldots$

13.2. Indica a amplitude de uma rotação de centro O tal que:

a) o ponto K é imagem do ponto D;

b) o ponto L é imagem do ponto B.

13.3. Copia e completa, sabendo que as rotações se efetuaram no sentido negativo.

a) $R_{(O,\,\ldots)}(L) = E$

b) $R_{(O,\,\ldots)}(C) = L$

c) $R_{(O,\,\ldots)}(J) = A$

d) $R_{(O,\,\ldots)}(H) = D$

13.4. Copia e completa, sabendo que as rotações se efetuaram no sentido positivo.

a) $R_{(O,\,\ldots)}(L) = E$

b) $R_{(O,\,\ldots)}(C) = L$

c) $R_{(O,\,\ldots)}(J) = A$

d) $R_{(O,\,\ldots)}(H) = D$

13.5. Indica duas possíveis rotações de centro O, tais que:

a) o ponto J é a imagem do ponto G;

b) o ponto D é a imagem do ponto H.

1.2.2. Ângulos generalizados e rotações

Ângulos generalizados

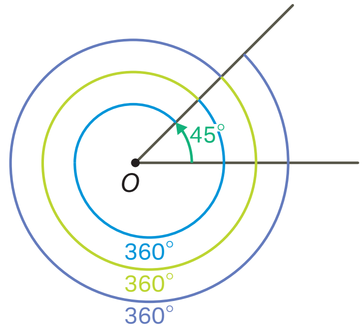
Consideremos o grau como unidade de medida da amplitude de ângulos.

Os ângulos orientados, juntamente com o ângulo nulo, têm como amplitude, em graus, um valor pertencente ao intervalo $]-360\,, 360[$.

Vamos estudar ângulos cuja amplitude não se encontra neste intervalo, os ângulos generalizados.

Consideremos o ângulo generalizado com $1125°$ de amplitude.

Verificamos que este ângulo generalizado, partindo do lado extremidade do ângulo orientado de amplitude $45°$, dá três voltas completas.



Assim:

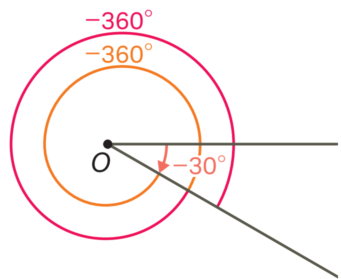
$1125° = 45° + 360° + 360° + 360° = 45° + 3 \times 360°$

Logo, podemos representar este ângulo generalizado por $(45°, 3)$.

Manual Digital

Vídeo
Ângulo generalizado

Se o ângulo generalizado tiver $-750°$ de amplitude, sabemos que, partindo do lado extremidade do ângulo orientado de amplitude $-30°$, dá duas voltas completas.



Assim:

$-750° = -30° - 360° - 360° = -30° - 2 \times 360°$

Logo, podemos representar este ângulo generalizado por $(-30°, -2)$.

Um **ângulo generalizado** é um par ordenado (α, n), em que α é um ângulo orientado ou nulo e n é um número inteiro com o mesmo sinal da amplitude de α, sendo $|n|$ o número de voltas completas associado ao ângulo orientado.

Nota:
O lado origem e o lado extremidade de um ângulo generalizado são iguais ao lado origem e lado extremidade do ângulo orientado que lhe corresponde.

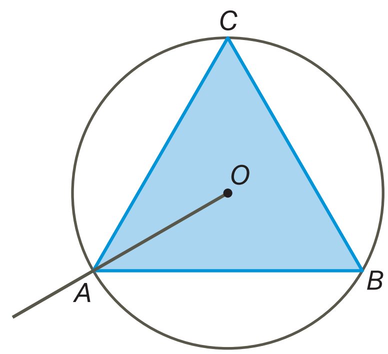
Exemplos

1. A medida de amplitude do ângulo generalizado $(60°, 4)$ é:
   $60° + 4 \times 360° = 1500°$
2. A medida de amplitude do ângulo generalizado $(-20°, -3)$ é:
   $-20° - 3 \times 360° = -1100°$
3. O ângulo generalizado que tem medida de amplitude $1150°$ é $(70°, 3)$.
   Repara que $1150° : 360° \approx 3{,}194$, isto é, o lado extremidade do ângulo orientado correspondente dá três voltas completas.
   $1150° - 3 \times 360° = 70°$, logo $1150° = 70° + 3 \times 360°$.

4. Na figura encontra-se representado um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O.

Os vértices do triângulo equilátero dividem a circunferência em arcos de $360° : 3 = 120°$ de amplitude.

Podemos determinar o lado extremidade do ângulo generalizado de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude:



- 480°

  $480° = 120° + 1 \times 360°$, logo o ângulo generalizado com amplitude $480°$ é $(120°, 1)$.

  Assim, o lado extremidade do ângulo generalizado de lado origem $\dot{O}A$ e medida de amplitude $480°$ é $\dot{O}B$.

- 1320°

  $1320° = 240° + 3 \times 360°$, logo o ângulo generalizado com amplitude $1320°$ é $(240°, 3)$.

  Assim, o lado extremidade do ângulo generalizado de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $1320°$ é $\dot{O}C$.

- – 1200°

  $-1200° = -120° - 3 \times 360°$, logo o ângulo generalizado com amplitude $-1200°$ é $(-120°, -3)$.

  Assim, o lado extremidade do ângulo generalizado de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $-1200°$ é $\dot{O}C$.

Exercícios

14 **Calcula a medida de amplitude de cada um dos seguintes ângulos generalizados.**

14.1. $(130°, 2)$ **14.2.** $(85°, 7)$

14.3. $(-246°, -3)$ **14.4.** $(-80°, -4)$

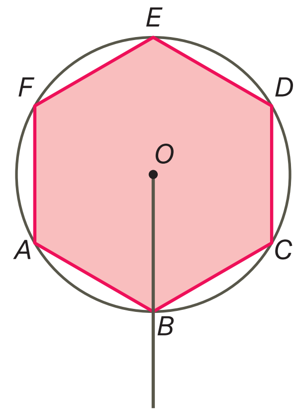
15 **Determina o ângulo generalizado de amplitude:**

15.1. $830°$ **15.2.** $-850°$

15.3. $1290°$ **15.4.** $995°$

15.5. $-1190°$ **15.6.** $-1295°$

16 **Na figura encontra-se representado um hexágono regular, $[ABCDEF]$, inscrito numa circunferência de centro O.**
Considera um ângulo generalizado com lado origem $\dot{O}B$.



16.1. Indica o lado extremidade se o ângulo generalizado for:

a) $(60°, 15)$ **b)** $(-60°, -20)$
c) $(-120°, -5)$ **d)** $(240°, 3)$

16.2. Indica o lado extremidade se a amplitude do ângulo generalizado for:

a) $1260°$ **b)** $-1680°$ **c)** $1740°$

Manual Digital
Vídeos
Medidas de amplitude de ângulos generalizados
Rotações e ângulos generalizados

A resolução dos exercícios anteriores leva-nos a supor que a cada ângulo generalizado corresponde um único ângulo orientado.

Considerando a amplitude, em graus, de um ângulo generalizado, x, positiva ou nula, existe um único $\alpha \in [0, 360[$ e um único $n \in \mathbb{Z}_0^+$ tais que $x = \alpha + n \times 360$.
Como vimos, n corresponde à parte inteira de $\frac{x}{360}$ e $\alpha = x - n \times 360$.
No caso da amplitude, em graus, de um ângulo generalizado, x, negativa ou nula, existe um único $\alpha \in]-360, 0]$ e um único $n \in \mathbb{Z}_0^-$ tais que $x = \alpha + n \times 360$.

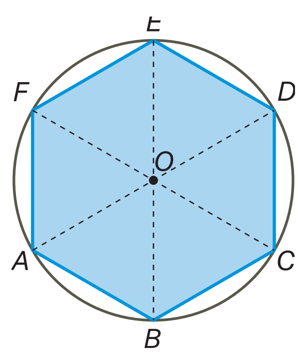
Notas:
- Dois ângulos generalizados (α, n) e (β, n') têm a mesma amplitude se e só se $\alpha = \beta$ e $n = n'$.
- A um mesmo ângulo orientado corresponde uma infinidade de ângulos generalizados. Por exemplo, $10°$, $370°$ e $730°$ correspondem ao mesmo ângulo orientado.

Rotações envolvendo ângulos generalizados

Podemos alargar o conceito de rotação de centro O e ângulo orientado α ao ângulo generalizado (α, n).

Exemplo

Consideremos o hexágono regular $[ABCDEF]$ inscrito numa circunferência de centro O. O transformado do ponto D pela rotação de centro O e amplitude $1920°$ é o ponto F.



$1920° = 120° + 5 \times 360°$, isto é, $1920°$ é a amplitude do ângulo generalizado $(120°, 5)$.

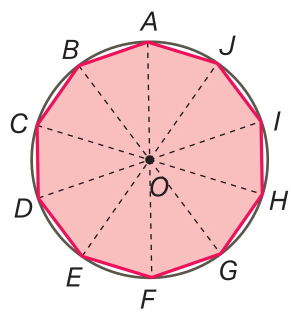
Assim, o transformado do ponto D pela rotação de centro O e ângulo $(120°, 5)$ é igual ao transformado do ponto D pela rotação de centro O e ângulo de $120°$ de amplitude.

Rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n)

- Se α é o ângulo nulo, cada ponto é imagem de si próprio.
- Se α é um ângulo orientado não nulo, a imagem de cada ponto P pela rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n) é o ponto P' tal que $P' = R_{(O,\, \alpha)}(P)$.

Exercícios

17 Na figura encontra-se representado um decágono regular inscrito numa circunferência de centro O.



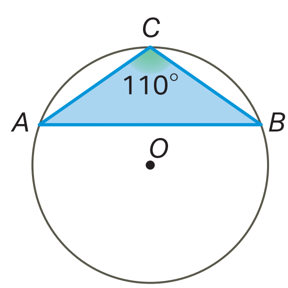
17.1. Indica a imagem do ponto I pela rotação de centro O e ângulo generalizado:

a) $(144°, 5)$ **b)** $(-72°, -4)$ **c)** $(252°, 3)$ **d)** $(-216°, -3)$

17.2. Determina a imagem do ponto D pela rotação de centro O e amplitude:

a) $1044°$ **b)** $2808°$ **c)** $-864°$ **d)** $-1404°$

18 Na figura está representado um triângulo isósceles, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro O.



Determina:

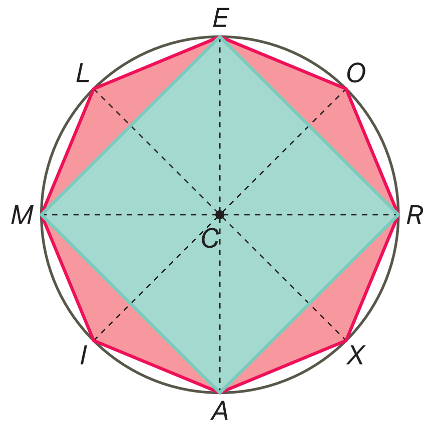
18.1. a imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude $1370°$;

18.2. a imagem do ponto B pela rotação de centro O e amplitude $-1730°$;

18.3. a imagem do ponto C pela rotação de centro O e ângulo generalizado $(-290°, -2)$.

Para aplicar

1 **Na figura encontram-se representados um octógono regular, [*MIAXROEL*], e um quadrado, [*MARE*], inscritos numa circunferência de centro *C*.**



1.1. Indica a imagem do ponto *L* pela rotação de centro *C* e amplitude:

a) 180°

b) – 135°

c) 315°

d) – 270°

1.2. Indica o lado extremidade do ângulo orientado com lado origem $\dot{C}R$ e amplitude:

a) 135°

b) – 90°

c) 270°

d) – 225°

1.3. Completa as seguintes igualdades:

a) $R_{(C,\,-90°)}(O) = \ldots$

b) $R_{(C,\,315°)}(L) = \ldots$

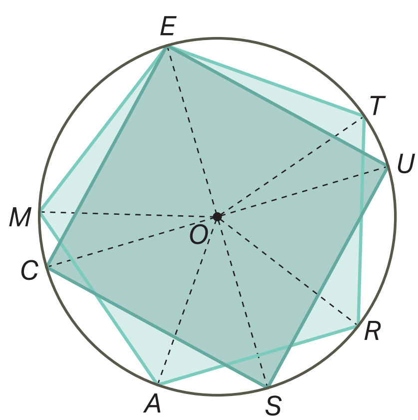
c) $R_{(C,\,270°)}(A) = \ldots$

d) $R_{(C,\,-135°)}(X) = \ldots$

e) $R_{(C,\,225°)}(R) = \ldots$

f) $R_{(C,\,-315°)}(L) = \ldots$

2 **Na figura estão representados um pentágono regular, [*MARTE*], e um quadrado, [*CSUE*], inscritos numa circunferência de centro *O*.**



2.1. Indica o lado extremidade do ângulo generalizado de lado origem $\dot{O}U$ e com amplitude:

a) – 810°

b) 1170°

c) – 1980°

d) 2970°

2.2. Indica a imagem do ponto *E* pela rotação de centro *O* e amplitude:

a) 1692°

b) 1944°

c) – 1296°

d) – 2016°

e) 1224°

f) – 1656°

1.3. Razões trigonométricas de ângulos generalizados

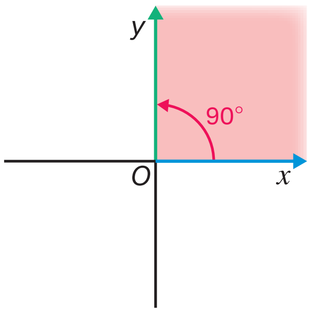
Manual Digital

Vídeo
Círculo trigonométrico

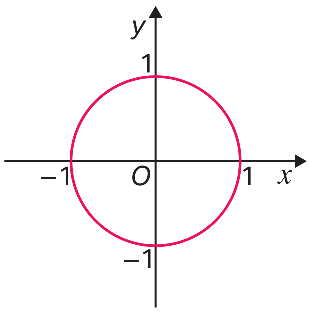
1.3.1. Circunferência trigonométrica

No referencial ortonormado xOy está representado um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é o semieixo positivo Oy.

Designa-se por **referencial ortonormado direto** um referencial em que o 1.º quadrante coincide com o referido ângulo orientado.



Num referencial ortonormado xOy, à circunferência de centro O e medida de raio 1 dá-se o nome de **circunferência trigonométrica.**



Exemplos

Num referencial ortonormado direto xOy, considera um ângulo generalizado de lado origem $\dot{O}A$.

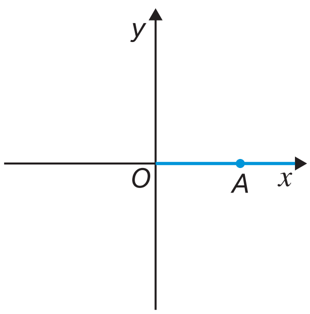
- Vejamos a que quadrante pertence o ângulo generalizado se tiver $-1860°$ de amplitude.

  Repara que, como $-1860° = -60° - 5 \times 360°$ e o lado extremidade do ângulo de amplitude $-60°$ fica no 4.º quadrante, então o lado extremidade do referido ângulo generalizado também está no 4.º quadrante.

  Logo, diz-se que o ângulo com $-1860°$ de amplitude pertence ao 4.º quadrante.

- Vejamos que o ângulo com $1930°$ de amplitude pertence ao 2.º quadrante.

  Como $1930° = 130° + 5 \times 360°$ e $130°$ pertence ao 2.º quadrante, então o referido ângulo generalizado também pertence ao 2.º quadrante.



Nota:
Dizemos que um ângulo pertence ao 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante consoante o seu lado extremidade se encontra no 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante, respetivamente.

Exercícios

19 Considera um referencial ortonormado direto xOy.
Indica a que quadrante pertence o ângulo generalizado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cuja amplitude é:

19.1. $-1870°$

19.2. $2660°$

19.3. $1580°$

19.4. $-1310°$

19.5. $2030°$

19.6. $-2550°$

Manual Digital

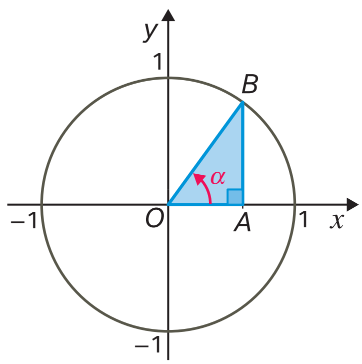
Vídeos
Estudo do seno no círculo trigonométrico

Estudo do cosseno no círculo trigonométrico

1.3.2. Generalização das definições de razões trigonométricas aos ângulos orientados

Seno e cosseno de ângulos orientados

Consideremos a circunferência trigonométrica e um triângulo $[OAB]$, retângulo em A, representados num referencial ortonormado direto xOy.



Sabemos que $\dot{O}A$ é o lado origem e $\dot{O}B$ é o lado extremidade do ângulo agudo orientado AOB. O ponto B é o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo AOB com a circunferência trigonométrica. Seja $A\hat{O}B = \alpha$.

Assim, como $\overline{OB} = 1$:

- $\sin\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \overline{AB}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \overline{OA}$

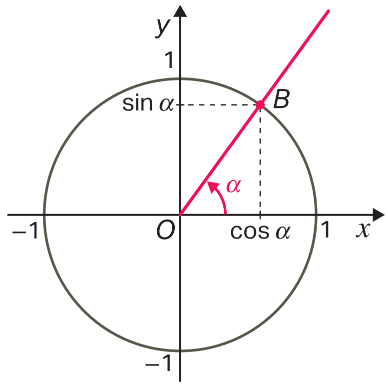
Logo, $\sin\alpha$ é igual à ordenada do ponto B e $\cos\alpha$ é igual à abcissa do ponto B.

Desta forma, concluímos que as coordenadas do ponto B são $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

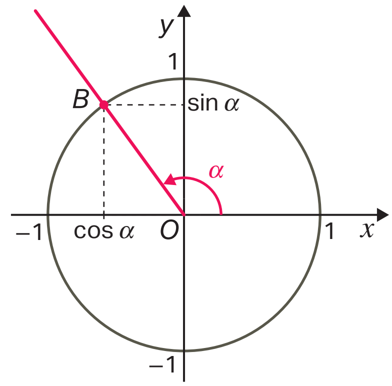
Se o ponto B pertencer a qualquer um dos outros quadrantes, podemos concluir, através da lei dos senos e da lei dos cossenos, que as coordenadas de B são sempre $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Num referencial ortonormado direto xOy, consideremos um ângulo orientado de amplitude α, sendo o lado origem o semieixo positivo Ox e $B(x, y)$ o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência trigonométrica.
Assim, $\cos\alpha = x$ e $\sin\alpha = y$. Logo, $B(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

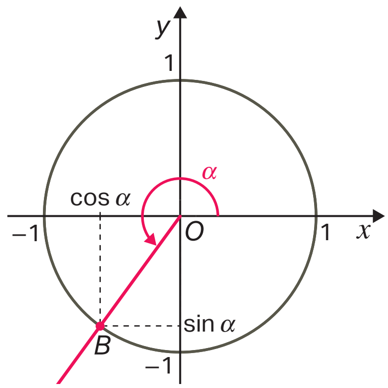
Desta forma, podemos ver que:



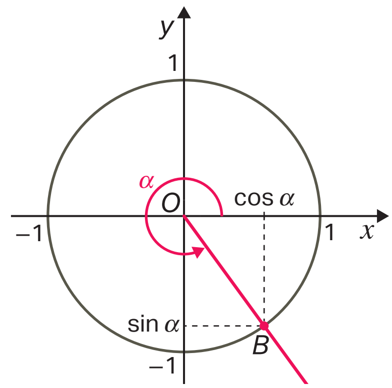
$B \in 1.^{\text{o}}$ quadrante $\Longrightarrow$ $\alpha \in 1.^{\text{o}}$ quadrante
$B(\cos\alpha, \sin\alpha)$, com $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha > 0$.



$B \in 2.^{\text{o}}$ quadrante $\Longrightarrow$ $\alpha \in 2.^{\text{o}}$ quadrante
$B(\cos\alpha, \sin\alpha)$, com $\cos\alpha < 0$ e $\sin\alpha > 0$.



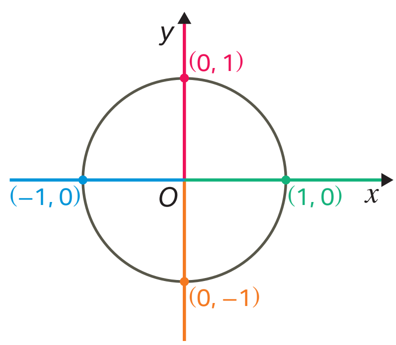
$B \in 3.^{\text{o}}$ quadrante $\Longrightarrow$ $\alpha \in 3.^{\text{o}}$ quadrante
$B(\cos\alpha, \sin\alpha)$, com $\cos\alpha < 0$ e $\sin\alpha < 0$.



$B \in 4.^{\text{o}}$ quadrante $\Longrightarrow$ $\alpha \in 4.^{\text{o}}$ quadrante
$B(\cos\alpha, \sin\alpha)$, com $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha < 0$.

Ao analisarmos as coordenadas dos pontos de interseção dos eixos coordenados com a circunferência trigonométrica, concluímos que:

	– 270°	– 180°	– 90°	0°	90°	180°	270°
sin	1	0	– 1	0	1	0	– 1
cos	0	– 1	0	1	0	– 1	0

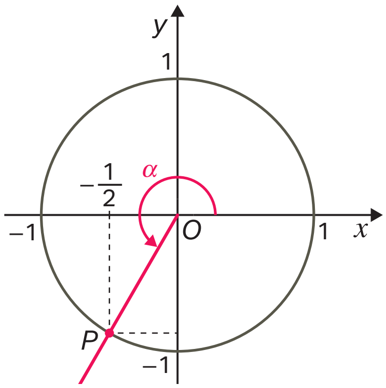


O seno e o cosseno de qualquer ângulo orientado estão compreendidos entre -1 e 1, inclusive.

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \text{ e } -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Exemplos

1. Na figura estão representados um referencial ortonormado xOy e a circunferência trigonométrica.



Considera um ângulo do 3.º quadrante, com amplitude α, e seja P o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência trigonométrica.

- A abcissa do ponto P é $-\frac{1}{2}$, logo $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.
- A ordenada do ponto P é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, pois:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \iff$$
$$\iff \sin^2\alpha + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \iff$$
$$\iff \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} \iff$$
$$\iff \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\alpha \in 3.^{\text{o}}$ quadrante, então $\sin\alpha < 0$. Logo, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Seja β um ângulo do 2.º quadrante, tal que $\sin\beta = \frac{1}{4}$.

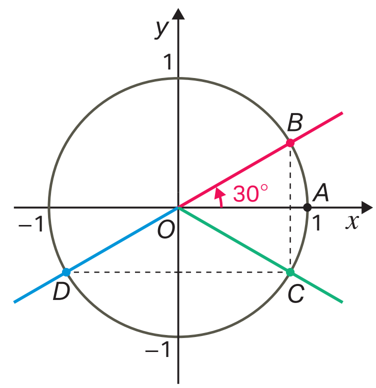
Podemos determinar $\cos\beta$ usando a fórmula fundamental da Trigonometria.

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \iff$$
$$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \iff$$
$$\iff \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{16} \iff$$
$$\iff \cos\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4} \vee \cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $\beta \in$ 2.º quadrante, então $\cos\beta < 0$. Logo, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Exercícios

20 No referencial ortonormado direto xOy da figura encontram-se representados a circunferência trigonométrica e um ângulo orientado AOB com $30°$ de amplitude.



Sabe-se que:

- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto D é o simétrico do ponto C em relação ao eixo das ordenadas.

Indica:

20.1. as coordenadas do ponto B;

20.2. o valor de $\sin\left(A\hat{O}C\right)$;

20.3. o valor de $\cos\left(A\hat{O}D\right)$.

21 Indica o quadrante e o sinal do seno e do cosseno do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e que tem amplitude:

21.1. $128°$ **21.2.** $-145°$ **21.3.** $252°$

21.4. $-305°$ **21.5.** $-235°$ **21.6.** $340°$

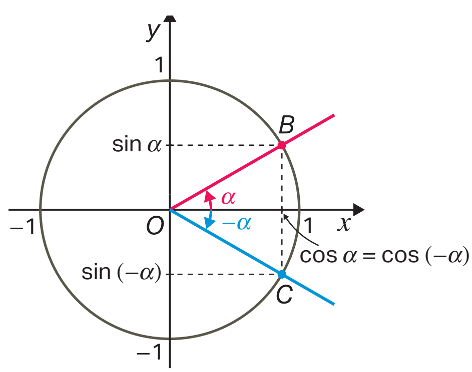
22 Indica o valor lógico (verdadeiro ou falso) das seguintes afirmações.

22.1. Se $\alpha \in 2.^{\text{o}}$ quadrante, $\cos\alpha \times \sin\alpha < 0$.

22.2. Se $\alpha \in 3.^{\text{o}}$ quadrante, $\cos\alpha + \sin\alpha > 0$.

22.3. Se $\alpha \in 3.^{\text{o}}$ quadrante, $-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$.

Na figura encontram-se representados, num referencial ortonormado direto, a circunferência trigonométrica e dois ângulos orientados com amplitudes simétricas.



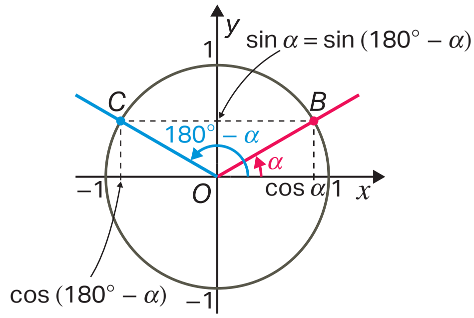
Sabemos que as coordenadas do ponto B são $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e as coordenadas do ponto C são $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$.

Como os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo das abcissas, podemos concluir que:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \text{ e } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

Analisando dois ângulos orientados com amplitudes suplementares, verificamos que as coordenadas do ponto B são $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e as coordenadas do ponto C são $(\cos(180° - \alpha), \sin(180° - \alpha))$.

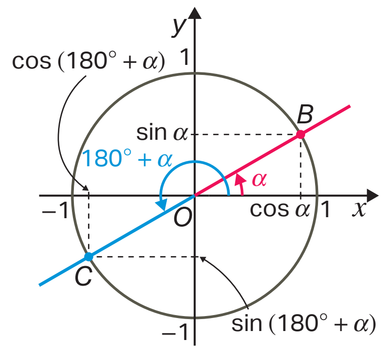
Como os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo das ordenadas, concluímos que:



$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \text{ e } \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

Da mesma forma, analisando os pontos B e C simétricos em relação à origem do referencial, verificamos que as suas coordenadas são $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $(\cos(180° + \alpha), \sin(180° + \alpha))$, respetivamente.

Logo, temos que:

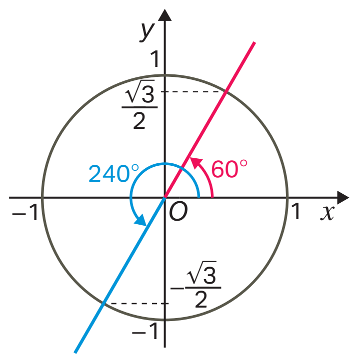


$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{e} \quad \sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$$

Exemplos

1. O valor exato de $\sin(240°)$ é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, uma vez que:

$$\sin(240°) = \sin(180° + 60°) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



2. Os pontos A e P representados na circunferência trigonométrica são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Assim, sabemos que as suas ordenadas são iguais e as suas abcissas são simétricas.

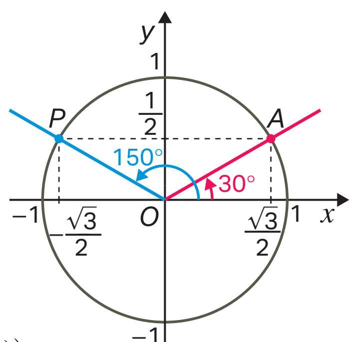
Como as coordenadas do ponto A são

$(\cos 30°, \sin 30°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, então as

coordenadas do ponto P são:

$(\cos 150°, \sin 150°) = (\cos(180° - 30°), \sin(180° - 30°)) =$

$= (-\cos 30°, \sin 30°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Manual Digital

Vídeo
Estudo da tangente no círculo trigonométrico

Exercícios

23 Sem usar a calculadora, determina o valor exato de:

23.1. $\sin(135°)$

23.2. $\cos(-45°)$

23.3. $\cos(240°)$

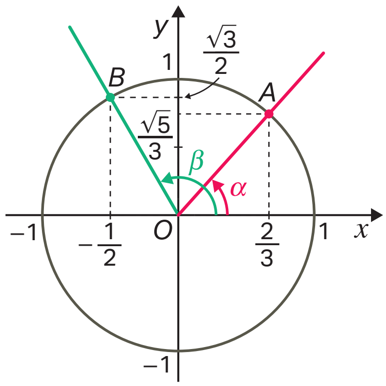
23.4. $\sin(-60°)$

23.5. $\sin(-30°)+\cos(225°)$

23.6. $\sin(225°)$

23.7. $2\sin(150°)-\cos(210°)$

24 No referencial ortonormado direto da figura estão representados os pontos A e B pertencentes à circunferência trigonométrica.
Tendo em consideração os dados da figura, indica o valor exato de:



24.1. $\cos(-\alpha)$

24.2. $\sin(180°+\alpha)$

24.3. $\cos(180°-\beta)$

24.4. $\sin(-\beta)$

24.5. $\sin(180°-\alpha)+\cos(180°+\beta)$

24.6. $\sin(-\alpha)+2\cos(-\beta)$

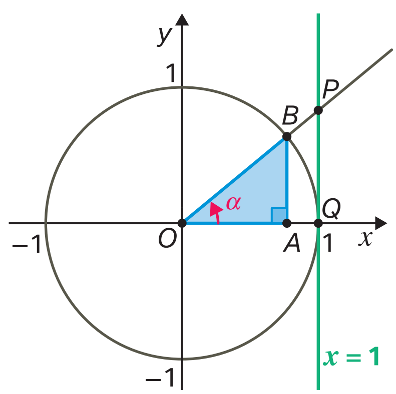
Tangente de ângulos orientados

No referencial ortonormado direto da figura, consideremos a circunferência trigonométrica, o triângulo $[OAB]$, retângulo em A, e a reta de equação $x=1$.

O ângulo orientado positivo AOB tem amplitude α.

O ponto P é o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo de amplitude α com a reta de equação $x=1$.

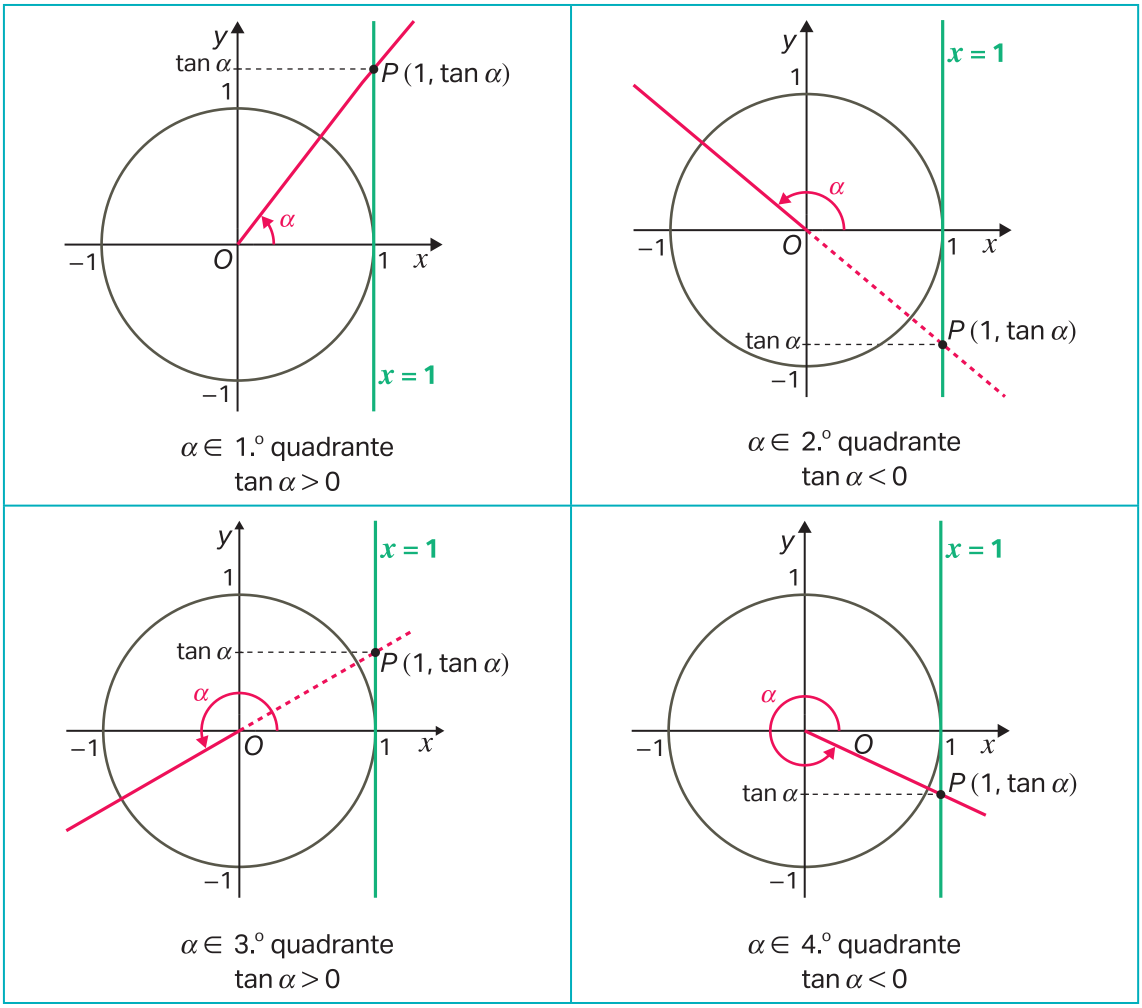
Pela definição de tangente, sabemos que $\tan\alpha=\frac{\overline{BA}}{\overline{OA}}$.



Como os triângulos $[OAB]$ e $[OQP]$ são semelhantes (pois têm dois ângulos com a mesma amplitude), então $\tan\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$.

Se o ângulo orientado pertencer ao 2.º ou ao 3.º quadrante, para obter o ponto P é preciso prolongar o lado extremidade do ângulo de modo que este intersete a reta de equação $x = 1$.

Desta forma, generalizando a qualquer ângulo orientado, sabemos que a ordenada do ponto P é igual a $\tan\alpha$.



$\alpha \in$ 1.º quadrante
$\tan\alpha > 0$

$\alpha \in$ 2.º quadrante
$\tan\alpha < 0$

$\alpha \in$ 3.º quadrante
$\tan\alpha > 0$

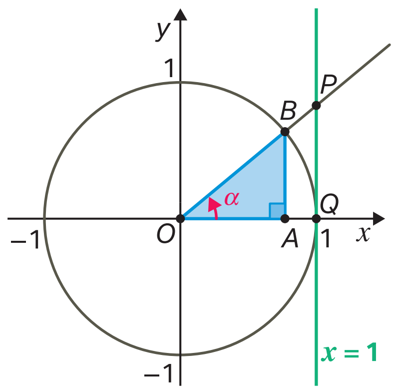
$\alpha \in$ 4.º quadrante
$\tan\alpha < 0$

Notas:

- Quando o ângulo orientado α tem $90°$ ou $270°$ de amplitude, o lado extremidade do ângulo é paralelo à reta de equação $x = 1$. Assim, a tangente não está definida para esse ângulo.
- $\tan\alpha \in]-\infty\ ,\ +\infty[$

Como já foi abordado, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo.

Consideremos novamente o ângulo orientado de amplitude α, de lados não perpendiculares, representado na circunferência trigonométrica.



Sabemos que:

- $\cos \alpha = \overline{OA}$
- $\sin \alpha = \overline{AB}$
- $\tan \alpha = \overline{PQ}$

Como os triângulos $[OAB]$ e $[OPQ]$ são semelhantes, sabemos que os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Dado um ângulo orientado de amplitude α, de lados não perpendiculares, sabe-se que:

$$\mathbf{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Exemplos

1. Consideremos um ângulo de amplitude α, em graus, com $\alpha \in]0, 180[$ e tal que $\sin \alpha \times \tan \alpha < 0$. Vejamos a que quadrante pertence o ângulo considerado.

Como $\alpha \in]0, 180[$, então o ângulo pertence ao 1.º ou ao 2.º quadrante.

Como $\sin \alpha \times \tan \alpha < 0$, $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$ têm sinais diferentes.

No 1.º quadrante, $\sin \alpha > 0 \ \wedge \ \tan \alpha > 0$.

No 2.º quadrante, $\sin \alpha > 0 \ \wedge \ \tan \alpha < 0$.

Deste modo, o ângulo pertence ao 2.º quadrante.

2. Relativamente a um ângulo α do 4.º quadrante, sabe-se que $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Vamos determinar as restantes razões trigonométricas do ângulo α.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow$

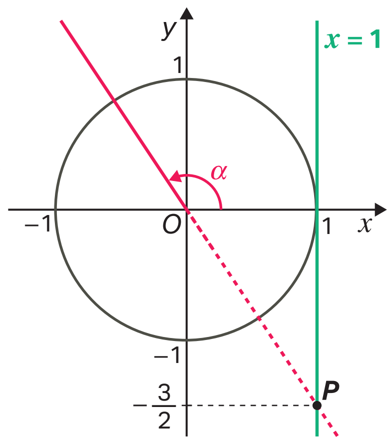
  $\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \vee \sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

  Como $\alpha \in$ 4.º quadrante, $\sin\alpha < 0$. Assim, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

- $\tan\alpha = \dfrac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. Na figura encontram-se representados, num referencial cartesiano xOy, a circunferência trigonométrica, a reta de equação $x = 1$ e um ângulo de amplitude α.

Sabe-se que o ponto P tem coordenadas $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.



Por observação da figura, verificamos que $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$.

Como o ângulo de amplitude α pertence ao 2.º quadrante, sabemos que $\sin\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$.

Assim, como $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{13}$,

pelo que $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Logo: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{-\frac{2\sqrt{13}}{13}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

Exercícios

25 **Indica a que quadrante pertence o ângulo orientado de amplitude α, em graus, sabendo que:**

25.1. $\sin\alpha > 0 \wedge \tan\alpha < 0$

25.2. $\cos\alpha < 0 \wedge \tan\alpha > 0$

25.3. $\cos\alpha > 0 \wedge \tan\alpha < 0$

25.4. $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0 \wedge \alpha \in]180, 360[$

25.5. $\sin\alpha \times \tan\alpha > 0 \wedge \alpha \in]0, 270[$

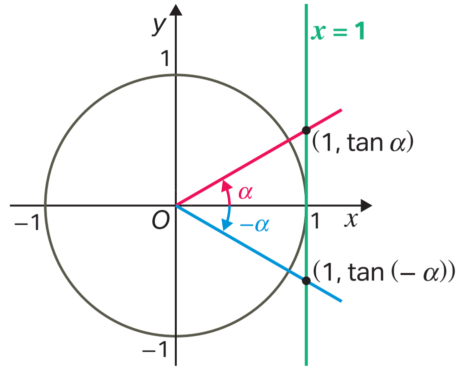
26 **Em cada um dos casos, determina as razões trigonométricas do ângulo orientado com amplitude α, sabendo que:**

26.1. $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ e $\alpha \in$ 4.º quadrante

26.2. $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ e $\alpha \in$ 3.º quadrante

26.3. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in$ 3.º quadrante

Consideremos, num referencial ortonormado direto, a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$.



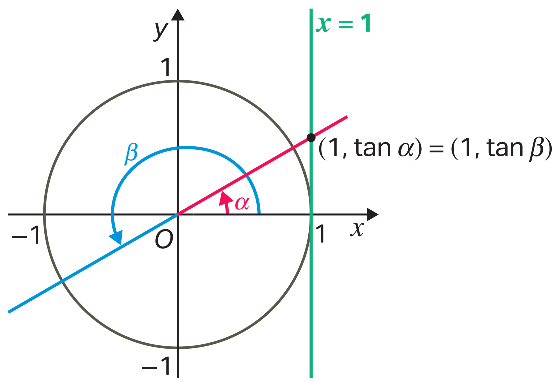
Nessa circunferência, consideremos dois ângulos orientados com amplitudes simétricas.

As coordenadas dos pontos de interseção dos lados extremidade dos ângulos de amplitudes α e $-\alpha$ são, respetivamente, $(1 , \tan \alpha)$ e $(1 , \tan(-\alpha))$.

Como esses pontos são simétricos em relação ao eixo das abcissas, concluímos que:

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Consideremos, agora, os ângulos orientados de amplitudes α e β, sendo $\beta = 180° + \alpha$.



A interseção da reta de equação $x = 1$ com o lado extremidade do ângulo de amplitude α é o ponto de coordenadas $(1 , \tan\alpha)$ e a interseção da reta de equação $x = 1$ com o prolongamento do lado extremidade do ângulo de amplitude β é o ponto de coordenadas $(1 , \tan\beta)$.

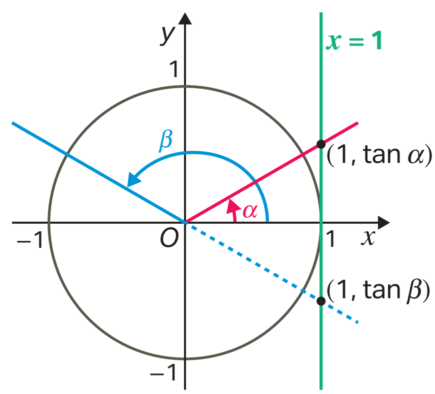
Desta forma, concluímos que:

$\tan\beta = \tan\alpha \iff \tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$

Do mesmo modo, verifica-se que $\tan(-180° + \alpha) = \tan\alpha$.

$$\tan(\alpha \pm 180°) = \tan\alpha$$

Consideremos, por fim, os ângulos orientados de amplitudes α e β , sendo $\beta = 180° - \alpha$.



A interseção da reta de equação $x = 1$ com o lado extremidade do ângulo de amplitude α e com o prolongamento do lado extremidade do ângulo de amplitude β são, respetivamente, os pontos de coordenadas $(1 , \tan\alpha)$ e $(1 , \tan\beta)$.

Como esses pontos são simétricos em relação ao eixo das abcissas, concluímos que:

$\tan\beta = -\tan\alpha \iff \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$

Do mesmo modo, verifica-se que $\tan(-180° - \alpha) = -\tan\alpha$.

$$\tan(-\alpha \pm 180°) = -\tan\alpha$$

Exemplos

1. Relativamente a um ângulo orientado de amplitude α, sabemos que:

$\tan(-\alpha) \times \cos(180° - \alpha) < 0$

Como o produto é negativo, então os fatores têm sinais diferentes.

Vejamos a que quadrante pertence o ângulo de amplitude α se:

- $\tan(-\alpha) < 0 \;\wedge\; \cos(180° - \alpha) > 0$

  $\tan(-\alpha) < 0 \;\wedge\; \cos(180° - \alpha) > 0 \;\Leftrightarrow\; -\tan\alpha < 0 \;\wedge\; -\cos\alpha > 0 \;\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\; \tan\alpha > 0 \;\wedge\; \cos\alpha < 0$

  Então, $\alpha \in$ 3.º quadrante.

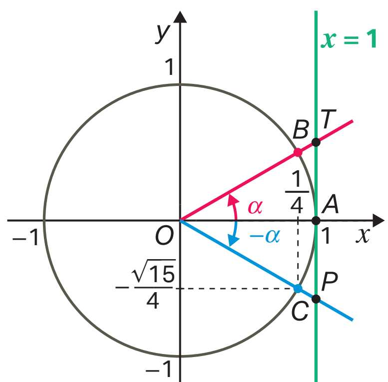
- $\tan(-\alpha) > 0 \;\wedge\; \cos(180° - \alpha) < 0$

  $\tan(-\alpha) > 0 \;\wedge\; \cos(180° - \alpha) < 0 \;\Leftrightarrow\; -\tan\alpha > 0 \;\wedge\; -\cos\alpha < 0 \;\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\; \tan\alpha < 0 \;\wedge\; \cos\alpha > 0$

  Então, $\alpha \in$ 4.º quadrante.

2. Consideremos um referencial ortonormado direto xOy, em que se encontram representados a circunferência trigonométrica, os ângulos orientados AOB e AOC, com amplitudes simétricas e cujos lados extremidade intersetam a reta de equação $x = 1$ nos pontos T e P, respetivamente.



Sabe-se que o ponto C tem coordenadas $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

Vamos determinar a medida da área do triângulo $[TOP]$.

Como os ângulos AOB e AOC têm amplitudes simétricas e se encontram nos 1.º e 4.º quadrantes, respetivamente, então o ponto B tem coordenadas $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

Logo, $\tan\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$ e $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha = -\sqrt{15}$.

Desta forma, $\overline{TA} = \overline{AP} = \sqrt{15}$. Assim, $A_{[TOP]} = \dfrac{2\sqrt{15} \times 1}{2} = \sqrt{15}$.

Exercícios

27 Sem usar a calculadora, indica o valor exato de:

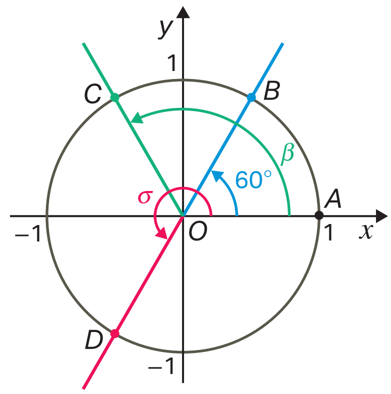
27.1. $\tan(-30°)$ **27.2.** $\tan(150°)$ **27.3.** $\tan(240°)$

27.4. $\tan(210°)$ **27.5.** $\tan(225°)$ **27.6.** $\tan(-240°)$

28 Considera um referencial ortonormado direto xOy, em que se encontram representados a circunferência trigonométrica e os ângulos orientados AOB, AOC e AOD, de amplitudes $60°$, β e σ, respetivamente.

Sabe-se que:

- os pontos B e C têm a mesma ordenada;
- o segmento de reta $[BD]$ é um diâmetro da circunferência trigonométrica.



Resolve as seguintes questões sem usar a calculadora.

28.1. Quais são as coordenadas do ponto B?

28.2. Determina o valor de:

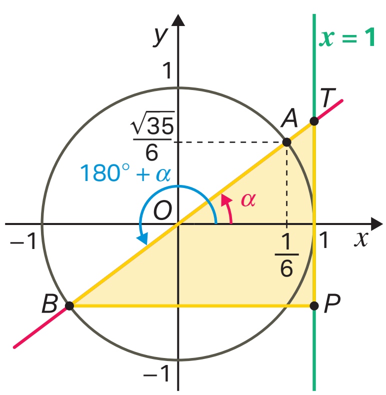
a) $\cos\beta$ **b)** $\tan\sigma$

c) $\tan(-\beta)$ **d)** $\tan(180°+\beta)$

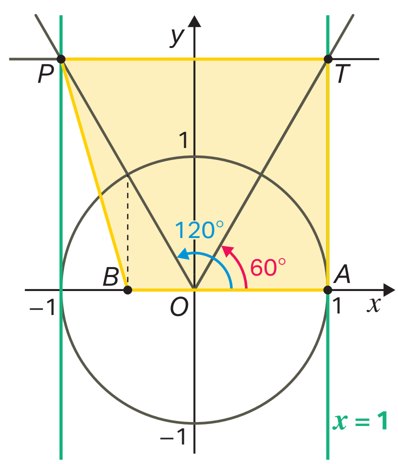
e) $\tan(-\sigma)$

29 Nas figuras seguintes encontram-se representados, num referencial ortonormado direto, a circunferência trigonométrica, a reta de equação $x = 1$ e alguns ângulos orientados. Tendo em consideração os dados de cada figura, determina a área do:

29.1. triângulo $[BPT]$, retângulo em P;



29.2. trapézio retângulo $[BATP]$.



Sugestão: Começa por indicar as razões trigonométricas dos ângulos com medidas de amplitude $60°$ e $120°$.

1.3.3. Razões trigonométricas de ângulos generalizados

Como já vimos, o lado origem e o lado extremidade de um ângulo generalizado $(\alpha\,,\ n)$ são iguais, respetivamente, ao lado origem e ao lado extremidade do ângulo orientado α. Desta forma, as razões trigonométricas do ângulo generalizado $(\alpha\,,\ n)$ são iguais às razões trigonométricas do ângulo orientado α.

Se $\beta = (\alpha\,,\ n)$, então $\sin\beta = \sin\alpha$, $\cos\beta = \cos\alpha$ e $\tan\beta = \tan\alpha$.

Consideremos os ângulos generalizados $\beta = (\alpha\,,\ n)$ e $\delta = (\alpha'\,,\ n')$ com igual amplitude, isto é, $\hat{\beta} = \hat{\delta}$.

Sabemos que:

- $\sin\hat{\beta} = \sin\alpha$, $\cos\hat{\beta} = \cos\alpha$ e $\tan\hat{\beta} = \tan\alpha$
- $\sin\hat{\delta} = \sin\alpha'$, $\cos\hat{\delta} = \cos\alpha'$ e $\tan\hat{\delta} = \tan\alpha'$

Como $\hat{\beta} = \hat{\delta}$, então os ângulos orientados α e α' têm a mesma amplitude. Logo:

$\sin\hat{\beta} = \sin\hat{\delta}$, $\cos\hat{\beta} = \cos\hat{\delta}$ e $\tan\hat{\beta} = \tan\hat{\delta}$

Nota:
Ângulos generalizados com a mesma amplitude têm iguais razões trigonométricas.

Exemplos

1. Sem usar a calculadora, podemos determinar as razões trigonométricas do ângulo generalizado de amplitude $1860°$.

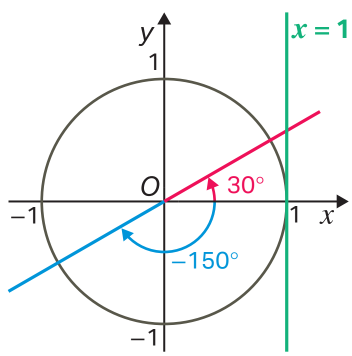
   Como $1860° = 60° + 5 \times 360°$, então o ângulo generalizado é $(60°\,,\ 5)$. Logo:

   $\sin(1860°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(1860°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$,

   e $\tan(1860°) = \tan(60°) = \sqrt{3}$

2. As razões trigonométricas do ângulo generalizado $(-150°\,,\ -4)$ são:

   - $\sin(-150°) = -\sin(30°) = -\frac{1}{2}$
   - $\cos(-150°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   - $\tan(-150°) = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Exercício

30 Determina as razões trigonométricas do ângulo generalizado com medida de amplitude:

30.1. $1125°$ **30.2.** $-780°$ **30.3.** $2745°$

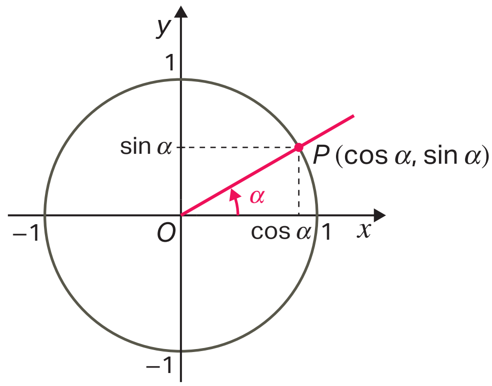
30.4. $-1125°$ **30.5.** $-1560°$ **30.6.** $-2550°$

1.3.4. Generalização da fórmula fundamental da Trigonometria

Consideremos, num referencial ortonormado direto xOy, a circunferência trigonométrica e um ângulo generalizado de amplitude α.

Seja P o ponto de interseção da circunferência trigonométrica com o lado extremidade do ângulo.

Assim, o ponto P tem coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.



A circunferência trigonométrica é definida pela equação reduzida:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Como P é um ponto da circunferência trigonométrica, então $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Fórmula fundamental da Trigonometria

Para qualquer amplitude, α, de um ângulo generalizado:

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}$$

Considerando $\cos\alpha\neq 0$, podemos dividir os dois membros da fórmula fundamental da Trigonometria por $\cos^2\alpha$.

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Para qualquer amplitude, α, de um ângulo generalizado, com lados não perpendiculares:

$$\boldsymbol{1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Exemplos

1. Consideremos um ângulo generalizado de amplitude β, em graus, pertencente ao intervalo $]90, 270[$ e tal que $\tan\beta=-3$. Vamos determinar as restantes razões trigonométricas de β. Como $\tan\beta<0$, então $\beta\in$ 2.º quadrante.
   - $1+\tan^2\beta=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$

     $$1+(-3)^2=\frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow 10=\frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10} \vee \cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

     Como $\beta\in$ 2.º quadrante, $\cos\beta<0$. Logo, $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

- $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$

$$\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \sin^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{10} + \sin^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{9}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \vee \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Como $\beta \in 2.^{\text{o}}$ quadrante, $\sin \beta > 0$. Logo, $\sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

2. Vamos mostrar, no respetivo domínio, que:

$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \times \tan \alpha = \tan \alpha - 2 + 2\cos^2 \alpha$

Comecemos por desenvolver o primeiro membro para chegar ao segundo membro.

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \times \tan \alpha = \left(\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha\right) \times \tan \alpha =$$

$$= (1 - 2\sin \alpha \cos \alpha) \times \tan \alpha = \tan \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \tan \alpha =$$

$$= \tan \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha - 2\sin^2 \alpha = \tan \alpha - 2\left(1 - \cos^2 \alpha\right) =$$

$$= \tan \alpha - 2 + 2\cos^2 \alpha$$

Manual Digital

Vídeo
Radiano

Exercícios

31 **Determina as razões trigonométricas desconhecidas do ângulo de amplitude α, em graus, sabendo que:**

31.1. $\alpha \in]-90, 90[\wedge \tan \alpha = 2$

31.2. $\alpha \in]-180, 0[\wedge \cos \alpha = -\frac{3}{4}$

31.3. $\alpha \in]-270, -90[\wedge \sin \alpha = -\frac{1}{5}$

31.4. $\alpha \in]0, 270[\wedge \tan \alpha = -5$

32 **Mostra, no respetivo domínio, as seguintes igualdades.**

32.1. $\cos \alpha \times \tan \alpha + \sin \alpha = 2\sin \alpha$

32.2. $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$

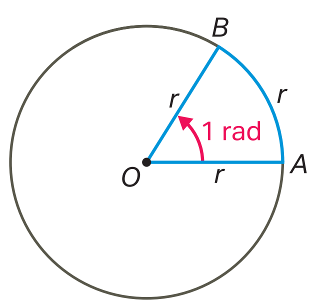
32.3. $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

32.4. $(\tan \alpha + \sin \alpha)^2 \times \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left(1 + 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha\right)$

1.3.5. O radiano. Medidas de amplitude em radianos

Consideremos uma circunferência de centro O e raio r e um arco AB com medida de comprimento igual a r.

A medida de amplitude do ângulo AOB é 1 radiano (1 rad).



Um **radiano** (rad) é a amplitude do ângulo ao centro de uma circunferência, cujos lados determinam um arco de comprimento igual ao raio.

Manual Digital

Atividade
Conversões de medidas de amplitude de ângulos

Como ângulos ao centro iguais determinam arcos com medidas proporcionais ao raio da circunferência a que pertencem, o radiano não depende da circunferência usada.

Como sabemos, o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$.

Assim, a um ângulo giro, de $360°$, corresponde um arco de comprimento $2\pi r$. Em radianos, a amplitude do ângulo é dada por $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

Um ângulo giro tem amplitude, em graus, $360°$ e, em radianos, 2π rad.

Assim, sabemos que:

Amplitude							
	em graus	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$
	em radianos	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Logo, os valores exatos das razões trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ são:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nota:
Para simplificar a escrita, por vezes não colocamos a unidade de medida das amplitudes em radianos.

Exemplos

Para converter a medida de amplitude de graus para radianos e vice-versa, basta usar uma regra de três simples, tendo por base, por exemplo, que 2π rad correspondem a $360°$.

1. Vejamos qual é a amplitude, em radianos, de um ângulo com $270°$.

2π rad — $360°$
x rad — $270°$

$$x = \frac{2\pi \times 270}{360} = \frac{3\pi}{2}$$

Logo, $270°$ correspondem a $\frac{3\pi}{2}$ rad.

2. Vamos converter em graus a medida de amplitude $\frac{7\pi}{3}$ rad.

2π rad — $360°$
$\frac{7\pi}{3}$ rad — $x°$

$$x = \frac{\frac{7\pi}{3} \times 360}{2\pi} = \frac{2520\pi}{6\pi} = 420$$

Um outro processo é substituir π por $180°$: $\frac{7 \times 180°}{3} = \frac{1260°}{3} = 420°$

Logo, $\frac{7\pi}{3}$ rad correspondem a $420°$.

Exercícios

33 Converte em graus cada uma das seguintes amplitudes em radianos.

33.1. $\frac{11\pi}{4}$ **33.2.** $-\frac{5\pi}{6}$ **33.3.** $\frac{13\pi}{8}$

33.4. $-\frac{12\pi}{5}$ **33.5.** $\frac{15\pi}{4}$ **33.6.** $-\frac{2\pi}{5}$

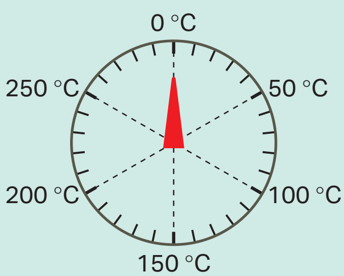
34 Converte em radianos cada uma das seguintes amplitudes em graus.

34.1. $128°$ **34.2.** $-170°$ **34.3.** $260°$

34.4. $-110°$ **34.5.** $620°$ **34.6.** $-710°$

Tarefa

1 Na figura podemos ver o modelo geométrico de um botão de seleção de temperatura de um forno, que roda nos dois sentidos. O triângulo vermelho aponta para a temperatura a que o forno se encontra.



1.1. Se o botão indicar inicialmente $0\ °C$, que temperatura mostrará depois de rodar:

a) $\frac{2\pi}{5}$? **b)** $-\frac{8\pi}{15}$? **c)** $-\frac{4\pi}{5}$? **d)** $\frac{11\pi}{15}$?

1.2. Se o botão indicar a temperatura de $100\ °C$, indica duas amplitudes possíveis, em radianos, para a rotação do botão, para que passe a mostrar a temperatura de $200\ °C$. Apresenta os resultados em radianos.

2 A figura apresenta um relógio analógico que marca 10:00.

Que horas podemos ver no relógio se:

2.1. o ponteiro das horas rodar $-\frac{4\pi}{6}$?

2.2. o ponteiro dos minutos rodar $-\frac{19\pi}{3}$?

Para aplicar

1 Em cada um dos casos seguintes, indica a que quadrante pertence o ângulo generalizado e o sinal das suas razões trigonométricas.

1.1. $1420°$ **1.2.** $-2130°$ **1.3.** $-1930°$

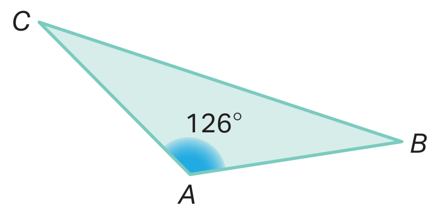
1.4. $9050°$ **1.5.** $-2720°$ **1.6.** $2565°$

2 Sem recorrer à calculadora, determina o valor exato de:

2.1. $\sin(930°) + 2\cos(-780°)$ **2.2.** $\tan(1845°) \times \sin(1140°)$

2.3. $\cos^2(960°) - \dfrac{\sin(-1290°)}{2}$ **2.4.** $\sin(1215°) \times \tan^2(-1470°)$

3 Na figura encontra-se representado um triângulo isósceles $[ABC]$.
Determina a medida de amplitude dos ângulos internos do triângulo. Apresenta os resultados em radianos.



4 Indica a que quadrante pertence o ângulo de amplitude α, em graus, sabendo que:

4.1. $\sin(180° - \alpha) \times \cos(-\alpha) < 0 \ \wedge \ \alpha \in]0, 180[$

4.2. $\tan(180° + \alpha) \times \sin(-\alpha) > 0 \ \wedge \ \alpha \in]180, 360[$

4.3. $\sin(-\alpha) \times \cos^2(180° - \alpha) < 0 \ \wedge \ \tan\alpha < 0$

4.4. $\cos(180° + \alpha) \times \tan(180° - \alpha) > 0 \ \wedge \ \alpha \in]-270, -180[$

5 Determina as razões trigonométricas do ângulo de amplitude β, em graus, se:

5.1. $\cos\beta = \dfrac{3}{5} \ \wedge \ \beta \in]270, 360[$

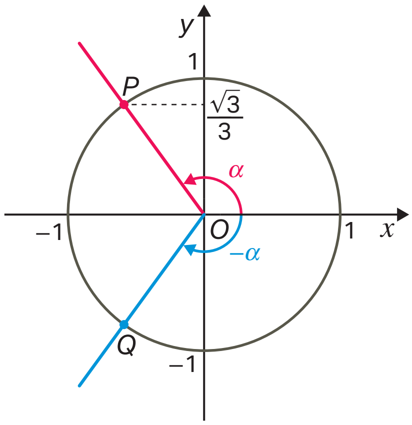
5.2. $\sin\beta = -\dfrac{1}{10} \ \wedge \ \beta \in]-270, -180[$

5.3. $\tan\beta = -10 \ \wedge \ \beta \in]-90, 0[$

5.4. $\tan\beta = -\dfrac{1}{4} \ \wedge \ \beta \in]90, 270[$

6 Mostra que $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \times \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\cos^2\alpha$, com $\cos\alpha \neq 0$ e $\sin\alpha \neq 0$.

7 **No referencial ortonormado direto xOy encontram-se representados a circunferência trigonométrica e dois ângulos orientados com amplitudes α e $-\alpha$.**



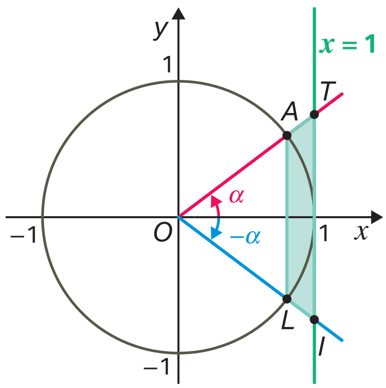
Sabe-se que:

- P e Q são pontos da circunferência;
- $\dot{O}P$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude α;
- $\dot{O}Q$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude $-\alpha$.

7.1. Indica as coordenadas dos pontos P e Q.

7.2. Determina o valor exato de $\cos^2\alpha \times \tan(-\alpha)$.

8 **Na circunferência trigonométrica da figura estão representados dois ângulos orientados de amplitudes α e $-\alpha$, o trapézio $[LITA]$ e a reta de equação $x = 1$.**



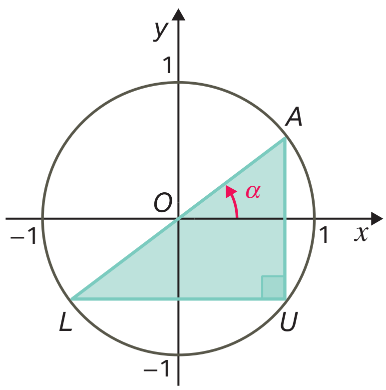
8.1. Tendo em consideração os dados da figura, mostra que a medida da área do trapézio $[LITA]$ pode ser dada por

$\tan\alpha - \sin\alpha \times \cos\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

8.2. Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, determina a área do triângulo $[LAO]$.

9 **Considera o triângulo retângulo $[LUA]$, inscrito na circunferência trigonométrica, e um ângulo orientado do 1.º quadrante, com amplitude α.**

Admite os dados apresentados na figura.

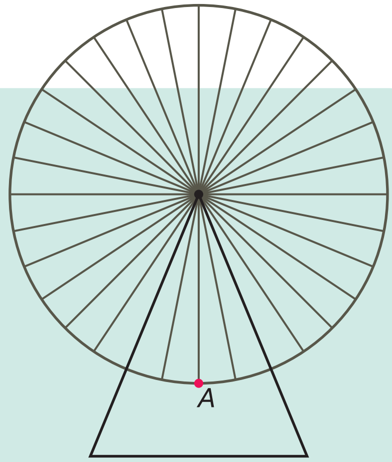


9.1. Se $\alpha = \frac{\pi}{6}$, indica as coordenadas dos pontos L, U e A.

9.2. Determina a medida da área do triângulo $[LUA]$, sendo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

1.4. Funções trigonométricas

Tarefa

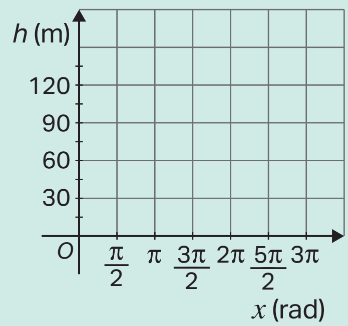


Em Londres, numa das margens do rio Tamisa, encontramos a London Eye, uma roda gigante com 32 cabinas que representam os 32 bairros de Londres.

Sabemos que a roda tem 135 m de altura total e 120 m de diâmetro.

Considera a cabina de passageiros que se encontra mais perto do chão no momento inicial, representada pelo ponto A no esquema ao lado.

1 No teu caderno, faz um esboço da representação gráfica que descreve a altura, h, em metros, da referida cabina em função da amplitude, x, em radianos, do ângulo de rotação.



2 Indica duas medidas de amplitude de rotação, superiores a 2π, que permitem colocar a cabina representada por A no ponto mais alto da London Eye.

3 A que altura se encontrará a cabina representada por A depois de fazer uma rotação de $\frac{5\pi}{16}$ rad? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

4 Admitindo que uma volta completa na London Eye demora 30 minutos a uma velocidade constante, após quanto tempo do início do seu movimento de rotação a cabina representada por A está a $130,43$ m de altura? Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Na tarefa anterior deparámo-nos com uma função cujas imagens se repetem de 2π em 2π radianos. Dizemos que esta função é periódica, com período positivo mínimo 2π.

Uma função f diz-se **periódica**, de período P, com $P > 0$, quando: para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x+P) = f(x)$.
Desta forma, sendo f periódica, damos o nome de **período positivo mínimo** ao menor período positivo da função.

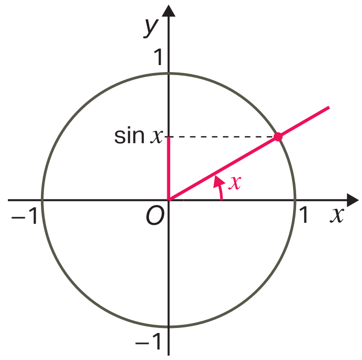
Manual Digital

Atividades
Função periódica e período positivo mínimo

Função seno

1.4.1. Função seno

Consideremos o ângulo generalizado de amplitude x, em radianos, representado na circunferência trigonométrica.

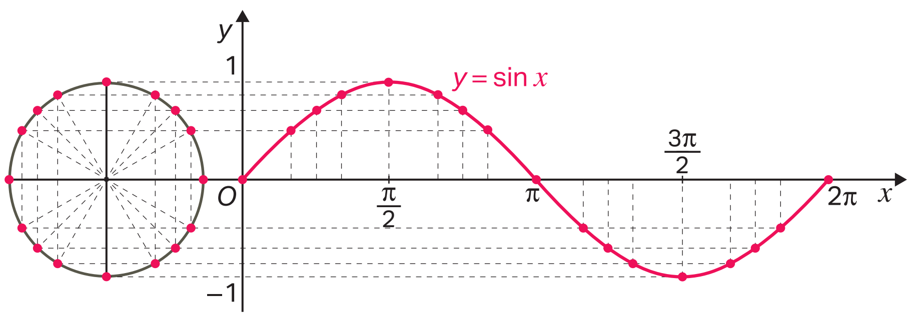


Podemos fazer corresponder a cada número real x um ângulo generalizado de amplitude x radianos.

Como sabemos, o lado extremidade do ângulo de amplitude x interseta a circunferência em apenas um ponto. Desta forma, podemos concluir que a cada valor de x corresponde um e um só valor de $\sin x$.

Estamos, então, perante uma função real de variável real, a função trigonométrica seno.

Recorrendo à circunferência trigonométrica, podemos obter a representação gráfica da função definida por $y = \sin x$, com $x \in [0, 2\pi]$.



- **Domínio da função seno**

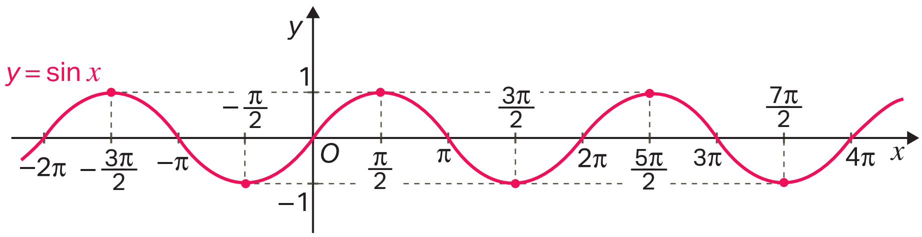
A função seno encontra-se definida para qualquer número real. Assim, $D_{\sin} = \mathbb{R}$.

- **Contradomínio da função seno**

A função seno toma como valores todos os números reais compreendidos entre -1 e 1, incluindo os extremos, como já vimos na circunferência trigonométrica. Assim, $D'_{\sin} = [-1, 1]$.

- **Períodos da função seno**

Como vimos anteriormente, os ângulos generalizados x e $x \pm 2\pi$ têm o mesmo seno.
Assim, sabemos que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
Do mesmo modo, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, para todo o $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, a função seno é periódica, sendo $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, período da função.
O **período positivo mínimo** da função seno é 2π.



- **Zeros da função seno**

Usando a circunferência trigonométrica, sabemos que, em $[0, 2\pi[$, a função seno é nula quando o ângulo toma como valores 0 ou π radianos.
Como a função seno é periódica, de período positivo mínimo 2π, então os zeros da função seno podem ser representados por $x = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Os **zeros** da função seno são: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- **Extremos da função seno**

Em $[0, 2\pi[$, usando a circunferência trigonométrica, verificamos que o **máximo** da função seno é 1, obtido no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$, e o **mínimo** é -1, obtido no ponto de abcissa $\frac{3\pi}{2}$.

O **máximo** da função seno é 1 e ocorre em $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

O **mínimo** da função seno é -1 e ocorre em $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Paridade da função seno**

Por observação da representação gráfica da função seno, verificamos que ângulos de amplitudes simétricas têm imagens simétricas, isto é, a função seno é uma função ímpar.

Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$, logo a função seno é uma **função ímpar**.
O gráfico da função seno é simétrico em relação à origem do referencial.

Exemplos

1. Considera a função f definida por $f(x) = 1 + \sin(2x)$.

- O gráfico da função f é obtido a partir do gráfico de $\sin x$ por uma contração horizontal e uma translação vertical.
  Assim, o **domínio** de f é $D_f = \mathbb{R}$.
- Sabemos que $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
  Como uma contração horizontal do gráfico não altera os extremos, então
  $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$.
  $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 1 + \sin(2x) \leqslant 2$
  Logo, o **contradomínio** de f é $D'_f = [0, 2]$.
- Vamos mostrar que π é **período** da função f.
  $f(x+\pi) = 1 + \sin(2(x+\pi)) = 1 + \sin(2x + 2\pi) = 1 + \sin(2x) = f(x)$
- Vejamos como determinar a expressão geral dos **zeros** da função f.
  $f(x) = 0 \iff 1 + \sin(2x) = 0 \iff \sin(2x) = -1 \iff$
  $\iff 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- Pelo contradomínio, sabemos que o **máximo** da função é 2.
  Vejamos como determinar os **maximizantes**.
  $1 + \sin(2x) = 2 \iff \sin(2x) = 1 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- Pelo contradomínio, sabemos que 0 é o **mínimo** da função. Assim, a expressão geral dos **minimizantes** é igual à expressão geral dos zeros.
- Podemos estudar a função f quanto à **paridade**.
  $f(-x) = 1 + \sin(-2x) = 1 - \sin(2x)$
  Como $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, concluímos que a função f não é par nem é ímpar.

2. Vamos determinar o **período positivo mínimo** da função g definida por $g(x) = \sin(4x) - 1$.

Seja P o período positivo mínimo da função g.
Então, para todo o $x \in D_g$, $x + P \in D_g$ e $g(x+P) = g(x)$.

Assim:

$\sin(4(x+P)) - 1 = \sin(4x) - 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \iff \sin(4x + 4P) = \sin(4x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Como o período positivo mínimo da função seno é 2π, então $4P = 2\pi$ e, portanto, $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
Deste modo, o período positivo mínimo da função g é $\frac{\pi}{2}$.

Exercícios

35 Determina o contradomínio de cada uma das funções a seguir definidas.

35.1. $f(x) = -\sin x$

35.2. $g(x) = -2 + \sin(3x)$

35.3. $h(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3$

35.4. $m(x) = -2\sin x - 1$

35.5. $p(x) = \sin^2 x$

36 Caso exista, determina a expressão geral dos zeros das funções a seguir definidas.

36.1. $f(x) = -\sin x$

36.2. $g(x) = -2 - \sin(3x)$

36.3. $h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

36.4. $m(x) = -\sin x + 1$

37 Estuda quanto à paridade a função definida por:

37.1. $p(x) = \sin x + 1$

37.2. $r(x) = -\sin x$

37.3. $s(x) = \sin(2x)$

38 Considera a função definida por $h(x) = 3 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

38.1. Determina o contradomínio da função h.

38.2. Mostra que o período positivo mínimo da função h é 4π.

38.3. Determina as abcissas dos pontos em que a função atinge o valor máximo.

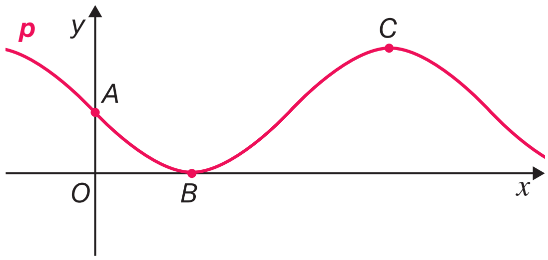
39 Considera a função definida por $m(x) = -\sin(-2x) - 3$.
Determina:

39.1. $m\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e $m\left(\frac{37\pi}{3}\right)$;

39.2. o contradomínio da função m;

39.3. as abcissas dos pontos em que a função m atinge o valor mínimo.

40 Na figura encontra-se representada graficamente a função p definida por $p(x) = -\sin(x) + 1$.



Sabe-se que:

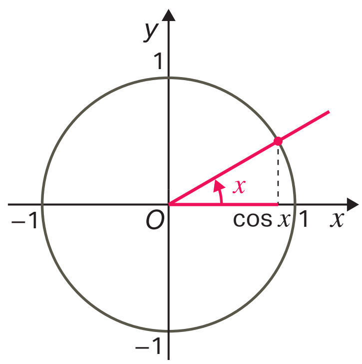
- o ponto A pertence ao gráfico da função p e ao eixo das ordenadas;
- o ponto B pertence ao gráfico da função p e ao eixo das abcissas;
- no ponto C a função p atinge o valor máximo.

Determina as coordenadas dos pontos A, B e C.

Manual Digital
Atividade
Função cosseno

1.4.2. Função cosseno

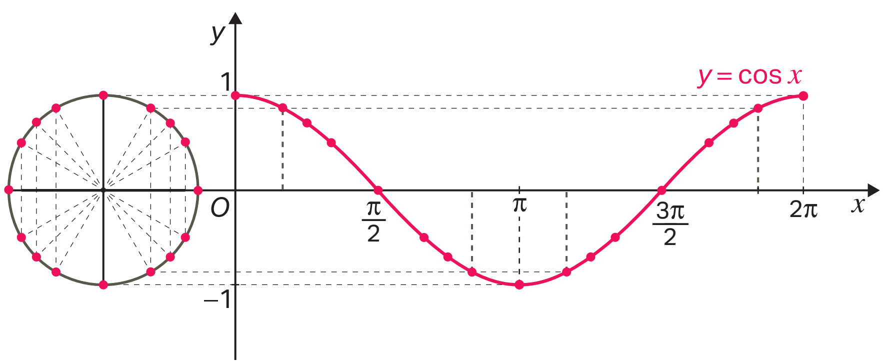
Tal como vimos para a função seno, podemos fazer corresponder a cada número real x um ângulo generalizado de amplitude x radianos e o lado extremidade do ângulo de amplitude x interseta a circunferência trigonométrica em apenas um ponto.



Deste modo, podemos concluir que a cada valor de x corresponde um e um só valor de $\cos x$.

Então, estamos perante uma outra função real de variável real, a função trigonométrica cosseno.

Recorrendo à circunferência trigonométrica, podemos obter a representação gráfica da função definida por $y = \cos x$, com $x \in [0, 2\pi]$.



- **Domínio da função cosseno**

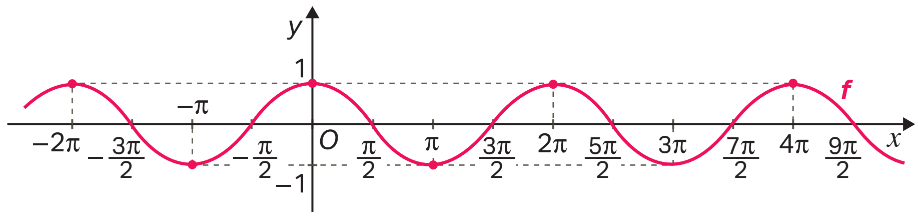
A função cosseno encontra-se definida para qualquer número real. Assim, $D_{\cos} = \mathbb{R}$.

- **Contradomínio da função cosseno**

Tal como a função seno, também a função cosseno toma como valores todos os números reais compreendidos entre -1 e 1, incluindo os extremos. Assim, $D'_{\cos} = [-1, 1]$.

- **Períodos da função cosseno**

Como sabemos, os ângulos generalizados x e $x \pm 2\pi$ têm o mesmo cosseno.
Assim, sabemos que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
Do mesmo modo, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, para todo o $k \in \mathbb{Z}$.
Então, a função cosseno é periódica, sendo $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, período da função.
O **período positivo mínimo** da função cosseno é 2π.



- **Zeros da função cosseno**

Usando a circunferência trigonométrica, sabemos que, em $[0, 2\pi[$, a função cosseno é nula quando o ângulo toma como valores $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

> **Nota:**
> Curvas como as das representações gráficas das funções seno e cosseno são denominadas sinusoides.

Então, os zeros da função cosseno podem ser representados por $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

> Os **zeros** da função cosseno são: $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
> $$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

- **Extremos da função cosseno**

Em $[0, 2\pi[$, usando a circunferência trigonométrica, verificamos que o **máximo** da função cosseno é 1, obtido no ponto de abcissa 0, e o **mínimo** é -1, obtido no ponto de abcissa π.

> O **máximo** da função cosseno é 1 e ocorre em $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
> O **mínimo** da função cosseno é -1 e ocorre em $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Paridade da função cosseno**

Pela representação gráfica da função cosseno, verificamos que ângulos de amplitudes simétricas têm imagens iguais. Assim, a função cosseno é uma função par.

> Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, logo a função cosseno é uma **função par**.
> O gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Exemplos

1. Considera a função f definida por $f(x) = -1 + \cos(3x)$.

- O gráfico da função f é obtido a partir do gráfico de $\cos x$ por uma contração horizontal e uma translação vertical.
  Assim, o **domínio** de f é $D_f = \mathbb{R}$.
- Sabemos que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
  Como uma contração horizontal do gráfico não altera os extremos, então $-1 \leqslant \cos(3x) \leqslant 1$.
  Desta forma, $-2 \leqslant -1 + \cos(3x) \leqslant 0$.
  Logo, o **contradomínio** de f é $D'_f = [-2, 0]$.
- Vamos mostrar que $\frac{2\pi}{3}$ é **período** da função f.
  $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \cos(3x + 2\pi) = -1 + \cos(3x) = f(x)$
- Vejamos como determinar a expressão geral dos **zeros** da função f.
  $f(x) = 0 \iff -1 + \cos(3x) = 0 \iff \cos(3x) = 1 \iff$
  $\iff 3x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$
- Pelo contradomínio, sabemos que 0 é o **máximo** da função. Assim, a expressão geral dos **maximizantes** é igual à expressão geral dos zeros.
- Pelo contradomínio, sabemos que o **mínimo** da função é -2.
  Podemos proceder do seguinte modo para determinar os **minimizantes**:
  $-1 + \cos(3x) = -2 \iff \cos(3x) = -1 \iff 3x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff$
  $\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Podemos estudar a função f quanto à **paridade.**
  $f(-x) = -1 + \cos(-3x) = -1 + \cos(3x) = f(x)$
  Logo, a função f é par.

2. Vejamos como determinar o **período positivo mínimo** da função g definida por $g(x) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Seja P o período positivo mínimo da função g.

Então, para todo o $x \in D_g$, $x + P \in D_g$ e $g(x + P) = g(x)$.

$-2\cos\left((x + P) + \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\ \forall x \in \mathbb{R} \iff$

$\iff \cos\left(x + P + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Como o período positivo mínimo da função cosseno é 2π, então $P = 2\pi$.

Exercícios

41 Estuda cada uma das funções seguintes quanto ao contradomínio e à paridade.

41.1. $f(x) = -3\cos(2x)$

41.2. $g(x) = -2 - \cos x$

41.3. $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2$

41.4. $m(x) = \cos x - 3$

41.5. $p(x) = \cos^2 x$

42 Considera a função j definida por $j(x) = \cos(3x) - 1$.

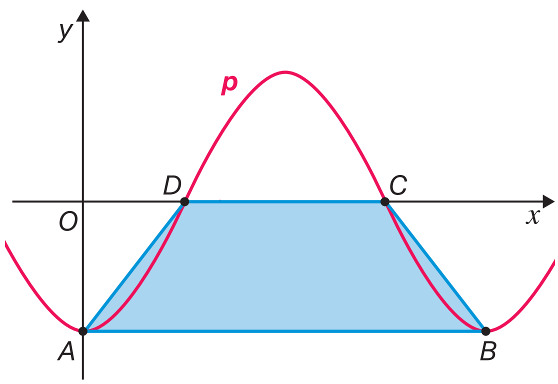
42.1. Determina:

a) o contradomínio da função j;

b) a expressão geral dos zeros de j.

42.2. Estuda a função j quanto à paridade.

43 Na figura encontram-se representados o gráfico da função p, definida por $p(x) = -\cos(2x)$, e o polígono $[ABCD]$.



Sabe-se que:

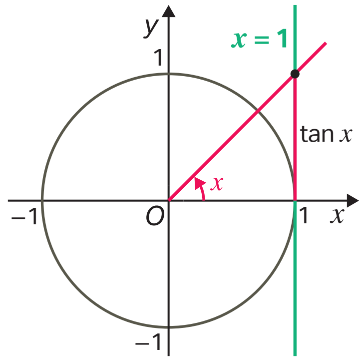
- os pontos A e B são pontos do gráfico em que a função atinge o valor mínimo;
- o ponto A pertence ao eixo das ordenadas;
- os pontos C e D pertencem ao gráfico da função e ao eixo das abcissas.

43.1. Determina as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

43.2. Determina a medida da área do polígono $[ABCD]$.
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

1.4.3. Função tangente

Consideremos os valores reais de x correspondentes ao ângulo generalizado de amplitude x, em radianos, cujo lados são não perpendiculares. Quando representados na circunferência trigonométrica, a semirreta que contém o lado extremidade do referido ângulo, ou o seu prolongamento, interseta a reta de equação $x = 1$ num único ponto.

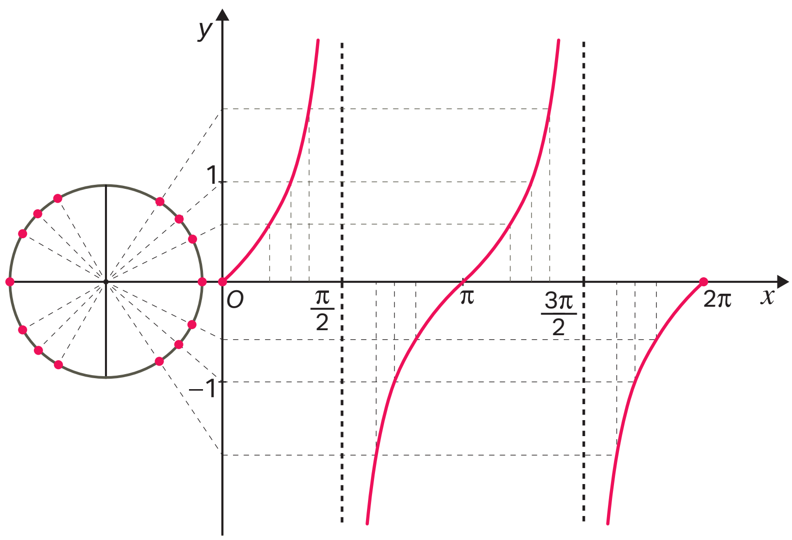


Deste modo, podemos concluir que a cada valor de x corresponde um e um só valor de $\tan x$.

Manual Digital
Atividade
Função tangente

Então, estamos perante uma outra função real de variável real, a função trigonométrica tangente.

Recorrendo à circunferência trigonométrica, podemos representar a função tangente no intervalo $[0, 2\pi]$.



- **Domínio da função tangente**

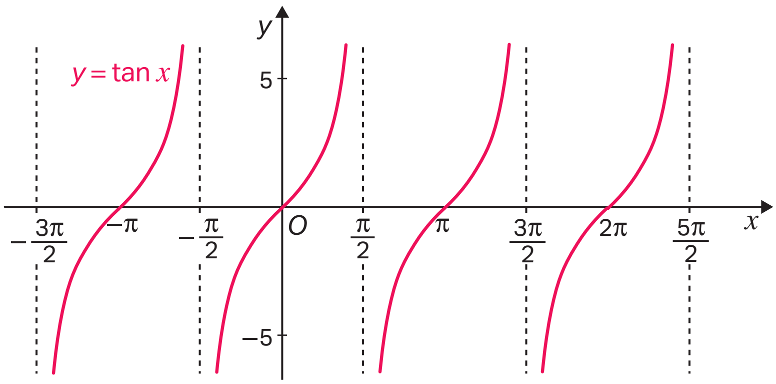
Como já tínhamos visto, a tangente não está definida para ângulos cujos lados são perpendiculares. Assim, a tangente não está definida quando o lado extremidade do ângulo representado na circunferência trigonométrica se encontra sobre o eixo das ordenadas.
Assim, o domínio da função tangente é $D_{\tan} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- **Contradomínio da função tangente**

A função tangente toma valores em $]-\infty, +\infty[$.
Assim, o seu contradomínio é $D'_{\tan} = \mathbb{R}$.

• Períodos da função tangente

Para todo o $x \in D_{\tan}$, sabemos que $\tan(x \pm \pi) = \tan x$.
Do mesmo modo, para todo $x \in D_{\tan}$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$, $k \in \mathbb{Z}$.
Então, a função tangente é periódica, sendo $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, período da função.
O **período positivo mínimo** da função tangente é π.



• Zeros da função tangente

No intervalo $[0, \pi[$, 0 é o único zero da função tangente.
Como o período positivo mínimo é π, então a expressão geral dos zeros da função tangente é $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Os **zeros** da função tangente são: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nota:
Como já vimos, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, para todo o $x \in D_{\tan}$. Logo, os zeros da função tangente são os zeros da função seno. Por outro lado, a função não está definida para valores de x tais que $\cos x = 0$, ou seja, não está definida, como vimos, para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

• Paridade da função tangente

Como $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, para todo o $x \in D_{\tan}$, temos:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x,\ \text{para todo o } x \in D_{\tan}.$$

Para todo o $x \in D_{\tan}$, $\tan(-x) = -\tan x$, logo a função tangente é uma **função ímpar.**
O gráfico da função tangente é simétrico em relação à origem do referencial.

Exemplos

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = 3\tan(2x)$.

- O **domínio** da função f é $\mathbb{R} \backslash \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, pois:

  $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

  Cálculos auxiliares:

  $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

- O **contradomínio** da função f é $\mathbb{R}$.

- Vejamos como determinar o **período positivo mínimo** da função f.

  Seja P o período positivo mínimo de f.

  Então, para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x+P) = f(x)$.

  $f(x+P) = f(x) \iff 3\tan(2x + 2P) = 3\tan(2x)$

  Então, como o período positivo mínimo da função tangente é π, $2P = \pi$, logo $P = \frac{\pi}{2}$.

- Vamos determinar a expressão geral dos **zeros** da função f.

  $f(x) = 0 \iff 3\tan(2x) = 0 \iff$

  $\iff \tan(2x) = 0 \iff 2x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

  $\iff x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

2. Consideremos a função g definida por $g(x) = 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

- O domínio da função g é $\mathbb{R} \backslash \{ x \in \mathbb{R} : x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$, pois:

  $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

  Cálculos auxiliares:

  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- O contradomínio da função g é $\mathbb{R}$.

- Vamos estudar a função g quanto à paridade.

  $g(-x) = 1 - \tan\left(-\frac{x}{2}\right) = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

  Então, como $g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$, a função g não é par nem é ímpar.

Manual Digital

Vídeo
Relações entre as razões trigonométricas de ângulos simétricos

Exercícios

44 Determina o domínio da função definida por:

44.1. $f(x) = -\tan(-x)$

44.2. $g(x) = \tan(3x)$

44.3. $h(x) = 2\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

44.4. $j(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

45 Determina o período de cada uma das funções a seguir definidas.

45.1. $m(x) = 2\tan(4x)$

45.2. $n(x) = -\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

45.3. $p(x) = 2 - \tan\left(\frac{x}{5}\right)$

46 Considera a função t definida por $t(x) = 2\tan(3x)$.

46.1. Determina o domínio da função t.

46.2. Mostra que:

a) $\frac{\pi}{3}$ é período da função t;

b) a função t é uma função ímpar.

46.3. Sem recorrer à calculadora, determina o valor exato de $t\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

1.4.4. Relação entre as razões trigonométricas de x e de $-x$, $x \pm \pi$ e $x \pm \frac{\pi}{2}$

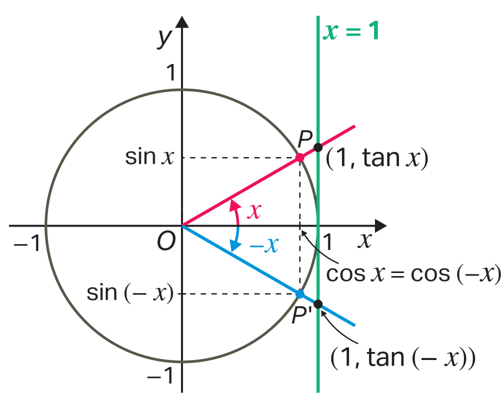
Consideremos um número real x tal que $x \in [0, 2\pi[$ e, na circunferência trigonométrica, o ângulo de amplitude x. Seja P o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência trigonométrica.

Consideremos P' o transformado do ponto P pela reflexão de eixo Ox.

As amplitudes dos ângulos considerados, com lado extremidade $\dot{O}P$ e $\dot{O}P'$, são simétricas.

Podemos concluir que:

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$



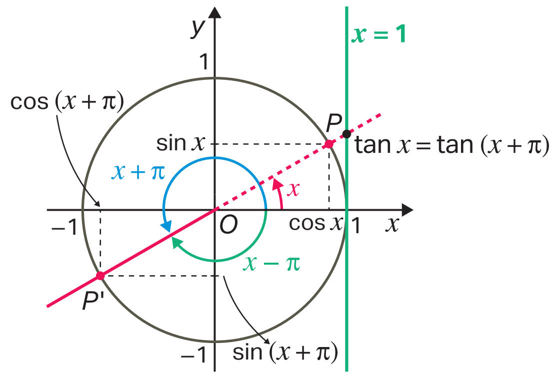
Consideremos, agora, P' o transformado do ponto P pela rotação de amplitude π ou $-\pi$.

A amplitude do ângulo com lado extremidade $\dot{O}P'$ considerado é $x+\pi$ ou $x-\pi$. O ponto P' é o simétrico do ponto P em relação à origem do referencial.

Podemos concluir que:

$$\cos(x-\pi) = -\cos x$$
$$\sin(x-\pi) = -\sin x$$
$$\tan(x-\pi) = \tan x$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\tan(x+\pi) = \tan x$$

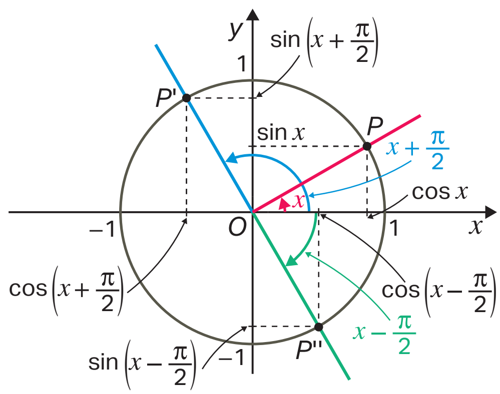


Sejam, agora, os pontos P' e P'' os transformados do ponto P pelas rotações de centro O e amplitudes $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, respetivamente.

Podemos concluir que:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$



Notas:

$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$, porque:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{1}{\tan x} \quad \text{e} \quad \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\tan x}$$

Estas relações foram abordadas para todo o $x \in [0, 2\pi[$. Porém, o mesmo acontece para todo o $x \in \mathbb{R}$ pela periodicidade das funções trigonométricas.

Manual Digital

Vídeos
Relações entre as razões trigonométricas de ângulos cuja soma ou diferença é π

Relações entre as razões trigonométricas de ângulos cuja soma ou cuja diferença é $\frac{\pi}{2}$

Exemplos

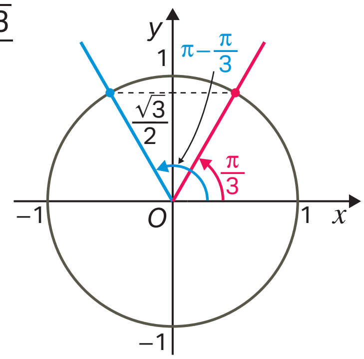
1. Podemos determinar o valor exato das razões trigonométricas de determinados ângulos sem recorrer à calculadora.

- $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{3\pi-1\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Então:

  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

  $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

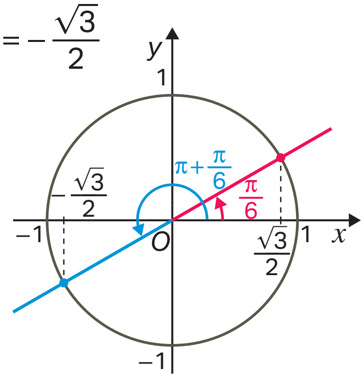


- $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi+1\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Então:

  $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

  $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$



2. Sabendo que $x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ e $\cos(\pi-x)=-\frac{1}{3}$, vamos determinar $\sin x$.

Sabemos que $\cos(\pi-x)=-\cos x$, logo:

$-\cos x=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{3}$

Assim:

$\sin^2 x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2 x=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \vee \sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $x\in$ 4.º quadrante, $\sin x<0$, logo $\sin x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. Vamos simplificar a expressão $\sin(x-\pi)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(-x)$, exprimindo-a em função das razões trigonométricas de x.

$\sin(x-\pi)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(-x)=-\sin x-\sin x+\sin x=-\sin x$

Exercícios

47 Sem recorrer à calculadora, indica o valor exato de:

47.1. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

47.2. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

47.3. $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$

47.4. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

47.5. $\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right)$

47.6. $\cos\left(\frac{28\pi}{3}\right)$

48 Sem recorrer à calculadora, indica o valor exato de:

48.1. $\tan(-3\pi)-\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

48.2. $\sin(5\pi)\times\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

48.3. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\times\cos^2\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

48.4. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5\pi}{3}\right)\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\pi)}$

49 Exprime, em função das razões trigonométricas de x, cada uma das seguintes expressões.

49.1. $\cos(x-\pi)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(-x)$

49.2. $\sin^2(-x)\times\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

49.3. $\sin(x+5\pi)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x-\pi)$

49.4. $\dfrac{\sin(x-\pi)\times\sin(-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

50 Sabendo que $\cos x=-\frac{1}{4}$ e $x\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$, determina o valor exato de:

50.1. $\cos(x-\pi)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

50.2. $\sin(x+\pi)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

51 Sabendo que $\tan(-x)=-3$ e $x\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, determina o valor exato de:

51.1. $\cos(x-\pi)$

51.2. $\sin^2(x+\pi)-\cos(-x)$

Manual Digital

Atividade
Equações trigonométricas da forma $\sin x = a$

1.4.5. Equações trigonométricas do tipo $\sin x = b$, $\cos x = b$ e $\tan x = b$

Equações do tipo $\sin x = b$

Como vimos anteriormente, o contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Assim, para que a equação seja possível, b terá de ser um valor pertencente ao intervalo $[-1, 1]$.

Exemplos

1. $\sin x = 2 \longrightarrow$ A equação é impossível.
2. $\sin x = -3 \longrightarrow$ A equação é impossível.
3. Se pretendermos resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, começamos por procurar um ângulo cujo seno seja igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

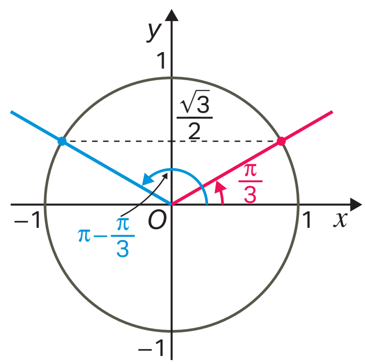
   Como sabemos, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Contudo, sabemos que, no intervalo $[0, 2\pi[$, há outro ângulo tal que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois $\sin x = \sin(\pi - x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Assim:

   $$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Como a função seno é periódica, sendo 2π o período positivo mínimo, a equação tem uma infinidade de soluções em $\mathbb{R}$.

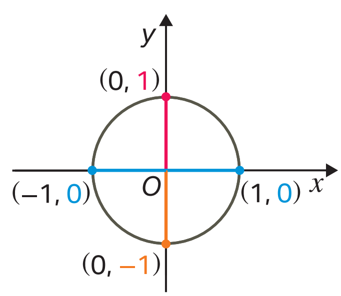
   $$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Casos particulares:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$



Caso pretendamos as soluções da equação num determinado intervalo, teremos de atribuir valores a k na expressão geral $x=\alpha+2k\pi \vee x=\pi-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, como veremos no último dos exemplos a seguir apresentados.

Exemplos

1. Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\sin x=-\frac{1}{2}$.

$\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2. Vamos resolver a equação $2\sin x-\sqrt{2}=0$ no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$.

$2\sin x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como pretendemos as soluções da equação pertencentes ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$, vamos atribuir valores a k.

- $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<2k\pi<\frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{8}<k<\frac{7}{8}$
  Como $k\in\mathbb{Z}$, não existe qualquer valor para k nestas condições.
- $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8}<k<\frac{5}{8}$
  Como $k\in\mathbb{Z}$, o único valor de k nestas condições é $k=0$.
  Se $k=0$: $x=\frac{3\pi}{4}+2\times 0\times\pi=\frac{3\pi}{4}$
  C. S. $=\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercícios

52 Resolve cada uma das seguintes equações.

52.1. $2\sin x-1=0$

52.2. $2\sin x+\sqrt{2}=0$

52.3. $2\sin(3x)=\sqrt{3}$

52.4. $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

52.5. $2\sin^2 x-\sin x=0$

53 Resolve, em $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right[$, cada uma das seguintes equações.

53.1. $2\sin x+\sqrt{3}=0$

53.2. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$

53.3. $4\sin^2 x-2=0$

53.4. $2\sin^2 x-\sin x=0$

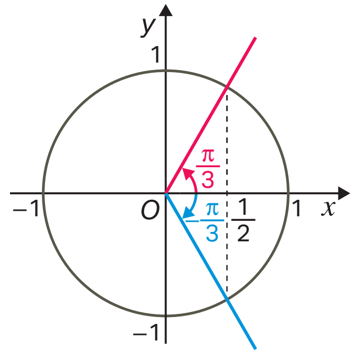
Manual Digital

Atividade
Equações trigonométricas da forma $\cos x = a$

Equações do tipo $\cos x = b$

Como o contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$, para que a equação seja possível, b terá de ser um valor pertencente ao intervalo $[-1, 1]$.

Se pretendermos resolver, por exemplo, a equação $\cos x = \frac{1}{2}$, começamos por procurar um ângulo cujo cosseno seja $\frac{1}{2}$. Por exemplo, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.



Mas, no intervalo $[-\pi, \pi[$, há outro ângulo tal que $\cos x = \frac{1}{2}$, uma vez que $\cos x = \cos(-x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

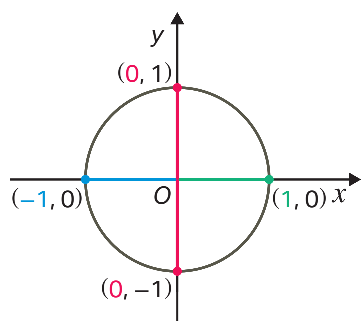
Como a função cosseno é periódica, sendo 2π o período positivo mínimo, a equação tem uma infinidade de soluções em $\mathbb{R}$.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Casos particulares:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Caso pretendamos as soluções da equação num determinado intervalo, teremos de atribuir valores a k na expressão geral $x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, como veremos no último dos exemplos a seguir apresentados.

Exemplos

1. Vamos resolver a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. Vejamos como proceder para resolver a equação $2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1=0$ em $\left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$.

$2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x+\frac{\pi}{2}=-\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como pretendemos as soluções pertencentes ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$, vamos procurar os valores a atribuir a k.

- $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}<2k\pi<\frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}<k<\frac{11}{12}$

  Como $k\in\mathbb{Z}$, não existe qualquer valor para k nestas condições.

- $\frac{\pi}{2}<-\frac{7\pi}{6}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{5}{6}<k<\frac{19}{12}$

  Como $k\in\mathbb{Z}$, o único valor de k nestas condições é $k=1$.

  Se $k=1$: $x=-\frac{7\pi}{6}+2\times1\times\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}$

  C. S. $=\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$

Exercícios

54 Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

54.1. $2\cos x-\sqrt{3}=0$

54.2. $2\cos x+\sqrt{2}=0$

54.3. $2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

54.4. $4\cos^2(2x)-1=0$

54.5. $\cos^2 x-\cos x=0$

55 Resolve, em $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cada uma das seguintes equações.

55.1. $2\cos x+1=0$

55.2. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1=0$

55.3. $4\cos^2 x-3=0$

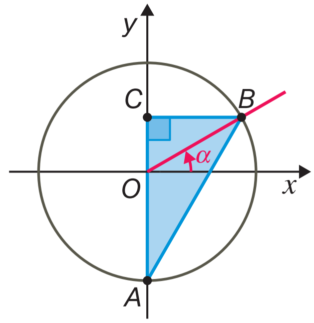
55.4. $\cos^2 x-2\cos x+1=0$

55.5. $\sin(2x)=\cos x$

Manual Digital

Atividade
Equações trigonométricas da forma $\tan x = a$

56 Na figura encontram-se representados, num referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica e um triângulo, $[ABC]$, retângulo em C.



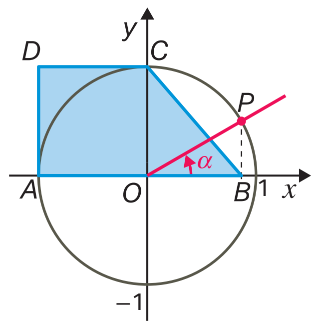
O ponto B pertence à circunferência trigonométrica e $\dot{O}B$ é o lado extremidade do ângulo com medida de amplitude α, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. O ponto A pertence ao eixo Oy e à circunferência trigonométrica.

Seja f a função que a cada α faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$.

56.1. Mostra que $f(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha \sin\alpha + \cos\alpha}{2}$.

56.2. Determina $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

57 No referencial ortonormado da figura estão representados a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo, $[ABCD]$. Sabe-se que:



- α é a amplitude de um ângulo com lado origem $\dot{O}B$ e lado extremidade $\dot{O}P$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos A e C pertencem à circunferência trigonométrica e aos eixos Ox e Oy, respetivamente.

Seja g a função que a cada valor de α faz corresponder a área do trapézio $[ABCD]$.

57.1. Mostra que $g(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha + 2}{2}$.

57.2. Determina $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

57.3. Determina o valor de α, sabendo que $g(\alpha) = \frac{5}{4}$.

Equações do tipo $\tan x = b$

Como o contradomínio da função tangente é $\mathbb{R}$, qualquer que seja o número real b, a equação $\tan x = b$ será sempre possível.

À semelhança do que foi visto para as equações trigonométricas já estudadas, devemos começar por escrever a equação na forma $\tan x = \tan\alpha$.

Como a função tangente é periódica, com período positivo mínimo π, e, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = b$ tem uma única solução, as soluções desta equação são da forma $\alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Caso pretendamos as soluções da equação num determinado intervalo, teremos de atribuir valores a k na expressão geral $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

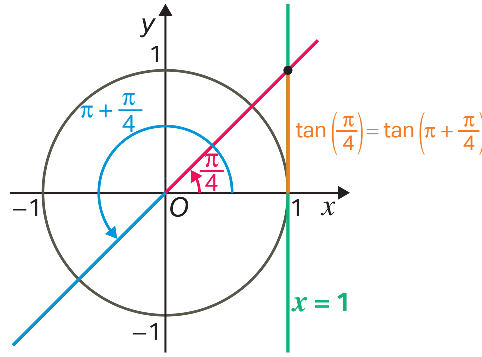
1. Vamos resolver a equação $\tan x = 1$.

Sabemos que $\frac{\pi}{4}$ é a única solução da equação em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como a tangente tem período positivo mínimo π :

$\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



2. Consideremos a equação $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Para a resolvermos, reparemos que a única solução da equação em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é $-\frac{\pi}{3}$.

Assim, como a função tangente tem período positivo mínimo π :

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercícios

58 Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

58.1. $\tan(2x) = -1$

58.2. $3\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

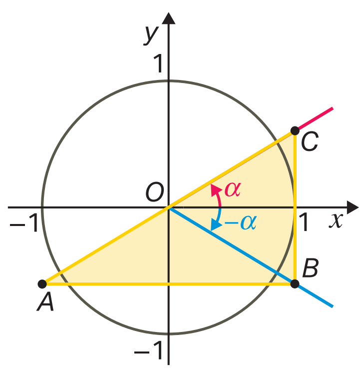
58.3. $\sqrt{3}\tan x = -1$

58.4. $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

59 Na figura estão representados, num referencial ortonormado xOy , a circunferência trigonométrica e um triângulo, $[ABC]$, retângulo em B .

Sabe-se que:

- os pontos B e C têm abcissa 1 e pertencem ao lado extremidade dos ângulos com lado origem Ox e amplitudes $-\alpha$ e α , respetivamente, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ponto A é o simétrico do ponto C em relação à origem do referencial.



Seja h a função que a cada α faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$.

59.1. Mostra que $h(\alpha) = 2\tan\alpha$, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

59.2. Determina o valor exato de $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

59.3. Resolve a equação $h(\alpha) = 2\sqrt{3}$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

Para aplicar

1 Resolve, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações.

1.1. $2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\sqrt{3}=0$

1.2. $\cos^2 x=\frac{3}{4}$

1.3. $3+\tan^2(2x)=0$

1.4. $(2\cos x+1)\left(\sqrt{3}\sin(2x)-1\right)=0$

1.5. $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

1.6. $\tan^2 x+1-2\tan x=0$

1.7. $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

1.8. $\cos(3x)+\cos x=0$

2 Exprime cada uma das seguintes expressões em função das razões trigonométricas de x.

2.1. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi-x)\cos(-x)$

2.2. $\cos(x-\pi)+2\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$

2.3. $\cos\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(-\pi-x)$

2.4. $\sin(-x)-\cos(-\pi-x)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

3 Indica a que quadrante pertence o ângulo x se:

3.1. $\sin(-x)>0 \ \wedge \ \sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)>0$

3.2. $\sin(x-\pi)>0 \ \wedge \ \cos(-\pi-x)>0$

3.3. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)>0 \ \wedge \ \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)<0$

4 Sabendo que $\cos x=-\frac{3}{4}$ e $x\in\left]-\frac{3\pi}{2},-\pi\right[$, determina o valor exato de:

4.1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-\pi)$

4.2. $\sin(-\pi-x)-2\cos(x+\pi)$

5 Considera as funções m e p, definidas por:

$$p(x)=2-\sin^2 x \ \text{ e } \ m(x)=4\sin x+2$$

5.1. Determina os zeros da função m.

5.2. Estuda a função p quanto à paridade.

5.3. Determina, em $[0, 2\pi[$, as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das funções p e m.

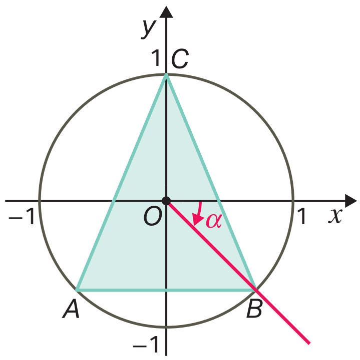
6 **Considera a função h definida por: $h(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\sin x}$**

6.1. Determina o domínio da função h.

6.2. Estuda a função h quanto à paridade.

6.3. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $h(x) - 1 = \dfrac{1}{\cos x}$.

7 **Na figura estão representados, em referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABC]$.**



Sabe-se que:

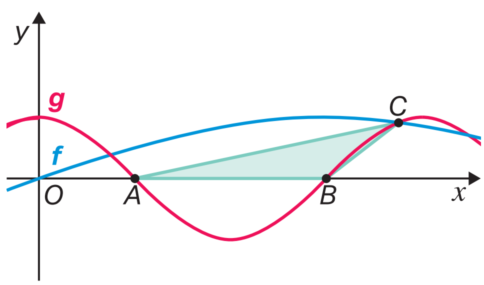
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e à circunferência trigonométrica;
- o ponto B pertence à circunferência trigonométrica e é tal que $\dot{O}B$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude α, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

7.1. Calcula a área do triângulo $[ABC]$ se $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

7.2. Sendo f a função que a cada α faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$, mostra que $f(\alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$.

8 **No referencial ortonormado xOy estão representadas as funções f e g definidas por:**

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \cos x$$



8.1. Determina as coordenadas dos pontos A e B, sabendo que pertencem ao gráfico da função g e ao eixo Ox.

8.2. Determina a abcissa do ponto C, ponto de interseção dos gráficos das funções f e g.

Teste

1 Consideremos o ângulo de amplitude $\alpha = -\frac{49\pi}{6}$.
Qual das proposições seguintes é falsa?

(A) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$

(B) $\tan(-\alpha) \times \sin(\pi - \alpha) < 0$

(C) $\cos(\alpha - \pi) \times \sin(\pi - \alpha) < 0$

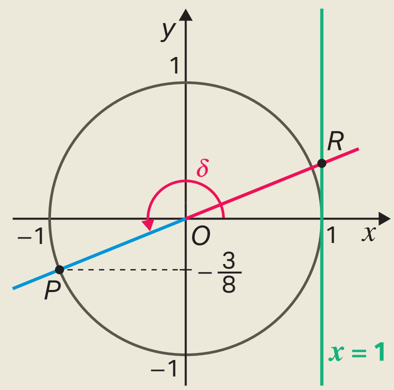
(D) $\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(-\alpha) < 0$

2 Considera o ângulo de amplitude δ representado na circunferência trigonométrica da figura.

Sabe-se que:

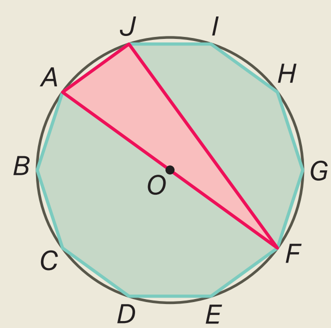
- o ponto P pertence à circunferência trigonométrica e tem ordenada $-\frac{3}{8}$;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta PO com a reta de equação $x = 1$.

Determina as coordenadas do ponto R.



3 Na figura encontram-se representados um decágono regular $[ABCDEFGHIJ]$ inscrito numa circunferência e o triângulo $[AFJ]$.

Sabe-se que o decágono tem 12 cm de perímetro.



3.1. Qual é a imagem do ponto E pela rotação de centro O e amplitude $-1188°$?

(A) Ponto H

(B) Ponto C

(C) Ponto B

(D) Ponto G

3.2. Recorrendo à lei dos senos, determina $\overline{JF}$.
Apresenta o resultado em centímetros, arredondado às centésimas.

3.3. Usando a lei dos cossenos, determina $\overline{AF}$, apresentando o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

4 Consideremos um ângulo de amplitude β tal que $\beta \in \left]-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right[$ e $\sin(-\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Determina o valor exato de $\cos(\pi + \beta) - 2\tan\beta$.

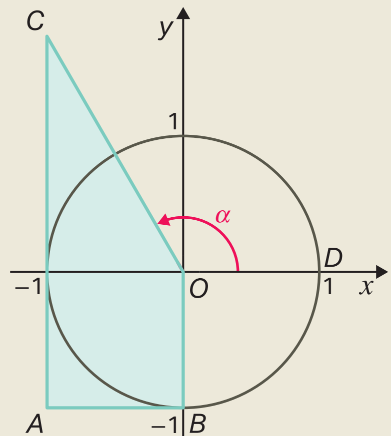
5 Considera a função f definida por $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\cos(\pi - 3x)$.

5.1. Mostra que $f(x) = -2\cos^2(3x)$.

5.2. Determina o período positivo mínimo da função f.

5.3. Indica a expressão geral das abcissas dos pontos em que a função f atinge o máximo.

6 Na figura estão representados, num referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo, $[ABOC]$.



Sabe-se que:

- o ponto B tem coordenadas $(0, -1)$;
- α é a amplitude do ângulo DOC, sendo $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;
- o ponto C é o ponto de interseção de $\dot{O}C$ com a reta de equação $x = -1$.

Seja g a função que a cada valor de α faz corresponder a área do trapézio $[ABOC]$.

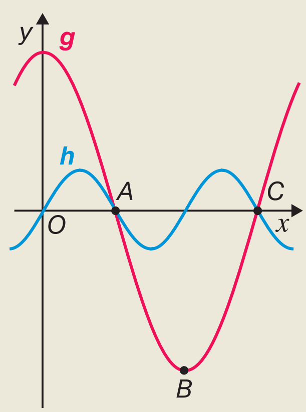
6.1. Mostra que $g(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\tan\alpha$.

6.2. Determina o valor exato da medida de área do trapézio retângulo $[ABOC]$ se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

6.3. Resolve a equação $g(\alpha) = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

7 As funções g e h, representadas graficamente no referencial ortonormado xOy da figura, são definidas por:

$$g(x) = 2\cos(2x) \text{ e } h(x) = \sin(2x)\cos(2x)$$



Sabe-se que:

- a função g atinge o valor mínimo no ponto B;
- os pontos A e C são zeros das funções g e h e pontos de interseção dos seus gráficos.

7.1. Determina, em $\mathbb{R}$, a expressão geral dos pontos de interseção dos gráficos das funções g e h.

7.2. Determina o contradomínio da função g e indica as coordenadas do ponto B.

2

Geometria analítica

2.1. Declive e inclinação de uma reta do plano

2.2. Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço

2.3. Equações de planos no espaço

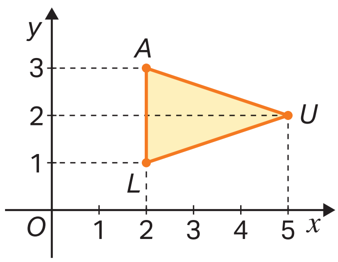
Manual Digital

Vídeos
Antes de começar: Geometria no plano

Antes de começar

Geometria no plano

1 No referencial cartesiano xOy da figura encontra-se representado o triângulo $[LUA]$.



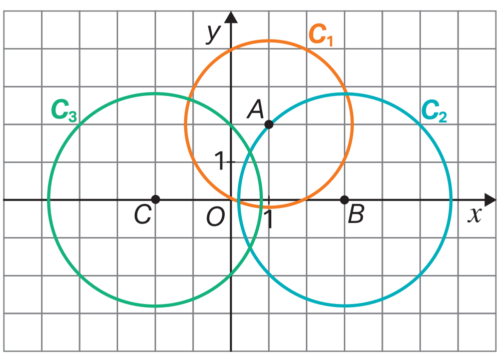
> **Recorda**
> Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.
> **Distância entre dois pontos**
> A distância entre os pontos A e B é dada por:
> $$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
> **Ponto médio de um segmento de reta**
> O ponto médio de $[AB]$ é dado por:
> $$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

1.1. Indica as coordenadas dos pontos L, U e A.

1.2. Determina a medida do perímetro do triângulo $[LUA]$.

1.3. Determina a medida do perímetro do triângulo $[OSA]$, sabendo que o ponto S é o ponto médio de $[LU]$. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

2 Na figura encontram-se representadas as circunferências C_1, C_2 e C_3, de centros A, B e C, respetivamente, num referencial cartesiano xOy.



> **Recorda**
> **Equação reduzida da circunferência**
> Uma circunferência de centro $C(x_C, y_C)$ e raio $r > 0$ é dada pela equação reduzida:
> $$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$
> **Inequação reduzida do círculo**
> Um círculo de centro $C(x_C, y_C)$ e raio r é dado pela inequação reduzida:
> $$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \leqslant r^2$$

Tendo em consideração os dados apresentados na figura, responde às seguintes questões.

2.1. Indica as coordenadas do centro de cada uma das circunferências e determina os seus raios.

2.2. Escreve a equação reduzida de cada uma das circunferências.

2.3. Escreve a equação reduzida da circunferência C_4, concêntrica com C_2 e que passa no ponto de coordenadas $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$.

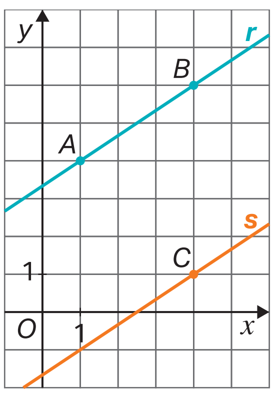
3 Considera a circunferência definida pela equação $(x-1)^2+(y+5)^2=16$ e o ponto A de coordenadas $(2\,,\,-3)$.

3.1. Indica as coordenadas do centro, C, e o raio da circunferência.

3.2. Escreve a equação reduzida da mediatriz de $[AC]$, sendo C o centro da circunferência dada.

> **Recorda**
>
> **Mediatriz de um segmento de reta**
>
> Dados os pontos $A(x_A\,,\,y_A)$ e $B(x_B\,,\,y_B)$, a mediatriz de $[AB]$ é dada por:
>
> $d(A\,,\,P)=d(B\,,\,P) \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$
>
> sendo $P(x\,,\,y)$ um ponto genérico da mediatriz.

4 Na figura seguinte encontram-se representadas as retas r e s.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à reta r;
- as retas r e s são estritamente paralelas;
- o ponto C pertence à reta s.

4.1. Determina uma equação vetorial da reta r.

4.2. Qual é o declive da reta r? E da reta s? Justifica a tua resposta.

4.3. Escreve a equação reduzida da reta s.

> **Recorda**
>
> **Coordenadas de um vetor como diferença entre as coordenadas de dois pontos**
>
> Sendo $A(x_A\,,\,y_A)$ e $B(x_B\,,\,y_B)$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:
>
> $$(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)$$
>
> **Equação vetorial da reta**
>
> A reta que passa no ponto $A(x_A\,,\,y_A)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}\,,\,y_{\vec{v}})$ é dada pela equação vetorial:
>
> $$(x\,,\,y)=(x_A\,,\,y_A)+k(x_{\vec{v}}\,,\,y_{\vec{v}}),\ k\in\mathbb{R}$$
>
> **Equação reduzida da reta**
>
> A reta que passa no ponto $B(0\,,\,b)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}\,,\,y_{\vec{v}})$, com $x_{\vec{v}}\,,\,y_{\vec{v}}\in\mathbb{R}$ e $x_{\vec{v}}\neq 0$, é dada pela equação reduzida:
>
> $$y=mx+b$$
>
> em que b é a ordenada na origem e $m=\dfrac{y_{\vec{v}}}{x_{\vec{v}}}$ é o declive da reta.

4.4. Determina as coordenadas dos pontos de interseção da reta s com os eixos coordenados.

4.5. Considera a reta t, perpendicular às retas dadas e que passa no ponto B. Determina a equação reduzida da reta t.

Manual Digital

Vídeos
Antes de começar: Geometria no espaço

Antes de começar

5 Considera as retas m e p definidas por:

$$m: 2x - y = 5 \quad \text{e} \quad p: (x, y) = (-1, 0) + k(2, -3),\ k \in \mathbb{R}$$

5.1. Escreve a equação reduzida das retas m e p.

5.2. Indica, justificando, a posição relativa entre as duas retas.

5.3. Determina as coordenadas do ponto A, ponto de interseção das retas m e p.

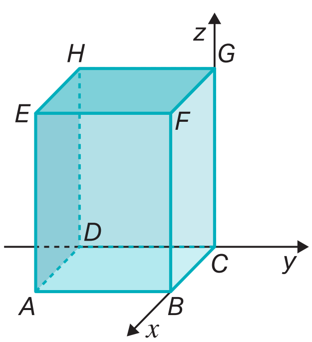
5.4. Escreve a equação reduzida da circunferência de centro A e que passa no ponto de interseção da reta p com o eixo das abcissas.

Geometria no espaço

6 Considera o prisma retangular representado no referencial ortonormado $Oxyz$.

As faces $[ABCD]$ e $[DCGH]$ pertencem aos planos coordenados xOy e yOz, respetivamente. O ponto E tem coordenadas $(4, -5, 8)$.

Sejam M e P os pontos médios de $[AC]$ e $[AH]$, respetivamente.



Recorda

Distância entre dois pontos

Dados os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, a distância entre os dois pontos é dada por:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Ponto médio de um segmento de reta

O ponto médio de $[AB]$ é dado por:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Equação vetorial da reta

A reta que contém o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ é dada pela equação vetorial:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}}),\ k \in \mathbb{R}$$

Equação reduzida da superfície esférica

Uma superfície esférica de centro $C(x_C, y_C, z_C)$ e raio r é dada pela equação reduzida:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

6.1. Indica as coordenadas dos vértices do prisma representado.

6.2. Determina o valor exato de $\overline{GA}$.

6.3. Escreve a equação vetorial da reta EB.

6.4. Determina o ponto de interseção da reta EM com o eixo Oz.

6.5. Determina as coordenadas do vetor $\vec{u}$, sabendo que $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{MD}$.

6.6. Escreve a equação reduzida da superfície esférica de centro P e medida de raio $\overline{EG}$.

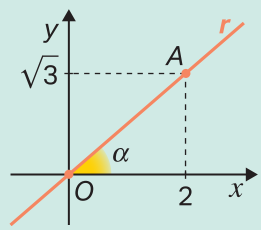
2 Geometria analítica

2.1. Declive e inclinação de uma reta do plano

2.1.1. Inclinação de uma reta do plano

Tarefa

1 No referencial xOy da figura encontra-se representada a reta r que passa nos pontos O e $A\left(2\,,\,\sqrt{3}\right)$.



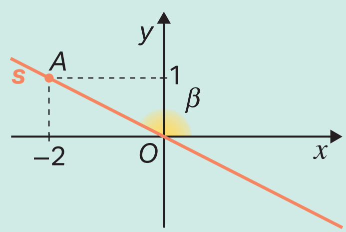
1.1. Determina o declive da reta r.

1.2. Determina $\tan\alpha$.

1.3. Indica o valor de α.

Nota: α é a amplitude do ângulo convexo cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta $\dot{O}A$.

2 No referencial ortonormado da figura está representada a reta s que passa na origem do referencial e no ponto A de coordenadas $(-2\,,\,1)$.
Determina o valor de β, amplitude do ângulo convexo cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta $\dot{O}A$.



Às amplitudes α e β da tarefa anterior chamamos **inclinação** das retas r e s, respetivamente.

Inclinação de uma reta

Consideremos uma reta r representada num referencial ortonormado xOy.

- Se a reta r é o eixo Ox, então a sua inclinação é nula.
- Se a reta r passa na origem do referencial e P é um ponto da reta r com ordenada positiva, então a inclinação corresponde à amplitude do ângulo cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta $\dot{O}P$.
- Se a reta r não passa na origem do referencial, então a sua inclinação é igual à inclinação da reta paralela a r que passa na origem do referencial.

Se α é a inclinação da reta r, então $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Manual Digital

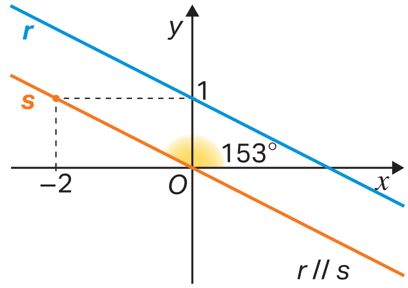
Vídeo
Inclinação e declive de uma reta

Exemplo

Consideremos as retas r e s representadas no referencial ortonormado da figura.

Como as retas r e s são paralelas, então têm a mesma inclinação.

Assim, a inclinação de r é igual a $153°$.

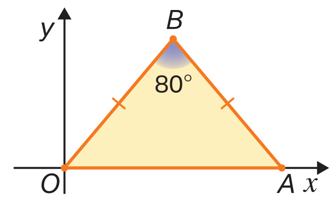


Exercícios

1 Na figura encontra-se representado um triângulo isósceles, $[OAB]$, num referencial ortonormado xOy.
Sabe-se que $A\hat{B}O = 80°$. Indica a inclinação da:

1.1. reta OA; **1.2.** reta OB;

1.3. reta AB.

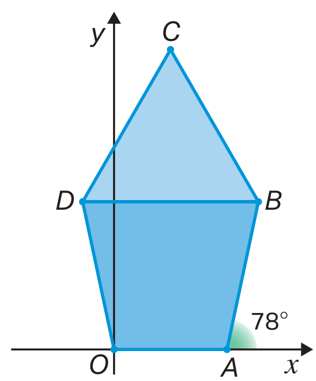


2 Na figura encontra-se representado um pentágono, $[OABCD]$, que pode ser decomposto no triângulo equilátero $[BCD]$ e no trapézio isósceles $[OABD]$.
A inclinação da reta AB é $78°$.
Determina a inclinação da:

2.1. reta DB;

2.2. reta OD;

2.3. reta DC.



2.1.2. Relação entre o declive e a inclinação de uma reta do plano

Consideremos uma reta r, não vertical, que passa na origem do referencial, de declive m e inclinação α, representada num referencial ortonormado xOy.

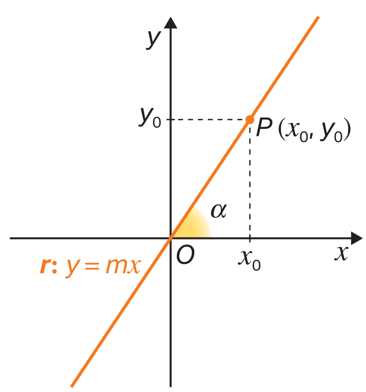
Consideremos um ponto $P(x_0, y_0)$, com $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \neq 0$, pertencente à reta r.

Como a reta r passa na origem do referencial, sabemos que $r: y = mx$.

$$m = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Sabemos também que $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$.

Assim, concluímos que $\tan \alpha = m$.



O **declive** de uma reta não vertical é igual à tangente da sua inclinação.

Exemplos

1. Seja s a reta de equação $y=\sqrt{3}\,x+1$.

Sabemos que a reta s é paralela à reta t de equação $y=\sqrt{3}x$.

Como $m_t=\sqrt{3}$, então $\tan\alpha=\sqrt{3}$, sendo α a inclinação da reta t.

Desta forma, e como $0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$, vem que $\alpha=60°$.

Como as retas s e t são paralelas, têm a mesma inclinação, $60°$.

2. Consideremos a reta r de inclinação $\alpha=45°$.

Sabendo que $P(-1\,,\,3)$ é um ponto da reta r, podemos determinar a equação reduzida dessa reta.

Sendo m o declive da reta r, $m=\tan 45°=1$.

Então, a equação reduzida da reta r é $y=x+b$, para um certo $b\in\mathbb{R}$.

Como o ponto P pertence à reta r:

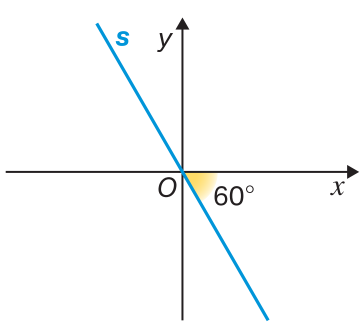
$3=-1+b \iff b=4$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y=x+4$.

3. Consideremos a reta p de equação $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$.

O declive da reta p é $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, logo a sua inclinação, α, com $0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$, é tal que $\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Então, a inclinação da reta p é $150°$.

4. No referencial cartesiano xOy da figura encontra-se representada a reta s.



Tendo em consideração os dados da figura, conseguimos determinar a equação reduzida da reta t, paralela à reta s e que passa no ponto $P(-2\,,\,-1)$.

Como as retas são paralelas, então têm a mesma inclinação, $180°-60°=120°$.

Então, o declive da reta t é $m=\tan 120°=-\sqrt{3}$.

A equação reduzida da reta t é $y=-\sqrt{3}\,x+b$, para um certo $b\in\mathbb{R}$.

Como o ponto P pertence à reta t: $-1=-\sqrt{3}\times(-2)+b \iff b=-1-2\sqrt{3}$

Assim, a equação reduzida da reta t é $y=-\sqrt{3}\,x-1-2\sqrt{3}$.

Exercícios

3 **Determina a inclinação da reta definida por cada uma das seguintes equações. Apresenta os resultados arredondados às centésimas do grau, se necessário.**

3.1. $(x, y)=(1, -3)+k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$

3.2. $y=\frac{1}{2}x-3$

3.3. $(x, y)=(\sqrt{2}, 1)+k(\sqrt{3}, 3), k \in \mathbb{R}$

3.4. $3y+\sqrt{3}x=6$

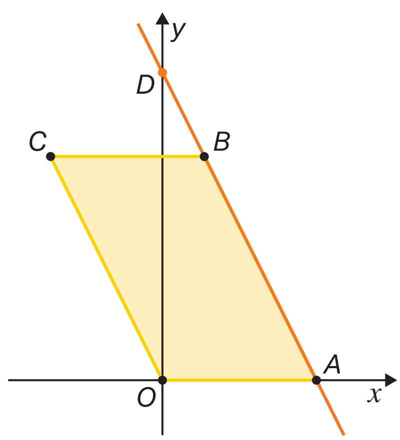
4 **Considera os pontos $L(\sqrt{2}, 1)$, $U(0, 2)$, $A(-1, 3)$ e $R(2, 1)$.**

4.1. Determina, em graus, a inclinação da reta RA.

4.2. Determina a inclinação da reta LU. Apresenta o resultado arredondado às décimas do grau.

4.3. Relativamente a uma reta t, sabe-se que a sua inclinação é $150°$. Determina a equação reduzida da reta t, sabendo que passa no ponto A.

5 **No referencial ortonormado da figura está representado o paralelogramo $[OABC]$.**



Sabe-se que:

- $C(-2, 4)$
- $D\left(0, \frac{11}{2}\right)$ é o ponto do eixo das ordenadas que pertence à reta BA.

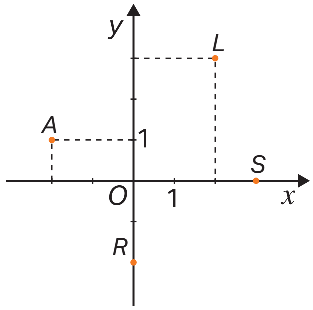
5.1. Determina a inclinação da reta CO. Apresenta o resultado arredondado às décimas do grau.

5.2. Escreve a equação reduzida da reta BA.

5.3. Determina a medida da área do paralelogramo $[OABC]$.

Para aplicar

1 **Considera os pontos S, O, L, A e R representados no referencial cartesiano xOy e a reta r definida por $y = -\sqrt{3}x - 1$.**



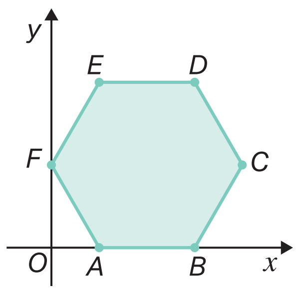
1.1. Determina a inclinação de cada uma das retas seguintes, apresentando os resultados em graus, arredondados às décimas.

a) *AO* **b)** *SO* **c)** *LS*
d) *AL* **e)** *RL* **f)** *RS*
g) *AR* **h)** *LO* **i)** *AS*

1.2. Calcula a inclinação da reta r em graus.

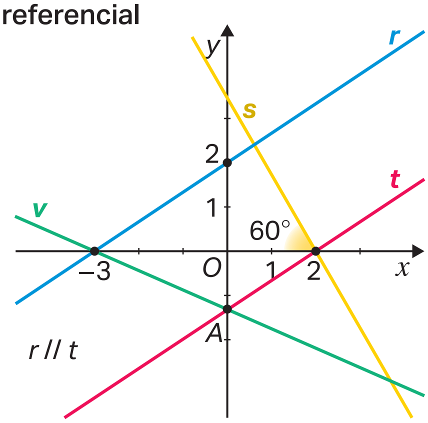
1.3. Sabe-se que uma reta s passa no ponto A e que as inclinações das retas r e s são amplitudes de ângulos suplementares.
Determina a equação reduzida da reta s.

2 **No referencial ortonormado da figura encontra-se representado um hexágono regular, $[ABCDEF]$.**
Os pontos A e B pertencem ao eixo das abcissas e o ponto F pertence ao eixo das ordenadas.
Determina a inclinação de cada uma das retas seguintes:



2.1. *AB* **2.2.** *FA* **2.3.** *CD*
2.4. *BC* **2.5.** *FE* **2.6.** *ED*

3 **Na figura encontram-se representadas, em referencial ortonormado, as retas r, s, t e v.**
Tendo em consideração os dados apresentados na figura, responde às seguintes questões:



3.1. Determina a inclinação da reta r.

3.2. Indica a inclinação das retas s e t.

3.3. Escreve a equação reduzida da reta t.

3.4. Determina as coordenadas do ponto A.

3.5. Determina a inclinação da reta v. Apresenta o resultado arredondado às décimas do grau, caso seja necessário.

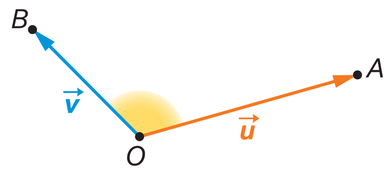
Manual Digital

Vídeo
Ângulo de vetores

2.2. Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço

2.2.1. Ângulo formado por dois vetores não nulos

O **ângulo formado por dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, é o ângulo convexo AOB, tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, e a sua amplitude representa-se por $(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v})$ ou $(\vec{v} \,\hat{,}\, \vec{u})$.

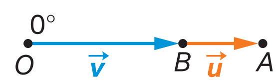


A amplitude do ângulo formado por dois vetores varia de $0°$ a $180°$.

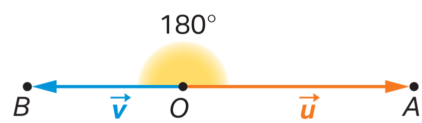
$$0° \leqslant (\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}) \leqslant 180°$$

Nota:
A amplitude do ângulo formado por dois vetores é independente do ponto de aplicação.

O ângulo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, é nulo se os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido.



O ângulo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, é raso se os vetores têm a mesma direção e sentidos contrários.

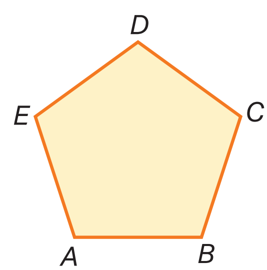


Exemplo

Consideremos o pentágono regular $[ABCDE]$ representado na figura.

Podemos concluir que:

- $(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AB}) = 0°$
- $(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{BA}) = 180°$
- $(\overrightarrow{EA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{ED}) = 108°$
- $(\overrightarrow{EA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{DE}) = 180° - 108° = 72°$
- $(\overrightarrow{EC} \,\hat{,}\, \overrightarrow{ED}) = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$



Exercícios

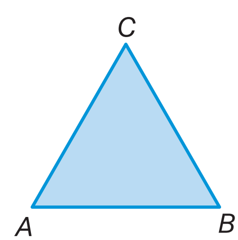
6 Considera o triângulo equilátero $[ABC]$ e indica, em graus, a amplitude:

6.1. $(\overrightarrow{AC} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC})$

6.2. $(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{BA})$

6.3. $(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC})$

6.4. $(\overrightarrow{AC} \,\hat{,}\, \overrightarrow{BC})$



7 Na figura encontra-se representado o quadrado $[CARO]$.
Sabendo que M é o ponto médio de $[AR]$, indica, em graus:

7.1. $\left(\overrightarrow{AR} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AM}\right)$

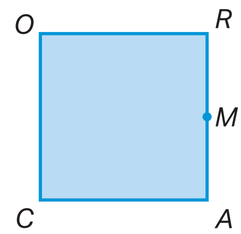
7.2. $\left(\overrightarrow{RA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{RO}\right)$

7.3. $\left(\overrightarrow{AM} \,\hat{,}\, \overrightarrow{CO}\right)$

7.4. $\left(\overrightarrow{CO} \,\hat{,}\, \overrightarrow{RA}\right)$

7.5. $\left(\overrightarrow{AO} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AR}\right)$

7.6. $\left(\overrightarrow{AO} \,\hat{,}\, \overrightarrow{RA}\right)$



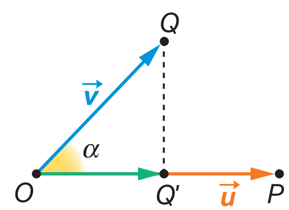
Manual Digital
Vídeo
Produto escalar de vetores

2.2.2. Produto escalar de dois vetores

Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo um deles o vetor nulo. O **produto escalar** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é igual a 0 $(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$.

Consideremos dois vetores, não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, aplicados no mesmo ponto, O.
Sejam $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' a projeção ortogonal do ponto Q sobre a reta OP e $\alpha = \left(\overrightarrow{OP} \,\hat{,}\, \overrightarrow{OQ}\right) = \left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right)$.

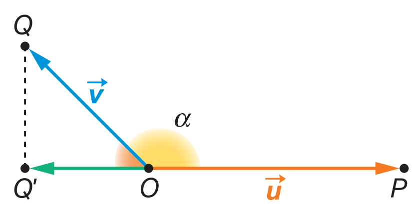
Se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ'}$ têm direção e sentido iguais, o **produto escalar** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP} \times \overline{OQ'}$.



- $\overline{OP} = \|\vec{u}\|$
- $\cos \alpha = \dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \overline{OQ'} = \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$

Logo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$.

Se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ'}$ têm igual direção, mas sentidos opostos, o **produto escalar** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overline{OP} \times \overline{OQ'}$.



- $\overline{OP} = \|\vec{u}\|$
- $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \overline{OQ'} = \|\vec{v}\| \times \cos(180° - \alpha) \Leftrightarrow \overline{OQ'} = -\|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

Logo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = = -\|\vec{u}\| \times (-\|\vec{v}\| \times \cos \alpha) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$.

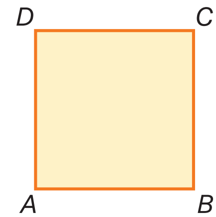
No caso geral:

Considerando dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é o **produto escalar** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- Se um dos vetores for nulo, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não nulos, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right)$.

Exemplos

1. Consideremos o quadrado $[ABCD]$, representado na figura, com 20 cm de perímetro.

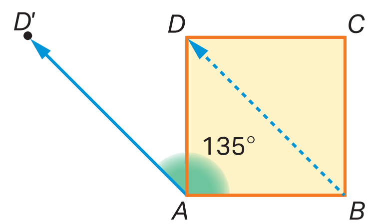


- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{CD}\right) =$
  $= 5 \times 5 \times \cos(180°) = -25$

- Podemos determinar o produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ por dois processos diferentes.

  - $\overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 50$
    Como $\overline{AC} > 0$:
    $\overline{AC} = \sqrt{50} \Leftrightarrow \overline{AC} = 5\sqrt{2}$
    $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = 5 \times 5\sqrt{2} \times \cos(45°) =$
    $= \dfrac{25\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 25$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB}$, pois o ponto B é a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta AB. Logo:
    $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = 5 \times 5 = 25$

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD'}\| \times \cos(135°) =$
  $= 5 \times 5\sqrt{2} \times \cos(180° - 45°) =$
  $= 5 \times 5\sqrt{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -25$



2. Consideremos dois vetores, não nulos, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, tais que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$.

Podemos determinar a amplitude $\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right)$ em graus.

Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right)$, então:

$$-3 = \sqrt{2} \times 3 \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como a amplitude de dois vetores varia entre $0°$ e $180°$, então:

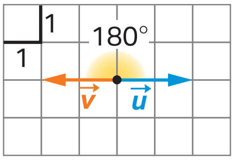
$$\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = 180° - 45° = 135°$$

Nota:
- Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo.
- Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso.

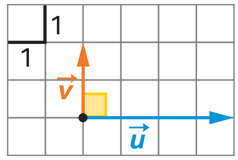
Exercícios

8 Em cada um dos casos seguintes, determina o valor exato de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

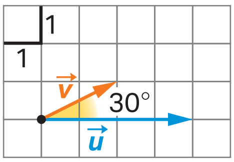
8.1.



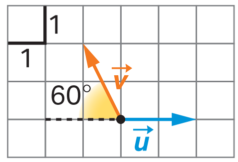
8.2.



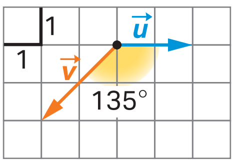
8.3.



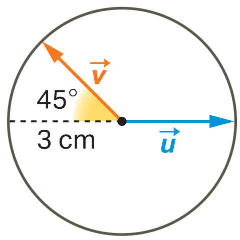
8.4.



8.5.



8.6.



9 Tendo em atenção as informações dadas, determina $(\vec{u} \hat{,} \vec{v})$ em graus. Sempre que necessário, apresenta o resultado arredondado às décimas.

9.1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

9.2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

9.3. $\|\vec{u}\| = \sqrt{8}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

10 O hexágono regular $[ABCDEF]$ da figura tem 18 unidades de perímetro. Determina:

10.1. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OC}$

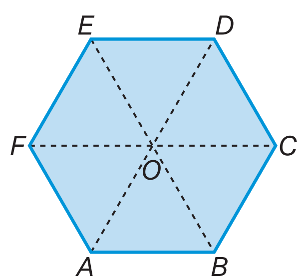
10.2. $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CF}$

10.3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

10.4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FA}$

10.5. $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{BA}$

10.6. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{FE}$

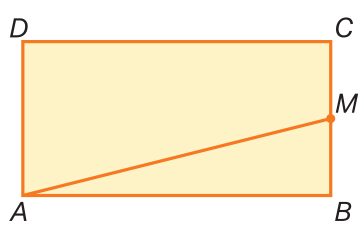


11 Na figura encontra-se representado um retângulo, $[ABCD]$, e o ponto M, ponto médio de $[BC]$. Sabendo que $\overline{AB} = 2\,\overline{BC}$, mostra que:

11.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4\,\overline{BC}^2$

11.2. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3\,\overline{BC}^2$

11.3. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = \dfrac{\overline{AB}^2}{16}$



Manual Digital

Vídeo
Vetores perpendiculares

Atividades
Propriedades do produto escalar: produto de um vetor por ele próprio

Propriedades do produto escalar: comutatividade

Propriedades do produto escalar: produto por um número real

2.2.3. Perpendicularidade entre vetores

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares se:

- um deles for nulo; ou
- sendo não nulos, forem vetores diretores de retas perpendiculares.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **perpendiculares** se e só se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Demonstração:

Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Se um dos vetores for nulo, sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, sendo o vetor nulo perpendicular a qualquer outro vetor.

Consideremos, agora, ambos os vetores não nulos.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \iff \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0$. Então, $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 90°$, uma vez que a amplitude do ângulo formado por dois vetores varia de $0°$ a $180°$. Logo, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.

Para demonstrar a implicação contrária, basta verificar que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, então $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 90°$. Logo, $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0$.

Assim, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 90° = 0$, isto é, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2.2.4. Propriedades do produto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Demonstração:

Se $\vec{u}$ for o vetor nulo, então $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ e $\|\vec{u}\| = 0$, logo $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|$.

Se $\vec{u}$ for um vetor não nulo, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0°) = \|\vec{u}\|^2$.

O produto escalar goza da propriedade comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Demonstração:

Se um dos vetores for nulo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

Se ambos os vetores forem não nulos, então:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, pois a multiplicação de números reais é comutativa e $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right)$.

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

Se um dos vetores for nulo ou $\lambda = 0$, então $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = 0$ e $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$, pelo que $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Se os vetores forem ambos não nulos e $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$, então o ângulo formado pelos vetores $\lambda\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual ao ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Assim:

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \|\lambda\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\lambda\vec{u}, \vec{v}}) = \lambda\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

No caso de os vetores serem não nulos e $\lambda \in \mathbb{R}^{-}$, $(\widehat{\lambda\vec{u}, \vec{v}}) = 180° - (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, logo:

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \|\lambda\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\lambda\vec{u}, \vec{v}}) = -\lambda\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left[-\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right] =$$

$$= \lambda\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Manual Digital

Atividade
Propriedades do produto escalar: distributividade

O produto escalar goza da propriedade distributiva em relação à adição de vetores:

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$$

Demonstração:

Consideremos três vetores não nulos, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, representados de tal forma que:

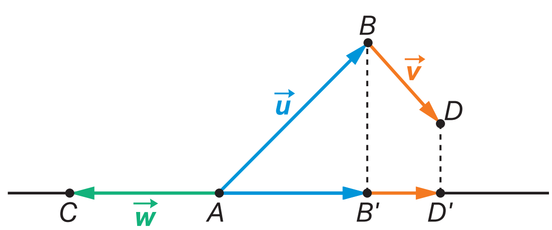
- $\vec{u}$ e $\vec{w}$ têm o mesmo ponto de aplicação, A, e pontos extremidade B e C, respetivamente;
- $\vec{v}$ tem ponto de aplicação B e ponto extremidade D.

As projeções ortogonais dos pontos B e D sobre a reta AC são os pontos B' e D', respetivamente. Assim, podemos concluir que:

$\vec{u}\cdot\vec{w} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overline{AB'} \times \overline{AC}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overline{B'D'} \times \overline{AC}$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overline{AD'} \times \overline{AC}$



De acordo com a figura: $\overline{AD'} = \overline{AB'} + \overline{B'D'}$

Assim, $-\overline{AD'} \times \overline{AC} = -(\overline{AB'} + \overline{B'D'}) \times \overline{AC} = -\overline{AB'} \times \overline{AC} - \overline{B'D'} \times \overline{AC}$.

Logo, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.

Exemplos

1. Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30°$, $\|\vec{u}\| = 2$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$.

Usando as propriedades do produto escalar, conseguimos determinar $(3\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}$.

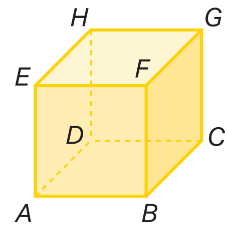
$$(3\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u} = 3\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{u} = 3\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$$

$$= 3 \times 2^2 + \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 3 = 15$$

Manual Digital

Vídeo
Produto escalar de vetores usando coordenadas

2. Na figura encontra-se representado um cubo com medida de aresta x, com $x \in \mathbb{R}^+$.



$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\right) =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} =$$

$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 0 + 0 + 0 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + 0 = 2x^2$$

Exercícios

12 Sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \sqrt{2}$, $(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}) = 120°$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$ e $\|\vec{v}\| = 4$, determina:

12.1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

12.2. $(-\vec{w}) \cdot \vec{u}$

12.3. $(\sqrt{2}\,\vec{u}) \cdot (3\vec{w})$

12.4. $(-\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{v})$

12.5. $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + \vec{w})$

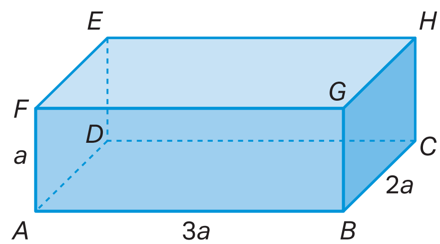
12.6. $(2\vec{w} + \vec{u}) \cdot 3\vec{u}$

13 Do prisma quadrangular reto da figura, sabe-se que $\overline{AF} = a$, $\overline{AB} = 3a$ e $\overline{BC} = 2a$, com $a \in \mathbb{R}^+$. Determina, em função de a:

13.1. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DH}$

13.2. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}$

13.3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$



2.2.5. Produto escalar de dois vetores a partir das suas coordenadas

Num referencial ortonormado $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, temos:

- $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

Consideremos os vetores $\vec{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ e $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(x_{\vec{u}}\,\vec{i} + y_{\vec{u}}\,\vec{j}\right) \cdot \left(x_{\vec{v}}\,\vec{i} + y_{\vec{v}}\,\vec{j}\right) =$$

$$= x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}\left(\vec{i} \cdot \vec{i}\right) + x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}}\left(\vec{i} \cdot \vec{j}\right) + y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}\left(\vec{i} \cdot \vec{j}\right) + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}}\left(\vec{j} \cdot \vec{j}\right) =$$

$$= x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}\left\|\vec{i}\right\|^2 + 0 + 0 + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}}\left\|\vec{j}\right\|^2 = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}}$$

No plano, o **produto escalar** dos vetores $\vec{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ e $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$, num referencial ortonormado xOy, é dado por: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}}$

De forma análoga, num referencial ortonormado do espaço $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, o produto escalar de dois vetores definidos pelas suas coordendadas é igual à soma dos produtos das suas abcissas, das suas ordenadas e das suas cotas.

Manual Digital

Atividade
Ângulo de dois vetores em referencial ortonormado

No espaço, o **produto escalar** dos vetores $\vec{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$, num referencial ortonormado $Oxyz$, é dado por: $x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}} \times z_{\vec{v}}$

Exemplos

1. Num referencial ortonormado xOy, consideremos os pontos $A(-2, 3)$, $B(5, -3)$ e $C(0, -2)$.

Para calcular $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, comecemos por determinar as coordenadas de cada um dos vetores.

Coordenadas de $\overrightarrow{AB}$: $(5, -3) - (-2, 3) = (7, -6)$

Coordenadas de $\overrightarrow{AC}$: $(0, -2) - (-2, 3) = (2, -5)$

Logo, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \times 2 + (-6) \times (-5) = 44$.

2. Num referencial ortonormado $Oxyz$, consideremos os vetores $\vec{u}\,(-2, 3, 1)$ e $\vec{v}\,(5, 0, -2)$. Então:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 5 + 3 \times 0 + 1 \times (-2) = -10 - 2 = -12$

3. Para determinar a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}\,(-2, 3)$ e $\vec{v}\,(5, -2)$ num referencial ortonormado xOy, podemos começar por calcular o seu produto escalar.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 5 + 3 \times (-2) = -16$

Logo, como $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right)$, temos que:

$-16 = \sqrt{13} \times \sqrt{29} \times \cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) \Leftrightarrow \dfrac{-16}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}} = \cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right)$

Com a funcionalidade $\mathbf{cos}^{-1}$ (ou **acos**) da calculadora, obtemos $\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) \approx 145°$.

Ângulo formado por dois vetores

Da definição de produto escalar entre dois vetores, vem que:

Dados dois vetores, não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Manual Digital

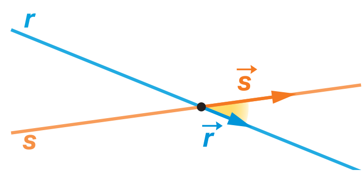
Vídeo
Ângulo de duas retas: resolução de um problema

Ângulo formado por duas retas

- Se duas retas são estritamente paralelas ou coincidentes, a amplitude do ângulo formado por elas é $0°$.
- Se duas retas são perpendiculares, a amplitude do ângulo formado por elas é $90°$.
- Se duas retas são oblíquas, consideramos a amplitude do menor dos ângulos formados por elas.

Nota:
No caso de duas retas no espaço serem não complanares, podemos considerar a projeção de uma delas num plano paralelo que contém a outra reta. Considera-se que o ângulo formado pelas duas retas iniciais é o ângulo formado por essas duas retas complanares.

A amplitude do ângulo formado por duas retas r e s representa-se por $\left(r \hat{,} s\right)$.



Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ os vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

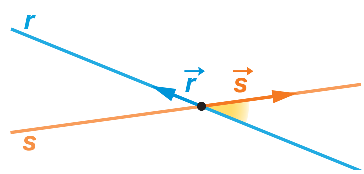
Se $0° \leqslant \left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right) \leqslant 90°$, então $\left(r \hat{,} s\right) = \left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right)$.

Logo, $\cos\left(r \hat{,} s\right) = \cos\left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right)$.

Se $90° < \left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right) \leqslant 180°$, então $\left(r \hat{,} s\right) = 180° - \left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right)$.

Logo, $\cos\left(r \hat{,} s\right) = \cos\left(180° - \left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right)\right) = -\cos\left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right)$.

Assim, concluímos que $\cos\left(r \hat{,} s\right) = \left|\cos\left(\vec{r} \hat{,} \vec{s}\right)\right|$.



Dadas duas retas r e s com vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, respetivamente:

$$\cos\left(r \hat{,} s\right) = \frac{\left|\vec{r} \cdot \vec{s}\right|}{\left\|\vec{r}\right\| \times \left\|\vec{s}\right\|}$$

A amplitude do ângulo formado por duas retas varia de $0°$ a $90°$.

$$0° \leqslant \left(r \hat{,} s\right) \leqslant 90°$$

Exemplos

1. Vamos determinar a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}\,(-2\,,\,3)$ e $\vec{v}\,(5\,,\,-3)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 5 + 3 \times (-3) = -10 - 9 = -19$

$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

$\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \dfrac{-19}{\sqrt{13} \times \sqrt{34}}$

Com a funcionalidade **cos**$^{-1}$ (ou **acos**) da calculadora, obtemos $\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) \approx 155°$.

2. Vejamos como determinar a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s, definidas por:

- $r: (x, y) = (1, -5) + k(-1, 1),\ k \in \mathbb{R}$
- $s: y = \frac{2}{3}x - 1$

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-1, 1)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(3, 2)$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = -1 \times 3 + 1 \times 2 = -3 + 2 = -1$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\|\vec{s}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\cos\left(r \hat{,} s\right) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}}$

Com a funcionalidade **cos**$^{-1}$ (ou **acos**) da calculadora, obtemos $\left(r \hat{,} s\right) \approx 79°$.

Exercícios

14 Considera, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(-2, 0)$, $B(-1, 3)$, $C\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ e $D\left(\frac{2}{5}, -1\right)$.

14.1. Calcula as normas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CD}$.

14.2. Determina, em graus, arredondada às décimas:

a) $\left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AC}\right)$ **b)** $\left(\overrightarrow{AD} \hat{,} \overrightarrow{AC}\right)$

c) $\left(\overrightarrow{BC} \hat{,} \overrightarrow{BD}\right)$ **d)** $\left(\overrightarrow{CA} \hat{,} \overrightarrow{CD}\right)$

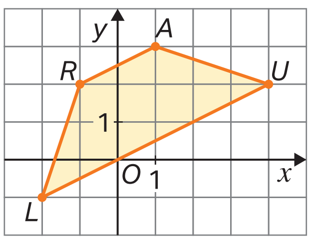
14.3. Determina a amplitude do ângulo formado pelas retas:

a) AD e BD **b)** AB e BC

15 **Num referencial ortonormado xOy, considera o triângulo $[SUL]$ tal que $S(-3, \sqrt{2})$, $U(2\sqrt{3}, 0)$ e $L(-1, 3\sqrt{2})$.**

Classifica o triângulo $[SUL]$ quanto aos ângulos.

16 **No referencial ortonormado xOy da figura está representado o trapézio isósceles $[LUAR]$.**



16.1. Indica as coordenadas dos vértices do trapézio representado.

16.2. Determina as amplitudes dos ângulos internos do trapézio $[LUAR]$.

16.3. Determina a amplitude, arredondada às décimas do grau, do ângulo formado pelas retas LR e AU.

17 Determina a amplitude, arredondada às unidades do grau, do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definidos, num referencial ortonormado $Oxyz$, por:

17.1. $\vec{u}(1, 3, 0)$ e $\vec{v}(1, 0, -2)$

17.2. $\vec{u}(0, 0, -5)$ e $\vec{v}(2, -3, 0)$

17.3. $\vec{u}(-3, -2, 1)$ e $\vec{v}(2, 1, 1)$

17.4. $\vec{u}(1, 0, 2)$ e $\vec{v}(-2, 1, -3)$

18 Em cada caso, determina a amplitude dos ângulos formados pelas duas retas. Apresenta o resultado arredondado às centésimas do grau.

18.1. $m: (x, y) = (1, -5) + k(3, 0), k \in \mathbb{R}$ e $p: y = -x + 2$

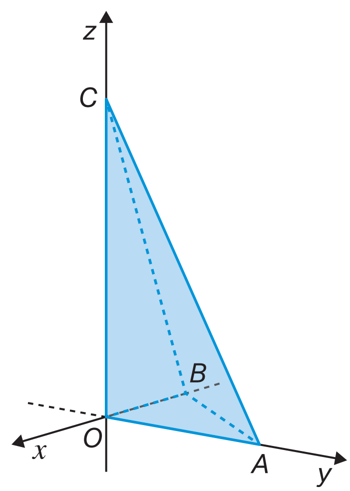
18.2. $r: 2y - 6x = 8$ e $s: y = -\frac{1}{5}x + 1$

18.3. $n: (x, y) = (0, 1) + k(-2, -3), k \in \mathbb{R}$ e $t: 3y - 3 = x$

19 No referencial ortonormado $Oxyz$ da figura encontra-se representada uma pirâmide triangular reta.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, 3, 0)$;
- o ponto B pertence ao semieixo negativo das abcissas;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo das cotas e ao plano de equação $z = 5$;
- as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são $(-2, -3, 0)$.



19.1. Indica as coordenadas dos vértices da pirâmide.

19.2. Determina as coordenadas e a norma do vetor:

a) $\overrightarrow{CA}$ **b)** $\overrightarrow{CB}$

19.3. Calcula:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ **b)** $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO}$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$

19.4. Determina a amplitude, em graus, arredondada às centésimas, do ângulo formado por:

a) $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CO}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BA}$

c) CB e CA **d)** AB e CB

2.2.6. Relação entre os declives de retas perpendiculares

Consideremos um plano munido de um referencial ortonormado xOy, em que se encontram representadas duas retas perpendiculares, não verticais, r e s.

Consideremos que as retas r e s são definidas pelas equações $y = mx + b$ e $y = m'x + b'$, respetivamente, com m, $m' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e b, $b' \in \mathbb{R}$.

Deste modo, os vetores $\vec{r}\,(1, m)$ e $\vec{s}\,(1, m')$ são vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

Assim:

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$$

No plano, duas retas r e s, com declives m e m', respetivamente, são perpendiculares se e só se o produto dos seus declives é igual a -1.

$$r \perp s \Leftrightarrow mm' = -1$$

Manual Digital

Vídeo
Retas perpendiculares e relação entre os declives

Exemplos

1. Vamos verificar se são perpendiculares as retas t e p, definidas por:
   - $t: (x, y) = (-1, 3) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$
   - $p: y = \frac{2}{3}x - 1$

   $m_t = \frac{1}{2}$, $m_p = \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq -1$.

   Logo, as retas t e p não são perpendiculares.

2. Consideremos a reta q definida por $(x, y) = (2, -3) + k(-2, 5), k \in \mathbb{R}$.

   Para encontrar a equação reduzida de uma reta r perpendicular à reta q e que passa no ponto $A(0, -2)$, começamos por determinar o declive da reta r.

   O declive da reta q é $-\frac{5}{2}$.

   Seja m o declive da reta r. Então:

   $$-\frac{5}{2} \times m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

   Assim, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = \frac{2}{5}x + b$.

   Como o ponto $A(0, -2)$ pertence à reta r:

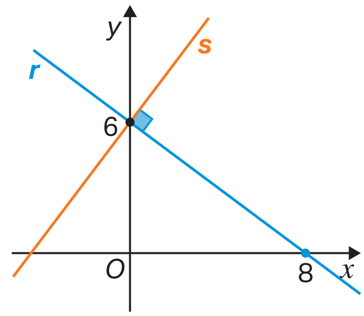
   $r: y = \frac{2}{5}x - 2$

3. No referencial ortonormado xOy da figura estão representadas duas retas perpendiculares, r e s, que se intersetam no ponto de coordenadas $(0, 6)$.

O ponto de coordenadas $(8, 0)$ pertence à reta r.

Vamos determinar a equação reduzida da reta s.

$m_s \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_s = -\dfrac{1}{m_r}$



Como $m_r = \dfrac{6-0}{0-8} = -\dfrac{3}{4}$, $m_s = -\dfrac{1}{-\dfrac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$. Assim, a reta s é definida por $y = \dfrac{4}{3}x + 6$.

Exercícios

20 Escreve a equação reduzida da reta r, sabendo que passa no ponto $P(1, -3)$ e é perpendicular à reta definida por:

20.1. $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$

20.2. $y - 2x = 5$

20.3. $(x, y) = (1, 3) + k(2, -6), k \in \mathbb{R}$

20.4. $(x, y) = (0, -2) + k(-3, 6), k \in \mathbb{R}$

21 Sabendo que as retas t e p são perpendiculares, determina o valor de a, com $a \in \mathbb{R}$, em cada um dos seguintes casos:

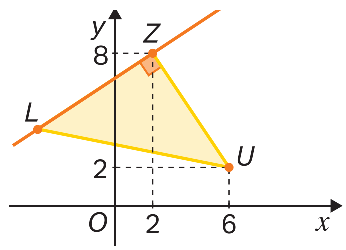
21.1. $t: y = -\dfrac{2}{3}x - 1$ e $p: y = ax + 2$

21.2. $t: (x, y) = (1, 3) + k(3a, 6), k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $p: y = -\dfrac{5}{3}x$

21.3. $t: (x, y) = (-1, 0) + k(-2, a), k \in \mathbb{R}$ e $p: (x, y) = (0, -3) + k(1, 3a - 4), k \in \mathbb{R}$

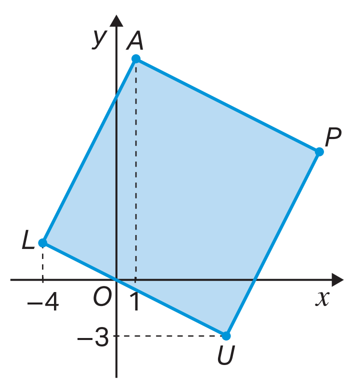
22 Na figura encontra-se representado, num referencial ortonormado xOy, o triângulo $[LUZ]$, retângulo em Z.

Tendo em consideração os dados da figura, determina a equação reduzida da reta LZ.



23 No referencial ortonormado xOy da figura encontra-se representado o quadrado $[LUPA]$. Sabe-se que:

- os pontos A e L têm abcissa 1 e -4, respetivamente;
- o ponto U tem ordenada -3;
- a equação reduzida da reta LU é $y = -\dfrac{1}{2}x$.



23.1. Determina as coordenadas dos pontos L e U.

23.2. Escreve a equação reduzida das retas LA e UP.

23.3. Determina a ordenada do ponto A e escreve a equação reduzida da reta AP.

2.2.7. Lugares geométricos no plano

Mediatriz do segmento de reta $[AB]$

Tarefa

Considera o segmento de reta $[AB]$ tal que $A(-3, 2)$ e $B(5, -2)$.
Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

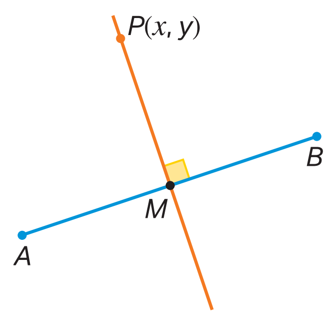
1. Determina as coordenadas do ponto M.
2. Escreve a equação reduzida da reta AB.
3. Usando o produto escalar de vetores, escreve a equação reduzida da reta perpendicular a $[AB]$ e que passa no ponto M.

Recorda:
A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é a reta perpendicular a $[AB]$ que passa no seu ponto médio.

Consideremos um ponto P pertencente à mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ e seja M o ponto médio desse segmento de reta.

Por definição de mediatriz de um segmento de reta, sabemos que é uma reta perpendicular a esse segmento de reta.

Assim: $[AB] \perp MP \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$



A **mediatriz do segmento de reta $[AB]$** é o conjunto dos pontos P, do plano, que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$$

sendo M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Exemplo

Para determinar a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(-1, 5)$ e $B(-2, -10)$, começamos por determinar as coordenadas do ponto médio, M, de $[AB]$.

$$M\left(\frac{-1+(-2)}{2}, \frac{5+(-10)}{2}\right) = M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

Coordenadas de $\overrightarrow{AB}$: $(-2, -10) - (-1, 5) = (-1, -15)$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Coordenadas de $\overrightarrow{MP}$: $(x, y)-\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)=\left(x+\frac{3}{2}, y+\frac{5}{2}\right)$

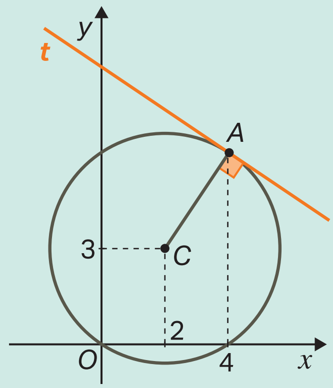
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP}=0 \Leftrightarrow -x-\frac{3}{2}-15y-\frac{75}{2}=0 \Leftrightarrow -15y=x+39 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{x}{15}-\frac{39}{15} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{15}x-\frac{13}{5}$

Reta tangente a uma circunferência num ponto

Tarefa

Na figura estão representadas a circunferência de centro $C(2, 3)$ e que passa na origem do referencial e a reta t, tangente à circunferência no ponto A de abcissa 4.



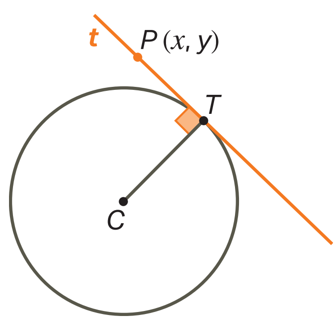
1. Escreve a equação reduzida da circunferência representada.
2. Determina a ordenada do ponto A.
3. Qual é o declive da reta CA?
4. Usando o produto escalar de vetores, escreve a equação reduzida da reta t.

Recorda:
Qualquer reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Consideremos um ponto P pertencente à reta tangente à circunferência de centro C no ponto T (ponto de tangência).

Como já vimos, a reta t é perpendicular ao segmento de reta $[CT]$ no ponto de tangência, T.

Assim: $\overrightarrow{CT} \perp \overrightarrow{TP} \Leftrightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP}=0$



A **reta tangente a uma circunferência de centro C no ponto T** (ponto de tangência) é o conjunto dos pontos P, do plano, que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP}=0$$

Exemplo

Vamos determinar a equação reduzida da reta tangente à circunferência definida por $(x-1)^2+(y+2)^2=26$ no ponto $T(2\,,\,3)$.

Sabemos que o centro da circunferência é o ponto $C(1\,,\,-2)$.

Coordenadas de $\overrightarrow{CT}$: $(2\,,\,3)-(1\,,\,-2)=(1\,,\,5)$

Seja $P(x\,,\,y)$ um ponto qualquer da reta tangente.

Coordenadas de $\overrightarrow{TP}$: $(x\,,\,y)-(2\,,\,3)=(x-2\,,\,y-3)$

Assim: $\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-2)+5\times(y-3)=0 \Leftrightarrow x-2+5y-15=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5y=-x+17 \Leftrightarrow y=-\dfrac{x}{5}+\dfrac{17}{5}$

Circunferência de diâmetro $[AB]$

Tarefa

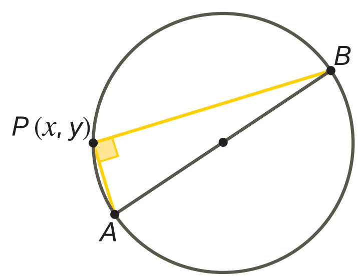
Considera a circunferência de diâmetro $[AB]$, tal que $A(-3\,,\,-4)$ e $B(5\,,\,-2)$.

1. **Escreve a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$.**
2. **Determina a ordenada do ponto P, sabendo que pertence à circunferência, tem abcissa 0 e a sua ordenada é positiva.**
3. **Mostra que as retas AP e PB são perpendiculares.**

Recorda:
Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

Seja P um ponto pertencente a uma circunferência de diâmetro $[AB]$.

Como já recordámos, o ângulo APB é um ângulo reto, qualquer que seja o ponto P da circunferência considerado, diferente de A e de B. Por outro lado, se o ponto P coincidir com A ou com B, então $\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{BP}=\vec{0}$, respetivamente.



Assim: $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

A **circunferência de diâmetro $[AB]$** é o conjunto dos pontos P, do plano, que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

Manual Digital

Vídeo
Conexão entre o produto escalar e lugares geométricos no plano

Exemplo

Vamos determinar a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ tal que $A(2\,,\,-1)$ e $B(1\,,\,3)$.

Seja $P(x\,,\,y)$ um ponto qualquer da circunferência.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2\,,\,y+1)\cdot(x-1\,,\,y-3) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2 - 3x + 2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{17}{4}$$

Exercícios

24 Em cada caso, determina a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[PQ]$, usando o produto escalar.

24.1. $P(0\,,\,2)$ e $Q(3\,,\,0)$

24.2. $P(-5\,,\,1)$ e $Q(3\,,\,7)$

24.3. $P(3\,,\,-2)$ e $Q(-5\,,\,0)$

24.4. $P(1\,,\,3)$ e $Q(-2\,,\,6)$

25 Usando o produto escalar, escreve a equação reduzida da reta tangente, no ponto de abcissa 1, à circunferência definida por:

25.1. $x^2 + (y-5)^2 = 9$ no ponto de abcissa 3;

25.2. $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 16$ no ponto de coordenadas $(-1\,,\,1)$;

25.3. $(x+3)^2 + y^2 = 25$ no ponto de coordenadas $(0\,,\,4)$;

25.4. $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 64$ no ponto de coordenadas $(-6\,,\,10)$.

26 Recorrendo ao produto escalar, determina a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[RS]$, sendo:

26.1. $R(0\,,\,-3)$ e $S(2\,,\,1)$

26.2. $R(-1\,,\,2)$ e $S(5\,,\,0)$

26.3. $R(-1\,,\,3)$ e $S(5\,,\,4)$

26.4. $R(2\,,\,5)$ e $S(-4\,,\,3)$

27 Considera os pontos $A(3\,,\,-6)$, $B(-5\,,\,2)$ e seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.
Identifica o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição apresentada em cada caso e escreve a respetiva equação que o define.

27.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

27.2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

27.3. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

27.4. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

27.5. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$

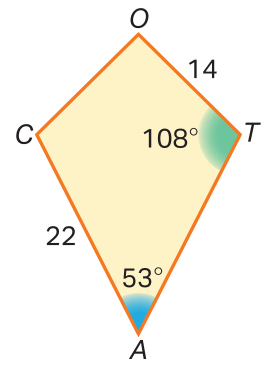
27.6. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

Para aplicar

1 Na figura encontra-se representado um papagaio, $[CATO]$, tal que:

$T\hat{A}C = 53°$, $O\hat{T}A = 108°$, $\overline{CA} = 22$ e $\overline{TO} = 14$

Determina o valor, arredondado às décimas, de:



1.1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AT}$

1.2. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AT}$

1.3. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO}$

1.4. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OT}$

1.5. $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{OC}$

1.6. $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{OT}$

2 Determina o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que:

2.1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e $(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) = 90°$

2.2. $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) = 120°$

2.3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{3}$ e $(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) = 150°$

2.4. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ e $(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) = 135°$

3 Determina a amplitude, arredondada às décimas do grau, do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que:

3.1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \frac{5}{2}$

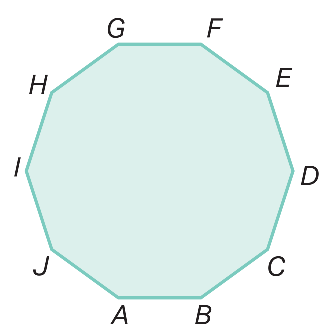
3.2. $\|\vec{u}\| = 5\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 10$

3.3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ e $\vec{u} \,.\, \vec{v} = -2$

3.4. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{3}$ e $\vec{u} \,.\, \vec{v} = -\frac{3}{2}$

4 Na figura ao lado encontra-se representado um decágono regular.

Indica, justificando, o valor lógico (verdadeiro ou falso) das seguintes afirmações:



4.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} > 0$

4.2. $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{HI} > 0$

4.3. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HG} < 0$

4.4. $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{DE} > 0$

4.5. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$

4.6. $\overrightarrow{JF} \cdot \overrightarrow{FC} > 0$

Para aplicar

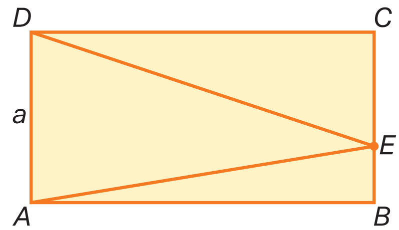
5 Sabendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e $(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) = 45°$, determina:

5.1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **5.2.** $\vec{v} \cdot \vec{v}$ **5.3.** $\vec{u} \cdot \vec{u}$

5.4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ **5.5.** $-\vec{u} \cdot (2\vec{v})$ **5.6.** $-\vec{v} \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

6 Na figura encontra-se representado um retângulo, $[ABCD]$, tal que:

- $\overline{AD} = a$, com $a \in \mathbb{R}^+$
- $\overline{AB} = 2\overline{AD}$
- $\overline{BE} = \dfrac{\overline{AD}}{3}$



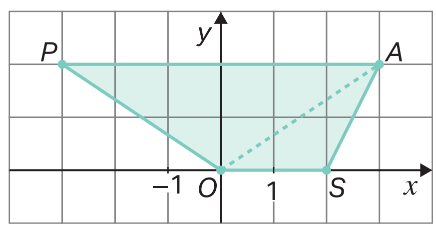
Mostra que:

6.1. $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{ED} = \dfrac{2a^2}{9}$ **6.2.** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4a^2$ **6.3.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = \dfrac{34a^2}{9}$

7 Considera os pontos $A(-1, 5, 2)$, $B(3, 0, -1)$, $C(-3, 1, -5)$ e $D(0, -2, 3)$, definidos num referencial ortonormado do espaço.
Determina a amplitude, arredondada às décimas do grau, do ângulo formado pelos vetores:

7.1. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ **7.2.** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ **7.3.** $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$

8 No referencial ortonormado da figura está representado o trapézio escaleno $[SAPO]$.



8.1. Determina as coordenadas e as normas dos vetores $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PO}$.

8.2. Usando o produto escalar, determina, em graus, as amplitudes dos ângulos internos do trapézio. Apresenta os resultados arredondados às centésimas.

8.3. Classifica o triângulo $[OAP]$ quanto à amplitude dos ângulos. Justifica a tua resposta.

9 Determina o valor de k, com $k \in \mathbb{R}$, sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.

9.1. $\vec{u}(2, 3k-1)$ e $\vec{v}(-1, 2)$ **9.2.** $\vec{u}(k^2, k)$ e $\vec{v}(-1, 4)$

9.3. $\vec{u}(2k, k-1)$ e $\vec{v}(-k, 0)$

10 **Determina k, com $k \in \mathbb{R}$, sabendo que o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}(3k, k+1)$ e $\vec{v}(1, k)$ é obtuso.**

11 **Determina a amplitude, arredondada às centésimas do grau, do ângulo formado pelas retas:**

11.1. $r: (x, y) = (-1, 2) + k(2, -3), k \in \mathbb{R}$ e
$s: (x, y) = (0, \sqrt{3}) + k(1, 5), k \in \mathbb{R}$

11.2. $m: (x, y) = (1, \sqrt{2}) + k(0, 2), k \in \mathbb{R}$ e $t: y = -x + 3$

11.3. $p: y = \frac{2}{3}x + 1$ e $q: 2y + x = 5$

12 **Considera, no plano, o vetor $\vec{v}(-1, 4)$, o ponto $A(-1, 5)$ e a reta r definida por $y = -\frac{x}{2} + 5$.**

12.1. Escreve a equação reduzida da reta t, que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\vec{v}$.

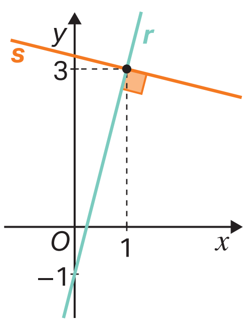
12.2. Escreve a equação reduzida da reta s, perpendicular à reta r e que passa no ponto A.

12.3. Determina a amplitude do ângulo formado pelas retas r e t. Apresenta o resultado arredondado às décimas do grau.

13 **No referencial ortonormado xOy da figura, estão representadas as retas perpendiculares r e s, que se intersetam no ponto de coordenadas $(1, 3)$.**

A reta r é definida por $y - 4x + 1 = 0$.

Escreve a equação reduzida da reta s.



14 **Num referencial ortonormado xOy, considera os pontos $X(-3, 2)$, $P(1, 2)$ e $T(3, -1)$.**

14.1. Recorrendo ao produto escalar de vetores, escreve:

a) a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[PT]$;

b) a equação vetorial da reta tangente à circunferência, definida em **a)**, no ponto T;

c) a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[XP]$.

14.2. Determina a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas retas XP e PT. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Para aplicar

15 **No plano, considera a circunferência C de equação $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ e a reta r definida por $2x - y = 3$.**

15.1. Mostra que o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(1, -2)$ e o raio é 2.

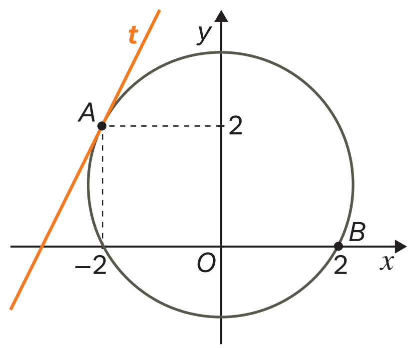
15.2. Determina a equação reduzida da reta t, tangente à circunferência C no ponto $T(-1, -2)$.

15.3. Verifica se as retas r e t são perpendiculares.

15.4. Determina o(s) ponto(s) de interseção da reta r com a circunferência C.

16 **Na figura, no referencial ortonormado xOy, estão representadas a circunferência de diâmetro $[AB]$ e a reta t, tangente à circunferência no ponto A.**

Sabe-se que $A(-2, 2)$ e $B(2, 0)$.



16.1. Determina a equação reduzida da circunferência representada.

16.2. Escreve a equação reduzida da reta t e verifica se é perpendicular à reta r de equação $2y + x = 6$.

17 **A reta de equação $y = -2x + 1$ é tangente a uma circunferência de centro $C(0, -1)$ num ponto A.**

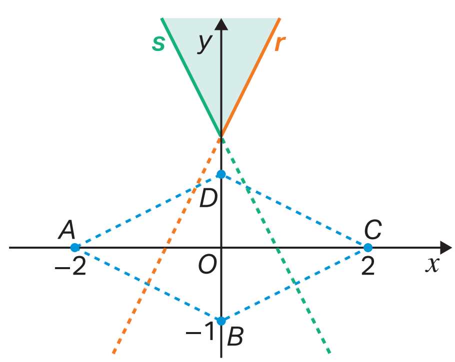
17.1. Determina a equação reduzida da reta que passa nos pontos A e C.

17.2. Determina as coordenadas do ponto A.

18 **No referencial ortonormado xOy da figura encontram-se representados o losango $[ABCD]$ e as retas r e s, mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.**

Os pontos A e C têm abcissas -2 e 2, respetivamente, e o ponto B tem ordenada -1.

Define a região colorida da figura através de condições.



2.3. Equações de planos no espaço

Manual Digital

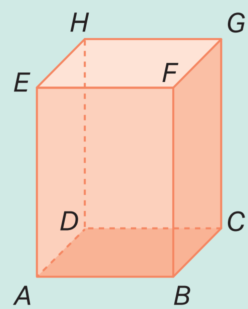
Vídeo
Vetor normal a um plano

2.3.1. Vetores normais a um plano

Como sabemos, uma reta é perpendicular a um plano num ponto se for perpendicular a duas retas do plano concorrentes no referido ponto.

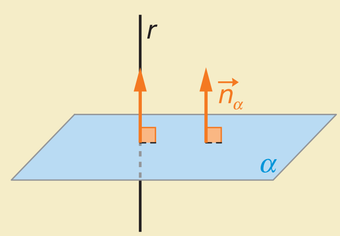
Tarefa

Na figura encontra-se representado um prisma quadrangular reto.
Usando letras da figura, indica:



1. três retas perpendiculares ao plano ABC;
2. a reta perpendicular ao plano EFG no ponto H;
3. duas retas contidas no plano EFG e que sejam perpendiculares à reta AE no ponto E.

Um **vetor** diz-se **normal** a um plano se for um vetor nulo ou se as retas de que é vetor diretor forem perpendiculares a esse plano.



2.3.2. Equação cartesiana do plano

Consideremos, no espaço, um plano α e um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ que lhe pertence. Sendo $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$ um vetor não nulo normal a α e $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano α, vem que $\vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

Coordenadas de $\overrightarrow{AP}$: $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Logo, a **equação cartesiana** $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ define o único plano α que passa no ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e é normal ao vetor $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$.

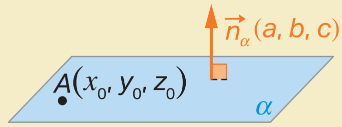
Procedendo aos cálculos de simplificação, obtemos a equação cartesiana $ax + by + cz + d = 0$, em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Manual Digital

Vídeo
Equação cartesiana de um plano

Seja $A\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ um ponto de um plano α e $\vec{n}_\alpha(a\,,\,b\,,\,c)$ um vetor normal a α.
O plano α pode ser representado pelas **equações cartesianas**:

- $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$
- $ax + by + cz + d = 0$



Exemplos

1. Consideremos, no espaço, o plano β, que passa no ponto $A\,(2\,,\,-3\,,\,1)$, e o vetor $\vec{v} = (1\,,\,-2\,,\,5)$, normal ao plano β.

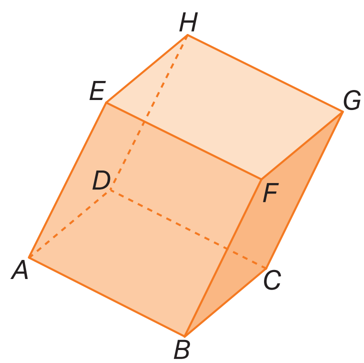
Seja $P\,(x\,,\,y\,,\,z)$ um ponto qualquer do plano β. Sabemos que $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

Coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$: $(x - 2\,,\,y + 3\,,\,z - 1)$

Logo: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0 \iff x - 2 - 2y - 6 + 5z - 5 = 0 \iff x - 2y + 5z - 13 = 0$

Assim, o plano β é definido pela equação cartesiana $x - 2y + 5z - 13 = 0$.

2. Na figura encontra-se representado um cubo.



Em relação a um referencial ortonormado, sabe-se que $B\,(1\,,\,3\,,\,2)$ e $F\,(2\,,\,4\,,\,6)$.

O vetor $\overrightarrow{BF}\,(1\,,\,1\,,\,4)$ é normal ao plano EFG e o ponto F pertence ao plano EFG.

Sendo $P\,(x\,,\,y\,,\,z)$ um ponto qualquer do plano EFG, vem que $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FP} = 0$.

Coordenadas de $\overrightarrow{FP}$: $(x - 2\,,\,y - 4\,,\,z - 6)$

Logo: $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FP} = 0 \iff x - 2 + y - 4 + 4z - 24 = 0 \iff x + y + 4z - 30 = 0$

Assim, uma equação cartesiana do plano EFG é: $x + y + 4z - 30 = 0$

Exercícios

28 **Considera, num referencial ortonormado do espaço, o ponto $A\,(-1\,,\,5\,,\,2)$ pertencente a um plano δ e o vetor $\vec{v}\,(-1\,,\,3\,,\,-1)$, normal a δ.**

28.1. Verifica se cada um dos seguintes pontos pertence ao plano δ.

a) $P\,(0\,,\,3\,,\,-1)$ **b)** $Q\,(2\,,\,3\,,\,-7)$ **c)** $R\,(0\,,\,0\,,\,-1)$

28.2. Determina k, com $k \in \mathbb{R}$, tal que o ponto $T\,(-2\,,\,3k\,,\,k)$ pertence ao plano δ.

29 **Representa através de uma equação cartesiana o plano α, que passa no ponto A e que admite $\vec{u}$ como vetor normal, sendo:**

29.1. $A(-2, 1, -1)$ e $\vec{u}(1, 0, -3)$

29.2. $A(2, -3, 0)$ e $\vec{u}(-3, 1, 2)$

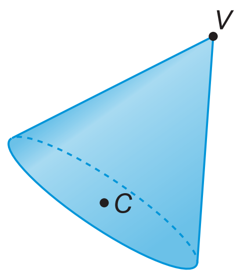
29.3. $A(1, -1, 2)$ e $\vec{u}(-2, 1, 3)$

30 **Considera, num referencial ortonormado, o plano α definido pela equação cartesiana $2x - y + 3z - 1 = 0$.**

30.1. Indica as coordenadas do vetor normal ao plano α.

30.2. Determina k, com $k \in \mathbb{R}$, sabendo que o ponto $T(2k, 1, -k)$ pertence ao plano α.

31 **Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, o cone reto da figura tem vértice $V(-3, 2, 12)$ e o centro da sua base é o ponto $C(-1, -1, 8)$.**
Determina uma equação cartesiana do plano que contém a base do cone.



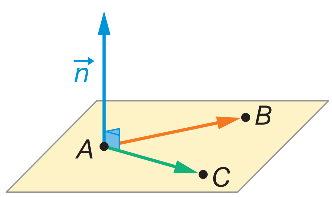
Equação cartesiana de um plano definido por três pontos não colineares

A partir de três pontos A, B e C, não colineares, de um plano α, conseguimos determinar a equação cartesiana desse plano.

Para tal, começamos por determinar os vetores diretores de duas retas concorrentes desse plano, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Um vetor $\vec{n}$, não nulo, é normal ao plano ABC se:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \ \wedge \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$



Deste modo, será possível determinar as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Conhecendo as coordenadas de um ponto do plano e de um vetor normal a esse plano, será possível obter uma equação cartesiana que o defina.

Exemplo

Num dado referencial ortonormado do espaço, consideremos os pontos $A(0, -3, 1)$, $B(-2, 0, 1)$ e $C(0, 3, 0)$.

Os vetores $\overrightarrow{AB}(-2, 3, 0)$ e $\overrightarrow{BC}(2, 3, -1)$ são não colineares, logo os pontos A, B e C definem um plano.

Sendo $\vec{n}(x_{\vec{n}}, y_{\vec{n}}, z_{\vec{n}})$ um vetor normal ao plano ABC, vem que:

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0$

Então:

$$\begin{cases} -2x_{\vec{n}} + 3y_{\vec{n}} = 0 \\ 2x_{\vec{n}} + 3y_{\vec{n}} - z_{\vec{n}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{\vec{n}} = \frac{2}{3}x_{\vec{n}} \\ 2x_{\vec{n}} + 3 \times \frac{2}{3}x_{\vec{n}} - z_{\vec{n}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{\vec{n}} = \frac{2x_{\vec{n}}}{3} \\ z_{\vec{n}} = 4x_{\vec{n}} \end{cases}, \; x_n \in \mathbb{R}$$

Por exemplo, se $x_{\vec{n}} = 3$, então: $\begin{cases} y_{\vec{n}} = 2 \\ z_{\vec{n}} = 12 \end{cases}$

Logo, $\vec{n}(3, 2, 12)$.

Uma equação cartesiana do plano ABC é do tipo $3x + 2y + 12z + d = 0$.

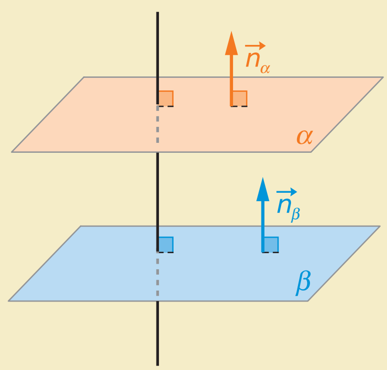
Como $C(0, 3, 0) \in ABC$, então: $3 \times 0 + 2 \times 3 + 12 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Logo, uma equação cartesiana do plano ABC é: $3x + 2y + 12z - 6 = 0$

2.3.3. Relação entre a posição relativa de dois planos e os respetivos vetores normais

Planos paralelos

Dados dois planos α e β, com vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$, respetivamente, os planos α e β são **estritamente paralelos** ou **coincidentes** se e só se $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares.



Se os planos α e β são paralelos, então sabemos que qualquer reta perpendicular a um dos planos também é perpendicular ao outro.

Desta forma, qualquer reta perpendicular considerada terá como vetor diretor um vetor colinear com $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$. Logo, os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares.

> **Nota:**
> Dados diversos planos paralelos, qualquer reta perpendicular a um dos planos é perpendicular a todos os outros planos.

Por outro lado, se os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares, então qualquer reta perpendicular ao plano α tem como vetor diretor um vetor colinear com $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$. Assim, essa reta também é perpendicular ao plano β.

Logo, sendo os planos α e β perpendiculares à mesma reta, então α e β são paralelos.

Exemplos

1. Vamos determinar uma equação cartesiana do plano estritamente paralelo ao plano de equação $x - y - 3z + 2 = 0$ e que passa no ponto $P(2, 1, -3)$.

Como os planos são paralelos, então admitem vetores normais colineares. Em particular, admitem o mesmo vetor normal.

Então, a equação do referido plano é da forma $x - y - 3z + d = 0$.

Como o ponto P pertence ao plano:

$2 - 1 - 3 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 2 - 1 + 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$.

Logo, uma equação cartesiana do plano é:

$x - y - 3z - 10 = 0$

2. Consideremos os planos α e β definidos por:

$$\alpha: 3x - y + z = -1 \text{ e } \beta: y - z - 3x - 3 = 0$$

- Para saber se os planos α e β são paralelos, basta verificar se os vetores $\vec{n}_\alpha(3, -1, 1)$ e $\vec{n}_\beta(-3, 1, -1)$, normais aos planos α e β, respetivamente, são colineares.

  Como $\frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$, então os vetores são colineares. Logo, os planos α e β são paralelos.

- Se pretendermos saber se os planos são estritamente paralelos, para além de verificar se os vetores normais são colineares, basta aferir que há um ponto que pertence a um plano e não pertence ao outro.

  Por exemplo, o ponto de coordenadas $(0, 2, 1)$ pertence ao plano α. Vejamos se pertence ao plano β.

  $2 - 1 - 3 \times 0 - 3 = -2$

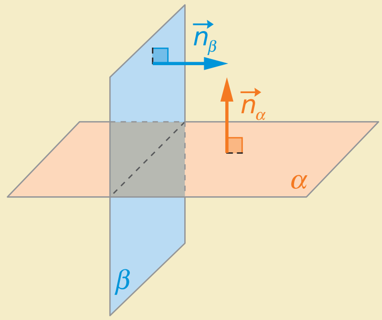
  Então, $(0, 2, 1) \notin \beta$. Assim, α e β são dois planos estritamente paralelos.

Planos perpendiculares

Manual Digital

Vídeo
Posição relativa de dois planos e relação entre os vetores normais

Dados dois planos α e β, com vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$, respetivamente, os planos α e β são perpendiculares se e só se $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são perpendiculares.



Exemplos

1. Os planos $\alpha: 3x - y + z = -1$ e $\beta: x + 3y + 2 = 0$ são perpendiculares, pois os vetores $\vec{n}_\alpha(3, -1, 1)$ e $\vec{n}_\beta(1, 3, 0)$ são perpendiculares.
   $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 3 \times 1 - 1 \times 3 + 1 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$

2. Consideremos o plano α, definido por $x - 2y - z + 2 = 0$, e a reta r, perpendicular a α e que passa no ponto $P(2, 1, -3)$.
   - A reta r tem a direção do vetor $\vec{n}_\alpha(1, -2, -1)$.
     Então, pode ser definida pela seguinte equação vetorial:
     $(x, y, z) = (2, 1, -3) + k(1, -2, -1),\ k \in \mathbb{R}$
   - Seja Q o ponto de interseção da reta r, definida anteriormente, com o plano α.
     Vamos determinar as coordenadas do ponto Q.
     Comecemos por determinar as coordenadas de um ponto genérico da reta r.
     $$(x, y, z) = (2, 1, -3) + k(1, -2, -1),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 2k \\ z = -3 - k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$
     Logo, as coordenadas de qualquer ponto da reta são da forma:
     $(2 + k, 1 - 2k, -3 - k),\ k \in \mathbb{R}$
     Sendo Q o ponto de interseção da reta r com o plano α, então também pertence ao plano α.
     Assim, determina-se o valor de k que dá as coordenadas de Q:
     $$2 + k - 2(1 - 2k) - (-3 - k) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 + k - 2 + 4k + 3 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
     $$\Leftrightarrow 6k = -5 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{6}$$
     Assim: $Q\left(2 - \frac{5}{6}, 1 - 2\left(-\frac{5}{6}\right), -3 - \left(-\frac{5}{6}\right)\right) = \left(\frac{7}{6}, \frac{8}{3}, -\frac{13}{6}\right)$

Exercícios

32 **Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, os planos α, β e δ:**

$$\alpha:\ 2x-y+z=0\ ,\ \beta:\ x-2z+1=0\ \text{ e }\ \delta:\ -2x+1+4z=0$$

32.1. Verifica se os planos α e β são perpendiculares.

32.2. Há dois planos que são estritamente paralelos. Quais? Justifica.

32.3. Escreve uma equação vetorial da reta r, perpendicular ao plano α e que passa no ponto $A(-1\,,\,5\,,\,0)$.

32.4. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α.

33 **Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, o plano β definido por $2x-y+z=0$ e os pontos $P(3\,,\,-2\,,\,3)$ e $Q(2k\,,\,-1\,,\,-k)$, com $k\in\mathbb{R}$.**

33.1. Escreve uma equação cartesiana do plano estritamente paralelo a β e que passa no ponto P.

33.2. Escreve uma equação vetorial da reta s, perpendicular a β e que passa no ponto P.

33.3. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta s com o plano β.

33.4. Determina k, com $k\in\mathbb{R}$, de modo que a reta PQ seja paralela ao plano β.

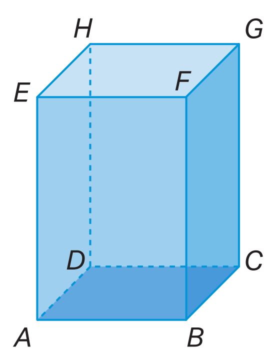
34 **Num referencial ortonormado $Oxyz$, considera o ponto $T(0\,,\,2\,,\,-1)$ e a reta t, definida por:**

$$(x\,,\,y\,,\,z)=(0\,,\,-2\,,\,1)+k(2\,,\,0\,,\,-1)\,,\ k\in\mathbb{R}$$

34.1. Escreve uma equação cartesiana do plano perpendicular à reta t e que passa no ponto T.

34.2. Escreve uma equação vetorial da reta s, paralela à reta t e que passa no ponto T.

35 **Na figura está representado um prisma quadrangular regular. Num dado referencial $Oxyz$, o plano ADH é definido por $2x+3y+z+1=0$ e o ponto F tem coordenadas $(3\,,\,1\,,\,6)$.**



35.1. Determina uma equação cartesiana do plano BCG.

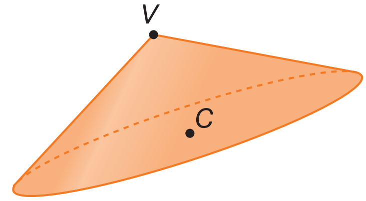
35.2. Escreve uma equação vetorial da reta EF.

35.3. Determina as coordenadas do ponto E.

Manual Digital

Vídeo
Equação vetorial de um plano

36 Considera o cone reto representado na figura.



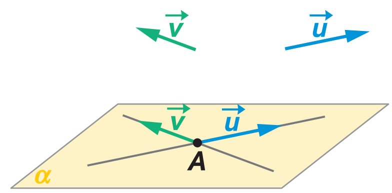
Dado um referencial ortonormado $Oxyz$:

- a base do cone é uma secção da esfera com o mesmo centro, C, e o mesmo raio, definida por $(x-3)^2+(y-8)^2+(z-5)^2 \leqslant 9$;
- o vértice, V, tem coordenadas $(2, 5, 9)$.

36.1. Indica as coordenadas do centro da base do cone, C.

36.2. Determina uma equação cartesiana do plano que contém a base do cone.

2.3.4. Equação vetorial do plano. Equações paramétricas do plano



Consideremos um plano α, um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ pertencente a α e dois vetores, $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$, não colineares, paralelos a α.

Sabemos que existem duas retas, contidas no plano α, com a direção de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, que se intersetam no ponto A.

Assim, para qualquer ponto P do plano α, sabemos que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AP} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Logo, sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano α:

$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + a(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) + b(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sejam α um plano, $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto pertencente ao plano α e $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ dois vetores, não colineares, paralelos ao plano α.
Uma **equação vetorial do plano α** é:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + a(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) + b(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}}),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Consideremos $A(x_A, y_A, z_A)$, $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$.

Então, uma equação vetorial do plano α é:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + a(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) + b(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}}),\ a, b \in \mathbb{R}$$

Logo, o plano α pode ser definido por: $\begin{cases} x = x_A + ax_{\vec{u}} + bx_{\vec{v}} \\ y = y_A + ay_{\vec{u}} + by_{\vec{v}} \\ z = z_A + az_{\vec{u}} + bz_{\vec{v}} \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Sejam α um plano, $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto pertencente ao plano α e $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ e $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ dois vetores, não colineares, paralelos ao plano α.

Um **sistema de equações paramétricas do plano** α é:

$$\begin{cases} x = x_A + ax_{\vec{u}} + bx_{\vec{v}} \\ y = y_A + ay_{\vec{u}} + by_{\vec{v}} \\ z = z_A + az_{\vec{u}} + bz_{\vec{v}} \end{cases}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1. Consideremos o plano α definido por:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 0) + a(0, 2, 3) + b(-1, 0, 2), \ a, b \in \mathbb{R}$$

O ponto $P(0, 5, 1)$ pertence ao plano α, pois:

$(0, 5, 1) = (-1, 3, 0) + a(0, 2, 3) + b(-1, 0, 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 - b \\ 5 = 3 + 2a \\ 1 = 3a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \\ 1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) \end{cases} \longleftarrow \text{Proposição verdadeira}$$

2. Para obter a equação vetorial do plano que contém a reta r, definida por $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k(2, -1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$, e que passa no ponto $P(-1, 5, 1)$ não pertencente à reta r, começamos por determinar as coordenadas de um vetor paralelo ao plano e não colinear com o vetor diretor da reta r.

O ponto $Q(0, 0, 1)$ pertence à reta r, logo também pertence ao plano.

Coordenadas de $\overrightarrow{PQ}$: $(0, 0, 1) - (-1, 5, 1) = (1, -5, 0)$

O vetor $\overrightarrow{PQ}$ e o vetor diretor da reta r, de coordenadas $(2, -1, 0)$, não são colineares, pois $\frac{1}{2} \neq \frac{-5}{-1}$.

Assim, uma equação vetorial do plano é:

$(x, y, z) = (0, 0, 1) + a(2, -1, 0) + b(1, -5, 0)$, $a, b \in \mathbb{R}$

3. Uma equação cartesiana do plano definido pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 0, 1) + a(2, -1, 1) + b(1, -5, 1)$, $a, b \in \mathbb{R}$, pode ser obtida através da resolução de um sistema.

$(x, y, z) = (0, 0, 1) + a(2, -1, 1) + b(1, -5, 1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 2a + b \\ y = -a - 5b \\ z = 1 + a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x - 2a \\ y = -a - 5(x - 2a) \\ z = 1 + a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x - 2a \\ y = -a - 5x + 10a \\ z = 1 + a + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = x - 2\left(\dfrac{5x+y}{9}\right) \\ a = \dfrac{5x+y}{9} \\ z = 1 + a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{9}x - \dfrac{2}{9}y \\ a = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{1}{9}y \\ z = 1 + \dfrac{5}{9}x + \dfrac{1}{9}y - \dfrac{1}{9}x - \dfrac{2}{9}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{9}x - \dfrac{2}{9}y \\ a = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{1}{9}y \\ -4x + y + 9z - 9 = 0 \end{cases}$$

Uma equação cartesiana do plano dado é: $-4x + y + 9z - 9 = 9$

4. Consideremos o plano β definido pela equação vetorial:

$$(x, y, z) = (-1, 2, -3) + a(-1, 1, 0) + b(3, 2, 2), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}$$

Sejam $\vec{n}(x_{\vec{n}}, y_{\vec{n}}, z_{\vec{n}})$ um vetor normal ao plano β, $\vec{u}(-1, 1, 0)$ e $\vec{v}(3, 2, 2)$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \times x_{\vec{n}} + 1 \times y_{\vec{n}} = 0 \wedge 3 \times x_{\vec{n}} + 2 \times y_{\vec{n}} + 2 \times z_{\vec{n}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_{\vec{n}} + y_{\vec{n}} = 0 \\ 3x_{\vec{n}} + 2y_{\vec{n}} + 2z_{\vec{n}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{\vec{n}} = x_{\vec{n}} \\ 3x_{\vec{n}} + 2x_{\vec{n}} + 2z_{\vec{n}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{\vec{n}} = x_{\vec{n}} \\ z_{\vec{n}} = -\dfrac{5x_{\vec{n}}}{2} \end{cases}, \; x_{\vec{n}} \in \mathbb{R}$$

> **Nota:**
> Este é um processo alternativo para obter uma equação cartesiana de um plano a partir de uma equação vetorial.

Assim, $\vec{n}\left(x_{\vec{n}}, x_{\vec{n}}, -\dfrac{5}{2}x_{\vec{n}}\right)$, $x_{\vec{n}} \in \mathbb{R}$.

Se, por exemplo, $x_{\vec{n}} = 2$, vem que $\vec{n}(2, 2, -5)$.
Uma equação cartesiana do plano β é do tipo $2x + 2y - 5z + d = 0$.
O ponto de coordenadas $(-1, 2, -3)$ pertence a β, logo:
$2 \times (-1) + 2 \times 2 - 5 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = -17$
Então, uma equação cartesiana do plano β é: $2x + 2y - 5z - 17 = 0$

Exercícios

37 Em cada caso, verifica se os pontos A, B e C definem um plano e, em caso afirmativo, define-o através de uma equação vetorial e de um sistema de equações paramétricas.

37.1. $A(-2, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$ e $C(-1, 1, -2)$

37.2. $A(2, 3, 1)$, $B(2, 1, 1)$ e $C(1, 3, 0)$

37.3. $A(2, 2, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(-1, 0, 0)$

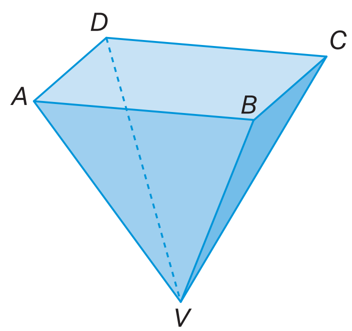
38 **Considera os planos α, β e δ definidos por:**

- $\alpha: (x, y, z) = (-2, 0, 1) + a(2, -1, 0) + b(-1, 1, -2),\ a, b \in \mathbb{R}$
- $\beta: \begin{cases} x = 1 + 2a - b \\ y = -a + b \\ z = 2 + a + 2b \end{cases},\ a, b \in \mathbb{R}$
- $\delta: (x, y, z) = (1, 3, 1) + a(2, 1, 1) + b(-1, -1, 3),\ a, b \in \mathbb{R}$

38.1. Define cada um dos planos através de uma equação cartesiana.

38.2. Determina o ponto de interseção do plano α com o eixo das abcissas.

39 **Considera a pirâmide quadrangular da figura.**
Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, sabe-se que $A(3, 4, 6)$, $B(3, 8, 6)$ e $V(1, 6, 2)$.



39.1. Escreve uma equação vetorial do plano ABV.

39.2. Determina as coordenadas do ponto M, centro da base, $[ABCD]$, da pirâmide.

39.3. Escreve uma equação cartesiana do plano ABC.

39.4. Escreve um sistema de equações paramétricas do plano paralelo ao plano ABC e que contém o ponto V.

2.3.5. Lugares geométricos no espaço

Vimos anteriormente como determinar, no plano, as equações reduzidas da mediatriz de um segmento de reta, de uma circunferência e da reta tangente a uma circunferência num ponto, recorrendo ao produto escalar de vetores.

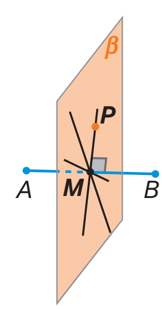
De modo análogo, no espaço, podemos usar o produto escalar de vetores para determinar uma equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta, a equação reduzida de uma superfície esférica e uma equação cartesiana do plano tangente a uma superfície esférica num ponto.

Plano mediador do segmento de reta $[AB]$

O **plano mediador do segmento de reta $[AB]$** é o lugar geométrico dos pontos P, do espaço, que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$$

sendo M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.



Exemplo

Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, consideremos os pontos $A(3\,,\,4\,,\,2)$ e $B(-1\,,\,8\,,\,6)$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são:

$$M\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = M(1\,,\,6\,,\,4)$$

Seja $P(x\,,\,y\,,\,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AB]$.

Desta forma, $\overrightarrow{AB}(-4\,,\,4\,,\,4)$ e $\overrightarrow{MP}(x-1\,,\,y-6\,,\,z-4)$. Então:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \iff -4x+4+4y-24+4z-16=0 \iff$$

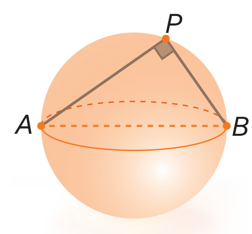
$$\iff -4x+4y+4z-36=0 \iff -x+y+z-9=0$$

Uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$ é: $-x+y+z-9=0$

Superfície esférica de diâmetro $[AB]$

A **superfície esférica de diâmetro $[AB]$** é o lugar geométrico dos pontos P, do espaço, que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$



Exemplo

Num referencial ortonormado $Oxyz$, consideremos os pontos $M(-3\,,\,0\,,\,1)$ e $Q(-1\,,\,2\,,\,1)$.

Vamos determinar a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[MQ]$.

Seja $P(x\,,\,y\,,\,z)$ um ponto qualquer da superfície esférica.

Então, $\overrightarrow{MP}\,(x+3\,,\,y\,,\,z-1)$ e $\overrightarrow{QP}\,(x+1\,,\,y-2\,,\,z-1)$.

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \iff (x+3)(x+1)+y(y-2)+(z-1)(z-1)=0 \iff$$

$$\iff x^2+4x+3+y^2-2y+(z-1)^2=0 \iff$$

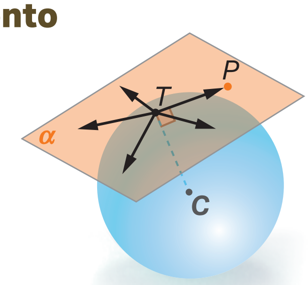
$$\iff x^2+4x+4+y^2-2y+1+(z-1)^2=-3+4+1 \iff$$

$$\iff (x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$$

Plano tangente a uma superfície esférica num ponto

O **plano tangente a uma superfície esférica de centro C no ponto T** é o lugar geométrico dos pontos P, do espaço, que satisfazem a equação:

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$$



Exemplo

Vamos determinar uma equação cartesiana do plano tangente à superfície esférica definida por $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$ no ponto $T(-2\,,\,0\,,\,0)$.
O centro da superfície esférica é o ponto $C(-2\,,\,1\,,\,1)$.
Seja $P(x\,,\,y\,,\,z)$ um ponto qualquer do referido plano tangente.

Deste modo, $\overrightarrow{CT}\,(0\,,\,-1\,,\,-1)$ e $\overrightarrow{TP}\,(x+2\,,\,y\,,\,z)$.

Então: $\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0 \iff -y-z=0$

Manual Digital

Vídeo
Conexão entre o produto escalar e lugares geométricos no espaço

Exercícios

40 **Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, considera os pontos $A(1\,,\,2\,,\,5)$, $B(0\,,\,-3\,,\,1)$ e $C(-1\,,\,3\,,\,-2)$.**

40.1. Escreve uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[BC]$.

40.2. Determina a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[AC]$.

41 **Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, considera a superfície esférica definida por $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=4$, o ponto $T(2\,,\,2\,,\,-3)$ pertencente à superfície esférica e a reta r de equação $(x\,,\,y\,,\,z)=(1\,,\,-1\,,\,2)+k(2\,,\,0\,,\,-1)$, $k\in\mathbb{R}$.**

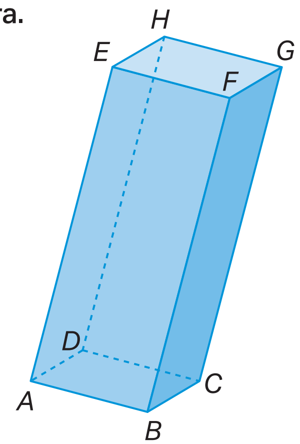
41.1. Escreve uma equação vetorial da reta CT, sendo C o centro da superfície esférica dada.

41.2. Determina uma equação cartesiana do plano tangente à superfície esférica no ponto T.

41.3. Averigua se a reta r é perpendicular ao plano tangente definido em **41.2.**.

42 **Considera o prisma quadrangular reto representado na figura.**
Num dado referencial ortonormado do espaço, sabe-se que:

$B(0\,,\,4\,,\,0)$, $C(-2\,,\,5\,,\,0)$ e $F(0\,,\,4\,,\,6)$



42.1. Determina uma equação cartesiana do plano EFG.

42.2. Mostra que o ponto G tem coordenadas $(-2\,,\,5\,,\,6)$.

42.3. Determina a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[BG]$.

42.4. Mostra que o plano mediador do segmento de reta $[CF]$ é definido pela equação $4x-2y+12z=23$.

42.5. Escreve uma equação da reta perpendicular ao plano mediador do segmento de reta $[CG]$ e que passa no ponto F.

Para aplicar

1 **Considera um referencial ortonormado $Oxyz$. Escreve uma equação cartesiana do plano α que:**

1.1. é perpendicular à reta $r: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + k(2, -3, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, e passa no ponto $A(2, -3, 1)$;

1.2. passa nos pontos $P(-2, 0, 1)$, $Q(-3, 1, -1)$ e $R(2, -3, 0)$;

1.3. contém as retas $s: (x, y, z) = (1, -2, 0) + k(-2, 1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, e $t: (x, y, z) = (1, -2, -1) + \lambda(2, 3, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 **Num referencial ortonormado $Oxyz$, considera os pontos $M(2, -1, 0)$, $N(3, 0, 1)$ e $P(1, 2, 1)$.**

2.1. Determina uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[MP]$.

2.2. Mostra que a superfície esférica de diâmetro $[MN]$ é definida pela equação $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

2.3. Determina uma equação cartesiana do plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[NP]$ no ponto $T(2, 2, 2)$.

3 **Num referencial ortonormado $Oxyz$, considera um plano β e as retas m e p, nele contidas, definidas por:**

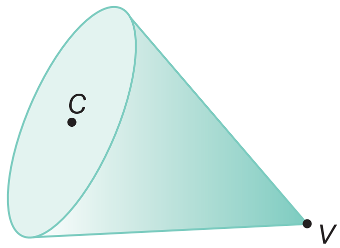
- $m: (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-2, 3, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- $p: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda - 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

3.1. Escreve uma equação vetorial do plano β.

3.2. Escreve uma equação cartesiana do plano α, sabendo que é paralelo ao plano β e que passa no ponto $P(-2, 5, 10)$.

3.3. Escreve uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano β e que passa no ponto $P(-2, 0, 1)$.

4 **Na figura encontra-se representado um cone reto.**



Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, sabe-se que a base do cone está contida no plano de equação $x - 4y + 2z + 3 = 0$ e que $V(0, 2, 1)$ é o vértice do cone.

O ponto C é o centro da base do cone.

4.1. Escreve uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano da base do cone e que passa no ponto V.

4.2. Escreve uma equação vetorial da reta CV.

4.3. Determina as coordenadas do ponto C.

5 **Em relação a um referencial ortonormado $Oxyz$, considera a reta r definida pelo seguinte sistema de equações cartesianas:**

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 1 - 3k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Considera também o ponto R de coordenadas $(2, -3, 1)$, o ponto A pertencente à reta r e ao plano xOy e o ponto I, ponto de interseção da reta r com a reta definida por $x = -6 \wedge z = 5$.

5.1. Escreve uma equação cartesiana do plano perpendicular à reta r e que passa no ponto R.

5.2. Quais são as coordenadas do ponto A?

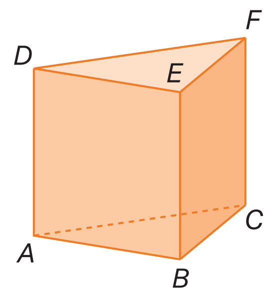
5.3. Determina uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[RA]$, recorrendo ao produto escalar de vetores.

5.4. Quais são as coordenadas do ponto I?

5.5. Usando o produto escalar, determina a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[RI]$.

Para aplicar

6 **Na figura está representado um prisma triangular reto, $[ABCDEF]$.**



Num determinado referencial ortonormado $Oxyz$, as coordenadas dos pontos A, C e D são, respetivamente, $(2, -3, 1)$, $(-3, 1, 1)$ e $(2, -3, 6)$.

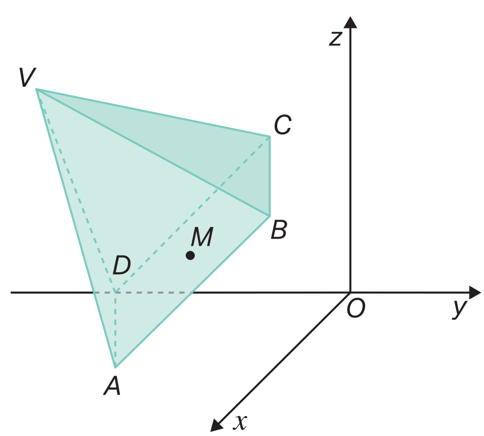
6.1. Determina as coordenadas do ponto F.

6.2. Escreve uma equação vetorial do plano ACF.

6.3. Define o plano DEF através de uma equação cartesiana.

6.4. Escreve as equações paramétricas da reta paralela à reta AC e que passa na origem do referencial considerado.

7 **No referencial ortonormado $Oxyz$ da figura encontra-se representada uma pirâmide quadrangular reta.**



Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um retângulo cujo centro é o ponto M;
- o vértice V tem coordenadas $(1, -6, 6)$;
- o vértice D pertence ao eixo das ordenadas e tem coordenadas $(0, -4, 0)$;

- o vértice A tem abcissa 2 e ordenada -4;
- o plano que contém a base da pirâmide é definido pela equação $3x - 8y + 6z - 32 = 0$.

7.1. Determina uma equação cartesiana do plano VAD.

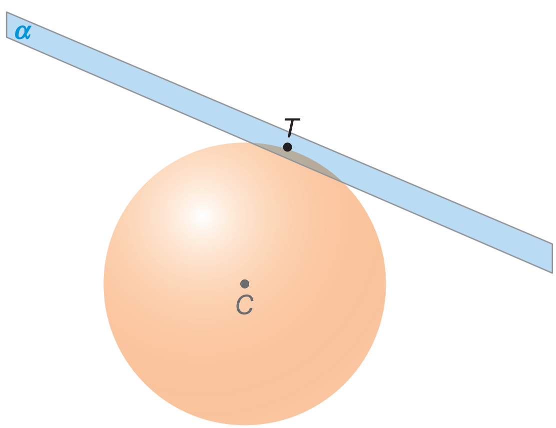
7.2. Escreve uma equação vetorial da reta VM.

7.3. Determina as coordenadas do ponto M.

7.4. Determina uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[VD]$.

7.5. Quais são as coordenadas do vértice B?

8 **Num dado referencial ortonormado $Oxyz$, considera a esfera de centro $C(1, 0, -1)$ e o plano α, tangente à esfera no ponto $T(1, 2, -1)$.**



8.1. Determina uma equação cartesiana do plano α.

8.2. Escreve uma equação vetorial da reta r, perpendicular ao plano α e que passa no ponto C.

8.3. Seja P o ponto tal que $[TP]$ é um diâmetro da esfera da figura.

a) Determina as coordenadas do ponto P.

b) Mostra que a superfície esférica que delimita a esfera da figura é definida pela equação $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$.

Teste

1 **Em relação a um referencial ortonormado xOy, considera os vetores $\vec{r}(-3, 1)$ e $\vec{s}(2, -3)$.**

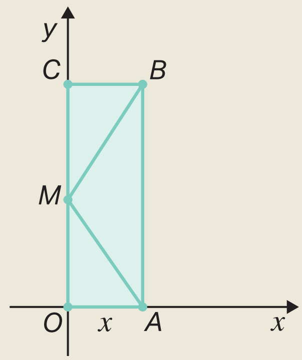
Qual dos seguintes valores corresponde ao produto escalar $\vec{r} \cdot (\vec{r} - 2\vec{s})$?

(A) -8 **(B)** 1 **(C)** 16 **(D)** 28

2 **Em relação ao retângulo $[OABC]$, representado no referencial ortonormado xOy da figura, sabe-se que:**

- os pontos A e C pertencem, respetivamente, ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas;
- $\overline{OA} = x$, com $x \in \mathbb{R}^+$
- $\overline{OC} = 3\,\overline{OA}$
- o ponto M é o ponto médio de $[OC]$.

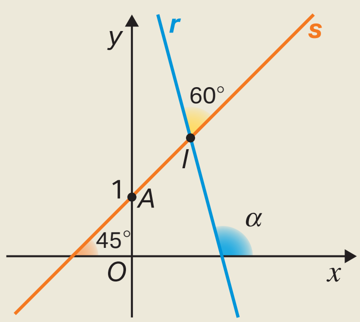
Determina, em função de x, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$.



3 **Na figura ao lado encontram-se representadas duas retas, r e s, num referencial ortonormado xOy. Sabe-se que:**

- a reta s tem $45°$ de inclinação e interseta o eixo Oy no ponto $A(0, 1)$;
- a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s é $60°$;
- o ponto I é o ponto de interseção das retas r e s.

Qual é, em graus, a inclinação da reta r?



4 **No referencial ortonormado xOy estão representadas a circunferência de equação $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ e a reta r, tangente à circunferência no ponto $T(4, 1)$.**

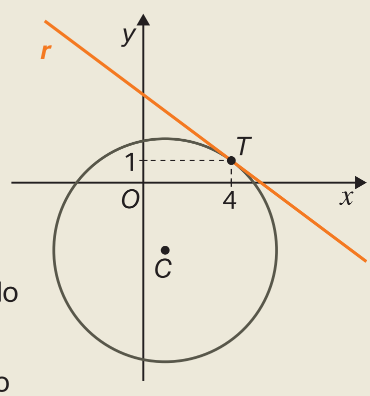
Determina:

4.1. a equação reduzida da reta r;

4.2. a inclinação, em graus, da reta r, apresentando o resultado arredondado às décimas;

4.3. uma equação vetorial da reta s, de inclinação $120°$ e que passa no ponto $A(-1, -2)$;

4.4. a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s, apresentando o resultado arredondado às centésimas do grau.



5 **Num determinado referencial ortonormado $Oxyz$, o plano α é definido pela equação $3x - y + 2z = 3$.**

Qual das seguintes equações corresponde a um plano perpendicular ao plano α?

(A) $-3x + y - 2z + 3 = 0$

(B) $(x, y, z) = (1, -1, 5) + a(1, 1, -1) + b(2, 0, -3),\ a, b \in \mathbb{R}$

(C) $2y + z - 3 = 0$

(D) $(x, y, z) = (0, -2, 1) + a(-3, 1, -2) + b(0, 2, -1),\ a, b \in \mathbb{R}$

6 **Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, os pontos $L(-1, 5, 2)$, $U(1, -2, 3)$ e $A(3, 0, -1)$.**

6.1. Justifica a afirmação: "Os pontos L, U e A definem um plano."

6.2. Determina uma equação cartesiana do plano α definido pelos pontos L, U e A.

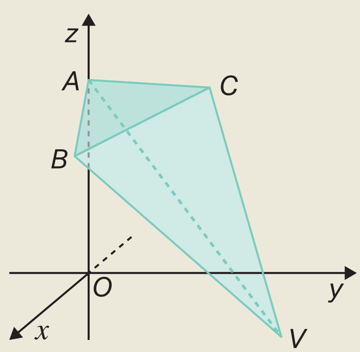
6.3. Define por uma equação vetorial a reta p, perpendicular ao plano α e que passa no ponto L.

6.4. Sabe-se que o plano α é tangente a uma superfície esférica de centro $C(2, 1, 2)$ no ponto A. Determina a equação reduzida dessa superfície esférica.

7 **No referencial ortonormado $Oxyz$ encontra-se representada uma pirâmide triangular reta.**

Sabe-se que:

- o plano ABC, que contém a base da pirâmide, é definido por $2x - y + 4z - 12 = 0$;
- o vértice A pertence ao eixo Oz;
- o vértice V tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.



7.1. Determina as coordenadas do vértice A.

7.2. Determina uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano ABC e que passa no vértice V.

7.3. Seja E a projeção ortogonal do ponto V na base da pirâmide.

a) Determina uma equação vetorial da reta VE.

b) Mostra que as coordenadas do ponto E são $\left(\frac{95}{42}, \frac{13}{21}, \frac{85}{42}\right)$.

3

Sucessões

Manual Digital

Atividade
Antes de começar: Sequências

Antes de começar

Sequências

1 Considera as primeiras três figuras de uma sequência.

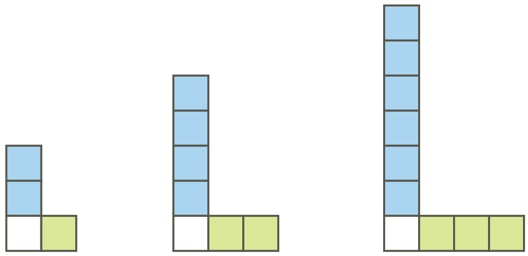


Figura 1 Figura 2 Figura 3

A sequência de figuras segue a regularidade sugerida pelos três primeiros termos.

1.1. Completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados brancos						
Números de quadrados verdes						
Número de quadrados azuis						
Número total de quadrados						

1.2. Quantos quadrados terá a 10.ª figura?

1.3. Haverá alguma figura com 200 quadrados?
Justifica a tua resposta.

1.4. Enuncia uma lei de formação desta sequência.

1.5. Das expressões seguintes, qual pode corresponder a uma expressão geradora da sequência do número total de quadrados de cada figura?

(A) $n+3$ **(B)** $3n+1$

(C) $2n$ **(D)** $3n$

Recorda

Sequências
Uma sequência é uma lista ordenada de figuras, de números ou de outros elementos. Cada elemento dessa lista designa-se por **termo** e cada termo tem uma determinada **ordem**.
Numa **sequência pictórica** ou **de figuras**, todos os termos são figuras.
Numa **sequência numérica**, todos os termos são números. Se os termos aumentam de uma ordem para a seguinte, a sequência diz-se **crescente**; se os termos diminuem de uma ordem para a seguinte, a sequência diz-se **decrescente**.

Recorda

Expressão geradora ou termo geral
Uma **lei de formação** de uma sequência é uma descrição que permite obter todos os termos dessa sequência.
Se uma lei de formação for uma expressão algébrica que relaciona cada termo com a respetiva ordem, designa-se por **expressão geradora** ou **termo geral** da sequência.

2 Na figura seguinte encontram-se representados os três primeiros termos de uma sequência de figuras constituídas por quadrados geometricamente iguais.

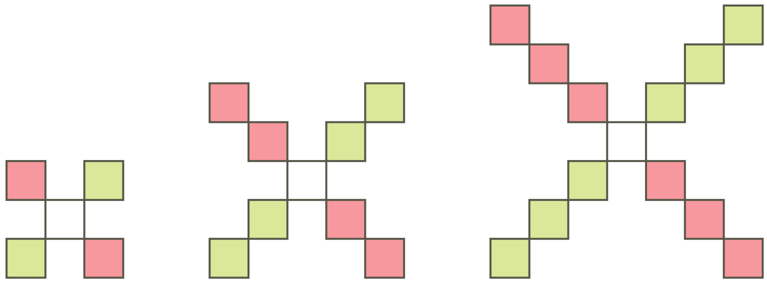


Figura 1 Figura 2 Figura 3

2.1. Tendo em atenção a lei de formação sugerida pelos primeiros termos da sequência, quantos quadrados terá a 5.ª figura?

2.2. Haverá alguma figura com 50 quadrados? Justifica.

2.3. Qual das expressões seguintes poderá ser o termo geral da sequência do número total de quadrados de cada figura?

(A) $n+4$ **(B)** $4n$

(C) $4n+1$ **(D)** $5n$

3 Considera as sequências numéricas **I, II, III** e **IV**.

I: $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

II: $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$

III: $16, 12, 8, 4, 0, \ldots$

IV: $\frac{2}{4}, \frac{5}{6}, \frac{8}{8}, \frac{11}{10}, \frac{14}{12}, \ldots$

3.1. Determina o 6.º e o 7.º termos de cada uma das sequências numéricas apresentadas.

3.2. Indica a expressão geradora de cada uma das sequências.

4 Considera a sequência numérica de termo geral $5n - 1$.

4.1. Determina o termo de ordem 10.

4.2. Qual é a ordem do termo 59?

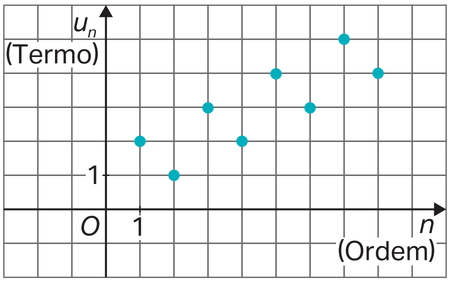
4.3. 105 é termo da sequência? Justifica.

Manual Digital

Atividade
Antes de começar: Monotonia de uma função

Antes de começar

5 **Na figura encontra-se representada graficamente uma sequência numérica constituída por oito termos.**



> **Recorda**
> O **gráfico de uma sequência numérica** é um conjunto de pontos cujas abcissas representam os números naturais correspondentes a cada ordem e cujas ordenadas são os termos da sequência.

5.1. Qual é o termo de ordem 2?

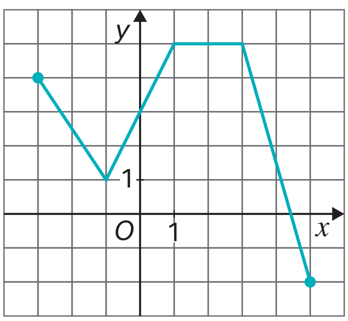
5.2. Existem dois termos iguais. Quais são as suas ordens?

5.3. Qual é a ordem do termo 5?

5.4. Qual é o maior termo da sequência? E o menor?

Funções

6 Na figura encontra-se representada a função g de domínio $[-3, 5]$.



6.1. Constrói o quadro de variação da função g.

6.2. Indica os intervalos em que a função g é:

a) crescente em sentido lato;

b) decrescente em sentido lato.

6.3. Indica, caso existam:

a) o máximo absoluto da função e o(s) respetivos(s) maximizante(s);

b) o mínimo absoluto da função e o(s) respetivo(s) minimizante(s).

> **Recorda**
>
> **Monotonia de uma função**
> Consideremos uma função real de variável real f e um conjunto $A \subset D_f$.
> - f é **estritamente crescente** em A se:
> $\forall a, b \in A, a < b \implies f(a) < f(b)$
> - f é **crescente em sentido lato** em A se:
> $\forall a, b \in A, a < b \implies f(a) \leqslant f(b)$
> - f é **estritamente decrescente** em A se:
> $\forall a, b \in A, a < b \implies f(a) > f(b)$
> - f é **decrescente em sentido lato** em A se:
> $\forall a, b \in A, a < b \implies f(a) \geqslant f(b)$
>
> **Extremos absolutos de uma função**
> Dada uma função real de variável real f de domínio D_f e $f(a) \in D'_f$:
> - $f(a)$ é **mínimo absoluto** de f se:
> $\forall x \in D_f, f(a) \leqslant f(x)$
> a designa-se por minimizante;
> - $f(a)$ é **máximo absoluto** de f se:
> $\forall x \in D_f, f(a) \geqslant f(x)$
> a designa-se por maximizante.

3 Sucessões

Manual Digital

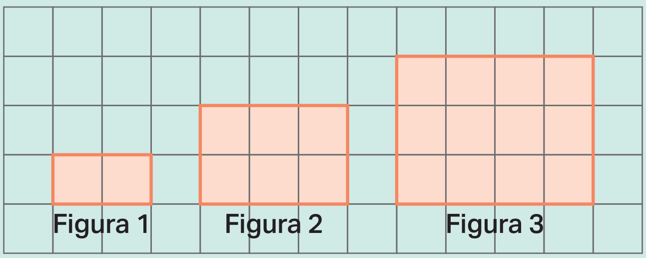
Vídeo
Sucessão

3.1. Generalidades acerca de sucessões

3.1.1. Sucessões numéricas

Tarefa

No quadriculado, encontram-se representados os três primeiros termos de uma sequência de figuras compostas por quadrados unitários.



1 Copia e completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5
Número de quadrados unitários	2	6	...	...	...

2 O termo geral da sequência numérica que, a cada ordem de uma figura desta sequência, faz corresponder o número de quadrados unitários nela contidos é dado por $n^2 + n$.

2.1. Determina o termo de ordem 100.

2.2. Verifica se 50 é termo da sequência.

2.3. Quantos termos da sequência numérica são inferiores a 60?

Uma **sucessão** real é uma função u de domínio $\mathbb{N}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

u_n representa o **termo de ordem n** ou o **termo geral** da sucessão.

Notação: Uma sucessão de termo geral u_n é, habitualmente, representada por (u_n).

O **gráfico de uma sucessão** (u_n) é constituído pelos pares ordenados da forma (n, u_n), com $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

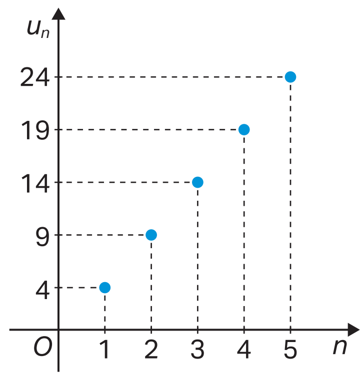
1. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = 5n - 1$.

- Os cinco primeiros termos são:

  $u_1 = 5 \times 1 - 1 = 4$ $\quad$ $u_2 = 5 \times 2 - 1 = 9$ $\quad$ $u_3 = 5 \times 3 - 1 = 14$

  $u_4 = 5 \times 4 - 1 = 19$ $\quad$ $u_5 = 5 \times 5 - 1 = 24$

- Na figura encontra-se a representação gráfica dos cinco primeiros termos da sucessão (u_n).



- Para verificar se 54 é termo da sucessão, podemos resolver, em $\mathbb{N}$, a equação $5n - 1 = 54$.

  $5n - 1 = 54 \Leftrightarrow 5n = 55 \Leftrightarrow n = 11$

  Como $11 \in \mathbb{N}$, 54 é o termo de ordem 11 da sucessão.

- Por outro lado, 100 não é termo da sucessão, porque:

  $5n - 1 = 100 \Leftrightarrow 5n = 101 \Leftrightarrow n = \dfrac{101}{5}$ e $\dfrac{101}{5} \notin \mathbb{N}$

- Sabemos que existem dois termos menores do que 12, uma vez que:

  $5n - 1 < 12 \Leftrightarrow 5n < 13 \Leftrightarrow n < \dfrac{13}{5} \Leftrightarrow n < 2{,}6$

  Assim, u_1 e u_2 são os termos de (u_n) inferiores a 12.

2. Consideremos a sucessão definida por $v_n = \dfrac{2n+5}{2+n}$.

- Sabemos que o termo de ordem 20 é $v_{20} = \dfrac{2 \times 20 + 5}{2 + 20} = \dfrac{45}{22}$.

- Vamos verificar se 10 é termo da sucessão (v_n).

  $\dfrac{2n+5}{2+n} = 10 \underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 2n + 5 = 10 \times (2 + n) \Leftrightarrow 2n + 5 = 20 + 10n \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -8n = 15 \Leftrightarrow n = -\dfrac{15}{8}$

  Como $-\dfrac{15}{8} \notin \mathbb{N}$, então 10 não é termo da sucessão (v_n).

- Para encontrarmos a expressão algébrica que permite determinar o termo de ordem $n+1$ da sucessão, basta substituir n por $n+1$ no termo geral.

  $v_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+5}{2+(n+1)} = \dfrac{2n+2+5}{2+n+1} = \dfrac{2n+7}{n+3}$

Exercícios

1 Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n), cujos termos gerais são apresentados a seguir.

$u_n = 2 - 3n$	$v_n = \dfrac{1}{2n}$	$w_n = (-1)^n + 2$

1.1. Determina os cinco primeiros termos de cada uma das sucessões.

1.2. Averigua se 21 é termo de alguma das sucessões apresentadas.

2 Considera a sucessão (a_n), definida por $a_n = \dfrac{6n-2}{n+1}$.

2.1. Representa graficamente os cinco primeiros termos da sucessão (a_n).

2.2. Determina a ordem a partir da qual os termos da sucessão são superiores a 5.

2.3. Averigua se $\dfrac{16}{3}$ é termo da sucessão. Em caso afirmativo, indica a sua ordem.

3 Considera a sucessão de termo geral $b_n = \dfrac{3n+5}{n}$.

3.1. Determina o termo de ordem 7 da sucessão (b_n).

3.2. Quantos termos da sucessão são superiores a 4?

3.3. Escreve a expressão algébrica que permite determinar o termo de ordem $n+1$, b_{n+1}.

3.1.2. Sucessões monótonas

Tarefa

1 Considera a sucessão definida por $u_n = 2n - 5$.

1.1. Determina:

a) u_{10}

b) u_9

c) $u_{10} - u_9$

1.2. Escreve a expressão algébrica que permite calcular o termo de ordem $n+1$.

1.3. Calcula $u_{n+1} - u_n$ e indica o seu sinal.

2 Considera a sucessão definida por $v_n = 5 - n$.

2.1. Determina a expressão algébrica que permite determinar o termo v_{n+1}.

2.2. Calcula $v_{n+1} - v_n$ e indica o seu sinal.

3 Considera a sucessão definida por $t_n = (-1)^{n+1}$.

3.1. Determina os cinco primeiros termos da sucessão e representa-os graficamente.

3.2. Calcula:

a) $t_2 - t_1$

b) $t_3 - t_2$

c) $t_4 - t_3$

d) $t_5 - t_4$

3.3. Indica o sinal de cada uma das diferenças calculadas em **3.2.**.

O estudo da monotonia das sucessões, funções de domínio $\mathbb{N}$, é feito através da comparação de dois termos consecutivos genéricos da sucessão.

- Uma sucessão (u_n) é **crescente** se e só se:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$$

Equivalentemente: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$

- Uma sucessão (u_n) é **crescente em sentido lato** se e só se:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$$

Equivalentemente: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

Exemplos

1. A sucessão de termo geral $u_n = 5n + 2$ é crescente, uma vez que:

$u_{n+1} - u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = 5n + 7 - 5n - 2 = 5$ e $5 > 0$

Cálculos auxiliares:

$u_{n+1} = 5(n+1) + 2 = 5n + 5 + 2 = 5n + 7$

2. Consideremos a sucessão definida por: $v_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n = 1 \\ 3n - 1 & \text{se } n \geqslant 2 \end{cases}$

- Se $n \geqslant 2$, então:

$v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 1 - (3n - 1) =$

$= 3n + 3 - 1 - 3n + 1 = 3n + 2 - 3n + 1 = 3$ e $3 > 0$

- Como $v_2 = v_1 = 5$, então $v_2 - v_1 = 0$.

Logo, concluímos que $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, (v_n) é crescente em sentido lato.

Cálculos auxiliares:

$v_2 = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$

Manual Digital

Vídeo
Monotonia de uma sucessão

- Uma sucessão (u_n) é **decrescente** se e só se:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$$

Equivalentemente: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$

- Uma sucessão (u_n) é **decrescente em sentido lato** se e só se:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$$

Equivalentemente: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

Exemplo

A sucessão (u_n), definida por $u_n = \frac{1}{2n}$, é decrescente, uma vez que:

$$u_{n+1} - u_n = \underset{(\times 2n)}{\overset{(\times 2n)}{\frac{1}{2n+2}}} - \underset{(\times (2n+2))}{\overset{(\times (2n+2))}{\frac{1}{2n}}} = \frac{2n - 2n - 2}{4n^2 + 4n} = -\frac{2}{4n^2 + 4n}$$

Como $4n^2 + 4n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, concluímos que $-\frac{2}{4n^2 + 4n} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se **monótona**.

Caso contrário, a sucessão diz-se **não monótona**.

Exemplos

1. Consideremos a sucessão de termo geral $v_n = (n-5)^2$.

$v_{n+1} - v_n = (n-4)^2 - (n-5)^2 = n^2 - 8n + 16 - n^2 + 10n - 25 = 2n - 9$

$2n - 9 > 0 \iff n > \frac{9}{2}$

Então, conclui-se que:

- se $n \geqslant 5$: $v_{n+1} - v_n > 0$
- se $n < 5$: $v_{n+1} - v_n < 0$

Desta forma, concluímos que (v_n) é não monótona.

2. Consideremos a sucessão definida por: $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se} \quad n \leqslant 3 \\ 2n-1 & \text{se} \quad n \geqslant 4 \end{cases}$

- Se $n \leqslant 3$:

  $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-n-1}{n(n+1)} = -\dfrac{1}{n(n+1)}$, logo $u_{n+1} - u_n < 0$.

- Se $n \geqslant 4$:

  $u_{n+1} - u_n = 2n+2-1-2n+1 = 2$, logo $u_{n+1} - u_n > 0$.

Então, (u_n) é não monótona.

3. A sucessão definida por $t_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se} \quad n \leqslant 5 \\ \dfrac{n+1}{2n} & \text{se} \quad n > 5 \end{cases}$ é não monótona.

- Se $n \leqslant 5$:

  $t_{n+1} - t_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-n-1}{n(n+1)} = -\dfrac{1}{n(n+1)}$, logo $t_{n+1} - t_n < 0$.

- Se $n > 5$:

  $t_{n+1} - t_n = \dfrac{n+2}{2n+2} - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{2n^2+4n-2n^2-2n-2n-2}{4n(n+1)} = -\dfrac{2}{4n(n+1)} =$

  $= -\dfrac{1}{2n(n+1)}$

  Logo, $t_{n+1} - t_n < 0$.

- $t_6 - t_5 = \dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{23}{60} > 0$

Logo, (t_n) é não monótona.

Exercícios

4 Mostra que a sucessão (v_n), tal que $v_n = \dfrac{2n-3}{2n}$, é crescente.

5 Mostra que a sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ é decrescente.

6 Considera a sucessão (v_n), definida por $v_n = (-1)^n - 1$.

6.1. Determina os quatro primeiros termos da sucessão (v_n).

6.2. A sucessão é monótona? Justifica.

7 Mostra que a sucessão definida por $t_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ é não monótona.

8 **Considera as sucessões (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n) e (f_n), definidas por:**

$$a_n = 3n - 5\,,\ b_n = \frac{2n+1}{3n}\,,\ c_n = 4 - \frac{1}{n}\,,\ d_n = \frac{2-5n}{2n+1}\,,\ e_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ e } f_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leqslant 6 \\ n-5 & \text{se } n > 6 \end{cases}$$

8.1. Verifica se são monótonas as sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n).

8.2. Mostra que a sucessão (e_n) não é monótona.

8.3. Mostra que a sucessão (f_n) é crescente em sentido lato.

9 **Considera a sucessão definida por:** $t_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{3-5n} & \text{se } n \leqslant 10 \\ n^2 & \text{se } n > 10 \end{cases}$

9.1. Calcula t_{10} e t_{11}.

9.2. Indica o sinal de $t_{n+1} - t_n$ se:

a) $n < 10$

b) $n > 10$

c) $n = 10$

9.3. O que podes concluir quanto à monotonia da sucessão (t_n)?

10 **Considera a sucessão de termo geral $u_n = n^2 - 4n - 12$.**

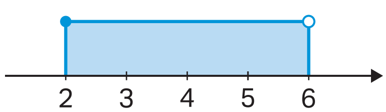
10.1. Determina u_1, u_2 e u_3.

10.2. Mostra que a sucessão (u_n) não é monótona.

3.1.3. Sucessões limitadas

Majorantes e minorantes

Consideremos o intervalo de números reais $I = [2\,,\,6[$.



Sabemos que o número 6 é maior do que todos os elementos de I.

Assim, 6 diz-se **majorante** de I.

Todos os números reais superiores ou iguais a 6 são majorantes de I.

Assim, o **conjunto dos majorantes** de I é $[6\,,\,+\infty[$.

Como o menor dos majorantes de I não pertence a I, isto é, $6 \notin I$, o conjunto I não tem máximo.

Manual Digital

Vídeo
Conjuntos majorados, minorados e limitados

Dado um conjunto de números reais, A, diz-se que o número real M é **majorante** de A se: $\forall a \in A, a \leqslant M$

Assim, o conjunto A diz-se **majorado**.

Se M é um elemento de A, isto é, $M \in A$, então M é o **máximo** de A.

No intervalo de números reais $I = [2, 6[$, sabemos que 2 é minorante de I e, como $2 \in I$, então 2 é o mínimo de I.

O conjunto dos minorantes de I é formado por todos os números reais menores ou iguais a 2, ou seja, é o intervalo $]-\infty, 2]$.

Dado um conjunto de números reais, A, diz-se que o número real m é **minorante** de A se: $\forall a \in A, a \geqslant m$

Assim, o conjunto A diz-se **minorado**.

Se m é um elemento de A, isto é, $m \in A$, então m é o **mínimo** de A.

Exemplos

1. Consideremos o conjunto $A =]-\infty, -5[$.
   - Por exemplo, -5 e -4 são majorantes de A.
   - -5 é o menor dos majorantes de A e não pertence a A, logo o conjunto A não tem máximo.
   - O conjunto A não é minorado.
2. Consideremos o conjunto $B = [-2, +\infty[$.
   - O conjunto dos minorantes de B é $]-\infty, -2]$.
   - O maior dos minorantes é -2 e pertence a B, logo -2 é mínimo de B.
3. Consideremos o conjunto $C = [-2, 3[\cup \{5\}$.
   - O conjunto dos majorantes de C é $[5, +\infty[$.
   - O conjunto dos minorantes de C é $]-\infty, -2]$.
   - -2 e 5 são, respetivamente, o mínimo e o máximo de C.

Um conjunto de números reais, A, diz-se **limitado** quando é majorado e minorado.

Exemplos

1. Os conjuntos A e B dos exemplos anteriores não são limitados, pois o conjunto A não é minorado e o conjunto B não é majorado.
2. O conjunto C do exemplo anterior é limitado, pois é majorado e minorado.
3. Consideremos o conjunto $D = [-3, 5]$.
   Conjunto dos majorantes: $[5, +\infty[$
   Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -3]$
   Como D é minorado e majorado, D é limitado.

Manual Digital

Atividade
Sucessão majorada, minorada e limitada

Exercícios

11 **Considera os seguintes conjuntos de números reais:**

$$A = \{-4\} \cup [2, +\infty[, \ B =]-\infty, 3] \cup \{5\}, \ C = [0, +\infty[,$$
$$D = \{-4, -3, 2\} \text{ e } E = [-3, 1] \cup [2, 5]$$

11.1. Para cada um dos conjuntos, indica, caso existam, o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes.

11.2. Qual dos conjuntos é limitado? Justifica.

12 **Considera o conjunto de números reais $X = \{-2\} \cup \{-1, 3\}$.**

12.1. Indica:

a) o conjunto dos majorantes de X;

b) o menor dos majorantes de X;

c) o conjunto dos minorantes de X;

d) o maior dos minorantes de X.

12.2. O conjunto X tem máximo? E mínimo? Justifica.

12.3. Justifica a afirmação: "O conjunto X é limitado."

Dada uma sucessão (u_n), se o seu conjunto de termos, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, é majorado, então diz-se que a sucessão (u_n) é **majorada**.

Da mesma forma, se o conjunto de termos $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ da sucessão (u_n) é minorado, então a sucessão (u_n) diz-se **minorada**.

Uma sucessão (u_n) diz-se **limitada** quando é majorada e minorada. Assim, existem números reais M e m tais que: $m \leqslant u_n \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

1. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$.

A sucessão (u_n) tem todos os termos positivos.

Assim: $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Como $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (u_n) é decrescente.

Deste modo, $u_1 = \frac{1}{1} = 1$ é o menor dos seus majorantes.

Logo, $0 < u_n \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a sucessão (u_n) é limitada.

2. Vejamos o que acontece com a sucessão definida por $v_n = \frac{3n+1}{n}$.

$$v_n = \frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n}$$

A sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ é decrescente e tem todos os termos positivos, logo o seu 1.º termo, $\frac{1}{1} = 1$, é o menor dos seus majorantes.

Assim: $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1 \iff 3 < 3 + \frac{1}{n} \leqslant 4$

Logo, $3 < v_n \leqslant 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão (v_n) é limitada.

3. Consideremos a sucessão (t_n), tal que $t_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Usando o algoritmo da divisão, sabemos que:

$$t_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r|l} 2n-1 & n+1 \\ \hline -2n-2 & 2 \\ \hline -3 & \end{array}$$

A sucessão de termo geral $\frac{1}{n+1}$ é decrescente e todos os seus termos são positivos, logo o seu 1.º termo, $\frac{1}{2}$, é o menor dos seus majorantes.

$$0 < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \iff 0 > -\frac{3}{n+1} \geqslant -\frac{3}{2} \iff 2 > 2 - \frac{3}{n+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2} \leqslant 2 - \frac{3}{n+1} < 2$$

Logo, $\frac{1}{2} \leqslant t_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A sucessão (t_n) é limitada.

4. Vamos verificar se a sucessão definida por $w_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se} \quad n < 10 \\ \dfrac{2}{3n-1} & \text{se} \quad n \geqslant 10 \end{cases}$

é limitada.

Se $n < 10$:

- para n par: $w_n = 1$
- para n ímpar: $w_n = -1$

Assim, se $n < 10$, $-1 \leqslant w_n \leqslant 1$. (*)

Se $n \geqslant 10$:

$\dfrac{2}{3n-1} = 2 \times \dfrac{1}{3n-1}$

Como a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{3n-1}$ tem todos os termos positivos e é decrescente, o 1.º termo, para $n = 10$, é $\dfrac{1}{29}$ e é um majorante.

$0 < \dfrac{1}{3n-1} \leqslant \dfrac{1}{29} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{2}{3n-1} \leqslant \dfrac{2}{29}$

Assim, se $n \geqslant 10$, $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{2}{29}$. (**)

Por (*) e (**) concluímos que: $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant w_n \leqslant 1$

Então, (w_n) é limitada.

5. Consideremos a sucessão definida por: $t_n = \begin{cases} \cos\left((-1)^n \pi\right) & \text{se} \quad n < 5 \\ \dfrac{2}{3n} & \text{se} \quad n \geqslant 5 \end{cases}$

Se $n < 5$: $t_n = \begin{cases} \cos(\pi) & \text{se} \quad n \in \{2, 4\} \\ \cos(-\pi) & \text{se} \quad n \in \{1, 3\} \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad n \in \{2, 4\} \\ -1 & \text{se} \quad n \in \{1, 3\} \end{cases}$

Assim, se $n < 5$, $t_n = -1$. (*)

Se $n \geqslant 5$: $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{2}{3n} \leqslant \dfrac{2}{3}$

Logo, se $n \geqslant 5$, $0 < t_n \leqslant \dfrac{2}{3}$. (**)

De (*) e (**) resulta que $-1 \leqslant t_n \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Então, (t_n) é limitada.

Exercícios

13 Considera as sucessões definidas a seguir.

$$a_n = 5 + \frac{3n-1}{n+2}$$

$$b_n = \frac{2-3n}{n}$$

$$c_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

13.1. Mostra que cada uma das sucessões definidas é limitada.

13.2. Apresenta o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de cada uma das sucessões.

14 **Verifica se cada uma das sucessões definidas a seguir é limitada e indica um majorante e um minorante, se existirem.**

14.1. $d_n = \begin{cases} -\dfrac{5}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ 2 + \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

14.2. $e_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \leqslant 10 \\ (-1)^n & \text{se } n > 10 \end{cases}$

14.3. $f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{-3n}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

15 **Mostra que a sucessão (u_n) é limitada, sendo (u_n) definida por:**

15.1. $u_n = \cos\left((-1)^n \pi\right)$

15.2. $u_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

Para aplicar

1 **Considera a sucessão (a_n), definida por $a_n = \frac{2n+1}{3n}$.**

1.1. Determina os cinco primeiros termos da sucessão e representa-os graficamente.

1.2. Determina a ordem do termo $\frac{5}{7}$.

1.3. Verifica se $\frac{19}{23}$ é termo da sucessão (a_n).

2 **Considera a sucessão (b_n), de termo geral $b_n = \frac{3-2n}{n+1}$.**

2.1. Determina os três primeiros termos da sucessão.

2.2. Mostra que $-\frac{7}{6}$ é termo da sucessão e indica a sua ordem.

2.3. Quantos termos da sucessão (b_n) são maiores do que $-\frac{3}{2}$?

3 **Verifica se cada uma das sucessões a seguir definidas é monótona.**

3.1. $p_n = 5n - 1$

3.2. $q_n = \frac{5}{2n-1}$

3.3. $r_n = \frac{n+1}{2n}$

3.4. $s_n = \frac{3n-1}{2n+1}$

3.5. $t_n = n^2 - 5n$

3.6. $w_n = (n+1)^2$

4 **Considera a sequência geométrica infinita constituída por polígonos regulares com 5 cm de lado. A partir do triângulo equilátero, constrói-se a sequência de polígonos em que cada um deles tem mais um lado do que o anterior.**

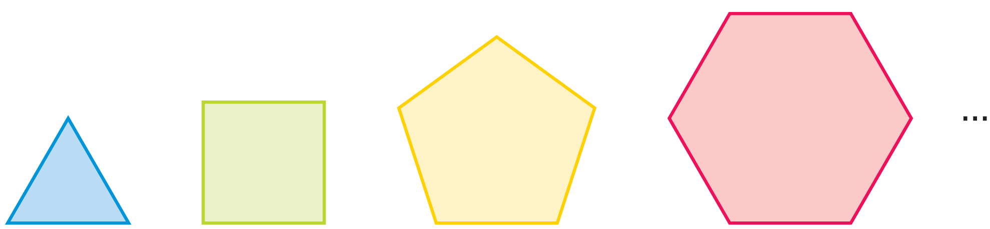


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Considera a sucessão (p_n) cujo termo geral representa o perímetro do polígono regular de ordem n.

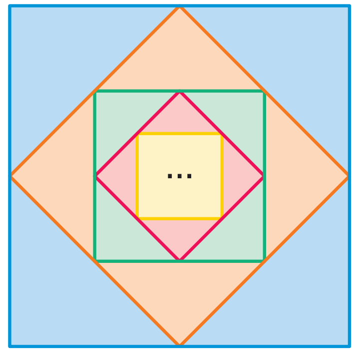
4.1. Escreve o termo geral da sucessão (p_n).

4.2. Mostra que a sucessão (p_n) é monótona crescente.

4.3. Determina a ordem do polígono com 80 cm de medida de perímetro.

Para aplicar

5 **Na figura encontra-se representada uma sequência infinita de quadrados. Os vértices de cada quadrado, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do quadrado que o precede na sequência.**



Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = 2^{5-n}$, que representa a medida da área do quadrado de ordem n.

Determina:

5.1. a_7 e interpreta o resultado no contexto do problema;

5.2. a medida do lado do primeiro quadrado da sequência;

5.3. a ordem do quadrado da sequência cuja medida do lado é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6 **Mostra que é crescente em sentido lato a sucessão (v_n) definida por:**

$$v_n = \begin{cases} n-2 & \text{se} \quad n < 10 \\ \dfrac{2n}{5}+3 & \text{se} \quad n \geqslant 10 \end{cases}$$

7 **Estuda quanto à monotonia cada uma das sucessões a seguir definidas.**

7.1. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

7.2. $v_n = (-1)^n \cos(\pi)$

7.3. $w_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)}{n+2}$

8 **Considera a sucessão (p_n), de termo geral $p_n = n^2 - 15n + 50$.**

8.1. Determina os cinco primeiros termos da sucessão.

8.2. Verifica se 0 é termo da sucessão e, em caso afirmativo, indica a sua ordem.

8.3. Quantos termos da sucessão são negativos?

8.4. Verifica se a sucessão (p_n) é monótona.

9 **Considera os seguintes conjuntos de números reais:**

$X = \{-1, 2, 3, 5\}$ $P = [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ $T =]-2, \pi[$

$O = [-\sqrt{3}, 2[$ $R = [-3, 2] \cup \{\sqrt{13}\}$

Em relação a cada um dos conjuntos, indica:

9.1. o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes;

9.2. o máximo e o mínimo, caso existam;

9.3. se é limitado, justificando.

10 **Mostra que cada uma das sucessões a seguir definidas é limitada e indica, caso existam, o máximo e o mínimo.**

10.1. $r_n = \dfrac{5n-1}{n}$ **10.2.** $s_n = 3 + \dfrac{1}{2n+1}$ **10.3.** $t_n = \dfrac{5n-2}{n+1}$

10.4. $u_n = \dfrac{1-2n}{-n+1} + 3$ **10.5.** $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ **10.6.** $w_n = \dfrac{1+n}{n^2}$

11 **Mostra que é limitada a sucessão (v_n) definida por:**

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n-1} & \text{se} \quad n > 5 \\ \dfrac{2}{n-6} & \text{se} \quad n \leqslant 5 \end{cases}$$

12 **Considera as sucessões a seguir definidas.**

$t_n = 1 + \sin\left((-1)^n \dfrac{\pi}{6}\right)$ $u_n = 2\cos\left((-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{4}\right)$ $v_n = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + (-1)^n \dfrac{\pi}{3}\right)$

12.1. Estuda a sucessão (t_n) quanto à monotonia.

12.2. Mostra que $v_n = \dfrac{2 + (-1)^n \sqrt{3}}{2}$.

12.3. Determina o contradomínio da sucessão (v_n).

12.4. Mostra que a sucessão (u_n) é limitada e indica o seu máximo e o seu mínimo.

3.2. Princípio de indução matemática

3.2.1. Princípio de indução matemática

O princípio de indução matemática é um método para demonstrar condições que são válidas para, especialmente, todos os números naturais.

Considere-se uma condição $T(n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T(n)$ é verdadeira se e só se:

i) $T(1)$ é verdadeira;

ii) $\forall k \in \mathbb{N}, T(k) \implies T(k+1)$

(Se $T(k)$ é verdadeira, então $T(k+1)$ também é verdadeira – a condição é hereditária.)

Sabias que…
Em 1322, **Levi ben Gershon (1288-1344)** escreveu a "Arte de Calcular", em que aplica o método "subindo passo a passo sem fim", bastante semelhante ao método de indução matemática como hoje o conhecemos.

Nota:
Fixado um qualquer $p \in \mathbb{N}$, o princípio de indução pode ser generalizado, aplicando-se à demonstração de uma proposição $T(n)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$.
Neste caso, temos de provar que $T(p)$ é verdadeira e que, para todo o número natural $k \geqslant p$, $T(k) \implies T(k+1)$.

Exemplos

1. Vamos provar, por indução matemática, que: $\forall n \in \mathbb{N}, \ 6^n : 3^n = 2^n$

- Se $n = 1$, temos $6^1 : 3^1 = 6 : 3 = 2 = 2^1$.
  Logo, a condição $6^n : 3^n = 2^n$ é verdadeira para $n = 1$.
- Seja $k \in \mathbb{N}$.

  Hipótese de indução: $6^k : 3^k = 2^k$ (Admitimos que é verdadeira.)

  Tese: $6^{k+1} : 3^{k+1} = 2^{k+1}$ (Queremos mostrar que também é verdadeira, admitindo a hipótese de indução.)

  $$6^{k+1} : 3^{k+1} = \left(6^k \times 6^1\right) : \left(3^k \times 3^1\right) = \left(6^k : 3^k\right) \times \left(6^1 : 3^1\right) = 2^k \times 2^1 = 2^{k+1}$$

  Por hipótese de indução

  Pelo princípio de indução matemática, concluímos que: $\forall n \in \mathbb{N}, \ 6^n : 3^n = 2^n$

2. Queremos provar a seguinte proposição: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

- Se $n = 1$, $1^3 + 2 \times 1 = 3$, que é divisível por 3.

- Seja $k \in \mathbb{N}$.

  Hipótese de indução: $k^3 + 2k$ é divisível por 3. (Admitimos que é verdadeira.)

  Tese: $(k+1)^3 + 2(k+1)$ é divisível por 3. (Queremos mostrar que também é verdadeira, admitindo a hipótese de indução.)

  $(k+1)^3 + 2(k+1) = (k+1)\left(k^2+2k+1\right) + 2k + 2 = k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 + 2k + 2 =$
  $= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 = \left(k^3 + 2k\right) + \left(3k^2 + 3k + 3\right) = \left(k^3 + 2k\right) + 3\left(k^2 + k + 1\right)$

  $3\left(k^2+k+1\right)$ é divisível por 3 (por ser um múltiplo de 3) e, por hipótese de indução, $k^3 + 2k$ também é divisível por 3. Então, $(k+1)^3 + 2(k+1)$ é divisível por 3.

Pelo princípio de indução matemática, concluímos que:
$\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 + 2n$ é divisível por 3.

3. Vamos mostrar, por indução matemática, que: $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$

- Se $n = 1$, $2^1 > 1$ é verdadeira.
- Seja $k \in \mathbb{N}$.

  Hipótese de indução: $2^k > k$ (Admitimos que é verdadeira.)

  Tese: $2^{k+1} > k+1$ (Queremos mostrar que também é verdadeira, admitindo a hipótese de indução.)

  $2^{k+1} = 2^k \times 2$
  Como $2^k > k \iff 2^k \times 2 > 2k$, basta mostrar que $2k \geqslant k+1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
  Subtraindo k a ambos os membros, obtemos uma condição universal:
  $k \geqslant 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$
  Desta forma, concluímos que $2k \geqslant k+1$ e, portanto, $2^{k+1} > k+1$.

Fica, assim, provado, por indução matemática, que: $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$

Exercícios

16 **Prova, por indução matemática, cada uma das seguintes proposições.**

16.1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^n \times 2^n = 10^n$

16.2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(a^5\right)^n = a^{5n}$, sendo a um número real não nulo.

16.3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n > n^2$

16.4. $\forall n \in \mathbb{N},\ 64^n - 1$ é múltiplo de 9.

17 **Prova, por indução matemática, que a amplitude, em graus, de um ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por:**

$$\frac{180 \times (n-2)}{n}$$

sendo n um número natural tal que $n \geqslant 3$.

3.2.2. Sucessões definidas por recorrência

Manual Digital

Vídeo
Sucessão definida por recorrência

Tarefa

Os atletas de um clube de atletismo treinam gradualmente, durante a pré-época. Seja d_n a distância, em quilómetros, que um atleta corre no *n*-ésimo dia de treino da pré-época.

n	d_n
1	$d_1 = 3$
2	$d_2 = d_1 + 1 = 3 + 1 = 4$
3	$d_3 = d_2 + 1 = 4 + 1 = 5$
...	...

1 Descreve, em linguagem natural, a distância que o atleta corre no 4.º dia de treino, em função da distância que correu no dia anterior.

2 Escreve d_5 em função de d_4.

3 Copia e completa, escrevendo a distância corrida pelo atleta no *n*-ésimo dia de treino, d_n, em função da distância que correu no dia anterior, d_{n-1}.

$$d_n = \begin{cases} d_1 = 3 \\ d_n = \ldots, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

Para definir uma sucessão, muitas vezes são dados o primeiro termo e uma expressão que relaciona cada um dos termos com o termo imediatamente anterior. Neste caso, a **sucessão** está **definida por recorrência**.

Dados um conjunto A, uma função $f: A \longrightarrow A$ e $a \in A$, existe uma só sucessão (u_n) tal que: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Diz-se que (u_n) está **definida por recorrência**.

Exemplos

1. Vejamos como determinar o termo de ordem 4 da sucessão (v_n), definida por:

$$\begin{cases} v_1 = -3 \\ v_{n+1} = 2v_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

O termo de ordem 4 da sucessão (v_n) é obtido a partir do termo de ordem 3, o termo de ordem 3 a partir do termo de ordem 2 e o termo de ordem 2 a partir do termo de ordem 1.

$v_1 = -3$; $v_2 = 2 \times (-3) = -6$; $v_3 = 2 \times (-6) = -12$; $v_4 = 2 \times (-12) = -24$

2. A sucessão (u_n), definida pelo termo geral $u_n = 2 - 5n$, pode ser definida por recorrência.

$u_1 = 2 - 5 \times 1 = -3$

$u_2 = 2 - 5 \times 2 = -8 = u_1 - 5$

$u_3 = 2 - 5 \times 3 = -13 = u_2 - 5$

...

$u_{n+1} = u_n - 5$

A sucessão (u_n) é definida por recorrência por: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 5, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3. Consideremos a sucessão (t_n) definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_{n+1} = 2 + t_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pelo princípio de indução matemática, podemos provar que:

$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_n = 2n + 3$

- Se $n = 1$, $t_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$, tal como é apresentado na definição por recorrência.
- Seja $k \in \mathbb{N}$.

  Hipótese de indução: $t_k = 2k + 3$ (Admitimos que é verdadeira.)

  Tese: $t_{k+1} = 2(k+1) + 3$ (Queremos mostrar que também é verdadeira, admitindo a hipótese de indução.)

  Sabemos que $t_{k+1} = 2 + t_k$, pela definição por recorrência, e que $t_k = 2k + 3$, por hipótese de indução, logo:

  $t_{k+1} = 2 + 2k + 3 = 2(1 + k) + 3$

Pelo princípio de indução matemática, fica provado que:

$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_n = 2n + 3$

Exercícios

18 Considera a sucessão (a_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 3 - a_{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

18.1. Determina os cinco primeiros termos da sucessão (a_n).

18.2. Escreve o termo geral de (a_n).

19 Considera os termos gerais das sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n).

$a_n = 3n + 1$ | $b_n = \frac{n}{2} - 1$ | $c_n = 2 - n$ | $d_n = 5n + 2$

19.1. Escreve os três primeiros termos de cada uma das sucessões apresentadas.

19.2. Define cada uma das sucessões por recorrência.

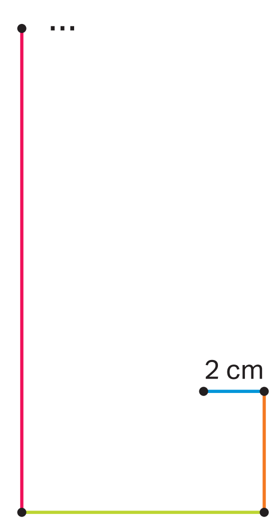
20 Considera a sucessão (f_n) definida por:

$$\begin{cases} f_1 = 3 \\ f_n = \dfrac{f_{n-1}}{2} + 1\,,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Prova, usando o princípio de indução matemática, que $f_n = \frac{2}{2^n} + 2$.

21 A linha poligonal da figura é uma sequência infinita de segmentos de reta construída da seguinte forma: o primeiro segmento de reta tem 2 cm de comprimento; o segundo segmento de reta tem o dobro do comprimento do primeiro; o terceiro segmento de reta tem o dobro do comprimento do segundo, e assim consecutivamente.

Seja (c_n) a sucessão que a cada número natural n faz corresponder a medida de comprimento do n-ésimo segmento de reta que constitui a linha poligonal.



21.1. Define a sucessão (c_n) por recorrência.

21.2. Prova, por indução matemática, que:

$c_n = 2^n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Para aplicar

1 **Prova, por indução matemática, cada uma das seguintes proposições.**

1.1. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(a^0\right)^n = 1$, sendo a um número real não nulo.

1.2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ 3^n - 1$ é múltiplo de 2.

1.3. $\forall n \in \mathbb{N}, \ 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n+1)$

2 **Considera a sucessão (u_n) definida por:** $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2.1. Escreve os três primeiros termos da sequência.

2.2. Sabendo que $u_6 = 1336$, determina u_7.

2.3. Sabendo que $u_{11} = 324\,769$, determina u_{10}.

3 **Considera a sucessão (v_n) definida pelo termo geral $v_n = 3 - 2n$.**
Define-a por recorrência.

4 **Considera a sucessão (t_n) definida por:** $\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n}{2} + 5, \ n \geqslant 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.1. Determina os cinco primeiros termos da sucessão (t_n).

4.2. Prova, por indução matemática, que: $\forall n \in \mathbb{N}, \ t_n = -19\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 10$

5 **Na figura, encontram-se representados os quatro primeiros termos de uma sequência geométrica.**

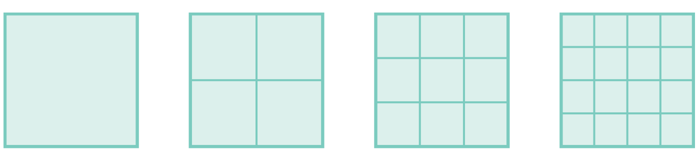


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

A primeira figura é um quadrado, a segunda figura é um quadrado dividido em quatro quadrados, a terceira figura é um quadrado dividido em nove quadrados, e assim sucessivamente.
Seja (q_n) a sucessão que a cada número natural n faz corresponder o número de quadrados geometricamente iguais em que a n-ésima figura está dividida.
Mostra, por indução matemática, que: $q_n = n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

3.3. Progressões aritméticas e progressões geométricas

3.3.1. Progressões aritméticas

Tarefa

Os atletas de um clube de natação iniciam a época com um conjunto de treinos específicos de preparação para recuperar a forma física após as férias.

Assim, no primeiro treino nadam 1500 m, no segundo treino nadam 1750 m, no terceiro treino 2000 m, e assim sucessivamente até ao décimo treino.

1. Copia e completa a tabela.

Treino	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
Distância	1500 m	1750 m	2000 m			

2. Define, por recorrência, a sucessão (d_n) que associa a cada treino a respetiva distância percorrida, em metros.

3. Quantos quilómetros nada, no total, cada um dos atletas no conjunto de treinos de preparação?

Uma sucessão (a_n) é uma **progressão aritmética** de primeiro termo a e razão r, com a, $r \in \mathbb{R}$, se é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemplo

De uma progressão aritmética (u_n), sabe-se que $u_1 = 7$ e $u_2 = 10$.

Assim, $r = u_2 - u_1 = 10 - 7 = 3$.

Desta forma, (u_n) pode ser definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Termo geral de uma progressão aritmética

Consideremos uma progressão aritmética (a_n) de primeiro termo a_1 e razão r.

Sabemos que:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_2 + r + r = a_1 + r + r + r = a_1 + 3r$

Assim: $a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ vezes}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ a_n = a_1 + (n-1)\,r$

A saber

Seja (a_n) uma progressão aritmética de razão r. Então:

$$a_{n+1} - a_n = r\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Daqui resulta:

- se $r > 0$, (a_n) é crescente;
- se $r = 0$, (a_n) é constante;
- se $r < 0$, (a_n) é decrescente.

Manual Digital

Vídeo
Progressões aritméticas e termo geral

O **termo geral de uma progressão aritmética** (a_n) de razão r é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos

1. A progressão aritmética (a_n) de primeiro termo 5 e razão -2 tem termo geral:

$a_n = 5 + (n-1) \times (-2) \ \Leftrightarrow \ a_n = 5 - 2n + 2 \ \Leftrightarrow \ a_n = -2n + 7$

2. O primeiro e o segundo termos de uma progressão aritmética, (b_n), são 8 e 4, respetivamente.

Assim, a razão da progressão aritmética é: $r = b_2 - b_1 = 4 - 8 = -4$

Logo, o termo geral é:

$b_n = 8 + (n-1) \times (-4) \ \Leftrightarrow \ b_n = 8 - 4n + 4 \ \Leftrightarrow \ b_n = -4n + 12$

3. De uma progressão aritmética (v_n), sabe-se que $v_5 = -2$ e $v_7 = 6$.

Como $v_7 = v_6 + r = v_5 + r + r$, então:

$2r = v_7 - v_5 \ \Leftrightarrow \ 2r = 6 + 2 \ \Leftrightarrow \ 2r = 8 \ \Leftrightarrow \ r = 4$

Por outro lado: $v_5 = v_1 + 4r \ \Leftrightarrow \ v_1 = v_5 - 4r \ \Leftrightarrow \ v_1 = -2 - 16 \ \Leftrightarrow \ v_1 = -18$

Desta forma, o termo geral de (v_n) é: $v_n = -18 + (n-1) \times 4 \ \Leftrightarrow \ v_n = 4n - 22$

4. A sucessão (c_n) definida por $c_n = \dfrac{3n+1}{2}$ é uma progressão aritmética, pois a diferença de quaisquer dois termos consecutivos é constante:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{3(n+1)+1}{2} - \frac{3n+1}{2} = \frac{3n+3+1-3n-1}{2} = \frac{3}{2}$$

Assim, (c_n) é uma progressão aritmética de razão $r = \dfrac{3}{2}$. Como $r > 0$, (c_n) é uma progressão aritmética crescente.

Exercícios

22 Escreve o termo geral da progressão aritmética (a_n), sabendo que:

22.1. o primeiro termo é -5 e a razão é 3;

22.2. $a_1 = 7$ e $a_3 = 4$

22.3. $a_5 = 10$ e $a_{15} = 25$

22.4. $a_{10} = 30$ e $a_{20} = 10$

23 Averigua se é uma progressão aritmética a sucessão de termo geral:

23.1. $a_n = 3n - 7$

23.2. $b_n = \dfrac{5-n}{3}$

23.3. $c_n = n^2 - 2n$

23.4. $d_n = \dfrac{2n-5}{3}$

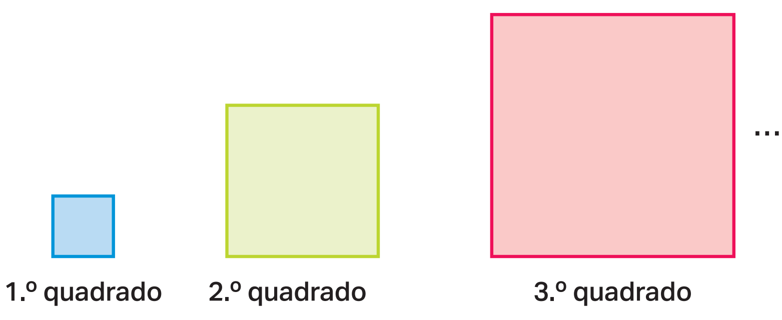
23.5. $e_n = \dfrac{5n-n^2}{2}$

23.6. $f_n = \dfrac{5}{n+1}$

24 Indica a razão de cada uma das progressões aritméticas identificadas no exercício 23 e tira conclusões sobre a sua monotonia.

25 Considera a sequência infinita de quadrados construídos da seguinte forma: o primeiro quadrado tem 2 cm de lado e cada um dos seguintes tem mais 3 cm de lado do que o quadrado anterior.

Na figura encontram-se representados os três primeiros termos da sequência.



Considera a progressão aritmética (p_n) que ao n-ésimo quadrado faz corresponder o seu perímetro.

25.1. Indica a razão da progressão aritmética (p_n).

25.2. Escreve o termo geral de (p_n).

25.3. Determina a ordem do primeiro termo cujo perímetro é superior a 100.

Vejamos como determinar o termo geral de uma progressão aritmética conhecendo a razão e um termo qualquer.

Para tal, consideremos uma progressão aritmética (a_n) de razão r e dois dos seus termos, a_n e a_p. Sabemos que:

$a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_p = a_1 + (p-1)r$, $\forall p \in \mathbb{N}$

Assim, $a_p - (p-1)r = a_1$. Então:

$a_n = a_p - (p-1)r + (n-1)r \iff a_n = a_p + r(-p+1+n-1) \iff a_n = a_p + (n-p)r$

O **termo geral de uma progressão aritmética (a_n)** em função da razão r e de um termo de ordem p, a_p, é dado por:

$$a_n = a_p + (n-p)r, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos

1. De uma progressão aritmética (u_n), sabe-se que: $u_5 = -2$ e $u_7 = 4$

Assim: $u_7 = u_5 + 2r \iff 2r = 4 + 2 \iff r = 3$

Desta forma, o termo geral de (u_n) é:

$u_n = u_5 + (n-5) \times r \iff u_n = -2 + (n-5) \times 3 \iff u_n = 3n - 17$

2. Vamos determinar o termo de ordem 100 da progressão aritmética (u_n) tal que $u_{20} = 12$ e $r = 3$.

$u_{100} = u_{20} + (100-20) \times 3 \iff u_{100} = 12 + 80 \times 3 \iff u_{100} = 252$

Exercícios

26 **Escreve o termo geral da progressão aritmética (u_n) tal que:**

26.1. $u_{10} = 20$ e $u_{15} = 10$

26.2. $u_{100} = 50$ e $u_5 = -10$

26.3. $u_{50} = -20$ e $u_{10} = -2$

27 **Determina o termo de ordem 500 da progressão aritmética (a_n), sabendo que:**

27.1. o primeiro termo é 5 e a razão é -2;

27.2. $a_{10} = 5$ e a razão é 3;

27.3. $a_{100} = 280$ e $a_{30} = 120$.

Manual Digital

Vídeo
Soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética

28 Determina o número de termos inferiores a 100 da progressão aritmética (v_n) tal que:

28.1. $v_n = 10n + 5$

28.2. $v_1 = 30$ e $r = 5$

28.3. $v_{10} = 30$ e $v_{30} = 52$

Soma de um número finito de termos de uma progressão aritmética

A **soma dos N primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n)** é dada por:

$$S_N = \frac{a_1 + a_N}{2} \times N$$

Exemplos

1. Vamos determinar a soma dos 10 primeiros termos da progressão aritmética (a_n) de termo geral $a_n = 2n - 1$.

$a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ e $a_{10} = 2 \times 10 - 1 = 19$

Logo: $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \times 10 = \dfrac{1 + 19}{2} \times 10 = 100$

2. Para calcular a soma dos 15 termos a partir do 10.º termo, inclusive, da progressão aritmética (b_n) definida por $b_n = \dfrac{3n+1}{2}$, podemos começar por determinar b_{10} e $b_{10+15-1}$ (é o equivalente a considerar uma nova progressão aritmética com a mesma razão e cujo primeiro termo é igual a b_{10}).

$b_{10} = \dfrac{3 \times 10 + 1}{2} = \dfrac{31}{2}$ e $b_{10+15-1} = b_{24} = \dfrac{3 \times 24 + 1}{2} = \dfrac{73}{2}$

$S = \dfrac{b_{10} + b_{24}}{2} \times 15 = \dfrac{\frac{31}{2} + \frac{73}{2}}{2} \times 15 = 390$

Nota
Um processo alternativo é calcular $S_{24} - S_9$.

Exercícios

29 Determina a soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética (c_n) definida por:

29.1. $c_n = 5 - 2n$

29.2. $c_n = \dfrac{n+3}{2}$

29.3. $c_n = \dfrac{3n-5}{2}$

30 Considera a progressão aritmética (d_n) cujo 5.º termo é -12 e a razão é 3.

30.1. Escreve o termo geral de (d_n).

30.2. Determina a soma dos primeiros 100 termos da progressão aritmética (d_n).

30.3. Calcula a soma dos 10 termos da progressão aritmética (d_n) a partir do 15.º termo, exclusive.

31 Considera a progressão aritmética (e_n) definida por $e_n = 3n - 2$.

Determina o número, N, de termos consecutivos de (e_n), com $N \in \mathbb{N}$, cuja soma a partir do vigésimo termo, inclusive, é 715.

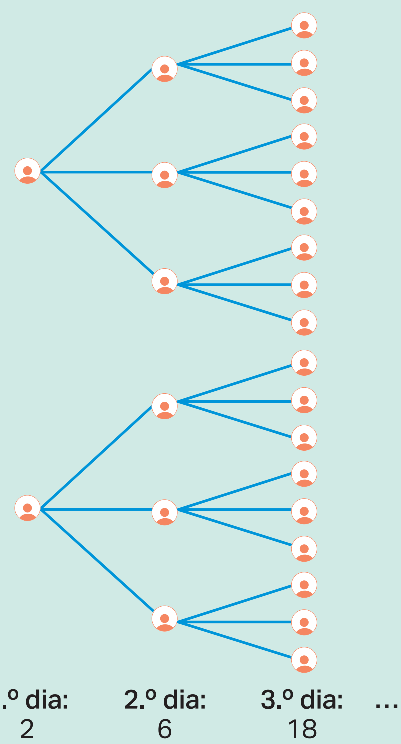
3.3.2. Progressões geométricas

Tarefa

Dois colegas de trabalho decidiram organizar uma festa-surpresa de despedida para um colega que se vai reformar.

Assim, propuseram a seguinte forma de divulgar a festa pelos colegas: cada pessoa, ao saber a notícia, contaria a três novos colegas no dia seguinte.

No primeiro dia, sabiam da festa duas pessoas (os organizadores); no segundo dia, sabiam mais seis pessoas; no terceiro dia, já sabiam mais 18 pessoas, e assim sucessivamente.



1. No 5.º dia, quantas pessoas tomaram conhecimento da festa-surpresa?

2. Ao fim de seis dias, quantas pessoas já sabiam da festa?

3. Define, por recorrência, a sucessão que ao n-ésimo dia faz corresponder o número de pessoas que tiveram conhecimento, nesse dia, da festa-surpresa.

Repara que, na sucessão da tarefa anterior, cada termo é obtido a partir do anterior multiplicando-o por 3. Dizemos que a sucessão apresentada é uma progressão geométrica de razão 3.

Uma sucessão (b_n) é uma **progressão geométrica** de primeiro termo b e razão r, com $b, r \in \mathbb{R}$, se é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} b_1 = b \\ b_{n+1} = b_n \times r, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemplos

1. A sucessão (b_n) de termo geral $b_n = 5^n$ é uma progressão geométrica, pois o quociente de quaisquer dois termos consecutivos é constante:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$$

Assim, (b_n) é uma progressão geométrica de razão 5 e primeiro termo $b_1 = 5^1 = 5$.

Logo, (b_n) pode ser definida por recorrência por:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n \times 5, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Relativamente a uma progressão geométrica (c_n), sabemos que $c_1 = 4$ e $c_2 = 12$.

Assim, a razão é $r = \frac{c_2}{c_1} = \frac{12}{4} = 3$.

Logo, (c_n) pode ser definida por recorrência por:

$$\begin{cases} c_1 = 4 \\ c_{n+1} = c_n \times 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercícios

32 Define, por recorrência, a progressão geométrica (b_n), sabendo que:

32.1. $b_1 = -3$ e $r = -2$

32.2. $b_1 = -4$ e $b_2 = -12$

32.3. $b_3 = 8$ e $b_4 = 16$

32.4. $b_5 = -7$ e $b_9 = -567$

33 **Considera a progressão geométrica (u_n) a seguir definida por recorrência:**

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

33.1. Qual é a razão de (u_n)?

33.2. Determina o 4.º termo da progressão geométrica.

34 **Verifica se cada uma das sucessões a seguir definidas é uma progressão geométrica e, em caso afirmativo, indica a sua razão.**

34.1. $t_n = 2^{3n}$

34.2. $u_n = 5^{-2n+1}$

34.3. $v_n = \dfrac{2}{3^{-5n}}$

34.4. $w_n = 3 \times (-2)^{5n+1}$

35 **Considera a progressão geométrica (c_n) definida por $c_n = \dfrac{2^{3n}}{5}$.**

35.1. Determina o primeiro termo e a razão de (c_n).

35.2. Define por recorrência a progressão geométrica (c_n).

Termo geral de uma progressão geométrica

Vamos considerar a progressão geométrica (b_n) definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} b_1 = b \\ b_{n+1} = b_n \times r, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ com } b, \ r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Queremos mostrar, por indução matemática, que $b_n = b \times r^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $n = 1$: $b_1 = b \times r^{1-1} = b$ (Proposição verdadeira)

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k = b \times r^{k-1}$ é verdadeira.

Queremos mostrar que $b_{k+1} = b \times r^k$.

$$b_{k+1} = b_k \times r = b \times r^{k-1} \times r = b \times r^k$$

Por hipótese de indução

Assim, $b_n = b \times r^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

O **termo geral de uma progressão geométrica (b_n)** de razão r é dado por:

$$b_n = b_1 \times r^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Podemos determinar o termo geral de uma progressão geométrica recorrendo à razão e a um qualquer termo.

Consideremos uma progressão geométrica (b_n) de razão r e dois dos seus termos, b_n e b_p. Sabemos que:

$b_n = b_1 \times r^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $b_p = b_1 \times r^{p-1}$, $\forall p \in \mathbb{N}$

Assim, $\frac{b_p}{r^{p-1}} = b_1$. Logo, $b_n = \frac{b_p}{r^{p-1}} \times r^{n-1} = b_p \times r^{n-1-p+1} = b_p \times r^{n-p}$.

O **termo geral de uma progressão geométrica** (b_n) em função da razão r e de um termo de ordem p, b_p, é dado por:

$$b_n = b_p \times r^{n-p},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos

1. O termo geral da progressão geométrica (b_n) de terceiro termo -13 e razão -5 é dado por:

$b_n = -13 \times (-5)^{n-3} = -13 \times (-5)^n \times (-5)^{-3} = \frac{13}{125} \times (-5)^n$

Logo, $b_n = \frac{13}{125} \times (-5)^n$.

2. Relativamente à progressão geométrica (c_n), sabe-se que $c_5 = 12$ e $c_8 = 96$.

Para determinar o termo geral de (c_n), começamos por determinar a sua razão.

$c_8 = c_5 \times r^{8-5} \Leftrightarrow 96 = 12 \times r^3 \Leftrightarrow 8 = r^3 \Leftrightarrow r = 2$

Assim, $c_n = 12 \times 2^{n-5} = \frac{12}{2^5} \times 2^n = \frac{3}{8} \times 2^n$. Logo, $c_n = \frac{3}{8} \times 2^n$.

Exercícios

36 Escreve o termo geral da progressão geométrica (b_n), sabendo que:

36.1. $b_5 = -10$ e $r = \frac{2}{5}$

36.2. $b_{15} = 3$ e $r = -\frac{1}{2}$

36.3. $b_2 = -5$ e $r = -2$

36.4. $b_3 = 8$ e $b_7 = 64$

37 Relativamente à progressão geométrica (c_n), sabe-se que $c_3 = -3$ e $c_6 = -81$.

37.1. Determina a razão de (c_n).

37.2. Escreve o termo geral de (c_n).

38 **Considera as progressões geométricas (u_n) e (v_n) definidas por:**

$$u_n = -3 \times 2^{5n} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_1 = u_2 \\ v_{n+1} = -\dfrac{2v_n}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

38.1. Determina a razão de (u_n).

38.2. Define (u_n) por recorrência.

38.3. Determina o termo geral de (v_n).

Monotonia das progressões geométricas

Consideremos a progressão geométrica (b_n) definida por $b_n = b_1 \times r^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $b_1 = 0$, a progressão tem todos os termos nulos, logo é constante.

Se $b_1 \neq 0$ e $r = 0$, sabemos que só o primeiro termo é diferente de zero.

No caso de $b_1 \neq 0$ e $r \neq 0$:

$r > 1$		$r = 1$	$0 < r < 1$		$r < 0$
$b_1 > 0$	$b_1 < 0$		$b_1 > 0$	$b_1 < 0$	
Crescente	Decrescente	Constante	Decrescente	Crescente	Não monótona

Nota:
Quando $r < 0$, qualquer que seja o sinal de b_1, com $b_1 \neq 0$, os termos serão alternadamente positivos e negativos (ou vice-versa). Assim, (b_n) é não monótona.

Exemplos

1. Vamos estudar quanto à monotonia a progressão geométrica (b_n) definida por:

$$b_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

$$r = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+3+1}}{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+3+1-3n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$b_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \times 1+1} = \frac{3}{16}$$

Como $0 < r < 1$ e $b_1 > 0$, a progressão geométrica (b_n) é decrescente.

2. A progressão geométrica (c_n) definida por $c_n = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-n+2}$ é não monótona, pois a sua razão é negativa.

$$r = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-n-1+2}}{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-n+2}} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}$$

Exercícios

39 Determina a razão e estuda quanto à monotonia a progressão geométrica de termo geral:

39.1. $t_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1-n}$

39.2. $u_n = 20 \times (-2)^{2n-5}$

39.3. $v_n = -3^{n-1}$

39.4. $w_n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+2}$

40 Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = -3 \times 2^{1-3n}$.

40.1. Verifica se (u_n) é uma progressão geométrica.

40.2. Estuda a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

Soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica

Consideremos uma progressão geométrica (b_n) com primeiro termo b_1 e razão r.

Se $r \neq 1$, sabemos que a soma dos N primeiros termos consecutivos da progressão geométrica (b_n) é dada por:

$S_N = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_N$ (*)

Multiplicando ambos os membros pela razão, r, obtemos:

$S_N \times r = \underbrace{b_1 \times r}_{b_2} + \underbrace{b_2 \times r}_{b_3} + \underbrace{b_3 \times r}_{b_4} + \ldots + \underbrace{b_N \times r}_{b_{N+1}}$ (**)

Se a (*) subtrairmos (**), obtemos:

$$S_N - S_N \times r = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_N - (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{N+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_N \times (1 - r) = b_1 - b_{N+1} \Leftrightarrow S_N = \frac{b_1 - b_1 \times r^N}{1 - r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_N = \frac{b_1\left(1 - r^N\right)}{1 - r}$$

Cálculo auxiliar:
$b_{N+1} = b_1 \times r^N$

Manual Digital

Vídeo
Soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica

A **soma dos N primeiros termos de uma progressão geométrica (b_n)** de razão r é dada por:

- $S_N = N \times b_1$, se $r = 1$ (pois os N termos são iguais a b_1)
- $S_N = b_1 \times \frac{1 - r^N}{1 - r}$, se $r \neq 1$

Exemplos

1. Consideremos a progressão geométrica (u_n) tal que $u_1 = 5$ e a razão é 2.

- A soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica (u_n) é dada por:

  $S_7 = u_1 \times \frac{1 - r^7}{1 - r} = 5 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = 635$

- A soma dos 10 termos consecutivos da progressão geométrica (u_n), a partir do termo de ordem 5, inclusive, pode ser determinada usando a fórmula $S_{10} = u_5 \times \frac{1 - r^{10}}{1 - r}$ (é o equivalente a considerarmos uma nova progressão geométrica de razão 2 e cujo primeiro termo é u_5).

  $u_5 = u_1 \times r^{5-1} = 5 \times 2^4 = 80$, logo: $S_{10} = 80 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 81\,840$

2. A soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica (v_n) de razão $\frac{1}{2}$ é $\frac{93}{13}$.

Para determinar o seu primeiro termo, basta resolver a seguinte equação:

$$S_5 = v_1 \times \frac{1 - r^5}{1 - r} \Leftrightarrow \frac{93}{13} = v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{93}{13} = v_1 \times \frac{31}{16} \Leftrightarrow v_1 = \frac{48}{13}$$

Exercícios

41 Determina a soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica (c_n) definida por:

41.1. $\begin{cases} c_1 = -2 \\ c_{n+1} = \dfrac{c_n}{5}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

41.2. $c_n = \dfrac{5^{1-2n}}{3}$

41.3. $c_n = \dfrac{3}{2^{n+1}}$

41.4. $c_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3n}$

42 Considera a progressão geométrica (d_n) de termo geral $d_n = \dfrac{5}{2^{3n}}$.

42.1. Determina a razão de (d_n).

42.2. Calcula a soma:

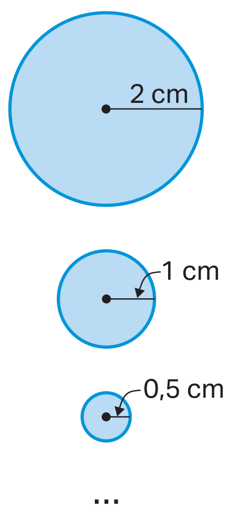
a) dos 10 primeiros termos;

b) dos cinco termos consecutivos, a partir do 10.º termo, exclusive.

43 Na figura estão representados os três primeiros termos de uma sequência infinita de figuras.

O círculo da primeira figura tem 2 cm de raio e cada um dos círculos seguintes tem de raio metade do raio do círculo da figura anterior.

Seja (a_n) a progressão geométrica que a cada figura faz corresponder a área, em centímetros quadrados, do círculo da figura de ordem n.



43.1. Determina:

a) a_1

b) a razão de (a_n).

43.2. Escreve o termo geral de (a_n).

43.3. Determina a soma dos cinco primeiros termos de (a_n).

Para aplicar

1 **Considera uma progressão aritmética (c_n) de razão 3.**

Determina:

1.1. c_{25}, se $c_5 = 2$;

1.2. c_7, se $c_{20} = 36$;

1.3. o termo geral de (c_n), se $c_{12} = 64$.

2 **Determina o termo geral da progressão aritmética (a_n), sabendo que:**

2.1. $a_5 = 10$ e $a_{13} = 24$

2.2. $a_{12} = -5$ e $a_3 = -20$

2.3. $a_7 = 14$ e $a_{13} = 26$

3 **Considera a sucessão (u_n) definida por:**

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1. Mostra que (u_n) é uma progressão aritmética e indica a sua razão.

3.2. Estuda (u_n) quanto à monotonia.

3.3. Escreve o termo geral de (u_n).

3.4. Determina a ordem a partir da qual os termos de (u_n) são inferiores a -10.

4 **De uma progressão aritmética (d_n), sabe-se que $d_{10} = 12$ e $d_{20} = 62$.**

4.1. Determina a razão de (d_n).

4.2. Escreve o termo geral de (d_n).

4.3. Determina a soma dos 10 primeiros termos de (d_n).

4.4. Sabendo que a soma dos N primeiros termos de (d_n), com $N \in \mathbb{N}$, é -126, determina o valor de N.

5 **A soma dos sete primeiros termos da progressão aritmética (e_n) é -35. Sabendo que a razão de (e_n) é -2, determina o termo geral de (e_n).**

Para aplicar

6 **Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:**

$$u_n = \frac{2^{3n}}{5} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n}{5}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6.1. Mostra que as sucessões são progressões geométricas.

6.2. Representa (v_n) através do seu termo geral.

6.3. Estuda as sucessões quanto à monotonia.

7 **Determina o termo geral da progressão geométrica (b_n), sabendo que:**

7.1. $b_5 = 10$ e $r = -2$

7.2. $b_5 = 20$ e $r = -\frac{1}{2}$

7.3. $b_4 = 10$ e $b_5 = 20$

7.4. $b_5 = 3$ e $b_8 = -81$

8 **Considera a sucessão (c_n) de termo geral $c_n = 3 \times 5^{2n-1}$.**

8.1. Verifica se a sucessão (c_n) é uma progressão geométrica e, em caso afirmativo, indica a sua razão.

8.2. Define a sucessão por recorrência.

8.3. Verifica que 375 é termo da sucessão e indica a sua ordem.

8.4. Determina a soma dos 10 primeiros termos da sucessão (c_n).

9 **Considera a sucessão (d_n) definida por $d_n = \frac{3^{-n+1}}{2}$.**

9.1. Mostra que (d_n) é uma progressão geométrica.

9.2. Calcula a soma dos cinco primeiros termos de (d_n).

9.3. Estuda (d_n) quanto à monotonia.

9.4. Considera a progressão aritmética (e_n) tal que $e_4 = d_1$ e a sua razão é igual a d_2.

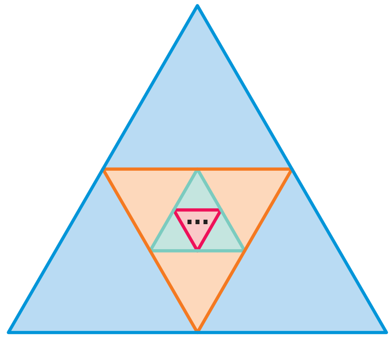
a) Escreve o termo geral de (e_n).

b) Determina a soma dos 10 termos de (e_n), a partir do 7.º termo, inclusive.

10 **Na figura está representada uma sequência infinita de triângulos equiláteros.**

O primeiro triângulo tem 4 unidades de lado e a medida do lado de cada triângulo, a partir do segundo, é metade da medida do lado do triângulo anterior.

Seja (t_n) a sucessão em que cada termo representa a medida do lado do triângulo com a mesma ordem.

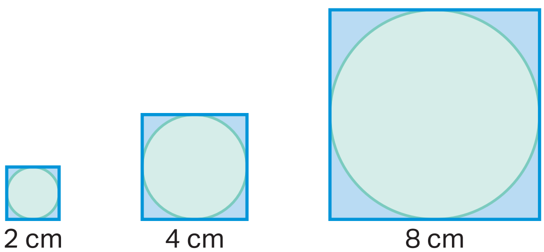


10.1. Determina o termo geral da sucessão (t_n).

10.2. Mostra que a sucessão (t_n) é uma progressão geométrica.

10.3. Determina o perímetro do 10.º triângulo da sequência.

11 **Considera as três primeiras figuras, constituídas por um quadrado e um círculo nele inscrito, de uma sequência infinita.**



Na primeira figura, o quadrado tem 2 cm de lado e em cada uma das figuras seguintes a medida do lado do quadrado é o dobro da medida do lado do quadrado da figura anterior.

Considera as sucessões:

- (l_n), que à n-ésima figura faz corresponder a medida do lado do quadrado;
- (a_n), que à n-ésima figura faz corresponder a medida da área do círculo.

11.1. Qual é o primeiro termo e a razão da sucessão (l_n)?

11.2. Sabendo que (a_n) é uma progressão geométrica, determina o seu termo geral.

11.3. Determina a soma das áreas dos cinco primeiros círculos da sequência.

3.4. Limites de sucessões

Manual Digital

Vídeo
Limite de uma sucessão

3.4.1. Definição de limite de uma sucessão

A saber

Dados dois números reais a e r, com $r > 0$, designa-se por **vizinhança de centro a e raio r**, e representa-se por $V_r(a)$, o intervalo $]a-r, a+r[$.

$x \in V_r(a) \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[\Leftrightarrow |x-a| < r$

Consideremos a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$$

Os quatro primeiros termos da sucessão (u_n) são:

$$\frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{25}{8}, \frac{49}{16}$$

Vamos mostrar que, a partir de uma ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, todos os termos da sucessão pertencem a $V_{0,1}(3)$.

$$|u_n - 3| < 0{,}1 \Leftrightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 - 3\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$$

Então: $2^n > 10 \Leftrightarrow n > 3$

A partir do termo de ordem 4, inclusive, todos os termos pertencem a $V_{0,1}(3)$.

Assim, podemos concluir que $n \geqslant 4 \Longrightarrow |u_n - 3| < 0{,}1$.

Diz-se que um número real a é **limite de uma sucessão (u_n)**, e escreve-se $\lim u_n = a$, se para todo $\delta \in \mathbb{R}^+$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Longrightarrow |u_n - a| < \delta$$

Se o limite existe, a **sucessão** (u_n) diz-se **convergente**.

Caso contrário, a **sucessão** diz-se **divergente**.

Notação:

Podemos escrever $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, $\lim u_n = a$ ou $u_n \longrightarrow a$, que se leem, respetivamente, "o limite de (u_n), quando n tende para mais infinito, é a", "o limite de (u_n) é a" e "(u_n) tende para a ou converge para a".

Exemplo

Consideremos a sucessão (v_n) definida por $v_n = \dfrac{5n+1}{n}$.

- Vamos determinar a menor ordem a partir da qual todos os termos de (v_n) pertencem a $V_{0,1}(5)$.

  $v_n \in V_{0,1}(5) \iff \left|\dfrac{5n+1}{n} - 5\right| < 0{,}1 \iff \dfrac{1}{n} < 0{,}1 \iff n > 10$

  A menor ordem será 11.

- Mostremos que $\lim v_n = 5$.

  Para tal, temos de mostrar que, para todo o número real positivo δ, existe um número natural p tal que: $\forall n \in \mathbb{N}:\ n \geqslant p \implies |v_n - 5| < \delta$

  Como $|v_n - 5| < \delta \iff \left|\dfrac{5n+1}{n} - 5\right| < \delta \iff \left|\dfrac{1}{n}\right| < \delta \iff \dfrac{1}{n} < \delta \iff n > \dfrac{1}{\delta}$

  Sendo p um número natural maior do que $\dfrac{1}{\delta}$, temos:

  $\forall n \in \mathbb{N}:\ n \geqslant p \implies |v_n - 5| < \delta$, isto é, $\lim v_n = 5$

Exercícios

44 **Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \dfrac{5n+1}{2n}$.**

44.1. Determina a ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_{0,01}\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

44.2. Prova que $\lim (u_n) = \dfrac{5}{2}$.

45 **Prova, usando a definição de limite, que:**

45.1. $\lim \left(\dfrac{3n}{n+1}\right) = 3$

45.2. $\lim \left(\dfrac{5}{n}\right) = 0$

45.3. $\lim \left(\dfrac{2n-1}{n+3}\right) = 2$

46 **Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \dfrac{5}{2n+1}$.**

46.1. Determina a ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_{0,01}(0)$.

46.2. Prova que $\lim (v_n) = 0$.

Manual Digital

Vídeo
Unicidade do limite de uma sucessão

Teorema

O limite de uma sucessão convergente é único.

Suponhamos que uma sucessão convergente (u_n) é tal que $u_n \longrightarrow a$ e $u_n \longrightarrow b$, com $a \neq b$.

Assim, sabemos que $\lim (u_n) = a$ e $\lim (u_n) = b$.

Desta forma, para todo o $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $p' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p' \implies u_n \in V_\delta(a)$$

e existe $p'' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p'' \implies u_n \in V_\delta(b)$$

Seja p o maior valor entre p' e p''.

Então: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n \in V_\delta(a) \cap V_\delta(b)$

Para $\delta < \frac{|a-b|}{2}$, temos $V_\delta(a) \cap V_\delta(b) = \{\ \}$, logo estamos perante um absurdo.

Então, (u_n) tem um só limite.

Limite de uma sucessão constante

Da definição de limite de uma sucessão, sabemos que $\lim u_n = a \iff \lim (u_n - a) = 0$.

Desta forma, se uma sucessão (u_n) for constante, (u_n) é convergente e o seu limite é a própria constante.

Uma sucessão constante tem como limite a própria constante.

Exemplos

1. $\lim (5) = 5$

2. $\lim \left(-\frac{1}{2}\right) + \lim (-2) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

3. $\lim (\sqrt{3}) : \lim (2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A saber

Seja k uma constante.

$$\lim (k) = k$$

Exercício

47 Calcula:

47.1. $\lim\left(\sqrt{3}\right)$

47.2. $\lim\left(-\frac{7}{3}\right)$

47.3. $\lim(0)\times\lim\left(\frac{1}{2}\right)$

47.4. $\lim(2):\lim(7)$

47.5. $\lim(5)+\lim(-2)$

3.4.2. Sucessões monótonas, limitadas e convergentes

Toda a sucessão convergente é limitada.

Consideremos uma sucessão convergente (u_n) tal que $\lim u_n = a$.

Sabemos que, para um valor de $\delta > 0$, existe um número natural p tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; n \geqslant p \implies a-\delta < u_n < a+\delta$$

Desta forma, há um número finito de termos de (u_n) que não pertencem a $V_\delta(a)$. Esses termos pertencem a $[m\,,\; a-\delta] \cup [a+\delta\,,\; M]$, sendo m e M o menor e o maior desses termos, respetivamente.

Sejam L' o mínimo de $[m\,,\; a-\delta] \cup [a+\delta\,,\; M]$ e L'' o máximo de $[m\,,\; a-\delta] \cup [a+\delta\,,\; M]$.

Então, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\; L' < (u_n) < L''$. Logo, (u_n) é limitada.

Exemplo

Consideremos a sucessão (v_n) definida por $v_n = \dfrac{5n-1}{n}$.

- A sucessão (v_n) é crescente.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5n+5-1}{n+1} - \frac{5n-1}{n} = \frac{5n^2+5n-n-5n^2+n-5n+1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0\,,\; \forall n \in \mathbb{N}$$

- Como a sucessão (v_n) é crescente, $v_1 = 4$ é o mínimo.

- Usando o algoritmo da divisão, sabemos que $v_n = \frac{5n-1}{n} = 5 - \frac{1}{n}$.

  Atendendo ao que esta expressão nos sugere, vamos provar que (v_n) converge para 5, ou seja, que $\lim\left(\frac{5n-1}{n}\right) = 5$.

  Queremos, portanto, mostrar que, para todo o número real positivo δ, existe um número natural p tal que: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies |v_n - 5| < \delta$

  $$|v_n - 5| < \delta \iff \left|\frac{5n-1}{n} - 5\right| < \delta \iff \left|-\frac{1}{n}\right| < \delta \iff \frac{1}{n} < \delta \iff n > \frac{1}{\delta}$$

  Seja p o menor número natural que é maior do que $\frac{1}{\delta}$. Então:

  $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies |v_n - 5| < \delta$, isto é, $\lim v_n = 5$

Exercício

48 **Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = -\frac{3n}{n+1}$.**

48.1. Mostra que (u_n) é decrescente.

48.2. Mostra que (u_n) é limitada.

48.3. Prova, por definição, que $\lim(u_n) = -3$.

Propriedades

- Toda a sucessão crescente em sentido lato e majorada é convergente.
- Toda a sucessão decrescente em sentido lato e minorada é convergente.
- Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Exemplo

Vamos provar que a sucessão (v_n) definida por $v_n = \frac{2n}{n+1}$ é convergente.

- Estudemos a sucessão (v_n) quanto à monotonia.

  $$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+2}{n+1+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-4n}{(n+2)(n+1)} =$$

  $$= \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

  Logo, (v_n) é estritamente crescente.

- Vejamos que (v_n) é limitada.

$$v_n = \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$$

A sucessão de termo geral $\frac{1}{n+1}$ é decrescente de termos positivos. Então:

$$0 < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 > -\frac{2}{n+1} \geqslant -1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2 - \frac{2}{n+1} < 2$$

Logo: $1 \leqslant v_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Assim, (v_n) é limitada.

Como (v_n) é monótona e limitada, então é convergente.

Exercícios

49 **Considera a sucessão (w_n) definida por $w_n = \frac{1-5n}{n+1}$.**

49.1. Mostra que a sucessão é monótona decrescente.

49.2. Verifica se (w_n) é limitada.

49.3. Podemos concluir que (w_n) é convergente? Justifica.

49.4. Prova, por definição de limite, que $\lim w_n = -5$.

50 **A sucessão (u_n) tem termo geral $u_n = \frac{2n-3}{n+2}$.**

50.1. Mostra que (u_n) é monótona e limitada.

50.2. O que podes concluir quanto à convergência de (u_n)?

50.3. Prova, por definição de limite, que $\lim u_n = 2$.

A saber

Nem toda a sucessão limitada é convergente.

Exemplo

Consideremos a sucessão (u_n) definida por $u_n = (-1)^n$.

Sabemos que: $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ par} \\ -1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

Logo, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$, isto é, (u_n) é limitada.

Para n par, sabemos que $u_n \longrightarrow 1$ e, para n ímpar, $u_n \longrightarrow -1$.

Portanto, (u_n) é divergente.

Exercício

51 Considera as sucessões (a_n), (b_n) e (c_n) a seguir definidas.

$a_n = \frac{2}{2n+1}$	$b_n = -\frac{3n}{n+1}$	$c_n = (-1)^{n+1}$

Analisa, quanto à convergência, cada uma das sucessões apresentadas.

3.4.3. Limites infinitos

Consideremos a sucessão (u_n) definida por $u_n = 3n + 1$.

Os seus primeiros termos são:

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \ldots$$

Qualquer que seja o número real positivo L considerado, haverá sempre termos da sucessão que são superiores a L.

Assim, dizemos que (u_n) tende para $+\infty$, isto é, $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

Uma sucessão (u_n) tem limite $+\infty$ quando, para todo o número real positivo L, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n > L$$

Exemplo

Vamos provar que $\lim \left(\frac{5n+1}{2}\right) = +\infty$.

Consideremos um número positivo L tal que $\frac{5n+1}{2} > L$.

$$\frac{5n+1}{2} > L \iff 5n+1 > 2L \iff n > \frac{2L-1}{5}$$

Deste modo, qualquer que seja o valor tomado para o número positivo L, haverá sempre uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}:\ n \geqslant p \implies u_n > L$.

Neste caso, p será um número natural superior a $\frac{2L-1}{5}$.

Assim, $\lim \left(\frac{5n+1}{2}\right) = +\infty$.

Manual Digital

Vídeo
Sucessão divergente

Exercício

52 Em cada um dos casos seguintes, mostra, por definição, que $\lim (u_n) = +\infty$.

52.1. $u_n = 5n$

52.2. $u_n = -\dfrac{2-n}{3}$

52.3. $u_n = n^2$

Consideremos a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = -2n + 1$.

Os seus primeiros termos são -1 , -3 , -5 , -7 , -9 , -11 , ...

Qualquer que seja o número real positivo L considerado, haverá sempre termos da sucessão que são inferiores a $-L$.

Assim, dizemos que (v_n) tende para $-\infty$, isto é, $u_n \longrightarrow -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

Uma sucessão (u_n) tem limite $-\infty$ quando, para todo o número real positivo L , existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n < -L$$

Exemplo

Vamos provar que $\lim (-3n) = -\infty$.

Consideremos um número positivo L tal que $-3n < -L$.

$$-3n < -L \iff 3n > L \iff n > \frac{L}{3}$$

Neste caso, sendo p um número natural superior a $\frac{L}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n < -L$$

Assim: $\lim (-3n) = -\infty$

A saber

Dizemos que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande** se:

$\lim u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$

Exercício

53 Em cada um dos casos seguintes, mostra, por definição, que $\lim (u_n) = -\infty$.

53.1. $u_n = -5n + 1$

53.2. $u_n = \dfrac{1-3n}{2}$

53.3. $u_n = -n^2$

Nota:
Se $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $u_n \longrightarrow -\infty$, então (u_n) é divergente.

Consideremos a sucessão (u_n) definida por $u_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$.

Vamos mostrar, usando a definição de limite, que $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\left|\dfrac{3n+1}{2n-1} - \dfrac{3}{2}\right| < \delta$.

Assim:

$$\left|\frac{6n+2-6n+3}{4n-2}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{5}{4n-2}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{4n-2} < \delta \Leftrightarrow 5 < 4n\delta - 2\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5+2\delta}{4\delta} < n \Leftrightarrow n > \frac{5+2\delta}{4\delta}$$

Logo, existe um número natural p tal que: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies \left|\dfrac{3n+1}{2n-1} - \dfrac{3}{2}\right| < \delta$

Desta forma, p é um número natural maior do que $\dfrac{5+2\delta}{4\delta}$.

Logo, $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.

De forma geral, temos:

Consideremos a sucessão definida por $\dfrac{an+b}{cn+d}$, com $cn+d \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Se $a = 0$: $\lim \dfrac{an+b}{cn+d} = \lim \dfrac{b}{cn+d} = 0$
- Se $c \neq 0$: $\lim \dfrac{an+b}{cn+d} = \dfrac{a}{c}$
- Se $c = 0$: $\lim \left(\dfrac{an+b}{cn+d}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \dfrac{a}{d} > 0 \\ -\infty & \text{se } \dfrac{a}{d} < 0 \end{cases}$

Exemplos

1. $\lim \left(\dfrac{2n+3}{5n}\right) = \dfrac{2}{5}$

2. $\lim \left(\dfrac{1-2n}{3n+1}\right) = -\dfrac{2}{3}$

3. $\lim \left(2n - \dfrac{3}{4}\right) = +\infty$

4. $\lim (5-3n) = -\infty$

5. $\lim \left(\dfrac{3}{2+n}\right) = 0$

Exercícios

54 Considera as sucessões a seguir definidas.

$a_n = \frac{-4n+1}{2-n}$ $b_n = \frac{2n-1}{3}$ $c_n = \frac{1}{1-3n}$ $d_n = \frac{3-6n}{2}$

54.1. Indica o limite de cada uma das sucessões.

54.2. Verifica as respostas anteriores, usando a definição de limite.

55 Indica o limite da sucessão de termo geral:

55.1. $a_n = \frac{-n+1}{2-n}$ **55.2.** $b_n = \frac{n}{5-n}$ **55.3.** $c_n = \frac{1}{2+3n}$

55.4. $d_n = \frac{5}{3+2n}$ **55.5.** $e_n = \frac{5n+1}{2}$ **55.6.** $f_n = \frac{3-2n}{5}$

55.7. $g_n = -7n$ **55.8.** $h_n = 3+n$ **55.9.** $i_n = \frac{-7}{n}$

Manual Digital

Vídeo
Limite de sucessões que diferem num número finito de termos

Sucessões que diferem num número finito de termos

Tarefa

Considera as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = n^2 \quad \text{e} \quad b_n = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad n < 5 \\ n^2 & \text{se} \quad n \geqslant 5 \end{cases}$$

Prova, por definição de limite, que:

1 $\lim (a_n) = +\infty$

2 $\lim (b_n) = +\infty$

As sucessões consideradas na tarefa anterior diferem apenas nos quatro primeiros termos. Para $n \geqslant 5$, as duas sucessões têm os mesmos termos. Desta forma, quando $n \longrightarrow +\infty$, as sucessões comportam-se da mesma forma.

O mesmo acontece com sucessões que têm um limite finito.

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões que diferem num número finito de termos.

- Se $\lim (u_n) = k$, com $k \in \mathbb{R}$, então $\lim (v_n) = k$.
- Se $\lim (u_n) = +\infty$, então $\lim (v_n) = +\infty$.
- Se $\lim (u_n) = -\infty$, então $\lim (v_n) = -\infty$.
- Se não existe $\lim (u_n)$, então não existe $\lim (v_n)$.

Exemplo

Sejam (u_n) e (v_n) as sucessões definidas por $u_n = \begin{cases} -n & \text{se } n \leqslant 3 \\ n+1 & \text{se } n > 3 \end{cases}$ e $v_n = n + 1$.

Como as sucessões diferem nos três primeiros termos e $\lim (v_n) = +\infty$, então $\lim (u_n) = +\infty$.

3.4.4. Operações algébricas com sucessões

Propriedade

Consideremos uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (v_n) tal que $v_n \longrightarrow 0$. Então:

$$\lim (u_n \times v_n) = 0$$

Exemplo

$\lim \left[(-1)^n \times \frac{3}{2n+1}\right] = 0$, pois $\lim \left(\frac{3}{2n+1}\right) = 0$ e a sucessão de termo geral $(-1)^n$ é limitada.

Exercício

56 Mostra que o limite de cada uma das sucessões a seguir definidas é 0.

56.1. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

56.2. $b_n = \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$

56.3. $c_n = \frac{\sin(n)}{2n+1}$

Limite de uma potência de *n*

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = n^p$, com $p \in \mathbb{Q}$.

$$\lim (n^p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 0 \\ +\infty & \text{se } p > 0 \\ 0 & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

Exemplos

1. Vamos provar, pela definição de limite, que $\lim\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)=0$.

Seja $\delta>0$.

$$\left|n^{-\frac{3}{2}}-0\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right|<\delta \Leftrightarrow \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\delta \Leftrightarrow 1<\delta n^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\delta}<n^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\delta}<\sqrt{n^3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\delta}\right)^2<n^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{\delta^2}}<n \Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt[3]{\delta^2}}$$

Assim, para $p\in\mathbb{N}\wedge p>\frac{1}{\sqrt[3]{\delta^2}}$, temos:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p \implies \left|n^{-\frac{3}{2}}\right|<\delta$$

Logo, $\lim\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)=0$.

2. Mostremos, pela definição de limite, que $\lim\left(n^2\right)=+\infty$.

Seja $L>0$.

$$n^2>L \Leftrightarrow n>L^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow n>\sqrt{L}$$

Assim, para $p\in\mathbb{N}\wedge p>\sqrt{L}$, temos:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p \implies n^2>L$$

Então, $\lim\left(n^2\right)=+\infty$.

3. $\lim\left(n^{\frac{1}{2}}\right)=+\infty$

4. $\lim\left(n^{-3}\right)=0$

Manual Digital

Vídeo
Limite da sucessão n^p

Exercício

57 **Indica o limite da sucessão de termo geral:**

57.1. $a_n=n^{\frac{3}{2}}$

57.2. $b_n=\sqrt[3]{n^2}$

57.3. $c_n=\frac{1}{n^2}$

57.4. $d_n=n^{-\frac{3}{5}}$

57.5. $e_n=\frac{1}{n^{-\frac{1}{2}}}$

57.6. $f_n=\frac{n}{\sqrt{n^3}}$

57.7. $g_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2}$

Limite da soma de sucessões convergentes

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes. Então, a sucessão $(u_n + v_n)$ é convergente e:

$$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

Manual Digital

Vídeo
Limite da soma de duas sucessões convergentes

Demonstração:

Consideremos duas sucessões convergentes (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = a$ e $\lim v_n = b$, com a, $b \in \mathbb{R}$.

Para todo o $\delta \in \mathbb{R}^+$, existem números naturais p' e p'' tais que:

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p' \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2}$ e $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p'' \implies |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$

Seja p o máximo de $\{p',\ p''\}$.

Então: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \wedge |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$

Logo:

$|u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \implies |(u_n - a) + (v_n - b)| < \delta \iff |(u_n + v_n) - (a + b)| < \delta$

Desta forma: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies |(u_n + v_n) - (a + b)| < \delta$

Assim: $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$

Exercício

58 Considera as sucessões definidas por:

$a_n = \frac{-n+1}{2+n}$

$b_n = \frac{n-3}{2n}$

$c_n = \frac{3-n}{5+2n}$

$d_n = \frac{5n+1}{3n-2}$

$e_n = \frac{5}{1-3n}$

Determina:

58.1. $\lim a_n$

58.2. $\lim b_n$

58.3. $\lim c_n$

58.4. $\lim d_n$

58.5. $\lim e_n$

58.6. $\lim (a_n + b_n)$

58.7. $\lim (a_n + c_n)$

58.8. $\lim (c_n + d_n)$

58.9. $\lim (b_n + e_n)$

58.10. $\lim (b_n + c_n)$

Limite do produto de sucessões convergentes

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes. Então, a sucessão $(u_n \times v_n)$ é convergente e:

$$\lim (u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$$

Manual Digital

Vídeo
Limite do produto de duas sucessões convergentes

Atividade
Limite do produto de uma constante por uma sucessão convergente

Demonstração:

Consideremos duas sucessões convergentes (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = a$ e $\lim v_n = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Para todo o $\delta \in \mathbb{R}^+$, existem números naturais p' e p'' tais que:

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p' \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2}$ e $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p'' \implies |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$

Seja p o máximo de $\{p', p''\}$. Então: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \wedge |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$

Sabemos que $u_n v_n - ab = u_n v_n - u_n b + u_n b - ab = u_n (v_n - b) + b(u_n - a)$.

Pela desigualdade triangular:

$|u_n v_n - ab| \leqslant |(u_n - a)\, v_n| + |a(v_n - b)|$ e $|u_n v_n - ab| \leqslant |(u_n - a)|\,|v_n| + |a||(v_n - b)|$

Logo: $|u_n - a| \times |v_n - b| < \frac{\delta}{2} \times \frac{\delta}{2} \implies |(u_n - a) \times (v_n - b)| < \frac{\delta^2}{4} \implies |u_n v_n - ab| < \delta$

Desta forma: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies |u_n v_n - ab| < \delta$

Assim: $\lim (u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$

Propriedade

Sejam (u_n) uma sucessão convergente e $a \in \mathbb{R}$. Então, a sucessão (au_n) é convergente e:

$$\lim (au_n) = a \lim u_n$$

Exercício

59 Considera as sucessões (a_n), (b_n) e (c_n) tais que:

$\lim a_n = -\frac{5}{2}$ $\quad$ $\lim b_n = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\lim c_n = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Determina:

59.1. $\lim (a_n \times b_n)$

59.2. $\lim (a_n \times c_n)$

59.3. $\lim (c_n \times b_n)$

59.4. $\lim (\sqrt{3} c_n)$

59.5. $\lim (-2 \times a_n + 1)$

59.6. $\lim (4 \times b_n - \sqrt{3} c_n)$

Limite do quociente de sucessões convergentes

Manual Digital

Vídeo
Limite do quociente de duas sucessões convergentes

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes, com $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim v_n \neq 0$.
Então, a sucessão $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ é convergente e:

$$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$$

Exercício

60 Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) tais que $\lim u_n = -\sqrt{2}$, $\lim v_n = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $\lim w_n = -\frac{2}{3}$. Determina:

60.1. $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

60.2. $\lim\left(\frac{u_n}{w_n}\right)$

60.3. $\lim\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$

60.4. $\lim\left(\frac{1}{v_n}\right)$

60.5. $\lim\left(2u_n + \frac{1}{w_n}\right)$

Limite de uma potência

Sejam (u_n) uma sucessão convergente e $p \in \mathbb{Z}$.
Se $p \in \mathbb{Z}^+$ ou se $p \in \mathbb{Z}_0^-$, $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim u_n \neq 0$, então a sucessão $(u_n)^p$ é convergente e:

$$\lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$$

Demonstração:

Seja (u_n) uma sucessão convergente tal que $\lim u_n = a$.

Se $p = 0$ e $a \neq 0$: $\lim (u_n)^0 = \lim 1 = 1$ e $(\lim u_n)^0 = a^0 = 1$

Se $p \in \mathbb{Z}^+$:

- para $p = 1$, sabemos que $\lim (u_n)^1 = \lim u_n = a = (\lim u_n)^1$;
- para $p \in \mathbb{N}$, consideremos verdadeira a proposição $\lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$ (hipótese de indução).

  Queremos mostrar que $\lim (u_n)^{p+1} = (\lim u_n)^{p+1}$.

$$\lim (u_n)^{p+1} = \lim \left[(u_n)^p \times (u_n)^1\right] = \lim (u_n)^p \times \lim (u_n) \underset{\uparrow}{=} (\lim u_n)^p \times \lim (u_n) =$$

$$= (\lim u_n)^{p+1}$$

Por hipótese de indução

Logo: $\forall p \in \mathbb{Z}^+ ,\ \lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$

Se $p \in \mathbb{Z}^-$:

Consideremos $p = -p'$, com $p' \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\lim (u_n)^p = \lim (u_n)^{-p'} \underbrace{=}_{u_n \neq 0} \lim \left[\frac{1}{(u_n)^{p'}}\right] = \frac{1}{\lim (u_n)^{p'}} = \frac{1}{(\lim u_n)^{p'}} = (\lim u_n)^{-p'} = (\lim u_n)^p$$

Manual Digital

Vídeo
Limite da potência de uma sucessão convergente

Exemplo

Sabendo que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então:

- $\lim (a_n)^2 = (\lim a_n)^2 = a^2$
- $\lim (b_n)^{-5} = (\lim b_n)^{-5} = b^{-5} = \frac{1}{b^5}$
- $\lim (a_n + b_n)^3 = [\lim (a_n + b_n)]^3 = (\lim a_n + \lim b_n)^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$

Exercícios

61 Considera as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por $a_n = \frac{5n+2}{1-n}$ e $b_n = \frac{1-2n}{4n+3}$.

Indica o valor de:

61.1. $\lim a_n$

61.2. $\lim b_n$

61.3. $\lim (a_n)^3$

61.4. $\lim (b_n)^{-2}$

61.5. $\lim (a_n + b_n)^2$

61.6. $\lim (a_n + 3b_n)^2$

61.7. $\lim (a_n - b_n)^3$

61.8. $\lim (-a_n + 3b_n)^2$

62 Considera as sucessões (c_n), (d_n) e (e_n) tais que $\lim c_n = 3$, $\lim d_n = -2$ e $\lim e_n = \frac{2}{5}$. Indica o valor de:

62.1. $\lim (e_n)^{-2}$

62.2. $\lim (c_n + d_n)^{-1}$

62.3. $\lim (c_n + d_n)^2$

62.4. $\lim (d_n - e_n)^2$

62.5. $\lim (2c_n + e_n)^2$

62.6. $\lim (-c_n + d_n)^2$

63 Considera as sucessões (u_n) e (v_n) tais que $u_n = \frac{4n-1}{n+1}$ e $\lim (u_n + v_n)^2 = 36$.

63.1. Determina $\lim v_n$.

63.2. Dá um exemplo de uma sucessão (v_n) nestas condições.

Limite de uma raiz

Caso o expoente seja um número racional, podemos generalizar a propriedade do limite de uma potência.

Sejam (u_n) uma sucessão convergente de termos não negativos e $p \in \mathbb{N}$.
Então, $\left(\sqrt[p]{u_n}\right)$ é uma sucessão convergente e:

$$\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}$$

Nota:
Se a sucessão (u_n) for convergente com termos negativos e p for um número natural ímpar, a propriedade anterior também é válida.

Exemplo

Considerando a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{3+4n}{2n+1}$, sabemos que $\lim u_n = 2$.

- $\lim (u_n)^{\frac{1}{2}} = (\lim u_n)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- $\lim \sqrt{(u_n)^3} = \sqrt{\lim (u_n)^3} = \sqrt{(\lim u_n)^3} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

Exercício

64 Considera as sucessões (v_n) e (w_n) definidas por:

$$v_n = \frac{5n+1}{2+n} \qquad w_n = 9n+5$$

Determina:

64.1. $\lim v_n$

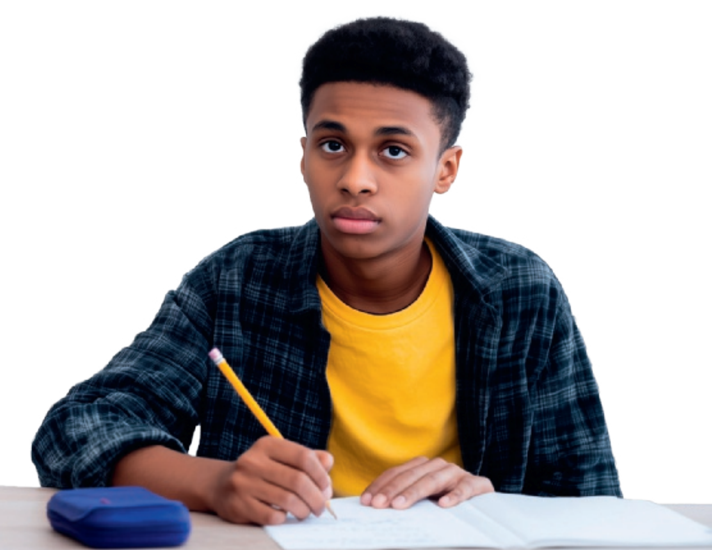
64.2. $\lim w_n$

64.3. $\lim \sqrt{w_n}$

64.4. $\lim \sqrt[3]{(v_n)^2}$

64.5. $\lim \sqrt{(v_n \times w_n)^3}$

64.6. $\lim \sqrt{\frac{v_n}{w_n}}$



3.4.5. Operações com infinitamente grandes

Limite da soma de infinitamente grandes

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}$, então:

$$\lim (u_n + v_n) = +\infty$$

Demonstração:

$\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}$, isto é, (v_n) é convergente, então (v_n) é limitada.

Seja m, com $m \in \mathbb{R}$, um minorante de (v_n). Então: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant m$ (*)

Como $\lim u_n = +\infty$, então, para qualquer número positivo L, existe uma ordem p, com $p \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n \geqslant p \implies u_n > L - m \text{ (**)}$$

De (*) e (**) vem:

$n \geqslant p \implies u_n + v_n > L - m + m$. Logo: $n \geqslant p \implies u_n + v_n > L$

Assim, $\lim (u_n + v_n) = +\infty$.

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = +\infty$, então:

$$\lim (u_n + v_n) = +\infty$$

Demonstração:

Como $\lim u_n = +\infty$, então, para qualquer valor positivo L, existe uma ordem p', com $p' \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n \geqslant p' \implies u_n > \frac{L}{2}$$

Se $\lim v_n = +\infty$, então, para qualquer valor positivo L, existe uma ordem p'', com $p'' \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n \geqslant p'' \implies v_n > \frac{L}{2}$$

Sendo p o máximo de $\{p',\ p''\}$, então $n \geqslant p \implies u_n > \frac{L}{2} \wedge v_n > \frac{L}{2}$.

Logo:

$n \geqslant p \implies u_n + v_n > \frac{L}{2} + \frac{L}{2}$, isto é, $n \geqslant p \implies u_n + v_n > L$

Assim, $\lim (u_n + v_n) = +\infty$.

De forma análoga, prova-se que:

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}$, então:

$$\lim (u_n + v_n) = -\infty$$

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = -\infty$, então:

$$\lim (u_n + v_n) = -\infty$$

Manual Digital

Vídeo
Limite da sucessão soma

Exemplo

Consideremos as sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas por:

$a_n = 3n - 2$, $b_n = 5 - 3n$, $c_n = \dfrac{1-2n}{n+3}$ e $d_n = \dfrac{3+n}{2n}$

Sabemos que $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$, $\lim c_n = -2$ e $\lim d_n = \dfrac{1}{2}$.

Desta forma, concluímos que:

- $\lim (a_n + c_n) = +\infty + (-2) = +\infty$
- $\lim (a_n + d_n) = +\infty + \dfrac{1}{2} = +\infty$
- $\lim (b_n + c_n) = -\infty + (-2) = -\infty$
- $\lim (b_n + d_n) = -\infty + \dfrac{1}{2} = -\infty$

A saber

Seja $a \in \mathbb{R}$.

- $+\infty + a = +\infty$
- $-\infty + a = -\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

Exercício

65 Considera as sucessões definidas por:

$u_n = \dfrac{1-2n}{3n-2}$ $\quad v_n = 5 - 2n$ $\quad w_n = n + 3$ $\quad t_n = \dfrac{6n-2}{3n}$

Indica o valor de:

65.1. $\lim u_n$ **65.2.** $\lim v_n$ **65.3.** $\lim w_n$

65.4. $\lim t_n$ **65.5.** $\lim (u_n + v_n)$ **65.6.** $\lim (u_n + w_n)$

65.7. $\lim (t_n + v_n)$ **65.8.** $\lim (t_n + w_n)$

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$

Quando consideramos duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$, nada se pode afirmar acerca de $\lim(u_n + v_n)$, tendo cada situação de ser tratada individualmente.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplos

1. $\lim(5n+3) = +\infty$; $\lim(2-3n) = -\infty$

$$\lim[(5n+3)+(2-3n)] = \lim(5n+3+2-3n) = \lim(2n+5) = +\infty$$

2. $\lim\left(n^2-2\right) = +\infty$; $\lim\left(5-n^2\right) = -\infty$

$$\lim\left[\left(n^2-2\right)+\left(5-n^2\right)\right] = \lim\left(n^2-2+5-n^2\right) = \lim(3) = 3$$

3. $\lim(n+3) = +\infty$; $\lim(-3n) = -\infty$

$$\lim[(n+3)+(-3n)] = \lim(3-2n) = -\infty$$

Assim, dizemos que $+\infty + (-\infty)$ ou, simplesmente, $\infty - \infty$ é uma **indeterminação.**

Designamos por **levantar a indeterminação** ao processo que permite calcular o valor do referido limite, caso exista.

Exemplo

Consideremos as sucessões:

$$v_n = 2n+5 \text{ e } w_n = 1-n$$

Sabemos que:

$$\lim(v_n) = +\infty \text{ e } \lim(w_n) = -\infty$$

Se pretendermos determinar $\lim(v_n + w_n)$, estamos perante uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Vamos levantar a indeterminação efetuando os cálculos:

$$\lim(v_n + w_n) = \lim(2n+5+1-n) = \lim(n+6) = +\infty$$

A saber

$+\infty - \infty$ é uma indeterminação.

Exercício

66 Considera as sucessões de termo geral:

$a_n = -n + 5$ | $b_n = \dfrac{1-n}{2}$ | $c_n = \dfrac{1+n}{3}$ | $d_n = 2n - 7$

66.1. Determina:

a) $\lim a_n$

b) $\lim b_n$

c) $\lim c_n$

d) $\lim d_n$

66.2. Justifica que:

a) $\lim (a_n + d_n) = +\infty$

b) $\lim (b_n + c_n) = -\infty$

66.3. Determina:

a) $\lim (a_n + c_n)$

b) $\lim (b_n + d_n)$

Limite do produto de infinitamente grandes

Consideremos as sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = +\infty$.
Então, $\lim (u_n \times v_n) = +\infty$.

Demonstração:

Como $\lim u_n = +\infty$, então, para qualquer valor positivo L, existe uma ordem p', com $p' \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n \geqslant p' \implies u_n > \sqrt{L}$$

Se $\lim v_n = +\infty$, então, para qualquer valor positivo L, existe uma ordem p'', com $p'' \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n \geqslant p'' \implies v_n > \sqrt{L}$$

Sendo p o máximo de $\{p', p''\}$, então: $n \geqslant p \implies u_n > \sqrt{L} \wedge v_n > \sqrt{L}$

Logo:

$$n \geqslant p \implies u_n \times v_n > L$$

Desta forma, $\lim (u_n \times v_n) = +\infty$.

De forma análoga, prova-se que:

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n):

- se $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = -\infty$, então $\lim (u_n \times v_n) = +\infty$;
- se $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = +\infty$, então $\lim (u_n \times v_n) = -\infty$;
- se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$, então $\lim (u_n \times v_n) = -\infty$.

Exemplo

Consideremos as sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas por:

$$a_n = 3n - 2\,,\ b_n = -2n + 1\,,\ c_n = 5 + 3n \text{ e } d_n = -\frac{n}{5}$$

Sabemos que $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$, $\lim c_n = +\infty$ e $\lim d_n = -\infty$.

Assim, concluímos que:

- $\lim (a_n \times b_n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$
- $\lim (a_n \times c_n) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$
- $\lim (d_n \times b_n) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$
- $\lim (d_n \times a_n) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

Exercício

67 **Considera as sucessões definidas por:**

$a_n = n - 2$	$b_n = \dfrac{3+n}{2}$	$c_n = \dfrac{2-5n}{10}$	$d_n = -3n + 1$

Determina:

67.1. $\lim a_n$

67.2. $\lim b_n$

67.3. $\lim c_n$

67.4. $\lim d_n$

67.5. $\lim (a_n \times c_n)$

67.6. $\lim (b_n \times d_n)$

Manual Digital

Vídeo
Limite da sucessão produto

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n):

- se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}^+$, então $\lim(u_n \times v_n) = +\infty$;
- se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}^-$, então $\lim(u_n \times v_n) = -\infty$;
- se $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}^+$, então $\lim(u_n \times v_n) = -\infty$;
- se $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}^-$, então $\lim(u_n \times v_n) = +\infty$.

Exemplo

Consideremos as sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas por:

$$a_n = 3 - n,\ b_n = 2 + n,\ c_n = \frac{1+2n}{3-n} \text{ e } d_n = \frac{n}{2n+1}$$

Sabemos que $\lim a_n = -\infty$, $\lim b_n = +\infty$, $\lim c_n = -2$ e $\lim d_n = \frac{1}{2}$.

Desta forma, concluímos que:

- $\lim(a_n \times c_n) = -\infty \times (-2) = +\infty$
- $\lim(a_n \times d_n) = -\infty \times \frac{1}{2} = -\infty$
- $\lim(b_n \times c_n) = +\infty \times (-2) = -\infty$
- $\lim(b_n \times d_n) = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty$

A saber

Seja $a \in \mathbb{R}^+$.

- $-a \times (+\infty) = -\infty$
- $-a \times (-\infty) = +\infty$
- $a \times (+\infty) = +\infty$
- $a \times (-\infty) = -\infty$

Exercício

68 Considera as sucessões definidas por:

$u_n = 3 + n$ $\quad$ $v_n = -n^2$ $\quad$ $w_n = \frac{3+n}{n}$ $\quad$ $t_n = \frac{2n}{1-n}$

Determina:

68.1. $\lim(u_n \times w_n)$

68.2. $\lim(u_n \times t_n)$

68.3. $\lim(v_n \times w_n)$

68.4. $\lim(v_n \times t_n)$

68.5. $\lim(u_n \times t_n + w_n)$

68.6. $\lim(u_n \times w_n - t_n)$

Indeterminação do tipo $\infty \times 0$

Tarefa

Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) definidas por:

$$u_n = n^2 + 3\,,\ v_n = n^{-3} \text{ e } w_n = -n^4$$

1 Determina:

1.1. $\lim (u_n)$

1.2. $\lim (v_n)$

1.3. $\lim (w_n)$

2 Sabendo que $t_n = u_n \times v_n$, determina o termo geral da sucessão (t_n) e calcula $\lim t_n$.

3 Determina a expressão que define a sucessão (p_n) e calcula $\lim (p_n)$, sabendo que $p_n = w_n \times v_n$.

Como vimos na tarefa, nada se pode concluir acerca do limite do produto de um infinitamente grande por um infinitésimo, sendo necessário efetuar os cálculos em cada caso.

Assim, dizemos que $+\infty \times 0$ ou $-\infty \times 0$ ou, simplesmente, $\infty \times 0$, é uma **indeterminação**.

A saber
Dizemos que uma sucessão (u_n) é um **infinitésimo** se:

$$\lim u_n = 0$$

Exemplo

Consideremos as sucessões definidas por:

$$u_n = -n^3\,,\ v_n = n^5 \text{ e } w_n = n^{-4}$$

Sabemos que $\lim (u_n) = -\infty$, $\lim (v_n) = +\infty$ e $\lim (w_n) = 0$.

Ao determinar $\lim (u_n \times w_n)$ e $\lim (v_n \times w_n)$, estamos perante indeterminações do tipo $\infty \times 0$, então:

- $\lim (v_n \times w_n) = \lim \left(n^5 \times n^{-4}\right) = \lim (n) = +\infty$
- $\lim (u_n \times w_n) = \lim \left(-n^3 \times n^{-4}\right) = \lim \left(-n^{-1}\right) = 0$

A saber
$\pm\infty \times 0$ é uma indeterminação.

Exercícios

69 Considera as sucessões definidas por $a_n = 2n^2 + n$, $b_n = 5 - n^3$ e $c_n = -2n^{-2}$.

Calcula:

69.1. $\lim a_n$

69.2. $\lim b_n$

69.3. $\lim c_n$

69.4. $\lim (a_n \times c_n)$

69.5. $\lim (b_n \times c_n)$

69.6. $\lim [(a_n + b_n) \times c_n]$

70 Dá um exemplo de uma sucessão (u_n) infinitamente grande tal que:

70.1. $\lim (u_n \times n^{-1}) = +\infty$

70.2. $\lim [u_n \times (-2n^{-2})] = -\infty$

Limite da potência de infinitamente grandes

Consideremos uma sucessão (u_n) de termos não negativos tal que $\lim u_n = +\infty$ e $p \in \mathbb{Q}^+$. Então:

$$\lim (u_n)^p = (+\infty)^p = +\infty$$

Tarefa

Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n = 5n^2 + 1$ e $v_n = 3 - 5n$.

1. Indica os valores de $\lim u_n$ e de $\lim v_n$.
2. Determina $\lim (u_n)^{1022}$.
3. Calcula $\lim (v_n)^2$, $\lim (v_n)^3$, $\lim (v_n)^4$ e $\lim (v_n)^5$.
4. Tendo em consideração os resultados obtidos em **3**, o que podes concluir?

Consideremos uma sucessão (u_n) tal que $\lim u_n = -\infty$ e $p \in \mathbb{N}$.

- Se p é par, então $\lim (u_n)^p = (-\infty)^p = +\infty$.
- Se p é ímpar, então $\lim (u_n)^p = (-\infty)^p = -\infty$.

Exemplos

1. $\lim (3-5n)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

2. $\lim \left(3n^2-5\right)^7 = (+\infty)^7 = +\infty$

3. $\lim \sqrt[3]{1+5n} = (+\infty)^{\frac{1}{3}} = +\infty$

4. $\lim \left(3-2n^2\right)^6 = (-\infty)^6 = +\infty$

Exercício

71 Determina:

71.1. $\lim (3n-2)^5$

71.2. $\lim \left(\sqrt{2+n^2}\right)^4$

71.3. $\lim \left(3-5n^4\right)^5$

71.4. $\lim \left(3-5n^4\right)^8$

71.5. $\lim \sqrt[5]{3n+n^2}$

71.6. $\lim \left(\left(\frac{8n^2+1}{n}\right)^3 + (5-3n)^6\right)$

71.7. $\lim \left[\left(\frac{1}{n+3}\right)^3 + \left(-2n^4+1\right)^5\right]$

Limite do quociente de infinitamente grandes e de infinitésimos

Vamos considerar uma sucessão (u_n) de termos não nulos tal que $\lim u_n = 0^+$, isto é, tal que u_n tende para 0 por valores superiores a 0.

Então: $\lim \left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{\lim (u_n)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Demonstração:

Consideremos um número positivo L e seja $\delta = \frac{1}{L}$.

Existe um número natural p tal que $n \geqslant p \implies (u_n > 0 \wedge u_n < \delta)$.

Assim: $n \geqslant p \implies \frac{1}{u_n} > \frac{1}{\delta}$

Como $\delta = \frac{1}{L}$, então $n \geqslant p \implies \frac{1}{u_n} > L$.

Desta forma, concluímos que $\lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty$.

Dada uma sucessão (u_n) de termos não nulos tal que $\lim u_n = 0^+$, então:

$$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty$$

Representamos por $\frac{1}{0^+} = +\infty$.

De forma análoga, prova-se que:

Dada uma sucessão (u_n) de termos não nulos tal que $\lim u_n = 0^-$, então:

$$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = -\infty$$

Representamos por $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

A saber

Se (u_n) é um infinitésimo de termos não nulos, então $\frac{1}{u_n}$ é um infinitamente grande.

Exemplos

1. Consideremos a sucessão de termo geral $a_n = n^{-2}$.

Como sabemos, $\lim(a_n) = \lim(n^{-2}) = 0^+$.

(Note-se que (a_n) é uma sucessão de termos positivos.)

Logo: $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n^{-2}}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2. A sucessão (b_n) definida por $b_n = -n^{-3}$ tem limite:

$$\lim(b_n) = \lim(-n^{-3}) = 0^-$$

(Note-se que (b_n) é uma sucessão de termos negativos.)

Logo: $\lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim\left(\frac{1}{-n^{-3}}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Exercício

72 Considera as sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) tais que:

$$a_n = -n^{-5}, \ b_n = -3n^{-2}, \ c_n = n^{-2} \text{ e } d_n = 2n^{-5}$$

Indica:

72.1. $\lim a_n$

72.2. $\lim b_n$

72.3. $\lim c_n$

72.4. $\lim d_n$

72.5. $\lim \left(\frac{1}{a_n}\right)$

72.6. $\lim \left(\frac{1}{b_n}\right)$

72.7. $\lim \left(\frac{1}{c_n}\right)$

72.8. $\lim \left(\frac{1}{d_n}\right)$

Dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos tal que $\lim v_n = +\infty$, então:

$$\lim \frac{1}{v_n} = 0^+$$

Representamos por $\frac{1}{+\infty} = 0^+$.

Demonstração:

Consideremos um número positivo δ. Se $L = \frac{1}{\delta}$, então L é um número positivo.

Como $\lim v_n = +\infty$, sabemos que existe uma ordem p, com $p \in \mathbb{N}$, tal que: $n \geqslant p \implies (v_n > 0 \wedge v_n > L)$

Assim: $n \geqslant p \implies 0 < \frac{1}{v_n} < \frac{1}{L}$

Logo: $n \geqslant p \implies 0 < \frac{1}{v_n} < \delta$

Desta forma, concluímos que $\lim \left(\frac{1}{v_n}\right) = 0^+$.

De forma análoga, prova-se que:

Dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos tal que $\lim v_n = -\infty$, então:

$$\lim \frac{1}{v_n} = 0^-$$

Representamos por $\frac{1}{-\infty} = 0^-$.

Manual Digital

Vídeo
Limite do inverso de uma sucessão

A saber

Se (v_n) é um infinitamente grande de termos não nulos, então $\frac{1}{v_n}$ é um infinitésimo.

Exemplo

Dadas as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = -3n - n^2 \text{ e } v_n = 5n^2$$

Sabemos que:

- $\lim \left(\frac{1}{u_n}\right) = \lim \left(\frac{1}{-3n-n^2}\right) = \frac{1}{-\infty} = 0^-$
- $\lim \left(\frac{1}{v_n}\right) = \lim \left(\frac{1}{5n^2}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

A saber

- $\frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\frac{1}{0^-} = -\infty$
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$

Exercício

73 Considera as sucessões (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas por:

$$a_n = 3n^2 - 1 \text{ , } b_n = \frac{5n^2+3}{n} \text{ , } c_n = \frac{6n+5}{2n} \text{ e } d_n = n^8$$

Indica:

73.1. $\lim a_n$

73.2. $\lim b_n$

73.3. $\lim c_n$

73.4. $\lim d_n$

73.5. $\lim \left(\frac{1}{a_n}\right)$

73.6. $\lim \left(\frac{1}{b_n}\right)$

73.7. $\lim \left(\frac{1}{c_n}\right)$

73.8. $\lim \left(\frac{1}{d_n}\right)$

Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$, não conseguimos saber, apenas com essa informação, se $\lim \frac{u_n}{v_n}$ existe ou determinar o seu valor. Para tal, temos de efetuar os cálculos caso a caso.

Afirmamos, portanto, que $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ou apenas $\frac{\infty}{\infty}$, é uma **indeterminação.**

Nota:
$\lim u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$ pode ser escrito como $\lim u_n = \pm\infty$.

Exemplo

Consideremos as sucessões definidas por:

$$u_n = 3n^2 + 2,\ v_n = 1 - n^2 \text{ e } w_n = 3n + 1$$

A saber

$\frac{\infty}{\infty}$ é uma indeterminação.

Como sabemos:

$\lim u_n = \lim \left(3n^2 + 2\right) = +\infty$

$\lim v_n = \lim \left(1 - n^2\right) = -\infty$

$\lim w_n = \lim (3n + 1) = +\infty$

- Para determinar $\lim \frac{u_n}{v_n}$, deparamo-nos com uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{-\infty}$.

  Pelo algoritmo da divisão, verifica-se que $\frac{3n^2 + 2}{1 - n^2} = -3 + \frac{5}{-n^2 + 1}$.

  Então:

  $$\lim \left(\frac{3n^2 + 2}{1 - n^2}\right) = \lim \left(-3 + \frac{5}{1 - n^2}\right) = -3 + 0 = -3$$

- Se pretendermos determinar $\lim \frac{u_n}{w_n}$, estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$.

  Pelo algoritmo da divisão, sabemos que $\frac{3n^2 + 2}{3n + 1} = n - \frac{1}{3} + \frac{\frac{7}{3}}{3n + 1}$, logo:

  $$\lim \left(\frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1}\right) = \lim \left(n - \frac{1}{3} + \frac{\frac{7}{3}}{3n + 1}\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

Exercício

74 Considera as sucessões (a_n), (b_n) e (c_n) de termos gerais:

$$a_n = n^2 - \frac{1}{n},\ b_n = 5n + \frac{2n}{n^2} \text{ e } c_n = \frac{1}{2n} - n^3$$

Determina:

74.1. $\lim a_n$

74.2. $\lim b_n$

74.3. $\lim c_n$

74.4. $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

74.5. $\lim \left(\frac{a_n}{c_n}\right)$

74.6. $\lim \left(\frac{c_n}{b_n}\right)$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Se considerarmos duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = 0$ e $\lim v_n = 0$, também não é possível, com a informação dada, saber se $\lim \frac{u_n}{v_n}$ existe ou determinar o seu valor.

Afirmamos que $\frac{0}{0}$ é uma **indeterminação**.

Exemplo

Consideremos as sucessões definidas por:

$$u_n = \frac{2}{n^3} \text{ e } v_n = n^{-\frac{1}{2}}$$

Sabemos que $\lim u_n = 0$ e $\lim v_n = 0$.

Então, para determinarmos $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e $\lim \frac{v_n}{u_n}$, temos de levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$ obtida.

- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^3} = \lim \left(2n^{-\frac{5}{2}}\right) = \lim \left(\frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$

- $\lim \frac{v_n}{u_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{\frac{2}{n^3}} = \lim \frac{n^3}{2n^{\frac{1}{2}}} = \lim \left(\frac{1}{2}n^{\frac{5}{2}}\right) = +\infty$

A saber

$\frac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Manual Digital

Vídeo
Limite de polinómios de variável natural

Exercício

75 Determina, caso exista, cada um dos seguintes limites:

75.1. $\lim (4n^2+3)^{-\frac{1}{2}}$

75.2. $\lim (1+2n^2)^{-\frac{1}{2}}$

75.3. $\lim \dfrac{(4n^2+3)^{-\frac{1}{2}}}{(1+2n^2)^{-\frac{1}{2}}}$

75.4. $\lim (n^2+1)^{-3}$

75.5. $\lim \dfrac{1}{(n^2-1)^3}$

75.6. $\lim \dfrac{(n^2+1)^{-3}}{(n^2-1)^{-3}}$

3.4.6. Levantamento de indeterminações

Como vimos, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ e $\dfrac{0}{0}$ são indeterminações.

Vamos analisar alguns métodos para levantar estas indeterminações.

Levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Com polinómios

Consideremos um polinómio $P(n)$, com $n \in \mathbb{N}$, de grau superior ou igual a 1.

O limite do polinómio $P(n)$ depende do coeficiente do termo de maior grau, a.

- Se $a > 0$, então $\lim P(n) = +\infty$.
- Se $a < 0$, então $\lim P(n) = -\infty$.

Demonstração:

Consideremos um polinómio $P(n) = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p$, com $a_0 \neq 0$.

$$\lim P(n) = \lim \left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p\right) =$$

$$= \lim \left[n^p \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}\right)\right] =$$

$$= +\infty \left(a_0 + 0 + \ldots + 0\right) = a_0 \times (+\infty)$$

Desta forma, $\lim \left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p\right) = \lim \left(a_0 n^p\right)$.

Portanto, se $a_0 > 0$, então $\lim \left(a_0 n^p\right) = +\infty$ e, se $a_0 < 0$, então $\lim \left(a_0 n^p\right) = -\infty$.

Exemplos

1. $\lim\left(n^2-3n^4\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\left[n^4\left(\frac{1}{n^2}-3\right)\right]=+\infty\,(0-3)=-\infty$

2. $\lim\left(2n^5+3n^3-3n^2-5\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\left[n^5\left(2+\frac{3}{n^2}-\frac{3}{n^3}-\frac{5}{n^5}\right)\right]=$

$=+\infty\,(2+0+0+0)=+\infty$

3. $\lim\left(\sqrt{n^3-n}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\sqrt{\lim\left(n^3-n\right)}=\sqrt{\lim\left[n^3\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]}=\sqrt{+\infty\,(1-0)}=+\infty$

4. $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+n^3-n^2+3\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)+\lim\left(n^3-n^2+3\right)=$

$=\lim\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)+\lim\left[n^3\left(1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)\right]=\frac{1}{+\infty}+\infty\,(1-0+0)=0+\infty=+\infty$

Exercício

76 Determina, caso existam, os limites seguintes:

76.1. $\lim\left(n^4-2n^3+n^2-1\right)$

76.2. $\lim\left(3-n^2+2n\right)$

76.3. $\lim\left(\frac{3}{2}n^3-5n^2+\frac{5}{2}\right)$

76.4. $\lim\left(\sqrt{n^4-2n^3}\right)$

76.5. $\lim\left(n^4-2n^3+n^2-1\right)$

Com radicais

Para levantar indeterminações $\infty-\infty$ com expressões do tipo $\sqrt{A}-\sqrt{B}$, $\sqrt{A}-B$ e $A-\sqrt{B}$, geralmente, basta multiplicar e dividir pela expressão conjugada: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, $\sqrt{A}+B$ e $A+\sqrt{B}$, respetivamente, e aplicar o caso notável da diferença de quadrados.

Exemplos

1. $\lim\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\frac{\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}=$

$=\lim\frac{n-2-n}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}=\lim\frac{-2}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}=\frac{-2}{+\infty}=0$

2. $\lim\left(\sqrt{3n}-\sqrt{5+3n}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\frac{\left(\sqrt{3n}-\sqrt{5+3n}\right)\left(\sqrt{3n}+\sqrt{5+3n}\right)}{\sqrt{3n}+\sqrt{5+3n}}=$

$=\lim\frac{3n-(5+3n)}{\sqrt{3n}+\sqrt{5+3n}}=\lim\frac{-5}{\sqrt{3n}+\sqrt{5+3n}}=\frac{-5}{+\infty}=0$

Exercício

77 Determina:

77.1. $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$

77.2. $\lim\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{2+n^2}\right)$

77.3. $\lim\left(\sqrt{3n^2}-\sqrt{3n^2+1}\right)$

77.4. $\lim\left(\sqrt{2n^3-1}-\sqrt{1+2n^3}\right)$

Manual Digital

Vídeo
Limite do quociente de dois polinómios de variável natural

Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Consideremos os polinómios $P(n)$ e $Q(n)$, com $n \in \mathbb{N}$, de graus p e q, respetivamente, cujos termos de maior grau são, respetivamente, an^p e bn^q.

Prova-se que $\lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)=\lim\left(\frac{an^p}{bn^q}\right)$.

Então, $\lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ depende dos graus dos polinómios $P(n)$ e $Q(n)$.

- Se $p=q$, então: $\lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)=\frac{a}{b}$
- Se $p>q$, então: $\lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)=\frac{a\times(+\infty)}{b}=\pm\infty$
- Se $p<q$, então: $\lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)=\frac{a}{b\times(+\infty)}=0$

Exemplos

1. $\lim\left(\frac{5n^3+2n+1}{3-2n^3}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\left[\frac{n^3\left(5+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{3}{n^3}-2\right)}\right]=\frac{5+0+0}{0-2}=-\frac{5}{2}$

Ou, usando a regra prática: $\lim\left(\frac{5n^3+2n+1}{3-2n^3}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\left(\frac{5n^3}{-2n^3}\right)=-\frac{5}{2}$

2. $\lim\left(\frac{n^2-3}{1+n^3}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\left[\frac{n^2\left(1-\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}\right]=\lim\left[\frac{\left(1-\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}\right]=\frac{1-0}{+\infty\,(0+1)}=0$

Ou, usando a regra prática: $\lim\left(\frac{n^2-3}{1+n^3}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{n^2}{n^3}=\lim\frac{1}{n}=\frac{1}{+\infty}=0$

3. $\lim\left(\dfrac{2n^4+n}{n+n^3}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\left[\dfrac{n^4\left(2+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{1}{n^2}+1\right)}\right] = \dfrac{+\infty\,(2+0)}{0+1} = +\infty$

Ou, usando a regra prática: $\lim\left(\dfrac{2n^4+n}{n+n^3}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{2n^4}{n^3} = \lim(2n) = +\infty$

4. $\lim\left(\dfrac{3n-1}{\sqrt{n^2+2}}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\left[\dfrac{n\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}}\right] = \lim\left[\dfrac{n\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{n\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}}\right] = \dfrac{3-0}{\sqrt{1+0}} = 3$

5. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n}} =$

$= \lim \dfrac{n^2+n+1-n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n}} = \lim \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)} =$

$= \lim \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)} = \dfrac{+\infty\,(1+0)}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{0}} = +\infty$

Exercício

78 Determina:

78.1. $\lim\left(\dfrac{n^2-2n}{3n^3+2n-5}\right)$

78.2. $\lim\left(\dfrac{3-n+3n^2}{3n^2-n-5}\right)$

78.3. $\lim\left(\dfrac{n^3-1}{n^4+n^2+1}\right)$

78.4. $\lim\left(\dfrac{\sqrt{2+n^2}}{2n-1}\right)$

78.5. $\lim\left(\dfrac{2+n}{\sqrt{n^2+n-1}}\right)$

78.6. $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n^2+3}\right)$

78.7. $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)$

78.8. $\lim\left(3n-\sqrt{2n^2+1}\right)$

Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$

Estes tipos de indeterminações, após efetuarmos alguns cálculos, recaem sobre os tipos de indeterminações já abordados.

Manual Digital

Vídeo
Calcular limites

Exemplos

1. $\lim \left[\frac{1}{3n} \times (2n^2 + 5n)\right] \overset{(0 \times \infty)}{=} \lim \left(\frac{2n^2 + 5n}{3n}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left[\frac{n^2\left(2 + \frac{5}{n}\right)}{3n}\right] =$

$= \lim \left[\frac{n\left(2 + \frac{5}{n}\right)}{3}\right] =$

$= \frac{+\infty \times (2 + 0)}{3} = +\infty$

2. $\lim \left(\frac{-\frac{5}{n^2 + 3n}}{\frac{1}{2n}}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \left(\frac{-10n}{n^2 + 3n}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left[\frac{-10n}{n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)}\right] =$

$= \lim \left[\frac{-10}{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)}\right] = \frac{-10}{+\infty\,(1 + 0)} = 0$

Exercício

79 Determina:

79.1. $\lim \left[\frac{-3}{n^2 + 1} \times (n + 2n^2 + 5)\right]$

79.2. $\lim \left[(n^3 + 2n) \times \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}}\right]$

79.3. $\lim \left[\sqrt{n^2 + 3n} \times \frac{1}{n^3 + 2n}\right]$

Seja (u_n) uma sucessão de termo geral $u_n = a^n$, com $a > 0$.

- Se $a > 1$, então: $\lim u_n = \lim a^n = +\infty$
- Se $0 < a < 1$, então: $\lim u_n = \lim a^n = 0$
- Se $a = 1$, então: $\lim u_n = \lim a^n = 1$

Exemplos

1. $\lim 3^n = +\infty$

2. $\lim \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$

3. $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

4. $\lim \left(3^n - 4^n\right) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim \left[4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)\right] = +\infty \times (0-1) = -\infty$

5. $\lim \left(\frac{3^{n+1} + 2^n}{5^n}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left[\frac{3^n\left(3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{5^n}\right] = \lim \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \lim \left(3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) =$

$= 0 \times (3+0) = 0$

6. Vamos determinar o limite da soma dos n primeiros termos da sucessão (b_n), $\lim S_n = \lim \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$, sendo $b_n = 5 \times 2^{n-1}$.

Como $S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, então:

$\sum_{i=1}^{n} b_i = 5 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = -5 \times (1 - 2^n)$

$\lim S_n = \lim \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \lim\left[-5 \times (1 - 2^n)\right] =$

$= -5 \times (1 - \infty) = +\infty$

Nota

Consideremos os números naturais p e m, tais que $p \leqslant m$.

A soma dos números reais x_p, x_{p+1}, …, x_m pode ser representada por $\sum_{i=p}^{m} x_i$ (somatório de p a m dos números reais x_i).

Manual Digital

Vídeo
Resolução de problemas envolvendo limites de sucessões

Exercícios

80 Determina:

80.1. $\lim \left(5^n - 2^n\right)$

80.2. $\lim \left(\frac{3^{n+1} - 2^n}{5^n}\right)$

80.3. $\lim \left(\frac{3^{n+1} - 2^{n-1}}{5^{n+1}}\right)$

81 Em cada uma das alíneas seguintes encontra-se definida uma progressão geométrica (u_n). Determina, em cada caso, $\lim \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)$.

81.1. $u_n = 2^n$

81.2. $u_n = 3 \times 5^{n-1}$

81.3. $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

Para aplicar

1 **Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = \dfrac{n}{2n-1}$.**

1.1. Determina a ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_{0,01}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

1.2. Prova, por definição de limite, que $\lim(v_n) = \dfrac{1}{2}$.

2 **Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{5n-1}{1+2n}$.**

2.1. Mostra que a sucessão é monótona crescente.

2.2. Verifica se (u_n) é limitada.

2.3. Podes concluir que (u_n) é convergente? Justifica.

2.4. Prova, por definição de limite, que $\lim u_n = \dfrac{5}{2}$.

3 **Recorrendo à definição de limite, mostra que:**

3.1. $\lim(5n-1) = +\infty$

3.2. $\lim(3-2n) = -\infty$

3.3. $\lim\left(3+n^2\right) = +\infty$

4 **Determina:**

4.1. $\lim\left(\dfrac{-2}{5n+1}\right)$

4.2. $\lim\left(\dfrac{-2n+3}{5}\right)$

4.3. $\lim\left(\dfrac{2n}{5-2n}\right)$

4.4. $\lim\left(\dfrac{3n-2}{n+1}\right)$

4.5. $\lim\left(\dfrac{3n^2+1}{5n}\right)$

Para aplicar

5 **Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{5n-1}{2n+3}$ e a sucessão (v_n) definida, para $k \in \mathbb{R}$, por $v_n = \dfrac{2-kn}{3+2n}$.**

5.1. Determina $\lim(u_n)$.

5.2. Se $k = -3$, determina $\lim(v_n)$.

5.3. Determina os valores de k para os quais:

a) $\lim(u_n) = \lim(v_n)$

b) (v_n) é um infinitésimo

c) $\lim(v_n) = 3$

6 **Considera a sucessão (w_n) definida por $w_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+3}$.**

6.1. Mostra que (w_n) não é monótona.

6.2. Mostra que (w_n) é limitada.

6.3. Existe $\lim(w_n)$? Justifica a tua resposta.

7 **Determina, caso exista, o limite da sucessão definida por:**

7.1. $5n^3 - 2$

7.2. $n^2 - 2n$

7.3. $\dfrac{n^3+2}{2n^5-1}$

7.4. $\dfrac{n^3+2}{1-2n^2}$

7.5. $3^{2n} - 5^n$

7.6. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2^n}{3^n}$

7.7. $\sqrt{5n^2-1} - n$

7.8. $\sqrt{n^2+3} - \sqrt{2n}$

7.9. $\dfrac{3^n}{2n+1}$

7.10. $\dfrac{5n+1}{\sqrt{3n^2-1}}$

8 **Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{5^{2n+1}}{3}$.**

8.1. Mostra que (u_n) é uma progressão geométrica e determina a sua razão.

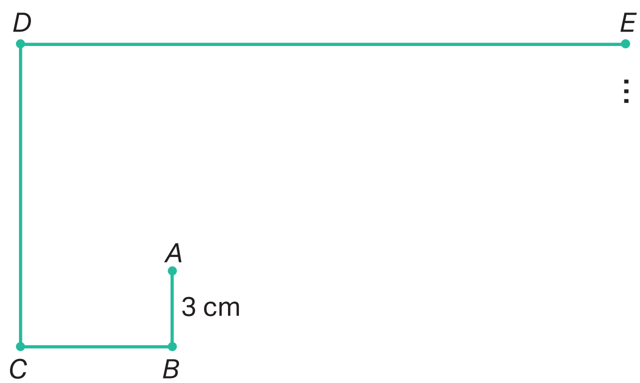
8.2. Estuda (u_n) quanto à monotonia.

8.3. Determina:

a) $\lim (u_n)$

b) $\lim \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)$

9 **Na figura encontra-se uma linha poligonal infinita, com início no ponto A.**
O primeiro segmento de reta que a constitui é $[AB]$ com 3 cm de comprimento. O segundo segmento que a constitui é $[BC]$, que tem o dobro da medida de comprimento de $[AB]$. O terceiro segmento que constitui a linha poligonal tem o dobro da medida de comprimento do segundo. E assim sucessivamente.



Seja (c_n) a sucessão em que cada termo corresponde ao comprimento do segmento de reta de ordem n da linha poligonal.

9.1. Justifica que (c_n) é uma progressão geométrica e indica a sua razão.

9.2. Determina o termo geral de (c_n).

9.3. Calcula:

a) $\lim (c_n)$

b) $\lim \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right)$

Teste

1 **Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{1-3n}{2n+1}$.**

1.1. Qual dos números seguintes é termo da sucessão?

(A) $-\dfrac{15}{11}$ **(B)** $-\dfrac{25}{19}$ **(C)** $-\dfrac{38}{27}$ **(D)** $-\dfrac{33}{23}$

1.2. Estuda a sucessão quanto à monotonia.

1.3. A sucessão (u_n) é convergente. Justifica.

2 **Considera a sucessão (u_n) definida pelo termo geral $u_n = \dfrac{5n-3}{3-2n}$.**

2.1. Determina a ordem a partir da qual os termos de u_n pertencem a $V_{0,01}\left(-\dfrac{5}{2}\right)$.

2.2. Mostra, por definição, que $\lim u_n = -\dfrac{5}{2}$.

3 **Considera a sucessão (u_n) definida por:** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} - 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3.1. Prova, por indução matemática, que $u_n = 6 \times 3^{-n} - 3$.

3.2. Calcula $\lim u_n$.

4 **Determina:**

4.1. $\lim \left(\dfrac{1}{2n^2-3} \times (3n+5)\right)$

4.2. $\lim \left(3 \times 2^{n+1} - 5^n\right)$

4.3. $\lim \left(n - \sqrt{n^2 - 3n}\right)$

4.4. $\lim \dfrac{\cos(n\pi)}{n(-1)^{n+1}}$

5 **Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = 3^{2-n}$.**

5.1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) (v_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

(B) (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{3}$.

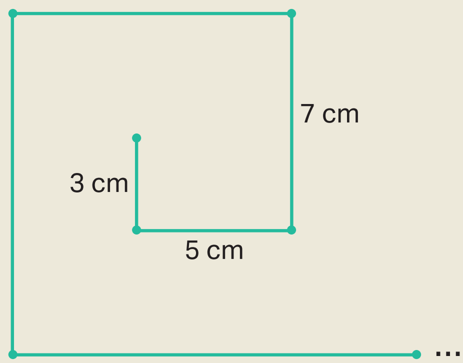
(C) (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

(D) (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{3}$.

5.2. Escreve o termo geral da progressão aritmética (a_n) que tem a mesma razão de (v_n) e cujo primeiro termo é igual ao 5.º termo de (v_n).

6 **A figura representa uma linha poligonal com início no segmento de reta com 3 cm de comprimento.**

Cada um dos segmentos de reta seguintes tem mais 2 cm de comprimento do que o segmento de reta imediatamente anterior.

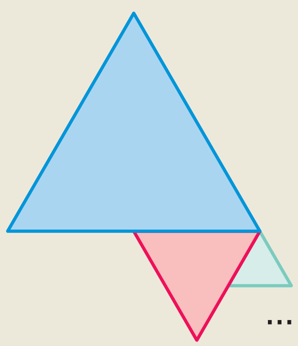


Seja (c_n) a sucessão em que o termo de ordem n representa o comprimento, em centímetros, do respetivo segmento de reta.

6.1. Define por recorrência a sucessão (c_n).

6.2. Determina o comprimento da linha poligonal constituída pelos 10 primeiros segmentos de reta.

7 **A figura representa uma sequência de triângulos equiláteros.**



A medida do lado do triângulo de maior área é igual a 4.

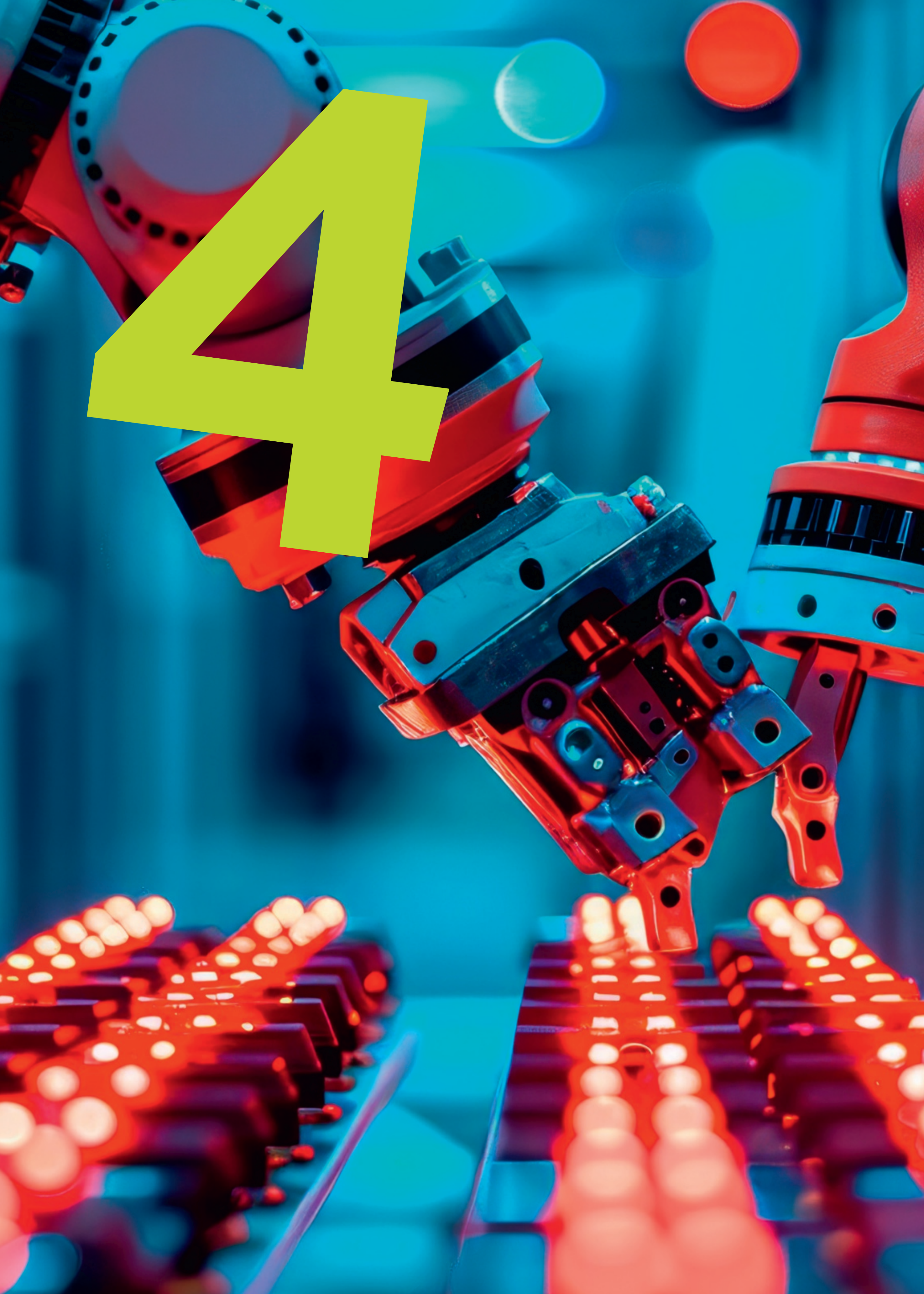
O lado de cada um dos triângulos seguintes tem medida igual a metade da medida do lado do triângulo anterior.

Seja (t_n) a sucessão que associa ao n-ésimo triângulo o seu perímetro.

7.1. Determina o termo geral de (t_n).

7.2. Calcula $\lim \sum_{i=1}^{n} t_n$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

4



Funções reais de variável real

4.1. Funções racionais

4.2. Função raiz quadrada

4.3. Limites de funções de variável real

4.4. Continuidade de funções

4.5. Assíntotas ao gráfico de uma função

Manual Digital

Vídeos
Antes de começar: Funções

Antes de começar

Funções quadráticas

1 Considera as funções quadráticas f, g e h definidas por:

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- $g(x) = -x^2 + 8x + 10$
- $h(x) = 2x^2 - 8x + 8$

1.1. Determina os zeros de cada uma das funções.

1.2. Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da equação $f(x) = h(x)$.

1.3. Estuda o sinal de cada uma das funções.

1.4. Resolve, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação:

$h(x) \geqslant g(x)$

Funções modulares

2 Considera as funções modulares g e h definidas por:

$g(x) = 2\,|x-3| - 4$ e $h(x) = -3\,|x^2 - 2| + 6$

2.1. Determina, em $\mathbb{R}$, os zeros de cada uma das funções.

2.2. Define por ramos as funções g e h.

2.3. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $g(x) \leqslant 0$

b) $h(x) > x + 6$

Composição de funções

3 Considera as funções reais de variável real p e m definidas por:

$$p(x) = \frac{x+1}{x-2} \text{ e } m(x) = \sqrt{2-x}$$

3.1. Determina $D_{p \circ m}$ e $D_{m \circ p}$.

3.2. Calcula:

a) $(p \circ m)(1)$ **b)** $(m \circ p)(0)$ **c)** $(m \circ m)(-2)$

3.3. Caracteriza as funções $p \circ m$ e $m \circ p$, indicando os domínios e as expressões analíticas que as definem.

Recorda

Funções quadráticas

Uma função quadrática f tem uma **expressão algébrica** do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

A **representação gráfica** de uma função quadrática é uma parábola cujo sentido da concavidade depende do coeficiente a:

- se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima;
- se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

O **número de zeros** de uma função quadrática depende do sinal do binómio discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta > 0$, a função tem 2 zeros;
- se $\Delta < 0$, a função não tem zeros;
- se $\Delta = 0$, a função tem 1 zero.

Funções modulares

Uma função modular f tal que $f(x) = |g(x)|$ pode ser **definida por ramos**:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geqslant 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Composição de funções

Dadas duas funções $f: D_f \longrightarrow A$ e $g: D_g \longrightarrow B$, a função composta f após g representa-se por $f \circ g$ e é tal que:

- $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$
- $\forall x \in D_{f \circ g}, \ (f \circ g)(x) = f(g(x))$

Funções limitadas

4 Considera as funções f e g definidas por:

$f(x) = 1 - \sin(x)$ e $g(x) = 2\cos(x) - 1$

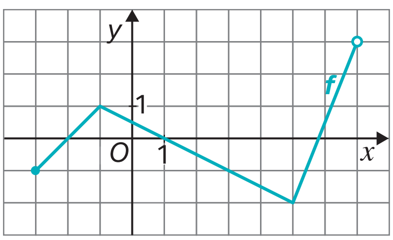
4.1. Determina D'_f e D'_g.

4.2. Indica o conjunto dos majorantes e dos minorante de cada uma das funções.

4.3. Justifica a afirmação: "As funções f e g são limitadas."

Extremos de uma função

5 Na figura encontra-se representada graficamente a função f.



Indica:

5.1. o domínio da função f;

5.2. os extremos absolutos de f e os respetivos maximizantes e minimizantes;

5.3. os extremos relativos de f.

Fatorização de polinómios

6 Fatoriza cada um dos seguintes polinómios.

6.1. $A(x) = -2x^2 + 10x - 12$

6.2. $B(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$

6.3. $C(x) = x^4 + x^2 - 2$

6.4. $D(x) = x^4 - 5x^2 - 36$

Recorda

Funções limitadas

Sejam f uma função real de variável real com domínio D_f e M um número real.

- Se $\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant M$, M é **majorante** de f.
- Se $\forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant M$, M é **minorante** de f.

Uma função f diz-se **limitada** se é minorada e majorada.

Recorda

Extremos absolutos de uma função

Dada uma função real de variável real f de domínio D_f e $f(a) \in D'_f$:

- $f(a)$ é **mínimo absoluto** de f se: $\forall x \in D_f,\ f(a) \leqslant f(x)$
- $f(a)$ é **máximo absoluto** de f se: $\forall x \in D_f,\ f(a) \geqslant f(x)$

Extremos relativos de uma função

Dada uma função real de variável real f de domínio D_f, f tem um extremo relativo em $a \in D_f$ se existe $r > 0$ tal que:

- $\forall x \in D_f \cap V_r(a),\ f(a) \geqslant f(x)$
  Neste caso, $f(a)$ é um **máximo relativo** e a é um **maximizante**.
- $\forall x \in D_f \cap V_r(a),\ f(a) \leqslant f(x)$
  Neste caso, $f(a)$ é um **mínimo relativo** e a é um **minimizante**.

Recorda

Fatorização de polinómios

Fatorizar um polinómio corresponde a escrevê-lo como um produto de polinómios (fatores) em que pelo menos um dos fatores é não constante. Os fatores têm todos grau não superior ao do polinómio inicial.

Nota: Dado um polinómio $A(x)$ com coeficientes inteiros, as suas raízes inteiras, caso existam, são divisores do termo independente do polinómio.

4 Funções reais de variável real

Manual Digital

Vídeo
Função racional

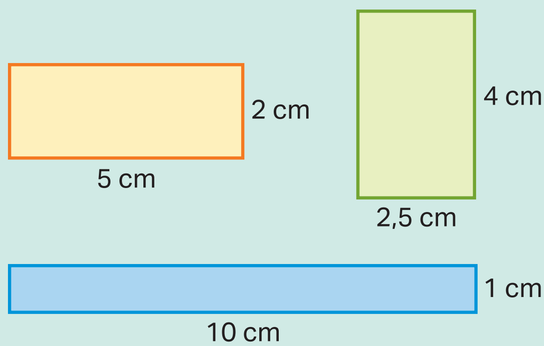
4.1. Funções racionais

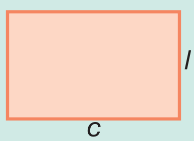
4.1.1. Conceito de função racional

Tarefa

Na figura estão representados vários retângulos com $10\ \text{cm}^2$ de área.
Considera todos os retângulos com $10\ \text{cm}^2$ de área.

Sejam c e l, respetivamente, as medidas, em centímetros, do comprimento e da largura de um desses retângulos.





1. Escreve c em função de l.

2. Copia e completa a tabela.

c (cm)	...	...	...	...
l (cm)	1	2	5	8

3. Representa graficamente a função definida em **1.**, com $l > 0$.

4. Se um dos retângulos tem $6\ \text{cm}$ de comprimento, quanto mede a sua largura?

Uma função f, real de variável real, diz-se uma **função racional** se é definida por uma expressão do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, sendo $Q(x)$ um polinómio não nulo.

O **domínio** da função f definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ é $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Exemplos

1. Vamos determinar o domínio da função racional f definida por $f(x)=\dfrac{3x-1}{2-x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 2-x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Cálculos auxiliares:
$2-x=0 \iff x=2$

2. O domínio da função g, definida por $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+2x-15}$, é:

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+2x-15\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-5,\ 3\}$

Cálculos auxiliares:
$x^2+2x-15=0 \iff$

$\iff x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-15)}}{2\times 1}$

$\iff x=-5 \ \lor\ x=3$

Manual Digital
Vídeo
Funções racionais do tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Exercício

1 **Determina o domínio da função definida por:**

1.1. $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$

1.2. $h(x)=\dfrac{1-x}{x-1}$

1.3. $m(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+x}$

1.4. $n(x)=\dfrac{x^2-3x}{3+x^2}$

1.5. $p(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x^3-1}$

1.6. $q(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

4.1.2. Simplificação de expressões do tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Para simplificar a expressão algébrica de uma função racional cujo numerador tem grau igual ou superior ao do denominador, podemos usar o algoritmo da divisão inteira de polinómios, mas tendo em atenção o domínio.

Consideremos a função f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Então, $f(x)=x+2$, com $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^2+x & x+2 \\ \cline{1-1}
2x-2 & \\
-2x+2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Contudo, nem sempre o polinómio do numerador é divisível pelo do denominador. De uma forma geral, podemos fazer esta simplificação através da decomposição em fatores do numerador e/ou do denominador. Neste caso, podemos decompor em fatores o numerador:

$$x^2+x-2=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-2)}}{2} \iff x=\frac{-1+3}{2} \ \lor\ x=\frac{-1-3}{2} \iff$$

$$\iff x=1 \ \lor\ x=-2$$

Então: $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$. Portanto: $f(x)=x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Exemplos

1. Consideremos as funções g e h definidas por $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ e $h(x)=x-1$.

Apesar de $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3}=x-1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, as funções g e h não são iguais, pois têm domínios diferentes.

2. Vamos simplificar a expressão algébrica da função f definida por $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-2x}$.

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$. Logo, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-2x}=\frac{x(x^2-4)}{x(x-2)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$$

Exercícios

2 Simplifica as expressões algébricas de cada uma das funções e indica o domínio em que as simplificações são válidas.

2.1. $f(x)=\dfrac{4-2x}{x-2}$

2.2. $g(x)=\dfrac{3-x}{-x^2+9}$

2.3. $h(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{9-x^2}$

2.4. $i(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-x+2}$

2.5. $j(x)=\dfrac{x-x^3}{x^2-2x}$

2.6. $m(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

3 Mostra que: $\dfrac{9-x^2}{-x^2+4x-3}=\dfrac{x+3}{x-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

4 Verifica se são iguais as funções definidas por $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{4-x^2}$ e $g(x)=-\dfrac{x}{2+x}$.

4.1.3. Zeros e sinal de uma função racional

Zeros. Resolução de equações fracionárias

Os **zeros de uma função racional** definida por $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios, sendo $Q(x)$ um polinómio não nulo, são as soluções da equação $f(x)=0$.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \wedge Q(x)\neq 0$$

Exemplos

1. Para determinar os zeros da função g definida por $g(x)=\frac{x^2-4x}{x+2}$, basta resolver a equação racional $g(x)=0$.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{x+2}=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-4)=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=4) \wedge x\neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=4 \qquad \text{C. S.}=\{0,\ 4\}$$

Assim, os zeros da função g são 0 e 4.

2. Vamos determinar os zeros da função h definida por $h(x)=\frac{1-x^2}{x-1}$.

$$h(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \wedge x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=1 \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow (x=-1 \vee x=1) \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \qquad \text{C. S.}=\{-1\}$$

Assim, a função h tem apenas um zero, que é -1.

3. Vejamos o que acontece com a função f definida por $f(x)=\frac{x^2+4}{x+2}$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2}=0 \Leftrightarrow x^2+4=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2=-4}_{\substack{\text{Condição} \\ \text{impossível em } \mathbb{R}}} \wedge x\neq -2 \qquad \text{C. S.}=\{\ \}$$

Logo, a função f não tem zeros.

4. Vejamos como determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da seguinte equação:

$$\frac{4}{x+2}-\frac{x}{1-x}=1$$

$$\frac{4}{x+2}-\frac{x}{1-x}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2}-\frac{x}{1-x}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(1-x)-x(x+2)-(x+2)(1-x)}{(x+2)(1-x)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-4x-x^2-2x-x+x^2-2+2x}{(x+2)(1-x)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x+2}{(x+2)(1-x)}=0 \Leftrightarrow -5x+2=0 \wedge (x+2)(1-x)\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \wedge (x\neq -2 \wedge x\neq 1) \Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \qquad \text{C. S.}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$$

Exercício

5 Determina os zeros, caso existam, da função definida por:

5.1. $g(x)=\dfrac{x^2-4}{2-x}$

5.2. $h(x)=\dfrac{5x}{x^2-1}$

5.3. $i(x)=\dfrac{4}{2-2x}$

5.4. $j(x)=\dfrac{x^2-4}{2x^2-8}$

5.5. $k(x)=\dfrac{x^2-4}{2-x}$

5.6. $l(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+x}$

5.7. $m(x)=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{2}{x+1}$

5.8. $n(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{4-x^2}$

Sinal. Resolução de inequações fracionárias

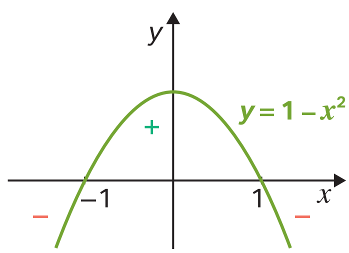
Para estudarmos o sinal de funções racionais, precisamos de resolver inequações fracionárias. Estas inequações devem ser reduzidas à forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ ou $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$, sendo a sua resolução baseada no estudo do sinal dos polinómios do numerador e do denominador da fração do primeiro membro.

Procedemos do mesmo modo para estudar o sinal de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0$ e $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\leqslant 0$.

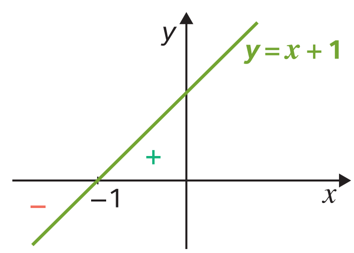
Consideremos a função racional f definida por $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x+1}$.

Para estudar o sinal da função f, vamos começar por analisar o sinal dos polinómios do numerador e do denominador da expressão algébrica da função.

- $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$



- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	n. d.	$+$	0	$-$

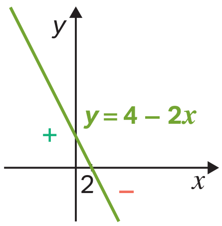
Nota: n. d. significa "não definida".

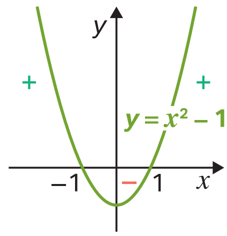
$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,1[$; $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]1,+\infty[$; $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Exemplos

1. Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, $\dfrac{4-2x}{x^2-1} \leqslant 0$.

- $4-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$
- $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=1$





x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$4-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	n. d.	$-$	n. d.	$+$	0	$-$

$$\frac{4-2x}{x^2-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[\cup [2, +\infty[$$

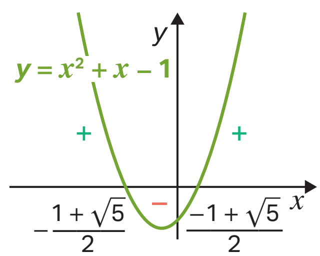
2. Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{x^2-1}$.

$$\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)-1}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x^2-1} > 0$$

- $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



- $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=1$

x	$-\infty$	$-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$		-1		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1	$+\infty$
x^2+x-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	n. d.	$+$	0	$-$	n. d.	$+$

$$\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup]1, +\infty[$$

Exercícios

6 Resolve, em $\mathbb{R}$:

6.1. $\frac{x+2}{1-x} \geqslant 0$

6.2. $\frac{1-x^2}{x+1} < 0$

6.3. $\frac{x+3}{3x-1} < 1$

6.4. $\frac{1-x}{x-4} \leqslant 2$

6.5. $2 - \frac{1}{x} < x$

6.6. $\frac{(2x+1)^2}{1-x} > 0$

6.7. $\frac{x+1}{x^2-x-6} < \frac{1}{2}$

6.8. $\frac{2x-2}{2-2x^2} \geqslant 0$

7 Faz o estudo do sinal da função racional definida por:

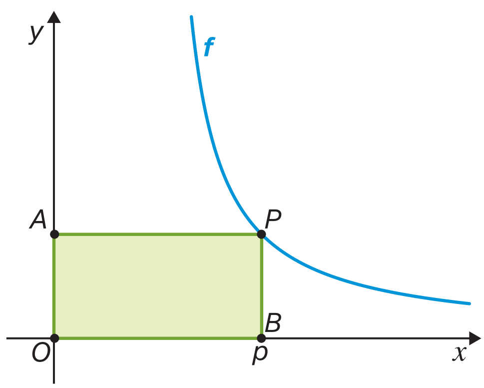
7.1. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$

7.2. $g(x) = \frac{4-2x}{x-3}$

7.3. $h(x) = \frac{3x-9}{5-x}$

7.4. $i(x) = \frac{x^2-2x}{2x-4}$

8 No referencial da figura encontram-se representados parte do gráfico da função f, definida por $f(x) = 1 + \frac{2-x}{x-1}$, e o retângulo $[AOBP]$.



Sabe-se que:

- o ponto P tem abcissa positiva, p, e pertence ao gráfico da função f;
- os vértices A e B têm abcissa e ordenada nula, respetivamente.

Determina:

8.1. uma expressão simplificada da função que a cada abcissa do ponto P faz corresponder a medida da área do retângulo $[AOBP]$;

8.2. a abcissa do ponto P se a medida da área do retângulo $[AOBP]$ for igual a 2;

8.3. as coordenadas do ponto P se a sua ordenada for igual ao dobro da sua abcissa.

Para aplicar

1 Determina o domínio da função racional definida por:

1.1. $g(x)=\frac{x+1}{6x-2}$

1.2. $f(x)=\frac{2x}{6-2x^2}$

1.3. $h(x)=2-\frac{3}{9-x^2}$

1.4. $j(x)=x-\frac{2}{2-x}$

1.5. $m(x)=\frac{x}{x+4}-3$

1.6. $p(x)=\frac{x-1}{x^2-25}+\frac{2}{5-x}$

2 Simplifica cada uma das seguintes expressões, indicando o respetivo domínio.

2.1. $\frac{9x^2-1}{4x-12x^2}$

2.2. $\frac{3x^2-15x}{25-x^2}$

2.3. $\frac{-x^3+5x^2-8x+6}{x^2-2x+2}$

2.4. $\frac{x^4-x}{1-x^2}$

2.5. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{12-3x^2}$

2.6. $\frac{2x^3-8x}{x^2+3x+2}$

3 Resolve, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações fracionárias.

3.1. $\frac{x}{1-x}=3$

3.2. $\frac{1-x}{2x+4}=x$

3.3. $\frac{2}{x}+\frac{1+x}{x+3}=1$

3.4. $3-x=\frac{2}{x+1}$

3.5. $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}=1$

3.6. $\frac{x^2-x-2}{1-x^2}=0$

4 Resolve, em $\mathbb{R}$:

4.1. $\frac{x+1}{16-x^2}\geqslant 0$

4.2. $\frac{2-x}{x+1}<1$

4.3. $\frac{x-3}{x-1}\leqslant\frac{1}{x-x^2}$

4.4. $\frac{x^2}{x^2-9}>\frac{1}{3-x}$

4.5. $x-1\leqslant\frac{3-x}{x}$

4.6. $\frac{3}{x^2-1}+1<\frac{1}{x+1}$

Para aplicar

Manual Digital

Vídeo
Resolução de problemas envolvendo funções racionais

5 **Considera as funções racionais f e g definidas por:**

$$f(x) = \frac{-x^2 - 4x + 5}{1 - x} \text{ e } g(x) = \frac{x - 1}{x}$$

5.1. Determina o domínio da função f.

5.2. Mostra que: $f(x) = x + 5$, $\forall x \in D_f$

5.3. Determina as coordenadas dos pontos de interseção das funções f e g.

5.4. Faz o estudo do sinal das funções f e g.

6 **Considera a função racional g cuja expressão algébrica é $g(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$.**
Determina:

6.1. o conjunto-solução de $g(x) \geqslant x$;

6.2. as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção do gráfico de g com o eixo das abcissas;

6.3. as coordenadas do ponto P, sabendo que pertence ao gráfico de g, tem abcissa positiva e a sua ordenada é igual a metade da sua abcissa.

7 **A temperatura de um café, em graus Celsius, t segundos após ter sido servido, é dada por:**

$$T(t) = \frac{12t + 500}{t + 10}, \text{ com } t \geqslant 0$$

7.1. Qual é a temperatura do café 1 minuto após ter sido servido? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

7.2. Um cliente bebeu o café quando este se encontrava a $20\ °C$. Passado quanto tempo de ser servido isso ocorreu?

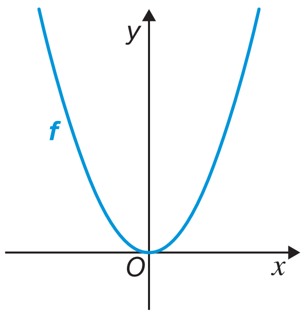
7.3. A Luísa não consegue tomar café quente, só o toma a uma temperatura inferior a $18\ °C$.
Quanto tempo deve esperar para tomar o café após ser servido?
Apresenta o resultado arredondado às unidades.

4.2. Função raiz quadrada

4.2.1. Função definida por $y = \sqrt{x}$

Como estudámos no 10.º ano, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, não é injetiva.

Desta forma, a função f não admite inversa.

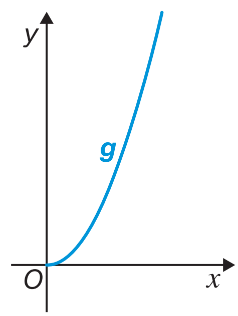


Recorda:

- Quando uma função é **injetiva**, qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, num ponto.
- Uma função é **sobrejetiva** se e só se o seu contradomínio é igual ao conjunto de chegada.

Vamos considerar a função g, restrição da função f a $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

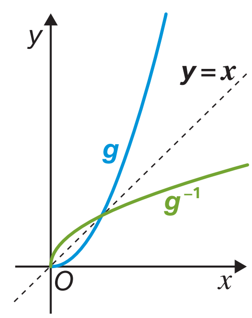
$$g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$



Como a função g é bijetiva (injetiva e sobrejetiva), então g admite inversa.

Vamos caracterizar a função g^{-1}, função inversa de g.

$$y = x^2 \underset{\substack{x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0}}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{y}$$



Assim:

$$g^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Domínio	$\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} = \mathbb{R}_0^+$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$
Concavidade do gráfico	Voltada para baixo
Monotonia	Crescente
Extremos	Mínimo absoluto 0 com minimizante 0
Zeros	$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

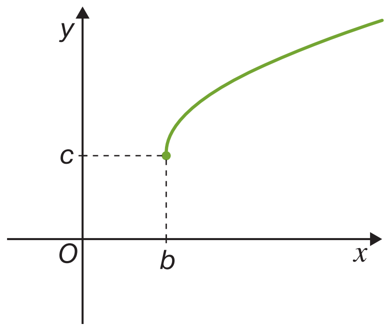
4.2.2. Funções do tipo $y = a\sqrt{x - b} + c$, com $a \neq 0$

Manual Digital

Atividade
Domínio e gráfico da função raiz quadrada

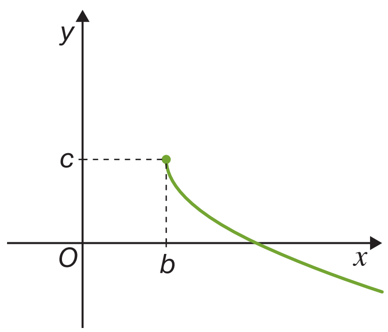
Pela aplicação sucessiva das transformações geométricas dos gráficos de funções, conseguimos obter o gráfico de uma função do tipo $y = a\sqrt{x-b} + c$, com $a \neq 0$, a partir do gráfico de $y = \sqrt{x}$.

- Se $a > 0$:



Domínio	$[b, +\infty[$
Contradomínio	$[c, +\infty[$
Concavidade do gráfico	Voltada para baixo
Monotonia	Crescente
Extremos	Mínimo absoluto c com minimizante b

- Se $a < 0$:



Domínio	$[b, +\infty[$
Contradomínio	$]-\infty, c]$
Concavidade do gráfico	Voltada para cima
Monotonia	Decrescente
Extremos	Máximo absoluto c com maximizante b

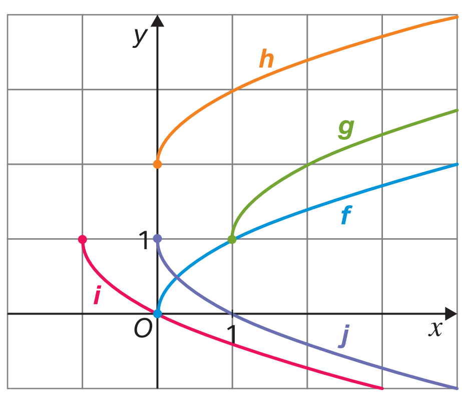
Exemplos

1. A função definida por $f(x) = -2\sqrt{x+1} - 3$ tem domínio $[-1, +\infty[$ e contradomínio $]-\infty, -3]$. A concavidade do seu gráfico é voltada para cima e a função é decrescente. A função f tem um máximo absoluto que é -3, sendo -1 o respetivo maximizante.

2. No referencial xOy da figura encontram-se representadas graficamente a função f, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, e as funções g, h, i e j, cujos gráficos são obtidos a partir do de f por translações e/ou reflexões.

   Por observação da representação gráfica de cada função, conseguimos obter a expressão algébrica que a define:

   $g(x) = \sqrt{x-1} + 1$; $h(x) = \sqrt{x} + 2$;
   $i(x) = -\sqrt{x+1} + 1$; $j(x) = -\sqrt{x} + 1$



Exercícios

9 Para cada uma das funções a seguir definidas, indica o domínio, o contradomínio e os extremos absolutos, e estuda-a quanto à monotonia e ao sentido da concavidade do seu gráfico.

9.1. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$

9.2. $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

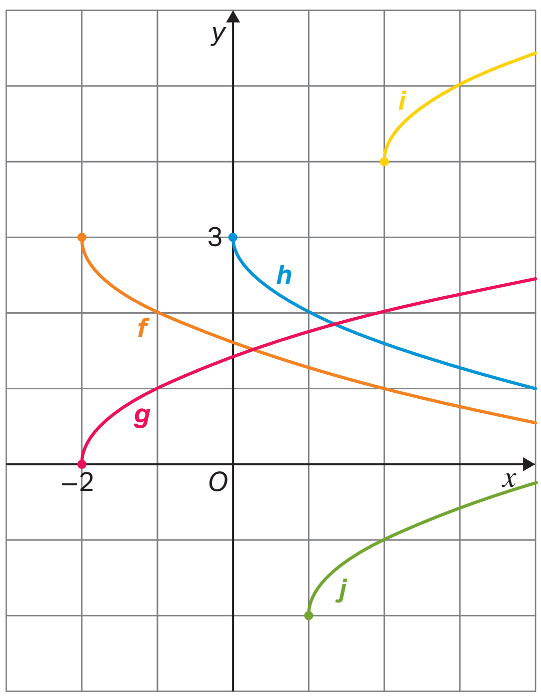
9.3. $h(x) = \sqrt{x+2} - 1$

9.4. $j(x) = 3 + \sqrt{x+2}$

9.5. $l(x) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x-3}$

9.6. $m(x) = \frac{1}{2} - 3\sqrt{x+1}$

10 Na figura encontram-se representadas graficamente a função f e as funções g, h, j, l, m e n cujos gráficos foram obtidos a partir do gráfico de f através de reflexões e/ou translações.



Sabendo que a função f é definida por $f(x) = -\sqrt{x+2} + 3$, escreve a expressão analítica que define cada uma das restantes funções representadas.

4.2.3. Equações envolvendo raízes quadradas

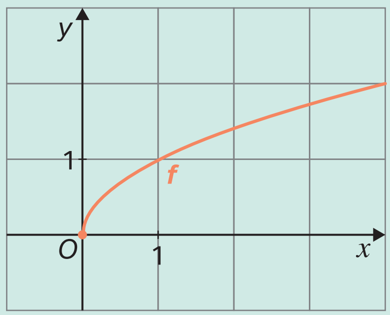
Tarefa

Considera as funções g e h definidas por:

$$g(x)=\frac{3}{2}x \quad \text{e} \quad h(x)=\sqrt{x-1}+2$$

1 No referencial xOy encontra-se representada graficamente a função f definida por $f(x)=\sqrt{x}$.

Copia para o teu caderno e, no mesmo referencial, representa graficamente as funções g e h.



2 Por observação da representação anterior, o que podes concluir quanto ao número de soluções da equação $\sqrt{x-1}+2=\frac{3}{2}x$?

Justifica a tua resposta.

Para resolver uma equação irracional com radical de índice 2, devemos determinar o conjunto em que a equação é válida e, em seguida, isolar o radical num dos membros e elevar ao quadrado os dois membros da equação, eliminando o símbolo do radical.

Vamos resolver a equação irracional da tarefa anterior.

$$\sqrt{x-1}+2=\frac{3}{2}x \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{3}{2}x-2$$

As soluções de $\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}x-2$ são também soluções de $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2$.

Porém, a recíproca poderá não ser verdadeira. Assim, é preciso analisar as soluções obtidas.

$$\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}x-2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=\frac{9}{4}x^2-6x+4 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}x^2+7x-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) \times (-5)}}{2 \times \left(-\frac{9}{4}\right)} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{-7 \pm 2}{-\frac{9}{2}} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-7+2}{-\frac{9}{2}} \ \vee \ x = \frac{-7-2}{-\frac{9}{2}} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{10}{9} \ \vee \ x = 2$$

Verificação:

- Se $x = \frac{10}{9}$: $\sqrt{\frac{10}{9} - 1} + 2 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{9}$ (Proposição falsa)
- Se $x = 2$: $\sqrt{2-1} + 2 = \frac{3}{2} \times 2$ (Proposição verdadeira)

Logo, o conjunto-solução da equação $\sqrt{x-1} + 2 = \frac{3}{2}x$ é $\text{C. S.} = \{2\}$.

Em alternativa, podemos considerar as seguintes condições na resolução da equação $\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}x - 2$:

- $x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$ (atendendo ao domínio de uma função com radical quadrático)
- $\frac{3}{2}x - 2 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant \frac{4}{3}$ (atendendo ao facto de a raiz quadrada de um número ser sempre um número não negativo)

Como $x \geqslant 1 \wedge x \geqslant \frac{4}{3} \ \Leftrightarrow \ x \geqslant \frac{4}{3}$, pois $\frac{4}{3} > 1$, então:

$$\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}x - 2 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 \ \wedge \ x \geqslant \frac{4}{3} \ \Leftrightarrow \ \ldots$$

$$\ldots \ \Leftrightarrow \ \left(x = \frac{10}{9} \ \vee \ x = 2\right) \ \wedge \ x \geqslant \frac{4}{3} \ \Leftrightarrow \ x = 2$$

Equações do tipo $\sqrt{A(x)} = k$, com $k \in \mathbb{R}$

- Se $k < 0$, a equação é impossível.
- Se $k \geqslant 0$, $\sqrt{A(x)} = k \ \Leftrightarrow \ A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ A(x) = k^2$

Equações do tipo $\sqrt{A(x)} = B(x)$

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \ \Leftrightarrow \ A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ B(x) \geqslant 0 \ \wedge \ A(x) = [B(x)]^2$$

Exemplos

1. $\sqrt{x+2}=3 \implies \left(\sqrt{x+2}\right)^2=3^2 \wedge x+2\geqslant 0 \Leftrightarrow x+2=9 \wedge x\geqslant -2 \Leftrightarrow x=7$

C. S. $=\{7\}$

2. $\sqrt{x+2}=-5$ é impossível. Logo, C. S. $=\{\ \}$.

3. $\sqrt{x+2}=x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x+1)^2 \wedge x+2\geqslant 0 \wedge x+1\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=x^2+2x+1 \wedge x\geqslant -1 \Leftrightarrow -x^2-x+1=0 \wedge x\geqslant -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times 1}}{2\times(-1)} \wedge x\geqslant -1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{-2} \wedge x\geqslant -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \wedge x\geqslant -1 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

C. S. $=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

4. $\sqrt{x+3}-2\sqrt{1-x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2\sqrt{1-x} \implies$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(2\sqrt{1-x}\right)^2 \wedge x+3\geqslant 0 \wedge 1-x\geqslant 0 \wedge 2\sqrt{1-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3=4(1-x) \wedge x\geqslant -3 \wedge x\leqslant 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3=4-4x \wedge -3\leqslant x\leqslant 1 \Leftrightarrow 5x=1 \wedge -3\leqslant x\leqslant 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$

C. S. $=\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

Exercícios

11 Considera a função f definida por $f(x)=1-\sqrt{x-2}$. Resolve as equações.

11.1. $f(x)=0$

11.2. $f(x)=2$

11.3. $f(x)=-2$

12 Resolve cada uma das seguintes equações.

12.1. $\sqrt{x-2}=2x$

12.2. $\sqrt{2x-1}=x-1$

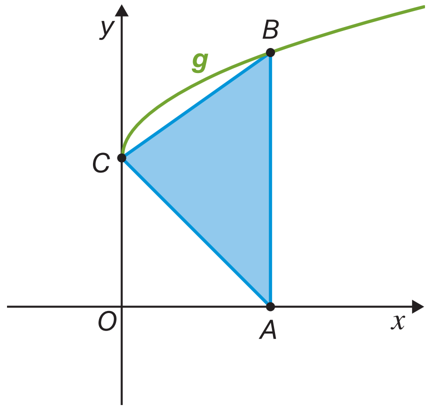
12.3. $\sqrt{2+x}=\sqrt{x}$

12.4. $\sqrt{x+1}=\sqrt{2-x}$

13 Na figura encontram-se representados o gráfico da função g definida por $g(x) = \sqrt{x} + 2$ e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto C ao eixo das ordenadas;
- os pontos A e B têm a mesma abcissa x, com $x \in]0, 4]$;
- os pontos C e B pertencem ao gráfico de g.



Determina:

13.1. a expressão algébrica da função f que a cada abcissa, x, de A faz corresponder a medida da área do triângulo $[ABC]$;

13.2. a abcissa do ponto B se a sua ordenada for 3;

13.3. a abcissa do ponto A se $\overline{AB} = 4$.

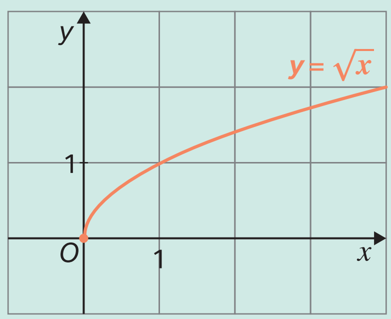
4.2.4. Inequações envolvendo raízes quadradas

Tarefa

Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \text{ e } g(x) = x + 1$$

1 Atendendo à representação gráfica da figura, representa graficamente, num mesmo referencial o.n., as funções f e g.



2 Determina o(s) ponto(s) de interseção dos gráficos das duas funções.

3 Indica o conjunto-solução de:

3.1. $f(x) > g(x)$

3.2. $f(x) \leqslant g(x)$

Para resolver analiticamente uma inequação irracional com radical de índice 2, devemos ter em conta algumas condições.

Inequações do tipo $\sqrt{A(x)} < k$, com $k \in \mathbb{R}$

- Se $k \leqslant 0$, a inequação é impossível.
- Se $k > 0$, $\sqrt{A(x)} < k \iff A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ A(x) < k^2$

Inequações do tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

$\sqrt{A(x)} < B(x) \iff A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ B(x) > 0 \ \wedge \ A(x) < [B(x)]^2$

Inequações do tipo $\sqrt{A(x)} > k$, com $k \in \mathbb{R}$

- Se $k < 0$, $A(x) \geqslant 0$
- Se $k \geqslant 0$, $\sqrt{A(x)} > k \iff A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ A(x) > k^2$

Inequações do tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

$\sqrt{A(x)} > B(x) \iff (A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ B(x) < 0) \ \vee \ \left(A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ B(x) \geqslant 0 \ \wedge \ A(x) > [B(x)]^2\right)$

Inequações do tipo $\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}$

$\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)} \iff A(x) \geqslant 0 \ \wedge \ B(x) \geqslant 0 \ \wedge \ A(x) < B(x)$

Exemplos

1. $2\sqrt{x+3} \leqslant 10 \iff \sqrt{x+3} \leqslant 5 \iff x+3 \geqslant 0 \ \wedge \ x+3 \leqslant 5^2 \iff$

$\iff x \geqslant -3 \ \wedge \ x \leqslant 22 \iff x \in [-3, 22]$

2. $\sqrt{x+3} < x+1 \iff x+3 \geqslant 0 \ \wedge \ x+1 > 0 \ \wedge \ x+3 < (x+1)^2 \iff$

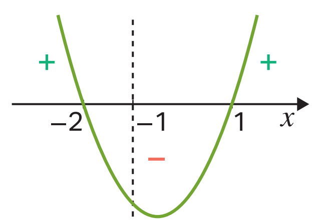
$\iff x \geqslant -3 \ \wedge \ x > -1 \ \wedge \ x+3 < x^2+2x+1 \iff$

$\iff x > -1 \ \wedge \ x^2+x-2 > 0$

Cálculos auxiliares:

$x^2+x-2=0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \iff$

$\iff x = -2 \ \vee \ x = 1$



Logo: $x > -1 \ \wedge \ x^2+x-2 > 0 \iff x > 1 \iff x \in]1, +\infty[$

3. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\leqslant 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}\leqslant 3+\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3\geqslant 0 \wedge x\geqslant 0 \wedge \left(\sqrt{x+3}\right)^2\leqslant\left(\sqrt{x}+3\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geqslant 0 \wedge x+3\leqslant x+6\sqrt{x}+9 \Leftrightarrow x\geqslant 0 \wedge -6\leqslant 6\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geqslant 0 \wedge \sqrt{x}\geqslant -1 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty[$

4. $\sqrt{x+2}>x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2\geqslant 0 \wedge x-1<0) \vee \left(x+2\geqslant 0 \wedge x-1\geqslant 0 \wedge x+2>(x-1)^2\right) \Leftrightarrow$

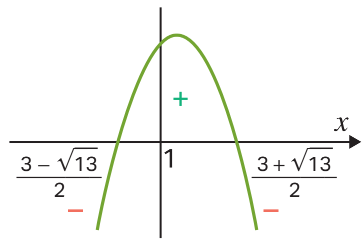
$\Leftrightarrow (x\geqslant -2 \wedge x<1) \vee \left(x\geqslant -2 \wedge x\geqslant 1 \wedge x+2>x^2-2x+1\right)$

$\Leftrightarrow (x\geqslant -2 \wedge x<1) \vee \left(x\geqslant 1 \wedge -x^2+3x+1>0\right)$

Cálculos auxiliares:

$-x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times(-1)\times 1}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$



Então:

$(x\geqslant -2 \wedge x<1) \vee \left(x\geqslant 1 \wedge -x^2+3x+1>0\right) \Leftrightarrow x\in[-2,1[\cup\left[1,\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$

5. $\sqrt{x+5}\geqslant\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}\leqslant\sqrt{x+5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1\geqslant 0 \wedge x+5\geqslant 0 \wedge 2x-1\leqslant x+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{1}{2} \wedge x\geqslant -5 \wedge x\leqslant 6$

$\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},6\right]$

Exercícios

14 Considera a função irracional f definida por $f(x)=\sqrt{x-3}-2$.

Resolve, em $\mathbb{R}$:

14.1. $f(x)\leqslant 3$

14.2. $f(x)>4$

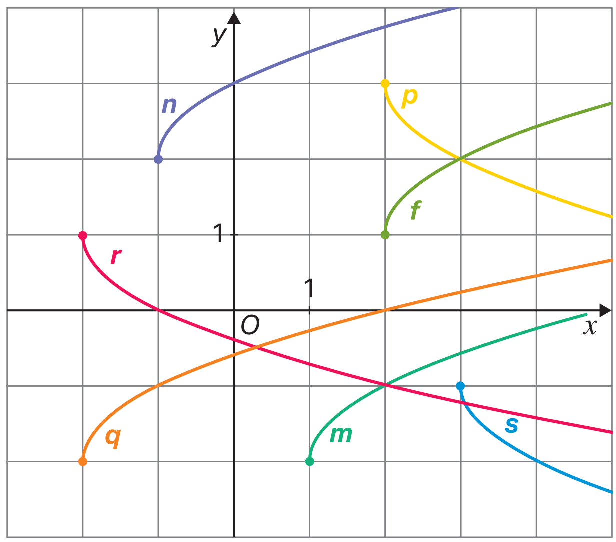
14.3. $f(x)\leqslant 2-x$

15 Considera as funções g e h definidas por $g(x)=\sqrt{x+1}-1$ e $h(x)=\sqrt{2-x}$.

Determina, em $\mathbb{R}$, os valores de x para os quais $g(x)\geqslant h(x)$.

Para aplicar

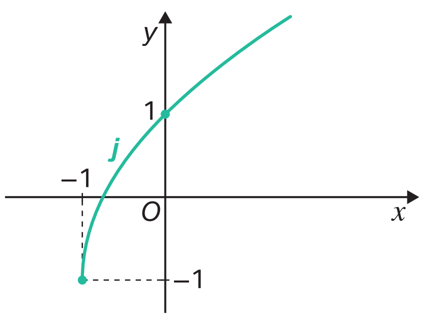
1 Os gráficos das funções m, n, p, q, r e s, representadas no referencial o.n. xOy da figura, foram obtidos a partir do gráfico da função f através de translações e reflexões.



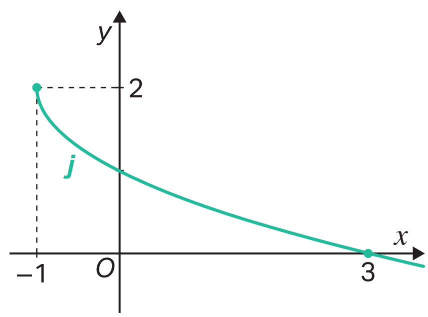
Sabendo que $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$, indica a expressão analítica de cada uma das outras funções representadas.

2 Em cada um dos casos seguintes, e considerando os dados apresentados na figura, indica a expressão analítica que define a função j, sabendo que $j(x) = a\sqrt{x-b} + c$, com $a \neq 0$.

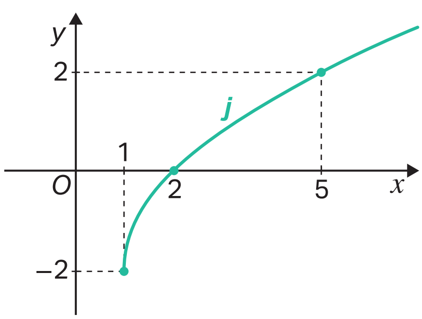
2.1.



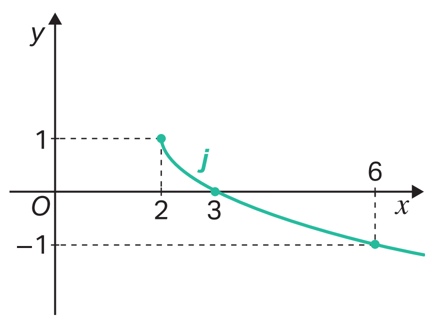
2.2.



2.3.

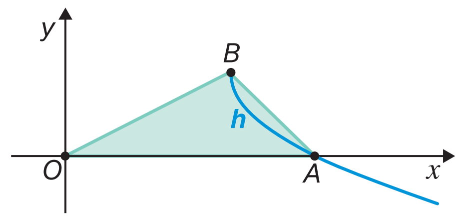


2.4.



3 **Considera, no referencial o.n. da figura, a representação gráfica da função h definida por $h(x) = -\sqrt{x-2} + 1$ e os pontos A e B tais que:**

- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de h com o eixo das abcissas;
- a ordenada do ponto B é o máximo absoluto da função h.



Determina a medida da área do triângulo $[OAB]$.

4 **Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações irracionais.**

4.1. $\sqrt{2x} = 8$

4.2. $\sqrt{x-2} - 3 = 5$

4.3. $\sqrt{2x+7} = 3$

4.4. $\sqrt{x+2} = x$

4.5. $\sqrt{x-5} = 2x - 1$

4.6. $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} = 2$

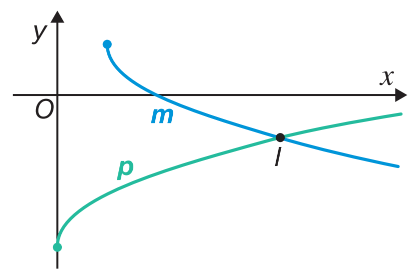
4.7. $\sqrt{6x+25} = 5 - \sqrt{x}$

4.8. $2\sqrt{x+1} = \sqrt{3x+1}$

5 **Considera as funções irracionais m e p definidas por:**

$m(x) = -\sqrt{x-1} + 1$ e $p(x) = \sqrt{x} - 3$

Determina as coordenadas do ponto I, ponto de interseção dos gráficos das funções m e p.



6 **Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes alíneas.**

6.1. $\sqrt{x-2} > 3$

6.2. $7 - \sqrt{x+1} \geqslant 0$

6.3. $\sqrt{3x-4} \leqslant x$

6.4. $\sqrt{x+1} > x - 2$

6.5. $2\sqrt{x} > \sqrt{x-2}$

6.6. $\sqrt{x+3} < \sqrt{2-x}$

7 **Considera a função f definida por $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 3$.**

7.1. Determina o domínio da função f.

7.2. Resolve as equações.

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = 2x - 1$

7.3. Determina o conjunto-solução de $f(x) \leqslant 5$ na forma de intervalo de números reais.

4.3. Limites de funções de variável real

Manual Digital

Vídeo
Ponto aderente a um conjunto

4.3.1. Pontos aderentes a um conjunto

Exemplo

Considera $A =]-1, 3] \cup \{5\}$.

- Por exemplo, $3 \in A$.
  Sabemos que existe uma sucessão (u_n) de elementos de A tal que $\lim(u_n) = 3$.
  Por exemplo, $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.
  Dizemos, por isso, que 3 é ponto aderente a A.

- Por exemplo, $-1 \notin A$.
  Sabemos que existe uma sucessão (v_n) de elementos de A tal que $\lim(v_n) = -1$.
  Por exemplo, $u_n = -1 + \frac{1}{n}$.
  Dizemos, por isso, que -1 é ponto aderente a A.

- Como qualquer vizinhança de 5 interseta A no ponto 5, então sabemos que 5 é ponto aderente a A.

Assim, o conjunto de pontos aderentes a A, que se designa por aderência de A, é $\overline{A} = [-1, 3] \cup \{5\}$.

Dados um conjunto de números reais A e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um **ponto aderente** a A quando existe uma sucessão de elementos de A, (u_n), tal que $\lim(u_n) = a$.

Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Sabemos que existe uma sucessão (u_n) de elementos de A tal que $\lim(u_n) = a$ se e só se qualquer vizinhança $V_\delta(a)$ interseta o conjunto A, isto é, $V_\delta(a) \cap A \neq \{\ \}$.

Nota:
Designa-se por **aderência de A** o conjunto de pontos aderentes a A e representa-se por $\overline{A}$.

Exercícios

16 Considera o conjunto $X =]2, 5[\cup \{6\}$.

16.1. Indica uma sucessão (u_n) de elementos de X tal que $\lim(u_n) = 2$.

16.2. Indica uma sucessão (v_n) de elementos de X tal que $\lim(v_n) = 5$.

16.3. Identifica o conjunto de pontos aderentes a X.

17 Indica a aderência de cada um dos conjuntos apresentados a seguir.

17.1. $A = [1, 3]$

17.2. $B =]-2, 3]$

17.3. $C =]-3, -2[$

17.4. $D = [-1, 2] \setminus \{1\}$

17.5. $E = [2, 5[\setminus \{3\} \cup \{6\}$

Manual Digital

Vídeo
Definição de limite segundo Heine

4.3.2. Limite de uma função num ponto aderente ao seu domínio

Tarefa

Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

1 Determina o domínio de f, D_f.

2 Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{1}{2n}$. Determina $\lim(u_n)$.

3 Copia e completa.

$$\lim f(u_n) = \lim\left(\frac{1}{u_n + 2}\right) = \lim\left(\frac{1}{\ldots + 2}\right) = \frac{1}{\lim \ldots + 2} = \ldots$$

Definição de limite de uma função num ponto segundo Heine

Consideremos uma função f, real de variável real, de domínio D, um ponto a aderente a D e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$.

Diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se $f(u_n) \longrightarrow b$ para qualquer sucessão (u_n) de elementos de D tal que $u_n \longrightarrow a$.

Tal como já demonstrado nas sucessões:

Unicidade do limite

O limite de uma função, quando existe, é único.

Exemplo

Consideremos a função real de variável real g definida por $g(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ e as sucessões definidas por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, $v_n = n^2$ e $w_n = 1 - \frac{1}{n+2}$.

- $\lim u_n = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

  $\lim g(u_n) = \lim \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{n} + 1}\right) = \lim \left(2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{n}}\right) =$

  $= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

- $\lim v_n = \lim n^2 = +\infty$

  $\lim g(v_n) = \lim \left(2 + \frac{1}{n^2 + 1}\right) =$

  $= 2 + 0 = 2$

- $\lim w_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$

  $\lim g(w_n) = \lim \left(2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2} + 1}\right) =$

  $= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

- Se pretendermos determinar, caso exista, $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$, consideramos todas as sucessões (a_n) de elementos do domínio de g tais que $\lim a_n = -2$.

  $\lim g(a_n) = \lim \left(2 + \frac{1}{a_n + 1}\right) = 2 + \frac{1}{\lim a_n + 1} = 2 + \frac{1}{-2+1} = 1$

  Então, pela definição de limite de uma função num ponto segundo Heine:

  $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = 1$

Exercícios

18 Considera a função real de variável real g definida por $g(x) = x^2 - 1$ e as sucessões de termos gerais $u_n = \dfrac{2+n}{2n}$ e $v_n = 1 - \dfrac{3n}{n+1}$.

18.1. Determina:

a) $\lim u_n$

b) $\lim g(u_n)$

c) $\lim v_n$

d) $\lim g(v_n)$

18.2. Mostra que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x) = -\dfrac{3}{4}$.

18.3. Determina $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$.

19 Considera a função real de variável real h definida por $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2}$ e as sucessões de termos gerais $u_n = n^2$ e $v_n = 3 - \dfrac{1}{n}$.

19.1. Determina:

a) $\lim u_n$

b) $\lim v_n$

c) $\lim h(u_n)$

d) $\lim h(v_n)$

19.2. Usando a definição de limite de uma função num ponto segundo Heine, determina $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$.

20 Considera as sucessões $u_n = 2 + \dfrac{1+n}{2n}$ e $v_n = 1 - \dfrac{2}{3n}$ e a função real de variável real p definida por:

$$p(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{x} & \text{se} \quad x > 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

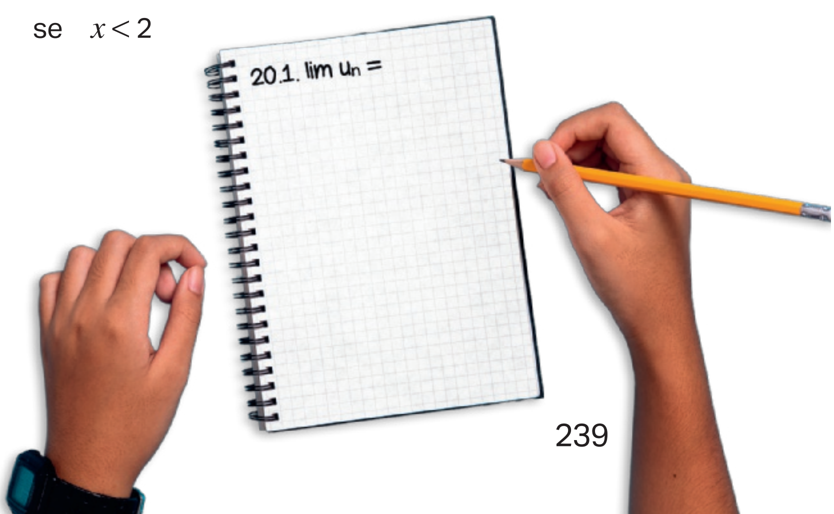
Determina:

20.1. $\lim u_n$

20.2. $\lim v_n$

20.3. $\lim p(u_n)$

20.4. $\lim p(v_n)$

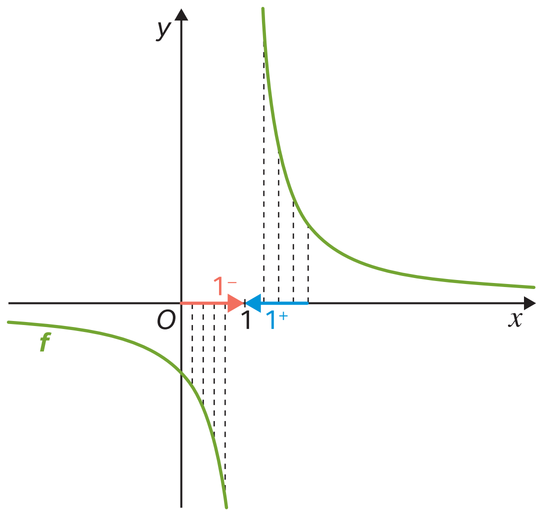


Manual Digital

Vídeo
Limites laterais de uma função num ponto

Limites laterais

Na figura encontra-se representada a função f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.



A função f tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, sendo 1 ponto aderente ao seu domínio.

Consideremos uma qualquer sucessão (u_n), com $u_n \in D_f$ e $u_n > 1$, tal que o limite da sucessão é 1, por valores superiores a 1, isto é, $\lim u_n = 1^+$.

Por observação da representação gráfica, verificamos que $\lim f(u_n) = +\infty$.

Desta forma, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Consideremos uma qualquer sucessão (v_n), com $v_n \in D_f$ e $v_n < 1$, tal que o limite da sucessão é 1, por valores inferiores a 1, isto é, $\lim u_n = 1^-$.

Por observação da representação gráfica, verificamos que $\lim f(v_n) = -\infty$.

Desta forma, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Sejam f uma função real de variável real de domínio D, a um ponto aderente a D, $A =]-\infty\,, a[\cap D$ e $B =]a\,, +\infty[\cap D$.

- Dizemos que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a se a é aderente a A e $\lim\limits_{x \to a^-} f|_A(x) = b$. Representa-se por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.
- Dizemos que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a se a é aderente a A e $\lim\limits_{x \to a^+} f|_B(x) = b$. Representa-se por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.

Exemplo

Consideremos a função g definida por:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 2 \\ x-1 & \text{se} \quad x<2 \end{cases}$$

- Vamos determinar o valor do limite de $g(x)$ quando $x \longrightarrow 2^+$.
  Para toda a sucessão (u_n), com $u_n \in D_g$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2) \wedge \lim u_n = 2^+$, tem-se: $\lim g(u_n) = \lim (u_n)^2 = (\lim (u_n))^2 = 2^2 = 4$

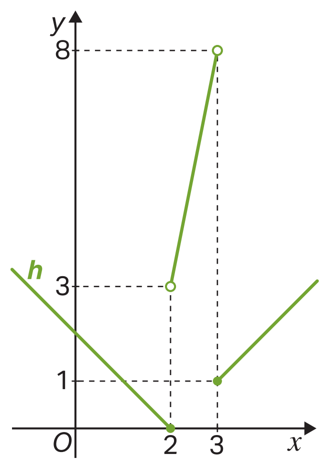
  Logo, $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 4$.

- Para determinar o valor do limite de $g(x)$ quando $x \longrightarrow 2^-$, consideramos toda a sucessão (u_n), com $u_n \in D_g$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2) \wedge \lim u_n = 2^-$.
  Tem-se: $\lim g(u_n) = \lim (u_n - 1) = \lim (u_n) - 1 = 2 - 1 = 1$

  Logo, $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 1$.

Exercícios

21 Na figura encontra-se representada graficamente uma função, h, de domínio $\mathbb{R}$.



Indica o valor de:

21.1. $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$

21.2. $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$

21.3. $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x)$

21.4. $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$

22 Considera a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se} \quad x<-1 \\ 3 & \text{se} \quad x=-1 \\ 2x-1 & \text{se} \quad x>-1 \end{cases}$$

Usando a definição de limite num ponto, mostra que:

22.1. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -3$

22.2. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0$

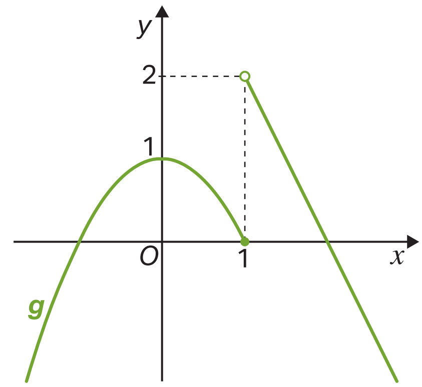
Manual Digital

Atividade
Existência de limite de uma função num ponto

23 Considera a função g representada graficamente na figura.
Sabendo que as sucessões (u_n) e (v_n) são definidas por $u_n = 1 - \frac{2}{n}$ e $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$,
indica o valor de cada um dos seguintes limites.

23.1. $\lim g(u_n)$

23.2. $\lim g(v_n)$



Consideremos uma função f, real de variável real, de domínio D.

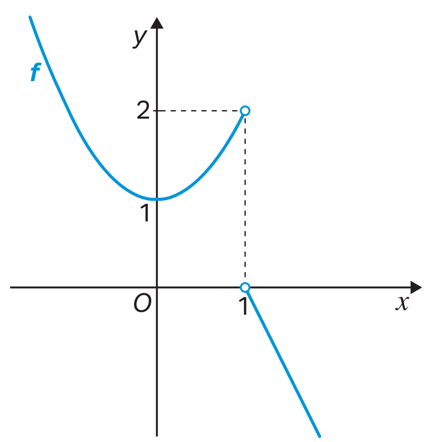
- Seja a um ponto aderente a D e $a \notin D$.
  Se existirem os limites laterais de $f(x)$ no ponto a e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
- Seja a um ponto pertencente ao domínio de f, isto é, $a \in D$.
  Se existirem os limites laterais de $f(x)$ no ponto a e forem iguais a $f(a)$, então existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Exemplos

1. Na figura encontra-se representada a função real de variável real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{se} \quad x > 1 \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Vamos verificar se existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



- Comecemos por determinar o valor do limite de $f(x)$ quando $x \longrightarrow 1^+$.
  Para toda a sucessão (u_n), com $u_n \in D_f$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1) \wedge \lim u_n = 1^+$, tem-se:

$$\lim f(u_n) = \lim(-2u_n + 2) = -2 \lim(u_n) + 2 = -2 \times 1 + 2 = 0$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

- Vamos determinar o valor do limite de $f(x)$ quando $x \longrightarrow 1^-$.

  Para toda a sucessão (v_n), com $v_n \in D_f$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1) \wedge \lim v_n = 1^-$, tem-se:

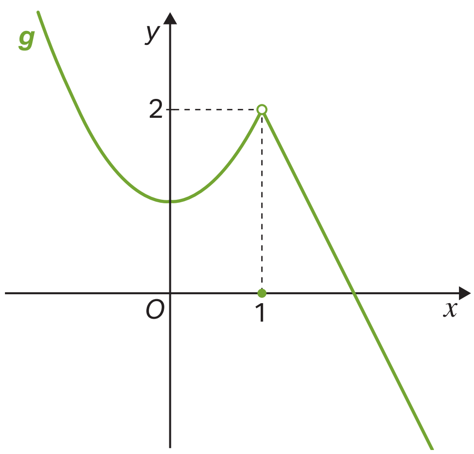
  $$\lim f(v_n) = \lim \left((v_n)^2 + 1\right) = [\lim (v_n)]^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

  Logo, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, concluímos que não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

2. Na figura encontra-se representada a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ -2x + 4 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



Vamos verificar se existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

- Comecemos por determinar o valor do limite de $g(x)$ quando $x \longrightarrow 1^+$.

  Para toda a sucessão (u_n), com $u_n \in D_g$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1) \wedge \lim u_n = 1^+$, tem-se:

  $$\lim g(u_n) = \lim (-2u_n + 4) = -2 \lim (u_n) + 4 = -2 \times 1 + 4 = 2$$

  Logo, $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 2$.

- Vamos, agora, determinar o valor do limite de $g(x)$ quando $x \longrightarrow 1^-$.

  Consideremos toda a sucessão (v_n), com $v_n \in D_g$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1) \wedge \lim v_n = 1^-$.

  Tem-se:

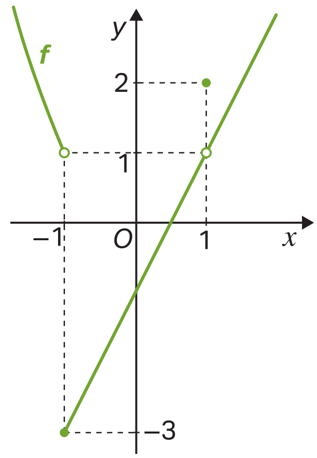
  $$\lim g(v_n) = \lim \left((v_n)^2 + 1\right) = [\lim (v_n)]^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

  Logo, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2$, mas é diferente de $g(1) = 0$, então não existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Exercícios

24 Na figura encontra-se representada graficamente uma função f.



Indica, caso exista, o valor de:

24.1. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

24.2. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

24.3. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

24.4. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

24.5. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

24.6. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

25 Considera a função g, real de variável real, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ x - 2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

25.1. Mostra que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$.

25.2. Justifica que não existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

26 Considera a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{se} \quad x < 2 \\ x + 2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Recorrendo à definição de limite, mostra que não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

4.3.3. Limites no infinito

Consideremos uma função real de variável real f de domínio D_f não majorado.

Se, para toda a sucessão (u_n), com $u_n \in D_f$, tal que $u_n \longrightarrow +\infty$, se tem $\lim f(u_n) = b$, com $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$, então diz-se que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = b$.

Consideremos uma função real de variável real f de domínio D_f não minorado.

Se, para toda a sucessão (u_n), com $u_n \in D_f$, tal que $u_n \longrightarrow -\infty$, se tem $\lim f(u_n) = b$, com $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$, então diz-se que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = b$.

Manual Digital

Vídeo
Limites no infinito

Exemplos

1. Relativamente à função f definida por $f(x) = \sqrt{x-2}$, sabemos que tem domínio $D_f = [2, +\infty[$ e podemos determinar o limite de $f(x)$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

Consideremos todas as sucessões (u_n) tais que, para qualquer número natural n, $u_n \in D_f$ e $\lim u_n = +\infty$.

$\lim f(u_n) = \lim \sqrt{u_n - 2} = \sqrt{+\infty - 2} = +\infty$

Desta forma, concluímos que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. A função g definida por $g(x) = \sqrt{1-x}$ tem domínio $D_g =]-\infty, 1]$.

Pretendemos determinar o limite de $g(x)$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

Consideremos todas as sucessões (v_n) tais que, para qualquer número natural n, $v_n \in D_g$ e $\lim v_n = -\infty$.

$\lim g(v_n) = \lim \sqrt{1 - v_n} = \sqrt{1 - (-\infty)} = +\infty$

Assim, concluímos que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

3. Seja h a função definida por: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{se} \quad x < 3 \\ -x+1 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$

Sabemos que tem domínio $D_h = \mathbb{R} \backslash \{3\}$ e podemos determinar o limite de $h(x)$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

Consideremos todas as sucessões (u_n) tais que, para qualquer número natural n, $u_n \in D_h$ e $\lim u_n = +\infty$.

$\lim h(u_n) = \lim (-u_n + 1) = -\infty + 1 = -\infty$

Manual Digital

Atividade
Operações com limites

Exercícios

27 Considera a função h definida por $h(x)=\sqrt{4-2x}$.
Determina:

27.1. o domínio da função h;

27.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$, usando a definição de limite.

28 Usando a definição de limite, determina $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$, sendo p a função definida por $p(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

29 Considera a função m definida por:

$$m(x)=\begin{cases}\sqrt{1-2x} & \text{se} \quad x\leqslant\dfrac{1}{2}\\[2mm] 3+x & \text{se} \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Usando a definição de limite, mostra que:

29.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} m(x)=+\infty$

29.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x)=+\infty$

4.3.4. Operações com limites

Consideremos duas funções reais de variável real f e g. Sejam b e c dois números reais tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, sendo a um ponto aderente aos domínios das funções ou $a=\pm\infty$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=b+c$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=b-c$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\times g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=b\times c$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{b}{c}$, com $c\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}[k\times f(x)]=k\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\times b$, com $k\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^k=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^k=b^k$, com $k\in\mathbb{Q}$ (se $k<0$, $b\neq 0$)

Exemplo

Sejam f e g duas funções tais que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$.

Sabemos que:

- $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to 2} f(x) - \lim\limits_{x \to 2} g(x) = -\infty - 0 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{1}{f(x)} \times \sqrt{4 - g(x)}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{1}{f(x)}\right] \times \lim\limits_{x \to 2} \left[\sqrt{4 - g(x)}\right] = \dfrac{1}{-\infty} \times \sqrt{4 - 0} = 0 \times 2 = 0$

Exercícios

30 **Na figura estão representadas as funções f e g. Atendendo aos dados apresentados na figura, determina, caso existam, os seguintes limites.**

30.1. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

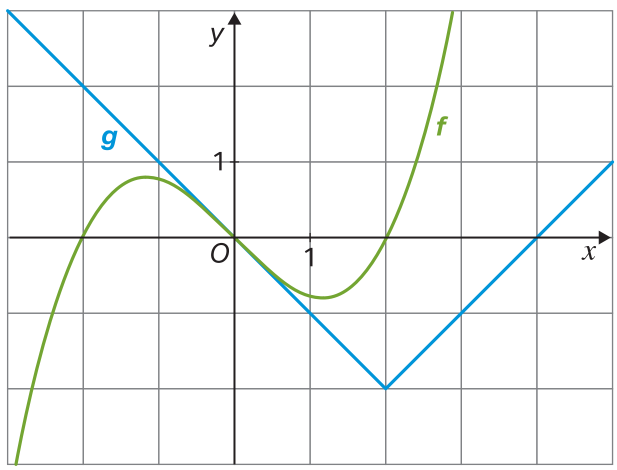
30.2. $\lim\limits_{x \to -2} [f(x) \times g(x)]$

30.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)]$

30.4. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{1}{1 - f(x)}\right]$

30.5. $\lim\limits_{x \to 4} \left[\sqrt{g(x)}\right]$

30.6. $\lim\limits_{x \to 2^-} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$



31 **Considera as funções f, g e h, tais que:**

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1} g(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} h(x) = 4$$

Determina, caso existam, os seguintes limites.

31.1. $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + h(x)]$

31.2. $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - g(x)]$

31.3. $\lim\limits_{x \to 1} [g(x) \times h(x)]$

31.4. $\lim\limits_{x \to 1} [3h(x)]$

31.5. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{f(x)}{h(x)}\right]$

31.6. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{h(x)} \times \sqrt{x^2 - 1}\right]$

31.7. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{g(x)} \times h(x)\right]$

31.8. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{\sqrt{h(x)}}{1 - x}\right]$

Caso b e c sejam $\pm\infty$ ou iguais a 0, as operações com limites mantêm-se, exceto nos casos já identificados como indeterminações aquando do estudo dos limites de sucessões.

4.3.5. Limite de uma função composta

Manual Digital

Vídeo
Limite da função composta

Dadas duas funções f e g, para determinar o limite da função composta $g \circ f$, não é necessário caracterizá-la, basta atender à seguinte propriedade:

Sejam f e g duas funções reais de variável real e a um ponto aderente a $D_{g \circ f}$ (domínio da função composta $g \circ f$).
Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, então $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$, com $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Nota: Esta propriedade também é válida se $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, se os domínios das funções f e g não forem majorados ou minorados, respetivamente.

4.3.6. Levantamento de indeterminações

Repara que, considerando qualquer sucessão (u_n) tal que $u_n \longrightarrow a$, determinar $\lim f(u_n)$ corresponde, na prática, a substituir x por a na expressão de $f(x)$ em $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

No caso de se obter uma indeterminação, será necessário proceder primeiro ao levantamento dessa indeterminação.

Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$

O levantamento deste tipo de indeterminações deve ser analisado caso a caso.

Quando estamos perante uma **função racional**, devemos fatorizar os membros da fração e simplificar os fatores comuns.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5x - 20}{16 - x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5(x-4)}{-(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5}{-(x+4)} = -\dfrac{5}{8}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 - x - 1)}{(x-1)(x+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1} = -\dfrac{1}{2}$

Cálculos auxiliares:

	1	-2	0	1
		$+$	$+$	$+$
1		1	-1	-1
$\times$	1	-1	-1	0

Logo:
$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$

Exercício

32 Determina:

32.1. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{2x^2 + 10x}{x^2 - 25}$

32.2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{x^3 - 3x^2}$

32.3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$

32.4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{3x - x^2}$

No caso de a indeterminação envolver uma **função com radicais**, devemos racionalizar o numerador ou o denominador, conforme o caso.

Exemplos

1. $$\lim_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 4} \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(x^2-16)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 4} \frac{4-x}{(x^2-16)(2+\sqrt{x})} =$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{-(x-4)}{(x-4)(x+4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 4} \frac{-1}{(x+4)(2+\sqrt{x})} = -\frac{1}{32}$$

2. $$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{3-x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{3-x})}{(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{3-x})}{1-(3-x)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{3-x})}{-2+x} =$$
$$= \lim_{x \to 2} (1+\sqrt{3-x}) = 2$$

3. $$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{4-x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \times \sqrt{x-2}}{(4-x^2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{-(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} =$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{-(x+2)\sqrt{x-2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Exercício

33 Determina:

33.1. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

33.2. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-x^2}$

33.3. $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-2x}$

33.4. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}$

Há, ainda, outros casos, em que o limite será $\pm\infty$ ou não existe.

Exemplos

1. $$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x-1})^2}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)\sqrt{x-1}} =$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|1-x|}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{}$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 1-x \geqslant 0 \\ -(1-x) & \text{se} \quad 1-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Então, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|1-x|}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|1-x|}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{x-1} = -1$.

Logo, não existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|1-x|}{x-1}$.

3. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{(x^2-4)\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)\sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{-4 \times 0^+} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Exercício

34 Determina:

34.1. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$

34.2. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-16}$

34.3. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-3}$

34.4. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{|x-4|}{x^2-16}$

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Se a função envolvida é **polinomial**, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n$, com $a_0 \neq 0$, então:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_0 x^n\right)$$

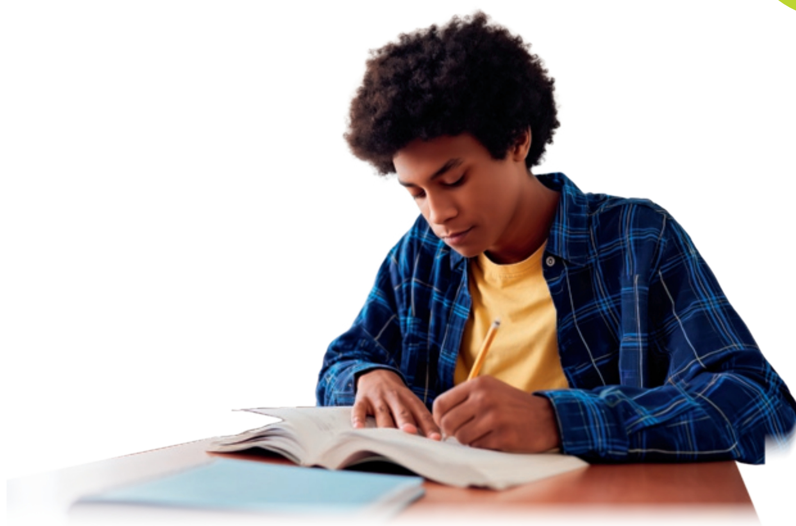
Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 2x + 1) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty\,(3 - 0 + 0) = +\infty$

Colocar em evidência a potência de x de maior expoente.

Ou, simplesmente, $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 2x + 1) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^2 + x) \overset{(-\infty + \infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$



Exercício

35 Determina:

35.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - x^3)$

35.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - x^3 + 1)$

35.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - x - 2)$

35.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + x^3 + 2)$

35.5. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + x^2)$

No caso de a expressão algébrica envolvida conter **radicais**, devemos multiplicar e dividir pelo conjugado da expressão que os contém.

Exemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+2}\right) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2+2}\right)\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)}{x + \sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2}{x + \sqrt{x^2+2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x + \sqrt{x^2+2}} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

Exercício

36 Determina:

36.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

36.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2+x^2} - x\right)$

36.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2-x} - \sqrt{1-x}\right)$

36.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x}\right)$

Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Quando estamos perante uma **função racional**, isto é, sendo f e g funções polinomiais tais que $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n$, com $a_0 \neq 0$ e

$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x^1 + b_m$, com $b_0 \neq 0$, então:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$$

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+2x}{5-x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{5}{x}-1\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{\frac{5}{x}-1} = \dfrac{+\infty \times (3+0)}{0-1} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+x^2-1}{5x^3-x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{1}{x}} = \dfrac{1+0-0}{5-0} = \dfrac{1}{5}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2x^2}{5x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{5} = -\infty$

No caso de a expressão algébrica envolvida conter **radicais**, devemos colocar em evidência o termo de maior grau do numerador e do denominador, tendo em atenção que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x+x^2}}{x+2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{-\sqrt{0+1}}{1+0} = -1$

> **Nota:**
> $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
> Então:
> $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x)$
> $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}+x\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}-x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \dfrac{1}{-\left(\sqrt{1+0}+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$

Exercício

37 Determina:

37.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^3+2x^2+1}{1-2x^2}$

37.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x+3}{3x^3+2}$

37.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^4+x+1}{2x^4+x^2-x}$

37.4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6x^3+3x}{x^3-1}$

37.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$

37.6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}$

37.7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

37.8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Manual Digital

Vídeo
Resolução de problemas envolvendo limites em situação de indeterminação

Indeterminações do tipo $0 \times \infty$

As indeterminações deste tipo recaem nas indeterminações analisadas anteriormente, bastando, para tal, proceder à multiplicação das expressões das funções envolvidas.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1-2x^2} \times (3-x^2) \overset{(0 \times \infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3-x^2}{1-2x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{-2x^2} = \frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} \times (x^2-1) \overset{(\infty \times 0)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{1-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} [-(x+1)] = -2$

Exercício

38 Determina:

38.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2-1} \times (3x+1)$

38.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times (x-1)$

38.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4-x^2+1} \times (2x^3-3x)$

38.4. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} \times (4-x^2)$

Para aplicar

1 Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

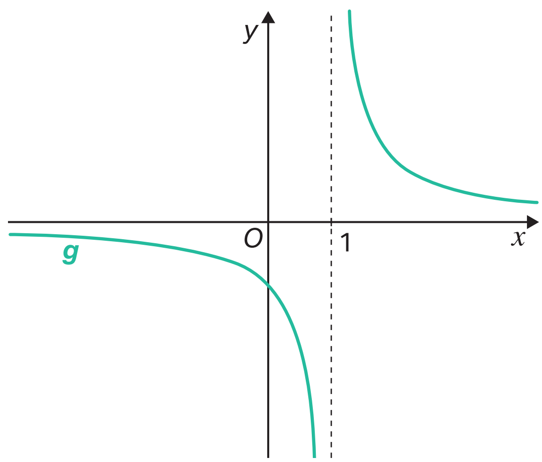
Determina, se existir, $\lim f(u_n)$, sabendo que:

1.1. $f(x) = 2x - 1$

1.2. $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

1.3. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

2 Na figura seguinte está representada a função g de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Seja (u_n) uma sucessão de elementos do domínio de g tal que $\lim g(u_n) = -\infty$.

Qual das opções seguintes poderá ser o termo geral de (u_n)?

(A) $u_n = 2 - \frac{1}{n}$

(B) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

(C) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

(D) $u_n = \frac{1}{n}$

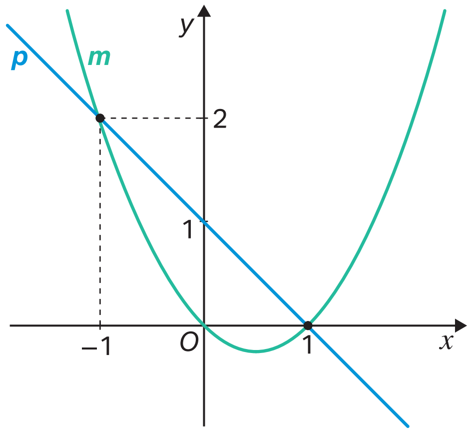
3 Considera a função f definida por $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$.

Pela definição de limite, mostra que:

3.1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

4 No referencial da figura encontram-se representadas duas funções, m e p, quadrática e afim, respetivamente. Atendendo aos dados da figura, determina:



4.1. $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{m}{p}\right)(x)$

4.2. $\lim\limits_{x \to 0} (m - p)(x)$

4.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{m(x)}\right)$

4.4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - x}{p(x)}\right)$

5 Considera a função h, de domínio $[-4, +\infty[$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{2 - \sqrt{x+4}} & \text{se} \quad -4 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{k}{x+1} & \text{se} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

5.1. Determina $\lim\limits_{x \to -4^+} h(x)$.

5.2. Determina o número real k, não nulo, de modo que exista $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

6 Determina, se existir, cada um dos seguintes limites.

6.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x)$

6.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{2 - x}\right)$

6.3. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{2 - x}\right)$

6.4. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{4x - x^2 - 3}{2x - x^2 + 3}\right)$

6.5. $\lim\limits_{x \to -2^-} \left(\frac{x+2}{4 - x^2}\right)$

6.6. $\lim\limits_{x \to -1^+} \left(\frac{3x - 1}{x^2 - 1}\right)$

6.7. $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 2x}\right)$

6.8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - x - 6}{|3 - x|}\right)$

Para aplicar

7 Considera as funções f, g e h definidas por:

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2, \quad g(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad \text{e} \quad h(x) = x^2 - 9$$

Determina, caso existam, os seguintes limites.

7.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$

7.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{f(x)}{h(x)}\right]$

7.3. $\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{g(x)}{h(x)}\right]$

7.4. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

7.5. $\lim\limits_{x \to -3} \left[\dfrac{\sqrt{1-x}}{h(x)}\right]$

7.6. $\lim\limits_{x \to 2^-} \left[\dfrac{|x-2|}{f(x)}\right]$

8 Determina cada um dos seguintes limites.

8.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)$

8.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{1 - \sqrt{2x+1}}\right)$

8.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$

8.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3x + x^2}}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

9 Considera a função p, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, definida por:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{se} \quad x > -2 \\ \dfrac{x+2}{-x^2 - x + 2} & \text{se} \quad x < -2 \end{cases}$$

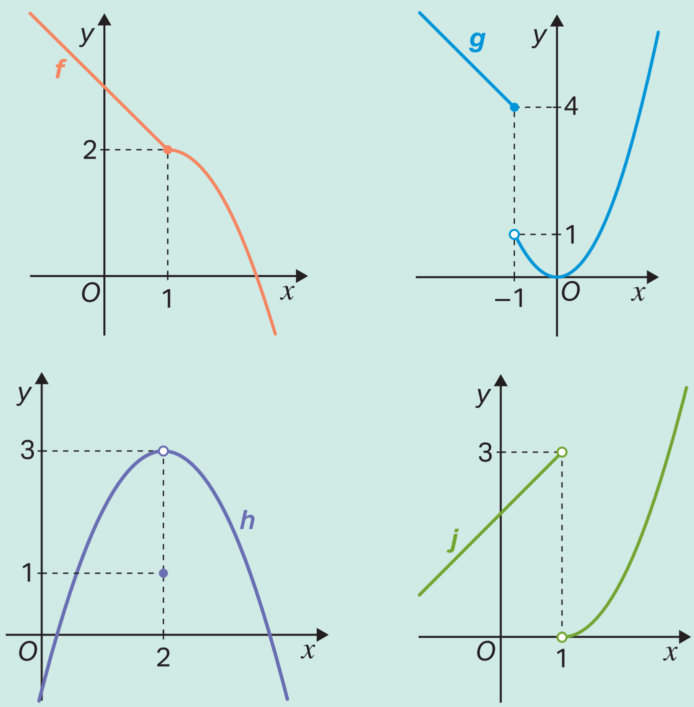
Determina, caso exista, $\lim\limits_{x \to -2} p(x)$.

4.4. Continuidade de funções

4.4.1. Função contínua num ponto

Tarefa

Na figura seguinte encontram-se representadas graficamente as funções f, g, h e j.



1 Indica o valor lógico (verdadeiro ou falso) de cada uma das seguintes afirmações.

1.1. $1 \in D_f$ **1.2.** $-1 \in D_g$

1.3. $2 \in D_h$ **1.4.** $1 \in D_j$

2 Indica:

2.1. $f(1)$ **2.2.** $g(-1)$ **2.3.** $h(2)$

3 Por observação de cada uma das representações gráficas, verifica a existência de cada um dos seguintes limites e, no caso de existir, indica o seu valor.

3.1. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **3.2.** $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

3.3. $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ **3.4.** $\lim\limits_{x \to 1} j(x)$

Por análise dos resultados obtidos na tarefa anterior, dizemos que:

- a função f é **contínua** em $x=1$;
- as funções g, h e j são **descontínuas** em $x=-1$, $x=2$ e $x=1$, respetivamente.

Seja f uma função real de variável real e a um ponto do seu domínio.
A função ***f* é contínua em *a*** quando $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Recorda
Dada uma função f e $a \in D_f$, se existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, então é igual a $f(a)$.

Exemplos

1. Verifiquemos se é contínua em $x=1$ a função g definida por:

$$g(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{se} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{1-x^2}{-x^2+x} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

- $g(1)=2$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x-1) = 3 \times 1 - 1 = 2$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1-x^2}{-x^2+x}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{-(x-1)(x+1)}{-x(x-1)}\right) = \dfrac{-(1+1)}{-1} = 2$

Então, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1) = 2$, logo existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e é igual a 2.

Concluímos que a função g é contínua em $x=1$.

2. Sabendo que a função h definida por:

$$h(x)=\begin{cases} k & \text{se} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2+x-2} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

é contínua em $x=1$, para determinarmos o valor de k, começamos por determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

Como a função h é contínua, então $k = h(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \dfrac{1}{3}$.

Exercícios

39 Verifica se as funções a seguir definidas são contínuas nos pontos indicados.

39.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}} & \text{se} \quad x\geqslant 1\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{se} \quad x<1\end{cases}$, em $x=1$

39.2. $g(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+1}$, em $x=1$

39.3. $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{se} \quad x>4\\ x+4 & \text{se} \quad x\leqslant 4\end{cases}$, em $x=4$

39.4. $i(x)=\begin{cases}x+1 & \text{se} \quad x\leqslant 1\\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$, em $x=1$

40 Considera a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4} & \text{se} \quad x<0\\ 2 & \text{se} \quad 0\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} & \text{se} \quad x>2 \ \wedge \ x\neq 3\end{cases}$$

Verifica se a função f é contínua em:

40.1. $x=0$

40.2. $x=2$

41 Determina o valor de k, com $k\in\mathbb{R}$, de modo que as funções seguintes sejam contínuas nos pontos indicados.

41.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x^2-x}+k & \text{se} \quad x<0\\ \dfrac{x+2}{x+1} & \text{se} \quad x\geqslant 0\end{cases}$, em $x=0$

41.2. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{se} \quad x>-3\\ \dfrac{k}{x} & \text{se} \quad x\leqslant -3\end{cases}$, em $x=-3$

41.3. $h(x)=\begin{cases}x^2+k & \text{se} \quad x\leqslant 0\\ \dfrac{9x-x^2}{x^2+3x} & \text{se} \quad x>0\end{cases}$, em $x=0$

41.4. $j(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} & \text{se} \quad x>3\\ \dfrac{kx-k}{x-1} & \text{se} \quad x\leqslant 3\wedge x\neq 1\end{cases}$, em $x=3$

4.4.2. Continuidade de uma função num subconjunto do domínio

Manual Digital

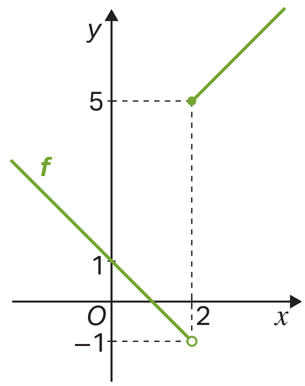
Vídeo
Função contínua

Dada uma função f, real de variável real, de domínio D e um subconjunto A do domínio $(A \subset D)$, diz-se que a função $\boldsymbol{f}$ **é contínua em** $\boldsymbol{A}$ quando f é contínua em todos os pontos de A.
Se a função f é contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos que a função $\boldsymbol{f}$ **é contínua**.

Exemplo

Consideremos a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se} \quad x \geqslant 2 \\ 1-x & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$



Vejamos se a função f é contínua no intervalo $[1, 3]$.

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x+3) = 5$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (1-x) = -1$

Então, não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Logo, a função f é descontínua no ponto de abcissa 2.

Portanto, a função f não é contínua em $[1, 3]$, pois não é contínua num ponto desse intervalo.

Exercícios

42 Considera a função g definida por: $g(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{se} \quad x < -2 \\ 4 & \text{se} \quad x \geqslant -2 \end{cases}$

42.1. Mostra que a função g não é contínua em $x = -2$.

42.2. O que podes concluir quanto à continuidade da função g no intervalo $[-3, 0]$? Justifica a tua resposta.

43 Considera a função h definida por: $h(x) = \begin{cases} -4x+1 & \text{se} \quad 1 \leqslant x < 5 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{se} \quad 5 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$

Verifica se a função h é contínua no intervalo $[4, 6]$.

44 Considera a função p definida por: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

Mostra que a função p não é contínua.

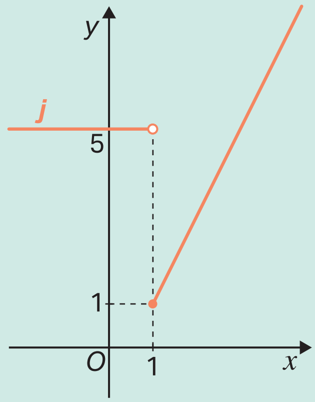
4.4.3. Operações com funções contínuas

Manual Digital

Atividade
Operações com funções contínuas

Tarefa

1 Na figura encontra-se representada graficamente a função j.
Dá exemplo de:



1.1. uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $j - f$ seja contínua em $x = 1$;

1.2. uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $j + g$ seja contínua em $x = 1$;

1.3. uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $j \times h$ seja contínua em $x = 1$.

2 Considera a função m definida por: $m(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

2.1. A função m é contínua no intervalo $[0, 2]$? Justifica a tua resposta.

2.2. Dá exemplo de uma função p, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $m + p$ seja contínua em $[0, 2]$.

Consideremos duas funções $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuas num ponto a.
Podemos concluir que:

- a função $f + g$ é contínua em a, porque:
$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$$
- a função $f - g$ é contínua em a, porque:
$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = f(a) - g(a) = (f - g)(a)$$
- a função $f \times g$ é contínua em a, porque:
$$\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \times g(a) = (f \times g)(a)$$
- a função $\frac{f}{g}$, com $g(a) \neq 0$, é contínua em a, porque:
$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$$
- a função f^r, com $r \in \mathbb{Q}$, é contínua em a, porque: $\lim_{x \to a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^r = [f(a)]^r$

Toda a função polinomial é contínua.

Demonstração:

Consideremos um polinómio $P(x)$ definido por:

$P(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-1} + ... + a_{n-1}\,x^1 + a_n$

Sejam f a função definida por $f(x) = P(x)$ e b um ponto do domínio da função f.

Sabemos que:

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} \left(a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,x^1 + a_n\right) =$$

$$= a_0\,b^n + a_1\,b^{n-1} + a_2\,b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,b^1 + a_n = f(b)$$

Assim, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Logo, a função f é contínua em $x = b$.

Portanto, a função f é contínua em qualquer ponto do seu domínio, pelo que a função f é contínua.

Toda a função racional é contínua no seu domínio.

Demonstração:

Consideremos a função racional f definida por $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios, com $Q(x) \neq 0$.

Se considerarmos as funções polinomiais g e h definidas por $g(x) = P(x)$ e $h(x) = Q(x)$, sabemos que g e h são contínuas em qualquer ponto do domínio de f. Logo, f é contínua no seu domínio.

Exemplos

1. As funções f, g e h definidas por $f(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ e $h(x) = \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{2}{x}$ são contínuas nos seus domínios, pois f é uma função racional, g é uma função polinomial e h é a soma de duas funções racionais (ou seja, é a soma de duas funções contínuas).

2. Consideremos a função m definida por:

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}} & \text{se} \quad x>2\\ 1-x & \text{se} \quad x\leqslant 2\end{cases}$$

- A função m é contínua no intervalo $]-\infty\,,\,2[$, pois, nesse intervalo, a expressão algébrica que a define é um polinómio.

- A função m é contínua no intervalo $]2\,,+\infty[$, pois é o quociente entre duas funções contínuas (uma função polinomial e a potência de expoente $\dfrac{1}{2}$ de uma função polinomial).

- Vamos verificar se a função m é contínua em $x=2$.

  $\lim\limits_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1$

  $$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{(x-2)\times\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)\times\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{(x-2)\sqrt{x-2}}{x-2}\right)=$$

  $$=\lim_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}\right)=\sqrt{0}=0$$

  Logo, m não é contínua em $x=2$.

Portanto, m não é contínua em $\mathbb{R}$.

3. Seja p a função definida por:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-1}{1+2x} & \text{se} \quad x>0\\[2ex] \dfrac{2-3x}{x-2} & \text{se} \quad x\leqslant 0\end{cases}$$

- Em $]0\,,+\infty[$, a função p é definida por uma função racional cujo denominador não se anula, logo p é contínua em $]0\,,+\infty[$.

- Em $]-\infty\,,\,0[$, a função p é definida pelo quociente de duas funções contínuas cujo denominador não se anula, pelo que p é contínua em $]-\infty\,,\,0[$.

- A função p é contínua em $x=0$, uma vez que:

  $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x-1}{1+2x}\right)=-1\,,\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2-3x}{x-2}\right)=-1 \ \text{ e } \ p(0)=-1$$

Portanto, p é contínua em $\mathbb{R}$.

Exercícios

45 Considera as funções m e p definidas por:

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{se } x\geqslant 1\\ 2-3x & \text{se } x<1\end{cases} \quad \text{e} \quad p(x)=\begin{cases}-2x & \text{se } x<1\\ x+1 & \text{se } x\geqslant 1\end{cases}$$

45.1. Verifica se m é contínua em $x=1$.

45.2. Mostra que p é descontínua em $x=1$.

45.3. A função $m\times p$ é contínua em $x=1$? Justifica a tua resposta.

46 Verifica se é contínua a função f definida por:

46.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se } x<-2\\ 2x & \text{se } x\geqslant -2\end{cases}$

46.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+x-1}{x+1} & \text{se } x>-1\\ 2 & \text{se } x=-1\\ \dfrac{6x+6}{x^2-1} & \text{se } x<-1\end{cases}$

46.3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+x} & \text{se } x>0\\ 2 & \text{se } x=0\\ 2-3x & \text{se } x<0\end{cases}$

46.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{se } x>3\\ \dfrac{1}{4} & \text{se } x=3\\ \dfrac{1}{x^2-9} & \text{se } x<3\end{cases}$

47 Determina, em cada caso, o valor real de k, de modo que a função g seja contínua no seu domínio.

47.1. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} & \text{se } x>2\\ x^2-2x+k & \text{se } x\leqslant 2\end{cases}$

47.2. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2+x} & \text{se } x>0\\ \dfrac{x+k}{x-2} & \text{se } x\leqslant 0\end{cases}$

4.4.4. Continuidade da função composta

Como estudámos no 10.º ano, dadas duas funções f e g, de domínios D_f e D_g, respetivamente, a **função composta de g com f**, $g \circ f$, é tal que:

- $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Da definição de limite da função composta de duas funções e da definição de função contínua resulta que:

Dadas duas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Exemplo

Consideremos as funções definidas por:

$$g(x) = x^2 \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \leqslant 1 \\ x - 3 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vamos estudar a continuidade da função $h \circ g$ em $x = 1$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial. Logo, é contínua em $x = 1$.

$g(1) = 1^2 = 1$

Como $h(1) = -2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1) = -2$, a função h é contínua em $g(1)$.

Então, podemos concluir que a função $(h \circ g)$ é contínua em $x = 1$.

Exercício

48 Considera as funções p e m definidas por:

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se} \quad x \geqslant 2 \\ 2 - x & \text{se} \quad x < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad m(x) = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x \leqslant -1 \\ x + 3 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$$

Mostra que a função $p \circ m$ é contínua em $x = -1$.

Para aplicar

1 Em cada caso, verifica se a função f é contínua no ponto indicado.

1.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-4}{x^2-4} & \text{se} \quad x>2 \\ \dfrac{x}{4} & \text{se} \quad x\leqslant 2\end{cases}$, em $x=2$

1.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{se} \quad x<-1 \\ \sqrt{x+1} & \text{se} \quad x\geqslant -1\end{cases}$, em $x=-1$

1.3. $f(x)=\begin{cases}-x & \text{se} \quad x<3 \\ 1 & \text{se} \quad x=3 \\ \dfrac{x^2-3x}{3-x} & \text{se} \quad x>3\end{cases}$, em $x=3$

1.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{se} \quad x>2 \\ 2x & \text{se} \quad x\leqslant 2\end{cases}$, em $x=2$

1.5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} & \text{se} \quad x>9 \\ \dfrac{1}{9} & \text{se} \quad x=9\end{cases}$, em $x=9$

1.6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} & \text{se} \quad x>-1 \\ 2x+3 & \text{se} \quad x\leqslant -1\end{cases}$, em $x=-1$

2 Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x+3}-4}{x-1} & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 2 & \text{se} \quad x=1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

Estuda a função g quanto à continuidade em $x=1$.

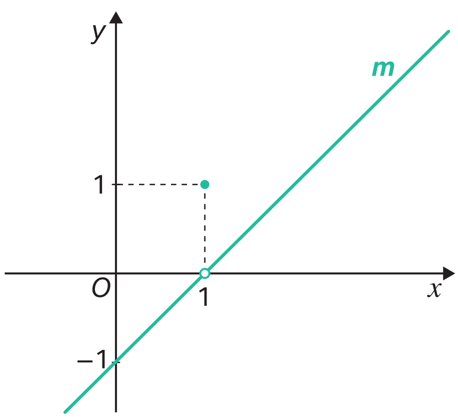
3 Em cada caso, determina o valor de k, com $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função f é contínua no ponto indicado.

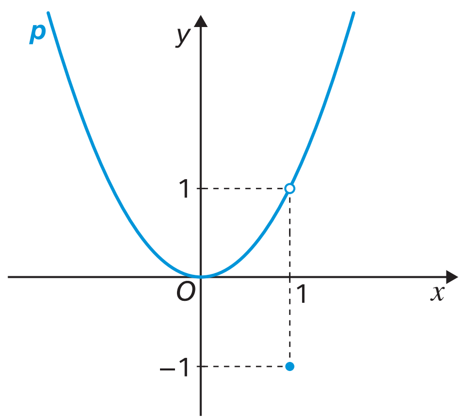
3.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{se} \quad x>4 \\ kx & \text{se} \quad x \leqslant 4\end{cases}$, em $x=4$

3.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} & \text{se} \quad x>1 \\ 1-kx & \text{se} \quad x \leqslant 1\end{cases}$, em $x=1$

3.3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2}}{x+3} & \text{se} \quad x>-3 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{k} & \text{se} \quad x \leqslant -3\end{cases}$, em $x=-3$

4 Na figura seguinte encontram-se representadas graficamente as funções m e p, ambas de domínio $\mathbb{R}$.





4.1. A função $m+p$ é contínua em $x=1$? Justifica a tua resposta.

4.2. Dá exemplo de uma função h tal que a função $p \times h$ seja contínua em $x=1$.

4.3. Dá exemplo de uma função j tal que a função $m-j$ seja contínua em $x=1$.

Para aplicar

5 Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & \text{se } x>1\\[2mm] \dfrac{1+x}{4} & \text{se } x\leqslant 1\end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{se } x>1\\ x+1 & \text{se } x\leqslant 1\end{cases}$$

5.1. Verifica se as funções são contínuas em $x=1$.

5.2. Caracteriza a função $f+g$.

5.3. Justifica que a função $f+g$ é contínua em $x=1$ e faz a sua verificação utilizando o resultado obtido em **5.2.**.

6 Considera a função h definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2-3}}{x+2} & \text{se } x<-2\\[2mm] \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x\geqslant -2\end{cases}$$

Estuda a função h quanto à continuidade.

7 Justifica que é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2}{x^2+2x-3} & \text{se } x>1\\[2mm] \dfrac{5}{4}x-1 & \text{se } x\leqslant 1\end{cases}$$

8 Considera a função h definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{se } x<-1\\[2mm] \dfrac{1-9x}{4} & \text{se } -1\leqslant x<0\\[2mm] \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

Estuda a função h quanto à continuidade.

4.5. Assíntotas ao gráfico de uma função

Manual Digital

Vídeo
Assíntota vertical

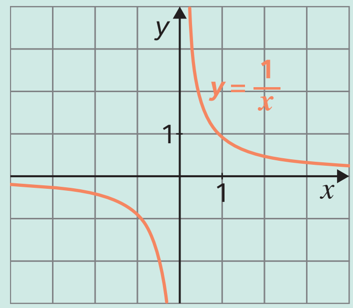
Tarefa

1 Considera a função racional f definida por:

$$f(x)=\frac{1}{x+2}+1$$

1.1. Indica o domínio da função f.

1.2. Copia a representação gráfica da função definida por $y=\frac{1}{x}$, apresentada ao lado, e, a partir dela, faz o esboço da representação gráfica da função f no mesmo referencial.



1.3. Copia e completa.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\ldots$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\ldots$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\ldots$ $\quad\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\ldots$

4.5.1. Assíntotas verticais

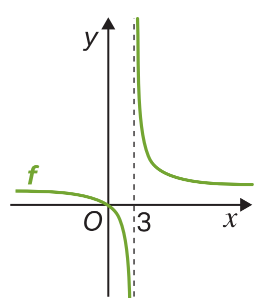
Consideremos uma função real de variável real f.
A reta vertical de equação $x=a$, com $a\in\mathbb{R}$, diz-se **assíntota vertical** ao gráfico de f quando pelos menos um dos limites laterais da função f em $x=a$ é infinito, isto é, quando $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$.

Nota:
A reta de equação $x=a$ poderá ser uma assíntota vertical ao gráfico de uma função f se:
- $a\in D_f$ e a é ponto de descontinuidade;
- $a\notin D_f$, mas a é ponto aderente do domínio de f.

Exemplos

1. Consideremos a função f definida por $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$.

Como o domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, sabemos que, se existir assíntota vertical ao gráfico de f, será em $x=3$.



$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{5}{0^+}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

Logo, a reta de equação $x=3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

2. Relativamente ao gráfico da função g definida por $g(x)=\sqrt{2+x^2}$, sabemos que é uma função contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, pois é a composta de uma função raiz quadrada com uma função polinomial. Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

3. A função m definida por $m(x)=\dfrac{x+2}{|x^2-4|}$ tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

Podemos definir a função m por ramos:

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4} & \text{se} \quad x^2-4>0\\[2mm] \dfrac{x+2}{-x^2+4} & \text{se} \quad x^2-4<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{se} \quad x<-2 \vee x>2\\[2mm] -\dfrac{1}{x-2} & \text{se} \quad -2<x<2\end{cases}$$

Vamos verificar se as retas de equações $x=2$ e $x=-2$ são assíntotas verticais ao gráfico de m.

$$\lim_{x\to 2^+} m(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} m(x)=\lim_{x\to 2^-}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{0^-}=+\infty$$

Logo, a reta de equação $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de m.

Como $\lim\limits_{x\to -2^+} m(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{4}$ e $\lim\limits_{x\to -2^-} m(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{4}$, então a reta de equação $x=-2$ não é assíntota vertical ao gráfico de m.

Exercícios

49 Considera a função h definida por $h(x)=\dfrac{2-x}{3x-1}$.

49.1. Determina o domínio da função h.

49.2. Estuda a função h quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

50 Considera a função p definida por $p(x)=\dfrac{x-1}{1-x^2}$.

50.1. Determina o domínio da função p.

50.2. Mostra que a reta de equação $x=1$ não é assíntota vertical do gráfico de p.

50.3. Mostra que a reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical do gráfico de p.

51 Considera a função m definida por $m(x)=\dfrac{x^2}{|x-1|}$.

51.1. Determina o domínio da função m.

51.2. Define por ramos a função m.

51.3. Estuda a função m quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

4.5.2. Assíntotas não verticais

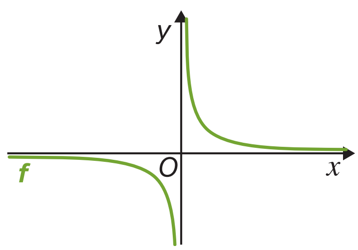
Consideremos uma função real de variável real f.

- A reta de equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, diz-se **assíntota não vertical** ao gráfico de f em $+\infty$ quando $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.
- A reta de equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, diz-se **assíntota não vertical** ao gráfico de f em $-\infty$ quando $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.

Nota:
Se $m = 0$, trata-se de uma **assíntota horizontal**.
Se $m \neq 0$, trata-se de uma **assíntota oblíqua**.

Exemplos

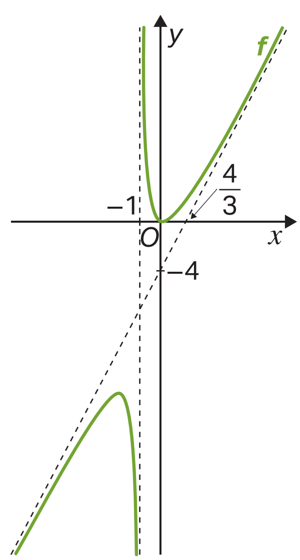
1. No caso da função racional definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, sabemos que o seu domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 0x] = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 0x] = \dfrac{1}{-\infty} = 0$, verificamos que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$ e quando $x \longrightarrow -\infty$.

2. Na figura ao lado encontra-se representada graficamente a função f definida por $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x + 1}$.
A tracejado, na figura, está representada a reta r, de equação $y = 3x - 4$.
Por observação, a reta r parece ser assíntota oblíqua ao gráfico de f. Vamos verificar a veracidade dessa suposição.



$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (3x - 4)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x^2 - x}{x + 1} - (3x - 4)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x^2 - x - 3x^2 + 4x - 3x + 4}{x + 1}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x + 1}\right) = \frac{4}{+\infty} = 0$$

O mesmo acontece quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (3x - 4)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x^2 - x}{x + 1} - (3x - 4)\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x^2 - x - 3x^2 + 4x - 3x + 4}{x + 1}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{x + 1}\right) = \frac{4}{-\infty} = 0$$

Desta forma, a reta r de equação $y = 3x - 4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$ e quando $x \longrightarrow -\infty$.

4.5.3. Funções do tipo $y = a + \dfrac{b}{x - c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$

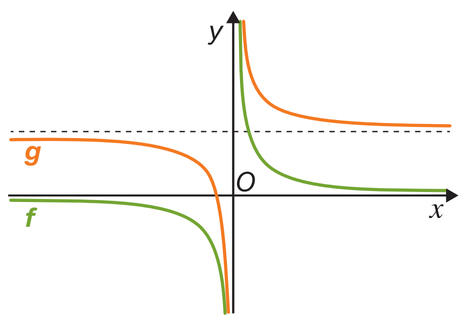
Como vimos no exemplo **1.** da página anterior, as retas de equação $x = 0$ e $y = 0$ são, respetivamente, assíntotas vertical e horizontal ao gráfico da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

O gráfico de qualquer função racional do tipo $y = a + \dfrac{b}{x - c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, pode ser obtido do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ através de transformações geométricas (translações e reflexões).

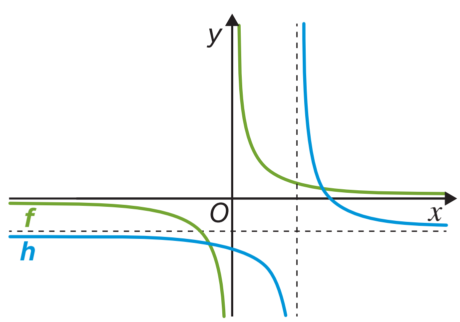
Este tipo de representação gráfica denomina-se **hipérbole**.

Exemplos

1. O gráfico da função $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ é obtido do gráfico da função f, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, através de uma translação segundo o vetor $\vec{u} = (0, 2)$.
Desta forma, concluímos que $x = 0$ e $y = 2$ são as equações das assíntotas vertical e horizontal, respetivamente, ao gráfico de g.



2. Considerando a função racional h definida por $h(x) = -1 + \dfrac{1}{x - 2}$, sabemos que o seu gráfico pode ser obtido a partir do gráfico da função f, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, através de uma translação segundo o vetor $\vec{v} = (2, -1)$.
Desta forma, concluímos que $x = 2$ e $y = -1$ são as equações das assíntotas vertical e horizontal, respetivamente, ao gráfico de h.



Podemos concluir o seguinte:

Consideremos uma função definida por uma expressão algébrica do tipo $y = a + \frac{b}{x - c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Equação da assíntota vertical: $x = c$

Equação da assíntota horizontal: $y = a$

Manual Digital

Atividades
Função racional do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$

Representação de uma função racional na forma $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$

Exercício

52 Para cada uma das funções a seguir definidas, indica o domínio e as equações das assíntotas ao seu gráfico.

52.1. $f(x) = 2 - \frac{1}{x + 3}$

52.2. $g(x) = \frac{1}{x - 2} - 3$

52.3. $h(x) = -1 + \frac{1}{x + 5}$

52.4. $i(x) = 3 + \frac{1}{x - 2}$

Exemplos

1. Para determinar as equações das assíntotas ao gráfico da função definida por $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 5}$, comecemos por escrever a sua expressão algébrica na forma $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

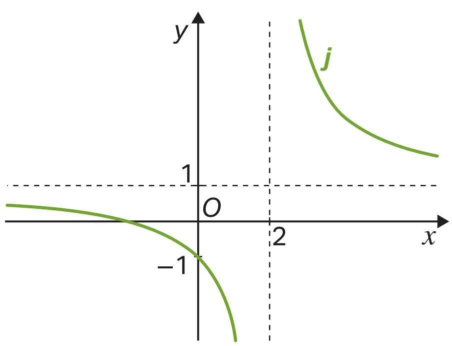
Usando o algoritmo da divisão, concluímos que:

$$\begin{array}{r|l} -3x + 2 & x + 5 \\ \hline +3x + 15 & -3 \\ \hline 17 & \end{array}$$

$f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 5} = -3 + \frac{17}{x + 5}$

Logo, o gráfico da função f admite como assíntota vertical a reta de equação $x = -5$ e como assíntota horizontal a reta de equação $y = -3$.

2. A expressão algébrica da função racional j, representada graficamente no referencial da figura, pode ser definida por $j(x) = a + \frac{b}{x - c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.



- $y = 1$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de j, logo $a = 1$.
- $x = 2$ é a equação da assíntota vertical ao gráfico de j, logo $c = 2$.
- Como $j(0) = -1$, então: $1 + \frac{b}{0 - 2} = -1 \Leftrightarrow \frac{b}{-2} = -2 \Leftrightarrow b = 4$

Assim, $j(x) = 1 + \frac{4}{x - 2}$.

Manual Digital

Vídeo
Estudo de funções racionais

Exercícios

53 Considera as funções racionais f, g, h e i definidas por:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-3},\ g(x)=\frac{x+1}{3-2x},\ h(x)=\frac{6x-1}{3x+2}\ \text{e}\ i(x)=\frac{2x-3}{1+x}$$

Para cada uma das funções, responde às seguintes questões.

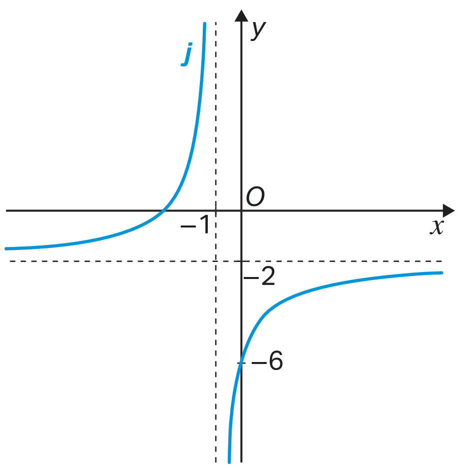
53.1. Determina o domínio da função.

53.2. Define a função por uma expressão algébrica do tipo $y=a+\frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

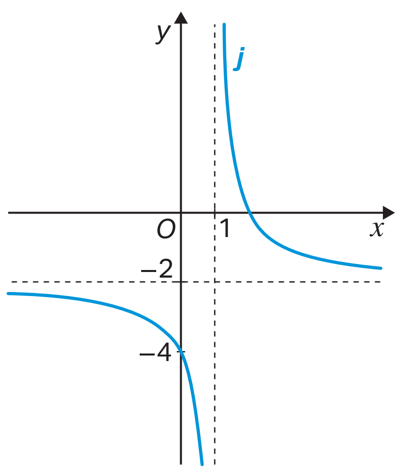
53.3. Indica as equações das assíntotas vertical e horizontal ao gráfico da função.

54 Define a função j representada em cada uma das seguintes figuras por uma expressão na forma $j(x)=a+\frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, atendendo aos dados apresentados.

54.1.



54.2.



4.5.4. Determinação das equações de assíntotas não verticais

Consideremos uma função real de variável real f tal que $y=mx+b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, é a equação de uma assíntota não vertical ao gráfico da função quando $x \longrightarrow +\infty$ (e/ou quando $x \longrightarrow -\infty$).

Para determinar o declive da assíntota, devemos ter em conta que

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(mx+b)]=0$. Assim, sabemos que $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)-mx-b}{x}\right)=0$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right)=0$. Como $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{b}{x}\right)=0$, então $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=0$.

Assim, temos que $m=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Por outro lado, como $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - b + b) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - b) + \lim_{x \to +\infty} b = 0 + b$$

Desta forma, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

Manual Digital

Vídeo
Assíntotas não verticais

Seja a reta de equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, assíntota ao gráfico de uma função real de variável real f quando $x \longrightarrow +\infty$ (e/ou quando $x \longrightarrow -\infty$). Assim:

- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\left(\text{e/ou } m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}\right)$
- $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ $\left(\text{e/ou } b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx)\right)$

Atenção:

- Se $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ e existe $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$, a assíntota é horizontal.
- Se $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $(m \in \mathbb{R} \backslash \{0\})$ e $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ $(b \in \mathbb{R})$ existem, então a assíntota é oblíqua.
- Se não existe $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, então não existe assíntota não vertical.
- Se $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $(m \in \mathbb{R})$ existe, mas $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ não existe, então não existe assíntota não vertical.

Exemplos

1. Consideremos a função g definida por $g(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x - 1}$.

Como o domínio da função é $\mathbb{R} \backslash \{1\}$, isto é, o domínio nem é majorado nem é minorado, vamos verificar se existe alguma assíntota não vertical quando $x \longrightarrow +\infty$ e quando $x \longrightarrow -\infty$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + x}{x - 1} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x - 1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x}\right) = 3$$

Assim, a reta de equação $y = 2x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Do mesmo modo se verifica que o mesmo acontece quando $x \longrightarrow -\infty$.

2. A função h definida por $h(x)=\sqrt{x-1}$ tem domínio $[1\,,+\infty[$.
Assim, como é minorado o domínio da função h, só faz sentido verificar a existência de uma assíntota não vertical quando $x \longrightarrow +\infty$.

$$m=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x}}=0$$

$$b=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt{x-1}-0x\right)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$$

Logo, o gráfico da função h não admite assíntotas não verticais.

3. Consideremos a função p definida por:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{se} \quad x<1\\[2mm] x^2+2x-3 & \text{se} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

- Vamos verificar se existe alguma assíntota não vertical quando $x \longrightarrow +\infty$.

  Como $m=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x=+\infty$, então não existe assíntota não vertical ao gráfico de p quando $x \longrightarrow +\infty$.

- Vamos verificar se existe alguma assíntota não vertical quando $x \longrightarrow -\infty$.

$$m=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{p(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{2}{x}\right)}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{-1}{-\infty}=0$$

  Então, se existir assíntota não vertical ao gráfico de p, esta será horizontal.

$$b=\lim_{x\longrightarrow-\infty}[p(x)-mx]=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-1$$

  Assim, a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de p.

4. De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabemos que a reta de equação $y=2x+3$ é assíntota oblíqua ao seu gráfico.

Para determinar o valor de $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^2-x}{f(x)}$, basta ter em conta que:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2-x}{f(x)}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x(x-1)}{f(x)}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-1}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(x-1)}{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$$

Exercícios

55 Considera a função f definida por:

$$f(x)=\frac{4-x^2}{3x-6}$$

55.1. O gráfico da função f tem assíntotas verticais? Justifica.

55.2. Determina, caso existam, as assíntotas não verticais ao gráfico da função f.

56 Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico da função definida por:

56.1. $g(x)=\dfrac{3x^2-5x-7}{x-2}$

56.2. $h(x)=\dfrac{2x^2+3}{1-x}$

56.3. $p(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

56.4. $m(x)=\sqrt{x^2-25}$

56.5. $n(x)=\dfrac{x^2}{|x-2|}$

56.6. $q(x)=\sqrt{2x^2+1}$

57 Considera a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} & \text{se} \quad x>4\\[2mm] \dfrac{8-x}{10-x} & \text{se} \quad x\leqslant 4\end{cases}$$

57.1. Verifica se a reta de equação $x=4$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

57.2. Estuda a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Para aplicar

1 **Considera as funções a, b, c, d, e e definidas por:**

$$a(x)=\frac{2-3x}{2x-1},\quad b(x)=\frac{1-x^2}{x^2+2x+1},\quad c(x)=\frac{x+3}{x^2-9},$$

$$d(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x>0\\ -x & \text{se} \quad x\leqslant 0\end{cases} \quad \text{e} \quad e(x)=\frac{x-2}{|x^2-4|}$$

1.1. Determina o domínio de cada uma das funções.

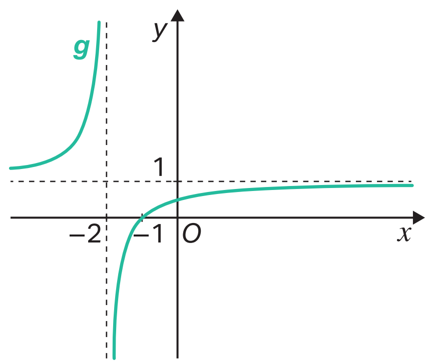
1.2. Indica, caso existam, as equações das assíntotas verticais aos gráficos das funções consideradas.

2 **Considera a função racional f definida por $f(x)=\dfrac{1-3x}{2x-3}$.**

2.1. Define a função f na forma $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, com $a, b, c\in\mathbb{R}$.

2.2. Indica as equações das assíntotas ao gráfico de f.

2.3. Considera a função g representada no referencial da figura.
Tendo em consideração os dados apresentados, define a função g na forma $g(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, com $a, b, c\in\mathbb{R}$.



2.4. Seja h a função definida por $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Indica o domínio da função h.

b) Determina as equações das assíntotas verticais do gráfico da função h.

3 **Determina, caso existam, as equações das assíntotas horizontais ao gráfico da função definida por:**

3.1. $a(x)=\dfrac{x^2-3x}{4-x^2}$

3.2. $b(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

3.3. $c(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

3.4. $c(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

4 **Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico, sendo:**

4.1. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

4.2. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$

4.3. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

4.4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$

5 **Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.**

5.1. Se $y = -1$ é a equação de uma assíntota horizontal ao gráfico de f, determina $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5.2. Se $y = 3$ é a equação de uma assíntota horizontal ao gráfico de f, determina $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{f(x)}$.

5.3. Se $y = 3x - 1$ é a equação de uma assíntota oblíqua ao gráfico de f, determina $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$.

5.4. Se $y = -x$ é a equação de uma assíntota oblíqua ao gráfico de f, determina $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 2x\right)$.

6 **No referencial da figura está representada a função j. A reta r é a assíntota oblíqua ao gráfico de j e tem equação $y = 2x + 1$.**

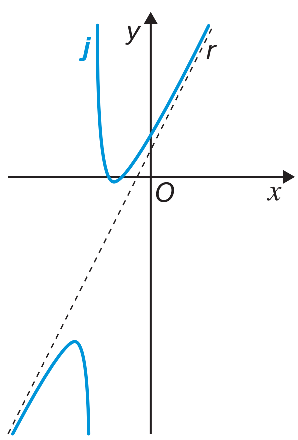
Determina:

6.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x - 1)$

6.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{2x}\right)$

6.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x) - x}{x}\right)$

6.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{xf(x) - 2}{x^2}\right)$



7 **Considera a função h definida por:** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x - 9}{x^2 - 9} & \text{se } x > 3 \\ \dfrac{1}{x - 3} & \text{se } x < 3 \end{cases}$

Estuda a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

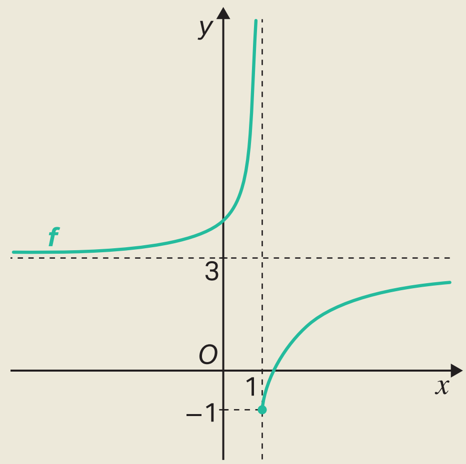
8 **De uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:**

- g é contínua;
- a reta de equação $y = -x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g.

Mostra que o gráfico da função h, definida por $h(x) = x - g(x)$, de domínio $\mathbb{R}^+$, admite uma assíntota oblíqua e determina a sua equação.

Teste

1 As retas de equação $x = 1$ e $y = 3$ são, respetivamente, assíntotas vertical e horizontal ao gráfico da função f representada na figura.



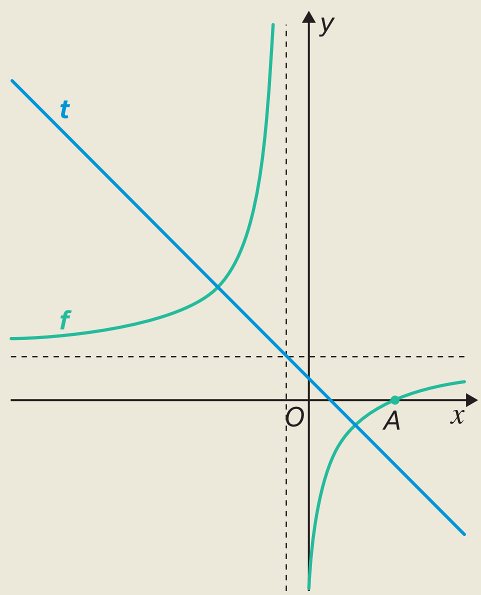
1.1. Sabendo que (u_n) é uma sucessão de termos do domínio de f tal que $\lim f(u_n) = +\infty$, qual das seguintes opções poderá ser o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ **(B)** $u_n = 3 - \frac{1}{n}$

(C) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ **(D)** $u_n = 3 + \frac{1}{n}$

1.2. Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = -n^2$. Determina $\lim f(v_n)$.

2 Na figura encontra-se representada, num referencial ortonormado, a função racional f e a reta t de equação $y = -x + 1$.



Sabe-se que:

- as retas de equações $y = 2$ e $x = -1$ são assíntotas ao gráfico de f;
- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- o ponto $P(1, -3)$ pertence ao gráfico de f.

2.1. Define a função f na forma $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2.2. Determina as coordenadas do ponto A.

2.3. Determina as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com a reta t.

3 Considera a função g definida por:

$$g(x) = \sqrt{2x+3} - 6x$$

3.1. Determina o domínio da função g.

3.2. Estuda a existência de assíntotas ao gráfico da função g.

3.3. Determina os zeros da função g.

4 A reta de equação $y = -2x + 5$ é assíntota ao gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$.

Qual dos seguintes valores é igual a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x - f(x)}{3x - 1} \right)$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

5 Considera a função h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{x+2} - 1} & \text{se} \quad x > -1 \\ \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{x + 1} & \text{se} \quad x \leqslant -1 \end{cases}$$

5.1. A função h é contínua em $x = -1$? Justifica a tua resposta.

5.2. Estuda a função h quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

6 De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que é contínua e que a reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao seu gráfico quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$.

6.1. Determina:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - x \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x) - 2x}{x} \right)$

6.2. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x f(x)$.
Mostra que não existe qualquer assíntota ao gráfico de g.

Página 8

1.1. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

1.2. $\sin\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ e $\tan\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

1.3. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ e $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2.1. 40 **2.2.** $60\sqrt{2}$

2.3. $35\sqrt{3}$ **2.4.** 100

Página 9

3. 55,996 m

4.1. 25° **4.2.** 81°

4.3. 56°

5.1. $\frac{2}{3}$ **5.2.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

5.3. $2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

6.1. $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ **6.2.** $\frac{\sqrt{77}}{11}$

6.3. $\frac{2}{11}(\sqrt{11} - \sqrt{77})$

Página 10

1.1. 30° **1.2.** 9,3 m

2.1. 32 **2.2.** 60°

2.3. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

3.1. 45°. O ângulo *DEA* está inscrito numa semicircunferência, logo é reto.
$\overline{AE} = \overline{DE}$, a cordas iguais correspondem arcos com a mesma amplitude, logo $A\hat{E}F = F\hat{E}D$.

Página 12

1.1. $\frac{\sin 84°}{28} = \frac{\sin\hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\hat{C}}{11}$

1.2. 23°

1.3. 26,9 m

Página 13

2.1. 52°

2.2. $\overline{RA} = 19{,}70$ m e $\overline{MR} = 18{,}95$ m

Página 14

3.1. 26° **3.2.** 16,71

4.1. 30°

4.2. 1,07 u.a.

Página 17

5.1. 7,3 **5.2.** 9,6

5.3. 5,4 **5.4.** 14,4°

Página 18

6.1. 7,8 **6.2.** 4,5

6.3. 6,2

7.1. $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$ **7.2.** $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$

7.3. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Página 19

8.1. $\hat{A} = 20{,}8°$, $\hat{B} = 144{,}4°$ e $\hat{C} = 14{,}8°$.

8.2. $\hat{L} = 70°$, $\overline{KL} = 43{,}5$ e $\overline{JL} = 12{,}0$.

8.3. $\hat{M} = 38{,}1°$, $\hat{N} = 18{,}9°$ e $\overline{MN} = 51{,}7$.

8.4. $\hat{D} = 18{,}5°$, $\hat{E} = 26{,}5°$ e $\overline{DE} = 33{,}3$.

8.5. $\hat{H} = 67°$, $\overline{GH} = 25{,}7$ e $\overline{HI} = 18{,}2$.

8.6. $\hat{P} = 15{,}6°$, $\hat{Q} = 130{,}2°$ e $\hat{R} = 34{,}2°$.

Página 20

9.1. 54,8 cm^2 **9.2.** 80,4 cm^2

9.3. 132,6 cm^2 **9.4.** 180,1 cm^2

10. 20,1 m

Página 21

1.1. 200 **1.2.** 120

1.3. 124,8 **1.4.** 13,4

2.1. **a)** $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ cm **b)** $\frac{52\sqrt{3}}{3}$ cm

Página 22

3.1. $7\sqrt{2}$ cm **3.2.** $35\sqrt{2}$ cm

3.3. 98 cm^2

4.1. $x = 4{,}5$ e $y = 6{,}5$

4.2. $x = 5{,}1$ e $y = 7{,}8$

4.3. $x = 14{,}3$ e $y = 2{,}8$

4.4. $x = 9{,}4$ e $y = 12{,}7$

5.1. 17,759 cm **5.2.** 70°

5.3. 61,1 cm^2 **5.4.** 33,8 cm^2

Página 23

6. $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{E} = 30°$.
$\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BE} = 4{,}6$ cm e $\overline{AE} = 6{,}9$ cm.

7.1. $\hat{L}=50{,}2°$, $\hat{U}=21{,}6°$ e $\hat{A}=108{,}2°$.

7.2. $\hat{L}=101°$, $\hat{U}=24{,}1°$ e $\hat{A}=54{,}9°$.

7.3. $\hat{L}=20{,}6°$, $\hat{U}=117{,}6°$ e $\hat{A}=41{,}8°$.

7.4. $\hat{L}=84{,}7°$, $\hat{U}=35{,}3°$ e $\overline{AU}=13{,}8$.

7.5. $\hat{U}=56{,}4°$, $\hat{A}=93{,}6°$ e $\overline{LU}=12{,}0$.

7.6. $\hat{L}=122{,}8°$, $\hat{A}=12{,}2°$ e $\overline{AU}=23{,}8$.

8.1. Triângulo $[MAR]$:
$\hat{M}=90°$, $\hat{A}=65°$ e $\hat{R}=25°$
Triângulo $[AOM]$:
$\hat{M}=65°$, $\hat{A}=65°$ e $\hat{O}=50°$

8.2. 9,06 cm

8.3. $\overline{MA}=4{,}2$ cm
As restantes medidas foram obtidas em alíneas anteriores.

Página 25

11.1. $\dot{O}M$ **11.2.** $\dot{O}M$

11.3. $\dot{O}T$ **11.4.** $\dot{O}A$

12.1. **a)** $\dot{O}S$ **b)** $\dot{O}Q$
c) $\dot{O}Q$ **d)** $\dot{O}R$

12.2. $-60°$ e $300°$

Página 26

13.1. **a)** D **b)** J
c) F **d)** E
e) I

13.2. **a)** $210°$ **b)** $-60°$

13.3. **a)** $-210°$ **b)** $-90°$
c) $-270°$ **d)** $-120°$

13.4. **a)** $150°$ **b)** $270°$
c) $90°$ **d)** $240°$

13.5. **a)** $R(O, 90°)$ e $R(O, -270°)$
b) $R(O, 240°)$ e $R(O, -120°)$

Página 28

14.1. $850°$ **14.2.** $2605°$

14.3. $-1326°$ **14.4.** $-1520°$

15.1. $(110°, 2)$ **15.2.** $(-130°, -2)$

15.3. $(210°, 3)$ **15.4.** $(275°, 2)$

15.5. $(-110°, -3)$ **15.6.** $(-215°, -3)$

Página 29

16.1. **a)** $\dot{O}C$ **b)** $\dot{O}A$
c) $\dot{O}F$ **d)** $\dot{O}F$

16.2. **a)** $\dot{O}E$ **b)** $\dot{O}D$
c) $\dot{O}A$

Página 30

17.1. **a)** C **b)** G
c) F **d)** C

17.2. **a)** C **b)** B
c) J **d)** E

18.1. C **18.2.** C

18.3. A

Página 31

1.1. **a)** X **b)** R
c) E **d)** I

1.2. **a)** $\dot{C}L$ **b)** $\dot{C}A$
c) $\dot{C}A$ **d)** $\dot{C}L$

1.3. **a)** X **b)** E
c) M **d)** M
e) I **f)** M

2.1. **a)** $\dot{O}S$ **b)** $\dot{O}E$
c) $\dot{O}C$ **d)** $\dot{O}E$

2.2. **a)** R **b)** A
c) T **d)** R
e) C **f)** A

Página 33

19.1. 4.º Q **19.2.** 2.º Q

19.3. 2.º Q **19.4.** 2.º Q

19.5. 3.º Q **19.6.** 4.º Q

Página 36

20.1. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **20.2.** $-\frac{1}{2}$

20.3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

21.1. 2.º Q, seno positivo e cosseno negativo.

21.2. 3.º Q, seno negativo e cosseno negativo.

21.3. 3.º Q, seno negativo e cosseno negativo.

21.4. 1.º Q, seno positivo e cosseno positivo.

21.5. 2.º Q, seno positivo e cosseno negativo.

21.6. 4.º Q, seno negativo e cosseno positivo.

22.1. Verdadeiro **22.2.** Falso

22.3. Verdadeiro

Página 38

23.1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

23.2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

23.3. $-\frac{1}{2}$

23.4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23.5. $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

23.6. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

23.7. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

24.1. $\frac{2}{3}$

24.2. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

24.3. $\frac{1}{2}$

24.4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

24.5. $\frac{2\sqrt{5}+3}{6}$

24.6. $\frac{-\sqrt{5}-3}{3}$

Página 41

25.1. 2.º Q

25.2. 3.º Q

25.3. 4.º Q

25.4. 4.º Q

25.5. 1.º Q

26.1. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

26.2. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

26.3. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan\alpha = \sqrt{3}$

Página 44

27.1. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

27.2. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

27.3. $\sqrt{3}$

27.4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

27.5. 1

27.6. $-\sqrt{3}$

28.1. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

28.2. **a)** $-\frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{3}$

c) $-\sqrt{3}$ **d)** $-\sqrt{3}$

e) $-\sqrt{3}$

29.1. $\frac{49\sqrt{35}}{72}$ u.a.

29.2. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ u.a.

Página 45

30.1. $\sin(1125°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(1125°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\tan(1125°) = 1$.

30.2. $\sin(-780°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-780°) = \frac{1}{2}$ e $\tan(-780°) = -\sqrt{3}$.

30.3. $\sin(2745°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(2745°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\tan(2745°) = 1$.

30.4. $\sin(-1125°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-1125°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\tan(-1125°) = -1$.

30.5. $\sin(-1560°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-1560°) = -\frac{1}{2}$ e $\tan(-1560°) = \sqrt{3}$.

30.6. $\sin(-2550°) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-2550°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan(-2550°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Página 47

31.1. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

31.2. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ e $\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

31.3. $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ e $\tan\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

31.4. $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ e $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$

Página 49

33.1. 495°

33.2. – 150°

33.3. 292,5°

33.4. – 432°

33.5. 675°

33.6. – 72°

34.1. $\frac{32}{45}\pi$

34.2. $-\frac{17}{18}\pi$

34.3. $\frac{13}{9}\pi$

34.4. $-\frac{11}{18}\pi$

34.5. $\frac{31}{9}\pi$

34.6. $-\frac{71}{18}\pi$

Tarefa

1.1. **a)** 240 °C **b)** 80 °C

c) 120 °C **d)** 190 °C

1.2. Por exemplo, $-\frac{2}{3}\pi$ e $\frac{4}{3}\pi$.

2.1. 14:00

2.2. 16:10

Página 50

1.1. 4.º Q

1.2. 1.º Q

1.3. 2.º Q

1.4. 1.º Q

1.5. 2.º Q

1.6. 1.º Q

2.1. $\frac{1}{2}$

2.2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.3. $\frac{1}{2}$

2.4. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

3. $\frac{3}{20}\pi$

4.1. 1.º Q

4.2. 3.º Q

4.3. 2.º Q

4.4. 2.º Q

5.1. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ e $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$

5.2. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{99}}{10}$ e $\tan\alpha = \frac{\sqrt{99}}{99}$

5.3. $\sin\alpha = -\frac{10\sqrt{101}}{101}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{101}}{101}$

5.4. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$ e $\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$

Página 51

7.1. $P\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7.2. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

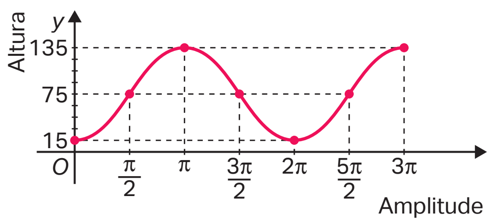
8.2. $\frac{1}{2}$

9.1. $L\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $U\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

9.2. 1 u.a.

Página 52

1.



2. 3π e 5π

3. 41,7 m

4. Aproximadamente 13 minutos.

Página 56

35.1. $[-1, 1]$

35.2. $[-3, -1]$

35.3. $[2, 4]$

35.4. $[-3, 1]$

35.5. $[0, 1]$

36.1. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

36.2. Não tem zeros.

36.3. $x = 3\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

36.4. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

37.1. A função não é par, nem é ímpar.

37.2. Função ímpar

37.3. Função ímpar

38.1. $[2, 4]$

38.3. $x = \pi + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

39.1. $m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3$ e $m\left(\frac{37\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3$

39.2. $[-4, -2]$

39.3. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Página 57

40. $A(0, 1)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $C\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$.

Página 60

41.1. $D'_f = [-3, 3]$ e f é uma função par.

41.2. $D'_g = [-3, -1]$ e g é uma função par.

41.3. $D'_h = [-3, -1]$ e h é uma função par.

41.4. $D'_m = [-4, -2]$ e m é uma função par.

41.5. $D'_p = [0, 1]$ e p é uma função par.

42.1. **a)** $[-2, 0]$ **b)** $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

42.2. Função par

43.1. $A(0, -1)$, $B(\pi, -1)$, $C\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ e $D\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$

43.2. $\frac{3\pi}{4} \approx 2{,}4$ u.a.

Página 64

44.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

44.2. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

44.3. $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

44.4. $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

45.1. $\frac{\pi}{4}$

45.2. 2π

45.3. 5π

46.1. $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

46.3. 0

Página 67

47.1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

47.2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

47.3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

47.4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

47.5. $-\frac{1}{2}$

47.6. $-\frac{1}{2}$

48.1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

48.2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

48.3. $-\frac{5}{4}$

48.4. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

49.1. $-3\cos x$

49.2. $\sin^3 x$

49.3. $\cos x$

49.4. $-\sin x$

50.1. $\frac{1}{2}$

50.2. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

51.1. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

51.2. $\frac{9 + \sqrt{10}}{10}$

Página 69

52.1. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

52.2. $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

52.3. $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi \vee x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

52.4. $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

52.5. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \vee x=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

53.1. $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$ **53.2.** $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$

53.3. $\left\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$ **53.4.** $\left\{0,\frac{\pi}{6}\right\}$

Página 71

54.1. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

54.2. $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \vee x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

54.3. $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

54.4. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \vee$
$\vee\, x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

54.5. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

55.1. $\left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$ **55.2.** $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

55.3. $\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ **55.4.** $\{0\}$

55.5. $\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right\}$

Página 72

56.2. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ é a área do triângulo resultante de B ser determinado pela amplitude $\frac{\pi}{4}$.

57.2. $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4+\sqrt{3}}{4}$ é a área do trapézio resultante de P ser determinado pela amplitude $\frac{\pi}{6}$.

57.3. $\frac{\pi}{3}$

Página 73

58.1. $x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

58.2. $x=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

58.3. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

58.4. $x=k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

59.2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

59.3. Quando $\alpha=\frac{\pi}{3}$, a área do triângulo $[ABC]$ é $2\sqrt{3}$.

Página 74

1.1. $x=\frac{11\pi}{24}+2k\pi \vee x=\frac{19\pi}{24}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

1.2. $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \vee$
$\vee\, x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

1.3. $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \vee x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

1.4. $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

1.5. $x=2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

1.6. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

1.7. $x=\frac{\pi}{5}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

1.8. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

2.1. $-\cos^2 x-\cos x$ **2.2.** $-3\cos x$

2.3. $-\sin^2 x-\sin x$ **2.4.** $\cos^2 x-\sin x$

3.1. 3° Q **3.2.** 3° Q

3.3. 2° Q

4.1. 0 **4.2.** $\frac{\sqrt{7}-6}{4}$

5.1. $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

5.2. Função par

5.3. $x=0$ e $x=\pi$

Página 75

6.1. $\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

6.2. Não é par, nem é ímpar.

6.3. Equação impossível

7.1. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

8.1. $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ e $B\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$

8.2. $\frac{15\pi}{8}$

Página 76

1. **(C)**

2. $R\left(1,\frac{3\sqrt{55}}{55}\right)$

3.1. **(C)** **3.2.** 3,69 cm

3.3. 3,9 cm

4. $\sqrt{5}-\frac{2}{3}$

Página 77

5.2. $\frac{\pi}{3}$ **5.3.** $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

6.2. $\frac{3}{2}$ u.a. **6.3.** $\frac{2\pi}{3}$

7.1. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

7.2. $D'_g=[-2,\ 2]$ e $B\left(\frac{\pi}{2},\ -2\right)$

Página 80

1.1. $L(2,\ 1)$, $U(5,\ 2)$ e $A(2,\ 3)$.

1.2. $2+2\sqrt{10}$

1.3. 9,5

2.1. C_1: centro $=(1,\ 2)$, raio $=\sqrt{5}$
C_2: centro $=(3,\ 0)$, raio $=2\sqrt{2}$
C_3: centro $=(-2,\ 0)$, raio $=2\sqrt{2}$

2.2. $C_1:\ (x-1)^2+(y-2)^2=5$
$C_2:\ (x-3)^2+y^2=8$
$C_3:\ (x+2)^2+y^2=8$

2.3. $(x-3)^2+y^2=\frac{328}{9}$

Página 81

3.1. $C(1,\ -5)$ e $r=4$

3.2. $y=-\frac{1}{2}x-\frac{13}{4}$

4.1. $(x,\ y)=(1,\ 4)+k(3,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$

4.2. $m_r=m_s=\frac{2}{3}$
Retas paralelas têm igual declive.

4.3. $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

4.4. $\left(0,\ -\frac{5}{3}\right)$ e $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$

4.5. $y=-\frac{3}{2}x+12$

Página 82

5.1. $m:\ y=2x-5$
$p:\ y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

5.2. As retas são concorrentes oblíquas. Como não têm o mesmo declive, não são paralelas. Como um declive não é o simétrico do inverso do outro, não são concorrentes perpendiculares.

5.3. $A(1,\ -3)$

5.4. $(x-1)^2+(y+3)^2=13$

6.1. $A(4,\ -5,\ 0)$, $B(4,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ -5,\ 0)$, $E(4,\ -5,\ 8)$, $F(4,\ 0,\ 8)$, $G(0,\ 0,\ 8)$ e $H(0,\ -5,\ 8)$.

6.2. $\sqrt{105}$

6.3. $(x,\ y,\ z)=(4,\ 0,\ 0)+k(0,\ -5,\ 8),\ k\in\mathbb{R}$

6.4. $(0,\ 0,\ -8)$

6.5. $(0,\ 5,\ 4)$

6.6. $(x-2)^2+(y+5)^2+(z-4)^2=41$

Página 83

1.1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **1.2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.3. Aproximadamente $40{,}9°$.

2. Aproximadamente $153{,}4°$.

Página 84

1.1. 0° **1.2.** 50°

1.3. 130°

2.1. 0°

2.2. 102° **2.3.** 60°

Página 86

3.1. 117,57° **3.2.** 26,57°

3.3. 60° **3.4.** 150°

4.1. 146,3° **4.2.** 144,7°

4.3. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.1. 116,6° **5.2.** $y=-2x+\frac{11}{2}$

5.3. 11 u.a.

Página 87

1.1. **a)** 153,4° **b)** 0°
c) 108,4° **d)** 26,6°
e) 68,2° **f)** 33,7°
g) 123,7° **h)** 56,3°
i) 191,3°

1.2. 120°

1.3. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

2.1. 0° **2.2.** 120°

2.3. 120° **2.4.** 60°

2.5. 60° **2.6.** 0°

3.1. 33,7° **3.2.** s: 120°; t: 33,7°

3.3. $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ **3.4.** $A\left(0,\ -\frac{4}{3}\right)$

3.5. 156,0°

Página 88

6.1. 0° **6.2.** 180°

6.3. 60° **6.4.** 120°

Página 89

7.1. 0°
7.2. 90°
7.3. 0°
7.4. 180°
7.5. 45°
7.6. 45°

Página 91

8.1. -4
8.2. 0
8.3. $2\sqrt{15}$
8.4. $-2\sqrt{5}$
8.5. -4
8.6. $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$
9.1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
9.2. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
9.3. $-\frac{\sqrt{5}}{8}$
10.1. -9
10.2. 18
10.3. 9
10.4. 4,5
10.5. -9
10.6. -9

Página 94

12.1. $-2\sqrt{3}$
12.2. $-\sqrt{2}$
12.3. 6
12.4. $2\sqrt{3}-16$
12.5. $-4\sqrt{3}+\sqrt{2}$
12.6. $6\sqrt{2}+3\sqrt{3}$
13.1. $-a^2$
13.2. a^2
13.3. 13

Página 97

14.1. $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{10}$ $\|\overrightarrow{AC}\|=\frac{\sqrt{113}}{4}$
$\|\overrightarrow{BC}\|=\frac{5}{4}$ $\|\overrightarrow{AD}\|=\frac{13}{5}$
$\|\overrightarrow{BD}\|=\frac{\sqrt{449}}{5}$ $\|\overrightarrow{CD}\|=\frac{\sqrt{3769}}{20}$

14.2. **a)** 22,8° **b)** 71,4°
c) 17,4° **d)** 53,5°
14.3. **a)** 47,9° **b)** 124,8°
15. Obtusângulo
16.1. $L(-2,-1)$, $U(4,2)$, $A(1,3)$ e $R(-1,2)$.
16.2. $\hat{L}=45°$, $\hat{U}=45°$, $\hat{A}=135°$ e $\hat{R}=135°$.
16.3. 90°

Página 98

17.1. 82°
17.2. 90°
17.3. 140°
17.4. 163°
18.1. 45°
18.2. 82,87°
18.3. 37,87°
19.1. $A(0,3,0)$, $B(-2,0,0)$, $O(0,0,0)$ e $C(0,0,5)$.
19.2. **a)** $(0,3,-5)$ e $\sqrt{34}$
b) $(-2,0,-5)$ e $\sqrt{29}$
19.3. **a)** 0 **b)** 25
c) 9
19.4. **a)** 21,80° **b)** 64,65°
c) 37,23° **d)** 78,11°

Página 100

20.1. $y=3x-6$
20.2. $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
20.3. $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$
20.4. $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
21.1. $a=\frac{3}{2}$
21.2. $a=\frac{10}{3}$
21.3. $a=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$
22. $y=\frac{2}{3}x+\frac{20}{3}$
23.1. $L(-4,2)$ e $U(6,-3)$
23.2. LA: $y=2x+10$; UP: $y=2x-15$
23.3. $A(1,12)$ e $y=-\frac{1}{2}x+\frac{25}{2}$

Página 101

1. $M(1,0)$
2. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
3. $y=2x-2$

Página 102

1. $(x-2)^2+(y-3)^2=13$
2. 6
3. $-\frac{2}{3}$
4. $y=-\frac{2}{3}x+\frac{26}{3}$

Página 103

1. $(x-1)^2+(y+3)^2=17$
2. $y=1$

Página 104

24.1. $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$
24.2. $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$
24.3. $y=4x+3$
24.4. $y=x+5$
25.1. $x=3$
25.2. $y=1$
25.3. $y=-\frac{3}{4}x+4$
25.4. $y=\frac{5}{7}x+\frac{100}{7}$
26.1. $(x-1)^2+(y+1)^2=5$

26.2. $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

26.3. $(x-2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$

26.4. $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

27.1. Reta de equação $y=x+7$

27.2. Reta de equação $y=x-1$

27.3. Circunferência de equação $(x+1)^2+(y+2)^2=32$

27.4. Ponto de coordenadas $(3,-6)$

27.5. Circunferência de equação $(x-1)^2+(y+4)^2=8$

27.6. Reta de equação $y=x-1$

Página 105

1.1. 291,3 **1.2.** $-291,3$

1.3. $-95,2$ **1.4.** $-34,2$

1.5. 3,4 **1.6.** 95,2

2.1. 0 **2.2.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.3. -9 **2.4.** -4

3.1. 78,7° **3.2.** 61,9°

3.3. 125,3° **3.4.** 98,3°

4.1. Falso. O ângulo entre os vetores é $180°$, logo o produto é negativo.

4.2. Falso. O ângulo entre os vetores é obtuso, logo o produto é negativo.

4.3. Falso. O ângulo entre os vetores é agudo, logo o produto é positivo.

4.4. Falso. O ângulo entre os vetores é obtuso, logo o produto é negativo.

4.5. Falso. O ângulo entre os vetores é obtuso, logo o produto é negativo.

4.6. Falso. O ângulo entre os vetores é obtuso, logo o produto é negativo.

Página 106

5.1. 9 **5.2.** 18

5.3. 9 **5.4.** 18

5.5. -18 **5.6.** 0

7.1. 55,8° **7.2.** 109,3°

7.3. 108°

8.1. $\overrightarrow{OS}(2,0)$ $\|\overrightarrow{OS}\|=2$
$\overrightarrow{SA}(1,2)$ $\|\overrightarrow{SA}\|=\sqrt{5}$
$\overrightarrow{AP}(0,-6)$ $\|\overrightarrow{AP}\|=6$
$\overrightarrow{PO}(-3,2)$ $\|\overrightarrow{PO}\|=\sqrt{13}$

8.2. $\hat{O}\approx 146,31°$, $\hat{S}=116,57°$, $\hat{A}=63,43°$ e $\hat{P}=33,69°$.

8.3. Obtusângulo, porque tem, em O, um ângulo obtuso de amplitude $180°-2\times 33,69°=112,62°$.

9.1. $\frac{2}{3}$ **9.2.** 0 ou 4

9.3. 0

Página 107

10. $k\in]-4,0[$

11.1. 45° **11.2.** 45°

11.3. 60,26°

12.1. $y=-4x+1$ **12.2.** $y=2x+7$

12.3. 49,4°

13. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$

14.1. **a)** $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

b) $(x,y)=(3,-1)+k(3,2)$, $k\in\mathbb{R}$

c) $x=-1$

14.2. 33,7°

Página 108

15.2. $x=-1$ **15.3.** Sim, são perpendiculares.

15.4. $\left(\frac{13}{5},\frac{11}{5}\right)$

16.1. $x^2+(y-1)^2=5$

16.2. $y=2x+6$, que é perpendicular à reta de equação $2y+x=6$.

17.1. $y=\frac{1}{2}x-1$ **17.2.** $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

18. $y\geqslant 2x+\frac{3}{2}\wedge y\geqslant -2x+\frac{3}{2}$

Página 109

1. Por exemplo: AE, HD e GC.

2. DH

3. Por exemplo: EH e EF.

Página 110

28.1. **a)** Não **b)** Sim **c)** Não

28.2. $\frac{3}{2}$

Página 111

29.1. $x-3z-1=0$ **29.2.** $3x-y-2z-9=0$

29.3. $2x-y-3z+3=0$

30.1. $(2,-1,3)$ **30.2.** 2

31. $2x-3y-4z+31=0$

Página 115

32.1. São perpendiculares.

32.2. β e δ, pois têm vetores normais que são colineares.

32.3. $(x, y, z) = (-1, 5, 0) + k(2, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$

32.4. $\left(\frac{4}{3}, \frac{23}{6}, \frac{7}{6}\right)$

33.1. $2x - y + z - 11 = 0$

33.2. $(x, y, z) = (3, -2, 3) + k(2, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$

33.3. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$

33.4. $\frac{10}{3}$

34.1. $2x - z - 1 = 0$

34.2. $(x, y, z) = (0, 2, -1) + k(2, 0, -1),\ k \in \mathbb{R}$

35.1. $2x + 3y + z - 15 = 0$

35.2. $(x, y, z) = (3, 1, 6) + k(2, 3, 1),\ k \in \mathbb{R}$

35.3. $\left(\frac{5}{7}, -\frac{17}{7}, \frac{34}{7}\right)$

Página 116

36.1. $(3, 8, 5)$

36.2. $-x - 3y + 4z + 7 = 0$

Página 118

37.1. $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + a(4, -1, -1) + b(1, 1, -3),\ a, b \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = -2 + 4a + b \\ y = -a + b \\ z = 1 + a - 3b \end{cases},\ a, b \in \mathbb{R}$

37.2. $(x, y, z) = (2, 3, 1) + a(0, 2, 0) + b(1, 0, 1),\ a, b \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = 2 + b \\ y = 3 + 2a,\ a, b \in \mathbb{R} \\ z = 1 + b \end{cases}$

37.3. $(x, y, z) = (2, 2, 1) + a(1, 3, 0) + b(3, 2, 1),\ a, b \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = 2 + a + 3b \\ y = 2 + 3a + b,\ a, b \in \mathbb{R} \\ z = 1 + b \end{cases}$

Página 119

38.1. α: $2x + 4y + z + 3 = 0$

β: $3x + 5y - z - 1 = 0$

γ: $4x - 7y - z + 18 = 0$

38.2. $\left(-\frac{3}{2}, 0, 0\right)$

39.1. $(x, y, z) = (3, 4, 6) + a(0, 4, 0) + b(-2, 2, -4),\ a, b \in \mathbb{R}$

39.2. $(1, 6, 6)$

39.3. $z = 6$

39.4. $\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 6 + b,\ a, b \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$

Página 121

40.1. $x - 6y + 3z + 2 = 0$

40.2. $x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$

41.1. $(x, y, z) = (2, 0, -3) + k(0, 2, 0),\ k \in \mathbb{R}$

41.2. $y = 2$

41.3. Não é perpendicular.

42.1. $x + 2y - 8 = 0$

42.3. $(x + 1)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + (z - 3)^2 = \frac{41}{4}$

42.5. $(x, y, z) = (0, 4, 6) + k(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$

Página 122

1.1. $2x - 3y + z - 14 = 0$

1.2. $7x + 9y + z + 13 = 0$

1.3. $x + 2z - 1 = 0$

2.1. $x - 3y - z + \frac{1}{2} = 0$

2.3. $y + z - 2 = 0$

3.1. $(x, y, z) = (1, 2, 0) + a(-2, 3, -1) + b(2, 3, 2),\ a, b \in \mathbb{R}$

3.2. $9x + 2y - 12z + 128 = 0$

3.3. $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + k(9, 2, -12),\ k \in \mathbb{R}$

Página 123

4.1. $x - 4y + 2z + 6 = 0$

4.2. $(x, y, z) = (0, 2, 1) + k(1, -4, 2),\ k \in \mathbb{R}$

4.3. $\left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right)$

5.1. $2x + 3y - z + 6 = 0$

5.2. $(4, 7, 0)$

5.3. $4x + 20y - 2z - 51 = 0$

5.4. $(-6, -8, 5)$

5.5. $(x + 2)^2 + \left(y + \frac{11}{2}\right)^2 + (z - 3)^2 = \frac{105}{4}$

Página 124

6.1. $(-3, 1, 6)$

6.2. $(x, y, z) = (2, -3, 1) + a(0, 0, 5) + b(-5, 4, 5),\ a, b \in \mathbb{R}$

6.3. $4x + 5y + 7 = 0$

6.4. $\begin{cases} x = -5k \\ y = 4k \\ z = 0 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$

Página 125

7.1. $2x+13y+4z+52=0$

7.2. $(x,y,z)=(1,-6,6)+k(3,-8,6),\ k\in\mathbb{R}$

7.3. $\left(-\frac{56}{109}, -\frac{214}{109}, \frac{324}{109}\right)$

7.4. $-2x+4y-12z+57=0$

7.5. $\left(-\frac{112}{109}, \frac{8}{109}, \frac{648}{109}\right)$

8.1. $y=2$

8.2. $(x,y,z)=(1,0,-1)+k(0,1,0),\ k\in\mathbb{R}$

8.3. **a)** $(1,-2,-1)$

Página 126

1. **(D)**

2. $\frac{5}{4}x^2$

3. $105°$

4.1. $y=-\frac{3}{4}x+4$

4.2. $143{,}1°$

4.3. $(x,y)=(-1,-2)+k\left(-1,\sqrt{3}\right),\ k\in\mathbb{R}$

4.4. $23{,}13°$

Página 127

5. **(C)**

6.1. $\overrightarrow{LU}$ e $\overrightarrow{UA}$ são vetores não colineares.

6.2. $13x+5y+9z-30=0$

6.3. $(x,y,z)=(-1,5,2)+k(13,5,9),\ k\in\mathbb{R}$

6.4. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=11$

7.1. $(0,0,3)$

7.2. $2x-y+4z-4=0$

7.3. **a)** $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)+k(2,-1,4),\ k\in\mathbb{R}$

Página 130

1.1.

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados brancos	1	1	1	1	1	1
Número de quadrados verdes	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados azuis	2	4	6	8	10	12
Número total de quadrados	4	7	10	13	16	19

1.2. 31

1.3. Não

1.4. A figura de ordem n é formada por 1 quadrado branco com n quadrados verdes à sua direita e $2n$ quadrados azuis acima.

1.5. **(B)**

Página 131

2.1. 21

2.2. Não

2.3. **(C)**

3.1. **I:** $13, 15$ **II:** $21, 24$ **III:** $-4, -8$ **IV:** $\frac{17}{14}, \frac{20}{16}$

3.2. **I:** $2n+1$ **II:** $3n+4$ **III:** $20-4n$ **IV:** $\frac{-1+3n}{2+2n}$

4.1. 49

4.2. Ordem 12

4.3. Não, pois $5n-1=105 \Leftrightarrow n=\frac{106}{5}$ e $\frac{106}{5}\notin\mathbb{N}$.

Página 132

5.1. Ordem 1

5.2. Sim, os termos de ordem 1 e 4, 3 e 6, e 5 e 8.

5.3. Ordem 7

5.4. Maior: 5; menor: 1

6.1.

x	-3		-1		1		3		5
$g(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\longrightarrow$	5	$\searrow$	-2

6.2. **a)** $[-1, 3]$

b) $[-3, -1]$ e $[1, 5]$

6.3. **a)** Máximo $=5$; maximizantes: $[1, 3]$

b) Mínimo $=-2$; minimizante: 5

Página 133

1.

Número da figura	1	2	3	4	5
Número de quadrados unitários	2	6	12	20	30

2.1. 10 100

2.2. Não

2.3. 7

Página 135

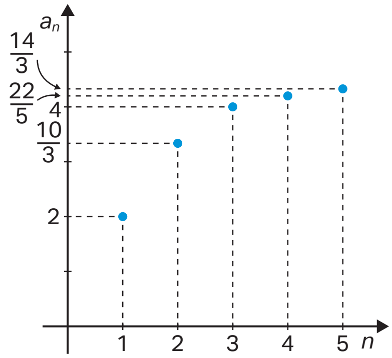
1.1. $(u_n): -1, -4, -7, -10, -13$

$(v_n): \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$

$(w_n): 1, 3, 1, 3, 1$

1.2. Não é termo de nenhuma das sucessões.

2.1.



2.2. A partir da ordem 8.

2.3. Sim, é o termo de ordem 11.

3.1. $\frac{26}{7}$ **3.2.** 4

3.3. $b_{n+1}=\frac{3n+8}{n+1}$

Tarefa

1.1. **a)** 15 **b)** 13 **c)** 2

1.2. $2n-3$

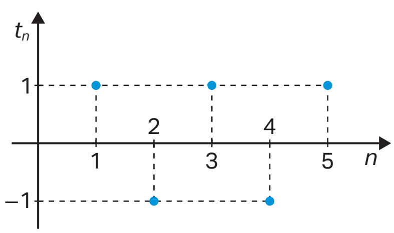
1.3. $u_{n+1}-u_n=2$, logo é positivo.

Página 136

2.1. $v_{n+1}=4-n$

2.2. $v_{n+1}-v_n=-1$, logo é negativo.

3.1. $1, -1, 1, -1, 1$



3.2. **a)** -2 **b)** 2
c) -2 **d)** 2

3.3. **a)** e **c)** são negativas. **b)** e **d)** são positivas.

Página 138

6.1. $-2, 0, -2, 0$

6.2. Não, a sucessão toma, alternadamente, os valores -2 e 0.

Página 139

8.1. (a_n) e (c_n) são crescentes.
(b_n) e (d_n) são decrescentes.

9.1. $t_{10}=-\frac{21}{47}$; $t_{11}=121$

9.2. **a)** Positivo **b)** Positivo **c)** Positivo

9.3. A sucessão é monótona crescente.

10.1. $u_1=-15$, $u_2=-16$, $u_3=-15$

Página 141

11.1. Conjunto A:
Não tem majorantes.
Minorantes: $]-\infty, -4]$
Conjunto B:
Majorantes: $[5, +\infty[$
Não tem minorantes.
Conjunto C:
Não tem majorantes.
Minorantes: $]-\infty, 0]$
Conjunto D:
Majorantes: $[2, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -4]$
Conjunto E:
Majorantes: $[5, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -3]$

11.2. São limitados os conjuntos D e E.

12.1. **a)** $[3, +\infty[$ **b)** 3
c) $]-\infty, -2]$ **d)** -2

12.2. Sim, o máximo é 3 e o mínimo -2.

12.3. X é majorado e minorado, logo é limitado.

Página 144

13.2. Sucessão (a_n):
Majorantes: $[8, +\infty[$
Minorantes: $\left]-\infty, \frac{17}{3}\right]$
Sucessão (b_n):
Majorantes: $[-1, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -3]$
Sucessão (c_n):
Majorantes: $[3, +\infty[$
Minorantes: $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$

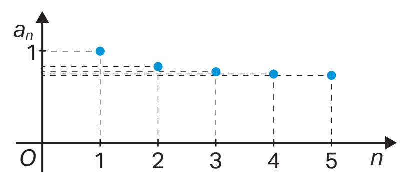
14.1. É limitada, com majorante 3 e minorante $-\frac{5}{2}$.

14.2. É limitada, com majorante 1 e minorante -20.

14.3. É limitada, com majorante $\frac{1}{4}$ e minorante -3.

Página 145

1.1. $1, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{11}{15}$



1.2. Ordem 7

1.3. Não é termo da sucessão.

2.1. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$ **2.2.** Ordem 5

2.3. Oito termos

3.1. Monótona crescente

3.2. Monótona decrescente

3.3. Monótona decrescente

3.4. Monótona crescente

3.5. Não monótona

3.6. Monótona crescente

4.1. $p_n = 5n$

4.3. Ordem 16

Página 146

5.1. $a_7 = 0{,}25$, e representa a área do quadrado de ordem 7.

5.2. 4

5.3. Ordem 6

7.1. Não é monótona. **7.2.** Não é monótona.

7.3. Não é monótona.

8.1. $36, 24, 14, 6, 0$

8.2. É termo da sucessão, nas ordens 5 e 10.

8.3. Quatro termos

8.4. Não é monótona.

Página 147

9.1. Conjunto X:
Majorantes: $[5, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -1]$
Conjunto P:
Majorantes: $[\sqrt{5}, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, \sqrt{2}]$
Conjunto T:
Majorantes: $[\pi, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -2]$
Conjunto O:
Majorantes: $[2, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -\sqrt{3}]$
Conjunto R:
Majorantes: $[\sqrt{13}, +\infty[$
Minorantes: $]-\infty, -3]$

9.2. Conjunto X:
Máximo: 5
Mínimo: -1
Conjunto P:
Máximo: $\sqrt{5}$
Mínimo: $\sqrt{2}$
Conjunto T:
Não tem máximo.
Não tem mínimo.
Conjunto O:
Não tem máximo.
Mínimo: $-\sqrt{3}$
Conjunto R:
Máximo: $\sqrt{13}$
Mínimo: -3

9.3. Todos são limitados, uma vez que são majorados e minorados.

10.1. Máximo: 5, mínimo: 4

10.2. Máximo: $\frac{10}{3}$, mínimo: 3

10.3. Máximo: 5, mínimo: $\frac{3}{2}$

10.4. Máximo: 6, mínimo: 5

10.5. Máximo: $\frac{1}{5}$, mínimo: $-\frac{1}{3}$

10.6. Máximo: 2, mínimo: 0

12.1. A sucessão não é monótona.

12.3. $\left\{\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right\}$

12.4. A sucessão é constante, logo é limitada e o máximo e o mínimo são $\sqrt{2}$.

Página 150

1. No 4.º dia, o atleta corre mais um quilómetro do que a distância que correu no dia anterior.

2. $d_5 = d_4 + 1$

3. $\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_n = d_{n-1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}: n \geqslant 2 \end{cases}$

Página 152

18.1. $-3, 6, -3, 6, -3$

18.2. $a_n = \begin{cases} -3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 6 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

19.1. (a_n): $4, 7, 10$ (b_n): $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
(c_n): $1, 0, -1$ (d_n): $7, 12, 17$

19.2. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\begin{cases} b_1 = -\frac{1}{2} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\begin{cases} d_1 = 7 \\ d_{n+1} = d_n + 5, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

21.1. $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = 2 \times c_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Página 153

2.1. 5, 16, 49

2.2. 4009

2.3. $108\ 256$

3. $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.1. $\frac{1}{2}, \frac{21}{4}, \frac{61}{8}, \frac{141}{16}, \frac{301}{32}$

Página 154

1.

Treino	[...]	4.º	5.º	6.º
Distância	[...]	2250 m	2500 m	2750 m

2. $\begin{cases} d_1 = 1500 \\ d_{n+1} = d_n + 250,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3. $26\ 250$ m

Página 156

22.1. $a_n = 3n - 8$

22.2. $a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{17}{2}$

22.3. $a_n = \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$

22.4. $a_n = -2n + 50$

23. As sucessões (a_n), (b_n) e (d_n) são progressões aritméticas. As restantes não.

24. a_n: $r = 3$, monótona crescente

b_n: $r = -\frac{1}{3}$, monótona decrescente

d_n: $r = \frac{2}{3}$, monótona crescente

25.1. 12

25.2. $p_n = 12n - 4$

25.3. Ordem 9

Página 157

26.1. $u_n = -2n + 40$

26.2. $u_n = \frac{12}{19}n - \frac{250}{19}$

26.3. $u_n = -\frac{9}{20}n + \frac{5}{2}$

27.1. -993

27.2. 1475

27.3. $\frac{8360}{7}$

Página 158

28.1. 9

28.2. 14

28.3. 73

29.1. -320

29.2. 135

29.3. 265

Página 159

30.1. $d_n = 3n - 27$

30.2. $12\ 450$

30.3. 345

31. 10

Tarefa

1. 162 pessoas

2. 728 pessoas

3. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Página 160

32.1. $\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1} = b_n \times (-2),\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

32.2. $\begin{cases} b_1 = -4 \\ b_{n+1} = b_n \times 3,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

32.3. $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n \times 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

32.4. $\begin{cases} b_1 = -\frac{7}{81} \\ b_{n+1} = b_n \times 3,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Página 161

33.1. $\frac{1}{2}$

33.2. $-\frac{3}{8}$

34.1. É uma progressão geométrica de razão 8.

34.2. É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{25}$.

34.3. É uma progressão geométrica de razão 243.

34.4. É uma progressão geométrica de razão -32.

35.1. Primeiro termo: $\frac{8}{5}$

Razão: 8

35.2. $\begin{cases} c_1 = \frac{8}{5} \\ c_{n+1} = c_n \times 8,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Página 162

36.1. $b_n = -\frac{3125}{8} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

36.2. $b_n = 49\ 152 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

36.3. $b_n = \frac{5}{2} \times (-2)^{n-1}$

36.4. $b_n = 2^{\frac{3}{4} + \frac{3n}{4}}$

37.1. 3

37.2. $c_n = -3^{n-2}$

Página 163

38.1. 32

38.2. $\begin{cases} u_1 = -96 \\ u_{n+1} = u_n \times 32,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

38.3. $v_n = -3 \times 2^{10} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Página 164

39.1. $r = 3$, monótona crescente.

39.2. $r = 4$, monótona crescente.

39.3. $r = 3$, monótona decrescente.

39.4. $r = 3$, monótona crescente.

40.1. É uma progressão geométrica.

40.2. Monótona crescente

Página 166

41.1. $-\frac{3124}{1250}$

41.2. $\frac{5}{72} \times \left(1 - \frac{1}{25^5}\right)$

41.3. $\frac{93}{64}$

41.4. $-\frac{50}{117} \times \left[1 - \left(\frac{125}{8}\right)^5\right]$

42.1. $\frac{1}{8}$

42.2. **a)** $\frac{5}{7}\left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{10}\right]$ **b)** $\frac{5}{7 \times 8^{10}}\left[1 - \frac{1}{8^5}\right]$

43.1. **a)** 4π **b)** $\frac{1}{4}$

43.2. $a_n = 4\pi \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

43.3. $\frac{341}{64}\pi$

Página 167

1.1. 62

1.2. -3

1.3. $c_n = 3n + 28$

2.1. $a_n = \frac{7}{4}n + \frac{5}{4}$

2.2. $a_n = \frac{5}{3}n - 25$

2.3. $a_n = 2n$

3.1. $r = -2$

3.2. Monótona decrescente

3.3. $u_n = 7 - 2n$

3.4. Ordem 9

4.1. 5

4.2. $d_n = 5n - 38$

4.3. -105

4.4. 7

5. $e_n = -2n + 3$

Página 168

6.2. $v_n = -2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

6.3. Ambas são monótonas crescentes.

7.1. $b_n = \frac{5}{8} \times (-2)^{n-1}$

7.2. $b_n = 320 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

7.3. $b_n = \frac{5}{4} \times 2^{n-1}$

7.4. $b_n = \frac{1}{27} \times (-3)^{n-1}$

8.1. É progressão, com $r = 25$.

8.2. $\begin{cases} c_1 = 15 \\ c_{n+1} = c_n \times 25,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

8.3. Ordem 2

8.4. $\frac{15}{24}(25^{10} - 1)$

9.2. $\frac{121}{162}$

9.3. Monótona decrescente

9.4. **a)** $e_n = \frac{1}{6}n - \frac{5}{6}$ **b)** $\frac{65}{6}$

Página 169

10.1. $t_n = 2^{3-n}$

10.3. $\frac{3}{128}$

11.1. $l_1 = 2$ e $r = 2$

11.2. $a_n = \pi \times 2^{2(n-1)}$

11.3. 341π

Página 171

44.1. A partir da ordem 50.

46.1. A partir da ordem 250.

Página 173

47.1. $\sqrt{3}$

47.2. $-\frac{7}{3}$

47.3. 0

47.4. $\frac{2}{7}$

47.5. 3

Página 175

49.2. A sucessão é limitada.

49.3. Sim, porque é monótona e limitada.

50.2. A sucessão é convergente.

Página 176

51. (a_n) e (b_n) são convergentes. (c_n) não é convergente.

Página 179

54.1. $\lim a_n = 4$
$\lim b_n = +\infty$
$\lim c_n = 0$
$\lim a_n = -\infty$

55.1. 1 **55.2.** -1
55.3. 0 **55.4.** 0
55.5. $+\infty$ **55.6.** $-\infty$
55.7. $-\infty$ **55.8.** $+\infty$
55.9. 0

Página 181

57.1. $+\infty$ **57.2.** $+\infty$
57.3. 0 **57.4.** 0
57.5. $+\infty$ **57.6.** $+\infty$
57.7. 0

Página 182

58.1. -1 **58.2.** $\frac{1}{2}$
58.3. $-\frac{1}{2}$ **58.4.** $\frac{5}{3}$
58.5. 0 **58.6.** $-\frac{1}{2}$
58.7. $-\frac{3}{2}$ **58.8.** $\frac{7}{6}$
58.9. $\frac{1}{2}$ **58.10.** 0

Página 183

59.1. $-\frac{15}{4}$ **59.2.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
59.3. $-\sqrt{3}$ **59.4.** -2
59.5. 6 **59.6.** 8

Página 184

60.1. $-\frac{2}{3}$ **60.2.** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
60.3. $-\frac{3}{2}$ **60.4.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$
60.5. $-\frac{3+4\sqrt{2}}{2}$

Página 185

61.1. -5 **61.2.** $-\frac{1}{2}$
61.3. -125 **61.4.** 4
61.5. $\frac{121}{4}$ **61.6.** $\frac{169}{4}$
61.7. $-\frac{729}{8}$ **61.8.** $\frac{49}{4}$

62.1. $\frac{25}{4}$ **62.2.** 1
62.3. 1 **62.4.** $\frac{144}{25}$
62.5. $\frac{1024}{25}$ **62.6.** 25

63.1. -10 ou 2
63.2. Por exemplo, a sucessão de termo geral $v_n = \frac{2n-1}{5+n}$.

Página 186

64.1. 5 **64.2.** $+\infty$
64.3. $+\infty$ **64.4.** $\sqrt[3]{25}$
64.5. $+\infty$ **64.6.** 0

Página 188

65.1. $-\frac{2}{3}$ **65.2.** $-\infty$
65.3. $+\infty$ **65.4.** 2
65.5. $-\infty$ **65.6.** $+\infty$
65.7. $-\infty$ **65.8.** $+\infty$

Página 190

66.1. **a)** $-\infty$ **b)** $-\infty$
c) $+\infty$ **d)** $+\infty$
66.3. **a)** $-\infty$ **b)** $+\infty$

Página 191

67.1. $+\infty$ **67.2.** $+\infty$
67.3. $-\infty$ **67.4.** $-\infty$
67.5. $-\infty$ **67.6.** $-\infty$

Página 192

68.1. $+\infty$ **68.2.** $-\infty$
68.3. $-\infty$ **68.4.** $+\infty$
68.5. $-\infty$ **68.6.** $+\infty$

Página 193

1.1. $+\infty$ **1.2.** 0
1.3. $-\infty$

2. $t_n = \frac{n^2+3}{n^3}$ e $\lim t_n = 0$

3. $p_n = -n$ e $\lim p_n = -\infty$

Página 194

69.1. $+\infty$ **69.2.** $-\infty$
69.3. 0 **69.4.** -4
69.5. $+\infty$ **69.6.** $+\infty$

70.1. Por exemplo: $u_n = n^2 + 1$

70.2. Por exemplo: $u_n = n^3 + 1$

Tarefa

1. $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$

2. $+\infty$

3. $\lim (v_n)^2 = +\infty$
$\lim (v_n)^3 = -\infty$
$\lim (v_n)^4 = +\infty$
$\lim (v_n)^5 = -\infty$

4. Se elevar a sucessão a expoentes pares obtemos limite $+\infty$, caso contrário, obtemos limite $-\infty$.

Página 195

71.1. $+\infty$ **71.2.** $+\infty$
71.3. $-\infty$ **71.4.** $+\infty$
71.5. $+\infty$ **71.6.** $+\infty$
71.7. $-\infty$

Página 197

72.1. 0 **72.2.** 0
72.3. 0 **72.4.** 0
72.5. $-\infty$ **72.6.** $-\infty$
72.7. $+\infty$ **72.8.** $+\infty$

Página 198

73.1. $+\infty$ **73.2.** $+\infty$
73.3. 3 **73.4.** $+\infty$
73.5. 0 **73.6.** 0
73.7. $\frac{1}{3}$ **73.8.** 0

Página 200

74.1. $+\infty$ **74.2.** $+\infty$
74.3. $-\infty$ **74.4.** $+\infty$
74.5. 0 **74.6.** $-\infty$

Página 201

75.1. 0 **75.2.** 0
75.3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **75.4.** 0
75.5. 0 **75.6.** 1

Página 202

76.1. $+\infty$ **76.2.** $-\infty$
76.3. $+\infty$ **76.4.** $+\infty$
76.5. $+\infty$

Página 203

77.1. 0 **77.2.** 0
77.3. 0 **77.4.** 0

Página 204

78.1. 0 **78.2.** 1
78.3. 0 **78.4.** $\frac{1}{2}$
78.5. 1 **78.6.** 0
78.7. $+\infty$ **78.8.** $+\infty$

Página 205

79.1. -6 **79.2.** $+\infty$
79.3. 0

Página 206

80.1. $+\infty$ **80.2.** 0
80.3. 0

81.1. $+\infty$ **81.2.** $+\infty$
81.3. $\frac{5}{2}$

Página 207

1.1. Ordem 26

2.2. A sucessão é limitada.

2.3. Sim, é convergente, porque é monótona e limitada.

4.1. 0 **4.2.** $-\infty$
4.3. -1 **4.4.** 3
4.5. $+\infty$

Página 208

5.1. $\frac{5}{2}$ **5.2.** $\frac{5}{2}$

5.3. **a)** $k = -5$ **b)** $k = 0$
c) $k = -6$

6.3. Quando n tende para $+\infty$, os termos da sucessão estão cada vez mais próximos de 0, por isso existe limite e é 0.

7.1. $+\infty$ **7.2.** $+\infty$
7.3. 0 **7.4.** $+\infty$
7.5. $+\infty$ **7.6.** 0
7.7. $+\infty$ **7.8.** $+\infty$

7.9. $+\infty$
7.10. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Página 209

8.1. $r = 25$

8.2. Monótona crescente

8.3. **a)** $+\infty$ **b)** $+\infty$

9.1. Cada termo é obtido do anterior pelo produto por 2, logo é uma razão geométrica de razão 2.

9.2. $c_n = 3 \times 2^{n-1}$

9.3. **a)** $+\infty$ **b)** $+\infty$

Página 210

1.1. (C)

1.2. Monótona decrescente

1.3. Sim, é monótona e limitada, com limite $-\frac{3}{2}$.

2.1. Ordem 227

3.2. -3

4.1. 0

4.2. $-\infty$

4.3. $\frac{3}{2}$

4.4. 0

5.1. (D)

5.2. $a_n = \frac{1}{27} + \frac{1}{3}(n-1)$

6.1. $\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_{n+1} = c_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

6.2. 120

7.1. $t_n = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

7.2. 24

Página 214

1.1. Zeros de f: 2 e 3
Zeros de g: $4-\sqrt{26}$ e $4+\sqrt{26}$
Zeros de h: 2

1.2. $\{1, 2\}$

1.3. f é positiva em: $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$
f é negativa em: $]2, 3[$
g é positiva em: $]4-\sqrt{26}, 4+\sqrt{26}[$
g é negativa em:
$]-\infty, 4-\sqrt{26}[\cup]4+\sqrt{26}, +\infty[$
h é positiva em: $\mathbb{R} \backslash \{2\}$

1.4. $\left]-\infty, \frac{8-\sqrt{70}}{3}\right] \cup \left[\frac{8+\sqrt{70}}{3}, +\infty\right[$

2.1. Zeros de g: 1 e 5
Zeros de h: $-2, 0, 2$

2.2. $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \begin{cases} 2x-10 & \text{se} \quad x \geqslant 3 \\ -2x+2 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$h(x) = \begin{cases} -3x^2+12 & \text{se} \quad x \leqslant -\sqrt{2} \vee x \geqslant \sqrt{2} \\ 3x^2 & \text{se} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$

2.3. **a)** $[1, 5]$

b) $\left]-\frac{1+\sqrt{73}}{6}, \frac{1-\sqrt{73}}{6}\right[$

3.1. $D_{p \circ m} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2]$
$D_{m \circ p} =]-\infty, 2[\cup [5, +\infty[$

3.2. **a)** -2 **b)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **c)** 0

3.3. $p \circ m$: $]-\infty, -2[\cup]-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$
$p \circ m(x) = \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}-2}$
$m \circ p$: $]-\infty, 2[\cup [5, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$m \circ p(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x-2}}$

Página 215

4.1. $D'_f = [0, 2]$; $D'_g = [-3, 1]$

4.2. Majorantes de f: $[2, +\infty[$
Minorantes de f: $]-\infty, 0]$
Majorantes de g: $[1, +\infty[$
Minorantes de g: $]-\infty, -3]$

4.3. f e g são majoradas e minoradas, logo são limitadas.

5.1. $[-3, 7[$

5.2. Não tem máximo absoluto.
Mínimo absoluto: -2
Minimizante (absoluto): 5

5.3. Máximo relativo: 1
Mínimo relativo: -1 e -2
Maximizante (relativo): -1
Minimizantes (relativos): -3 e 5

6.1. $-2(x-2)(x-3)$

6.2. $-(x-2)(x+2)(x+1)$

6.3. $(x-1)(x+1)(x^2+2)$

6.4. $(x-3)(x+3)(x^2+4)$

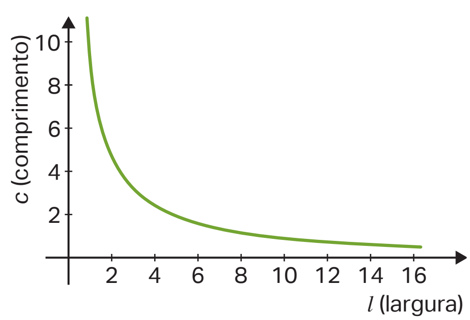
Página 216

1. $c(l) = \frac{10}{l}$

2.

c (cm)	10	5	2	1,25
l (cm)	1	2	5	8

3.



4. $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$

Página 217

1.1. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
1.2. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
1.3. $\mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$
1.4. $\mathbb{R}$
1.5. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
1.6. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Página 218

2.1. $-2, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

2.2. $\frac{1}{x+3}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$

2.3. $\frac{x+1}{3-x}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$

2.4. $\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1, 2\}$

2.5. $\frac{1-x^2}{x-2}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$

2.6. $\frac{x+2}{x-2}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

4. As funções são definidas pela mesma expressão algébrica, mas têm domínios diferentes, logo não são iguais.

Página 220

5.1. -2
5.2. 0
5.3. Não tem zeros.
5.4. Não tem zeros.
5.5. -2
5.6. $-1, 3$
5.7. Não tem zeros.
5.8. 0

Página 222

6.1. $[-2, 1[$

6.2. $]1, +\infty[$

6.3. $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup]2, +\infty[$

6.4. $]-\infty, 3] \cup]4, +\infty[$

6.5. $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

6.6. $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

6.7. $]-\infty, -2[\cup \left]\frac{3-\sqrt{41}}{2}, 3\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{41}}{2}, +\infty\right[$

6.8. $]-\infty, -1[$

7.1. Positiva em: $]-2, 3[$
Negativa em: $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$
Nula em: $\{3\}$

7.2. Positiva em: $]2, 3[$
Negativa em: $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$
Nula em: $\{2\}$

7.3. Positiva em: $]3, 5[$
Negativa em: $]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$
Nula em: $\{3\}$

7.4. Positiva em: $]0, 2[\cup]2, +\infty[$
Negativa em: $]-\infty, 0[$
Nula em: $\{0\}$

8.1. $A(p) = \frac{p}{p-1}$
8.2. 2

8.3. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1+\sqrt{3}\right)$

Página 223

1.1. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$
1.2. $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
1.3. $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$
1.4. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
1.5. $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$
1.6. $\mathbb{R}\setminus\{-5, 5\}$

2.1. $\frac{-3x-1}{4x}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$

2.2. $\frac{-3x}{x+5}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-5, 5\}$

2.3. $-x+3, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

2.4. $\frac{-x(x^2+x+1)}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

2.5. $\frac{(x+1)(x-1)}{-3(x-2)}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

2.6. $\frac{2x(x-2)}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2, -1\}$

3.1. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

3.2. $\left\{\frac{-5-\sqrt{33}}{4}, \frac{-5+\sqrt{33}}{4}\right\}$

3.3. $\{\ \}$

3.4. $\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

3.5. $\{0, 4\}$

3.6. $\{2\}$

4.1. $]-\infty, -4[\cup [-1, 4[$

4.2. $]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

4.3. $\left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

4.4. $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

4.5. $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]0, \sqrt{3}]$

4.6. $]-1, 1[$

Página 224

5.1. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

5.3. $(-2+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ e $(-2-\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$

5.4. f é positiva em $]-5, 1[\cup]1, +\infty[$.
f é negativa em $]-\infty, -5[$.
f é nula em $x = -5$
g é positiva em $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
g é negativa em $]0, 1[$.
g é nula em $x = 1$.

6.1. $]-\infty, 1] \cup \{4\}$ **6.2.** $(-2, 0)$

6.3. $\left(\dfrac{5+\sqrt{57}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{57}}{4}\right)$

7.1. 46,5 °C **7.2.** 37,5 s

7.3. Deve esperar cerca de 54 s.

Página 227

9.1. $D_f = [1, +\infty[$

$D'_f = [0, +\infty[$

Mínimo absoluto 0, com respetivo minimizante $x = 1$.
Crescente e com concavidade voltada para baixo em todo o domínio.

9.2. $D_g = [0, +\infty[$

$D'_g =]-\infty, 1]$

Máximo absoluto 1, com respetivo maximizante $x = 0$.
Decrescente e com concavidade voltada para cima em todo o domínio.

9.3. $D_h = [-2, +\infty[$

$D'_h = [-1, +\infty[$

Mínimo absoluto -1, com respetivo minimizante $x = -2$.
Crescente e com concavidade voltada para baixo em todo o domínio.

9.4. $D_j = [-2, +\infty[$

$D'_j = [3, +\infty[$

Mínimo absoluto 3, com respetivo minimizante $x = -2$.
Crescente e com concavidade voltada para baixo em todo o domínio.

9.5. $D_l = [3, +\infty[$

$D'_l =]-\infty, 1]$

Máximo absoluto 1, com respetivo maximizante $x = 3$.
Decrescente e com concavidade voltada para cima em todo o domínio.

9.6. $D_m = [-1, +\infty[$

$D'_m = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$

Máximo absoluto $\dfrac{1}{2}$, com respetivo maximizante $x = -1$
Decrescente e com concavidade voltada para cima em todo o domínio.

10. $g(x) = \sqrt{x+2}$

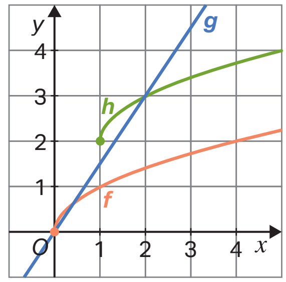
$h(x) = -\sqrt{x} + 3$

$i(x) = \sqrt{x-2} + 4$

$j(x) = \sqrt{x-1} - 2$

Página 228

1.



2. Há duas soluções, porque há dois pontos de interseção entre as representações gráficas das funções g e h.

Página 230

11.1. $\{3\}$ **11.2.** $\{\ \}$

11.3. $\{11\}$

12.1. $\{\ \}$ **12.2.** $\{2+\sqrt{3}\}$

12.3. $\{\}$ **12.4.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

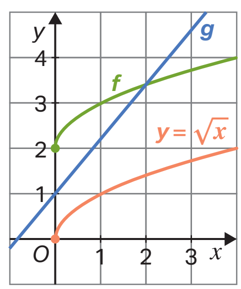
Página 231

13.1. $A(x) = \dfrac{x(\sqrt{x}+2)}{2}$ **13.2.** $x = 1$

13.3. $x = 4$

Tarefa

1.



2. Ponto de coordenadas $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.1. $\left[0, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$ **3.2.** $\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

Página 233

14.1. $[3, 28]$ **14.2.** $[3, 39]$

14.3. $\left[3, \dfrac{9-\sqrt{5}}{2}\right[$

15. $x \in \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right]$

Página 234

1. $m(x)=\sqrt{x-1}-2$
$n(x)=\sqrt{x+1}+2$
$p(x)=-\sqrt{x-2}+3$
$q(x)=\sqrt{x+2}-2$
$r(x)=-\sqrt{x+2}+1$
$s(x)=-\sqrt{x-3}-1$

2.1. $j(x)=2\sqrt{x+1}-1$

2.2. $j(x)=-\sqrt{x+1}+2$

2.3. $j(x)=2\sqrt{x-1}-2$

2.4. $j(x)=-\sqrt{x-2}+1$

Página 235

3. $\frac{3}{2}$ u.a.

4.1. $\{32\}$ **4.2.** $\{66\}$

4.3. $\{1\}$ **4.4.** $\{2\}$

4.5. $\{\ \}$ **4.6.** $\{\ \}$

4.7. $\{0\}$ **4.8.** $\{\ \}$

5. $\left(\frac{289}{64}, -\frac{7}{8}\right)$

6.1. $]11, +\infty[$ **6.2.** $[-1, 48]$

6.3. $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ **6.4.** $\left[-1, \frac{\sqrt{13}+5}{2}\right[$

6.5. $[2, +\infty[$ **6.6.** $\left[-3, -\frac{1}{2}\right[$

7.1. $[1, +\infty[$

7.2. **a)** $\{5\}$ **b)** $\left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$

7.3. $[1, 2]$

Página 237

16.1. $u_n=2+\frac{1}{n}$ **16.2.** $v_n=5-\frac{1}{n}$

16.3. $\bar{X}=[2, 5]\cup\{6\}$

17.1. $[1, 3]$ **17.2.** $[-2, 3]$

17.3. $[-3, -2]$ **17.4.** $[-1, 2]$

17.5. $[2, 5]\cup\{6\}$

Tarefa

1. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

2. 0

3. $\lim\left(\frac{1}{\frac{1}{2n}+2}\right)=\frac{1}{\lim\left(\frac{1}{2n}\right)+2}=\frac{1}{2}$

Página 239

18.1. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{3}{4}$

c) -2 **d)** 3

18.3. 3

19.1. **a)** $+\infty$ **b)** 3

c) 1 **d)** $\frac{6}{5}$

19.2. $\frac{6}{5}$

20.1. $\frac{5}{2}$ **20.2.** 1

20.3. $\frac{9}{5}$ **20.4.** 3

Página 241

21.1. 3 **21.2.** 0 **21.3.** 1 **21.4.** 8

Página 242

23.1. $\lim\limits_{x\to 1^+} g(u_n)=2$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} g(u_n)=0$

23.2. $\lim\limits_{x\to 1^+} g(v_n)=2$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} g(v_n)=0$

Página 244

24.1. 1 **24.2.** -3

24.3. Não existe. **24.4.** 1

24.5. 1 **24.6.** Não existe.

25.2. Apesar dos limites laterais serem iguais (-1), são diferentes de $g(1)=1$.

26. Os limites laterais são diferentes.

Página 246

27.1. $]-\infty, 2]$ **27.2.** $+\infty$

28. 0

Página 247

30.1. 0 **30.2.** 0

30.3. $-\infty$ **30.4.** 1

30.5. 0 **30.6.** $-\infty$

31.1. $+\infty$ **31.2.** $+\infty$

31.3. $-\infty$ **31.4.** 12

31.5. $+\infty$ **31.6.** 0

31.7. 0 **31.8.** $-\infty$

Página 248

32.1. 1 **32.2.** $-\frac{2}{3}$

32.3. -1 **32.4.** $-\frac{8}{3}$

Página 249

33.1. 4

33.2. $\frac{3}{2}$

33.3. $-\infty$

33.4. $\frac{\sqrt{6}}{12}$

Página 250

34.1. $-\infty$

34.2. $\frac{7}{8}$

34.3. $+\infty$

34.4. Não existe.

Página 251

35.1. $+\infty$

35.2. $+\infty$

35.3. $-\infty$

35.4. $-\infty$

35.5. $+\infty$

36.1. 0

36.2. 0

36.3. 0

36.4. $-\infty$

Página 253

37.1. $-\infty$

37.2. 0

37.3. $\frac{3}{2}$

37.4. 6

37.5. $-\infty$

37.6. 0

37.7. 1

37.8. -1

38.1. 0

38.2. $+\infty$

38.3. 0

38.4. 0

Página 254

1.1. 3

1.2. $\frac{2}{5}$

1.3. $+\infty$

2. (C)

Página 255

4.1. 1

4.2. -1

4.3. 0

4.4. -1

5.1. 6

5.2. -4

6.1. $+\infty$

6.2. $-\infty$

6.3. -2

6.4. $\frac{1}{2}$

6.5. $\frac{1}{4}$

6.6. $-\infty$

6.7. -2

6.8. $+\infty$

Página 256

7.1. $+\infty$

7.2. -1

7.3. $-\infty$

7.4. $-\frac{1}{4}$

7.5. Não existe.

7.6. 1

8.1. 0

8.2. $-\infty$

8.3. $-\infty$

8.4. $\frac{1}{2}$

9. Não existe.

Página 257

1.1. Verdadeiro

1.2. Verdadeiro

1.3. Verdadeiro

1.4. Falso

2.1. 2

2.2. 4

2.3. 1

3.1. 2

3.2. Não existe.

3.3. Não existe.

3.4. Não existe.

Página 259

39.1. Não é contínua em $x=1$.

39.2. É contínua em $x=1$.

39.3. Não é contínua em $x=4$.

39.4. Não é contínua em $x=1$.

40.1. É contínua.

40.2. Não é contínua.

41.1. 1

41.2. 18

41.3. -3

41.4. $\frac{1}{2}$

Página 260

42.2. A função não é contínua em $x=-2$, logo não é contínua em $[-3, 0]$.

43. A função não é contínua em $x=5$, logo não é contínua em $[4, 6]$.

Página 261

1.1. Por exemplo: $f(x)=\begin{cases} 4 & \text{se} \quad x<1 \\ 0 & \text{se} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

1.2. Por exemplo: $g(x)=\begin{cases} -4 & \text{se} \quad x<1 \\ 0 & \text{se} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

1.3. Por exemplo: $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se} \quad x<1 \\ 1 & \text{se} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

2.1. A função não é contínua em $x=1$, logo não é contínua em $[0, 2]$.

2.2. Por exemplo: $p(x)=\begin{cases} -3 & \text{se} \quad x<1 \\ 0 & \text{se} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

Página 264

45.1. Não é contínua em $x=1$.

45.3. É contínua em $x=1$.

46.1. É contínua.

46.2. Não é contínua.

46.3. É contínua.

46.4. Não é contínua.

47.1. $\frac{1}{4}$

47.2. -2

Página 266

1.1. É contínua.

1.2. Não é contínua.

1.3. Não é contínua.

1.4. É contínua.

1.5. Não é contínua.

1.6. É contínua.

2. Não é contínua.

Página 267

3.1. $\frac{1}{16}$

3.2. 1

3.3. 4

4.1. Não é contínua, porque não existe limite de $m+p$ quando x tende para 1:
$\lim\limits_{x \to 1^+} (m+p)(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (m+p)(x) = 1$ e
$(m+p)(1) = 0$

4.2. $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x = 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \neq 1 \end{cases}$

4.3. $j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \neq 1 \end{cases}$

Página 268

5.1. São ambas contínuas em $x = 1$.

5.2. $D_{f+g} = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 2x + 1}{2x} & \text{se} \quad x > 1 \\ \dfrac{5x+5}{4} & \text{se} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

5.3. É a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

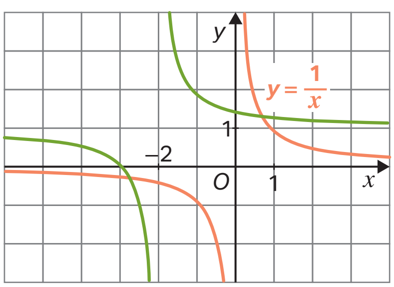
6. É contínua.

8. Como não é contínua em $x = -1$, a função não é contínua.

Página 269

1.1. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

1.2.



1.3. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$

Página 270

49.1. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

49.2. A reta de equação $x = \frac{1}{3}$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

50.1. $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

51.1. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

51.2. $m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{se} \quad x \geqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$

51.3. A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de m.

Página 273

52.1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
Equação da assíntota:
- vertical: $x = -3$
- horizontal: $y = 2$

52.2. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Equação da assíntota:
- vertical: $x = 2$
- horizontal: $y = -3$

52.3. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
Equação da assíntota:
- vertical: $x = -5$
- horizontal: $y = -1$

52.4. $D_i = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Equação da assíntota:
- vertical: $x = 2$
- horizontal: $y = 3$

Página 274

53.1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$D_i = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

53.2. $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x-3}$

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{4}}{x - \frac{3}{2}}$$

$$h(x) = 2 + \frac{-\frac{5}{3}}{x - \left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$i(x) = 2 + \frac{-5}{x-(-1)}$$

53.3. Equações das assíntotas da função:
- f: $x=3$ e $y=2$
- g: $x=\frac{3}{2}$ e $y=-\frac{1}{2}$
- h: $x=-\frac{2}{3}$ e $y=2$
- i: $x=-1$ e $y=2$

54.1. $y=-2+\frac{-4}{x+1}$

54.2. $y=-2+\frac{2}{x-1}$

Página 277

55.1. Não. Apesar de $x=2$ não pertencer ao domínio de f, pertence à sua aderência e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\frac{4}{3}$.

55.2. Não existem.

56.1. As retas de equações $x=2$ e $y=3x+1$.

56.2. As retas de equações $x=1$ e $y=-2x-2$.

56.3. As retas de equações $x=2$ e $y=x+2$.

56.4. As retas de equações $y=x$ e $y=-x$.

56.5. As retas de equações $x=2$, $y=x+2$ e $y=-x-2$.

56.6. As retas de equações $y=\sqrt{2}\,x$ e $y=-\sqrt{2}\,x$.

57.1. Não

57.2. As retas de equações $x=10$, $y=1$ e $y=0$.

Página 278

1.1. $D_a=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $D_a=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $D_c=\mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$, $D_d=\mathbb{R}$ e $D_e=\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$.

1.2. Equações das assíntotas verticais da função:
- a: $x=\frac{1}{2}$
- b: $x=-1$
- c: $x=3$
- d: $x=0$
- e: $x=-2$

2.1. $f(x)=-\frac{3}{2}+\frac{-\frac{7}{4}}{x-\frac{3}{2}}$

2.2. $x=\frac{3}{2}$ e $y=-\frac{3}{2}$

2.3. $g(x)=1+\frac{-1}{x-(-2)}$

2.4. **a)** $\mathbb{R}\backslash\left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$

b) $x=-2$ e $x=\frac{3}{2}$

3.1. $y=-1$

3.2. $y=0$

3.3. $y=-1$ e $y=1$

3.4. Não tem assíntota horizontal.

4.1. Tem uma assíntota horizontal de equação $y=1$, e não tem assíntotas verticais nem oblíquas.

4.2. Tem uma assíntota vertical de equação $x=1$, e não tem assíntotas horizontais nem oblíquas.

4.3. Tem assíntotas oblíquas de equações $y=x$ e $y=-x$, e não tem assíntotas horizontais nem verticais.

4.4. Tem assíntotas horizontais de equações $y=1$ e $y=-1$, e não tem assíntotas verticais nem oblíquas.

Página 279

5.1. 0 **5.2.** $+\infty$

5.3. -1 **5.4.** $-\infty$

6.1. 0 **6.2.** 1

6.3. 1 **6.4.** 2

7. As retas de equações $x=3$, $y=1$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de h.

8. $y=2x-1$

Página 280

1.1. (A) **1.2.** 3

2.1. $f(x)=2+\frac{-10}{x-(-1)}$ **2.2.** $(4, 0)$

2.3. $(-1-\sqrt{10}, 2+\sqrt{10})$ e $(-1+\sqrt{10}, 2-\sqrt{10})$

Página 281

3.1. $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

3.2. Não admite assíntotas.

3.3. $\frac{1+\sqrt{109}}{36}$

4. **(C)**

5.1. Não é contínua, porque $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

5.2. Só admite uma assíntota vertical, de equação $x=-1$.

6.1. **a)** 1 **b)** 0

c) -1

Matemática 11.º ano

Criação intelectual
Elisabete Figueiredo

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
© Pedro Moita
© Stock.Adobe.com
Porto Editora

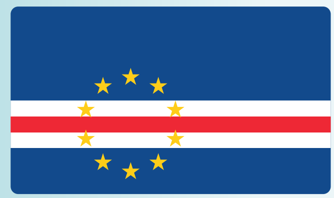
Edição
2025

Este manual segue
o programa da disciplina,
publicado pelo Ministério
da Educação.

Cabo Verde

Brasão

Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!