Matemática

Aplicada às Artes

11.º ano

11

Ministério da Educação

ONLINE
+OFFLINE
+DOWNLOAD

Manual Digital na app
EV Smart Book e em
www.escolavirtual.cv

Matemática

Aplicada às Artes

11.º ano

Manual Revisto

O presente manual foi revisto e validado pela Universidade de Cabo Verde.

Ministério da Educação

Explora o teu manual digital

https://escolavirtual.cv

Acesso e condições de utilização em

www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

DISPONÍVEL NO Google Play

Descarregar na App Store

Conhece o teu manual

Este manual tem como objetivo ajudar-te neste novo percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em três temas, de acordo com o plano curricular do ensino secundário. Os temas (Geometria, Modelos matemáticos e Probabilidade) dividem-se, por sua vez, em subtemas.

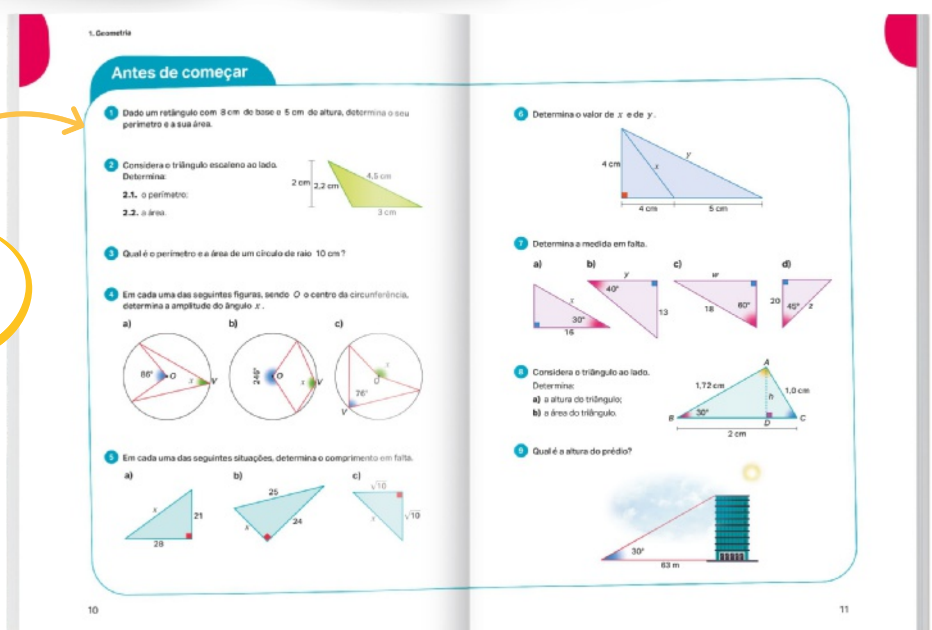
Cada tema e subtema é composto por…

Separador

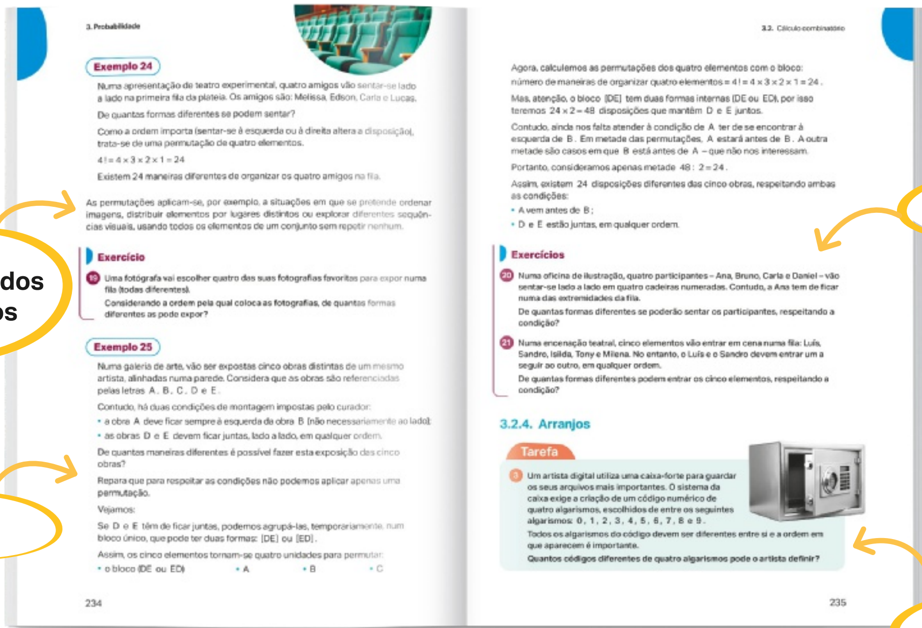
Tema da unidade

Subtemas da unidade

Atividades de diagnóstico



Desenvolvimento de conteúdos



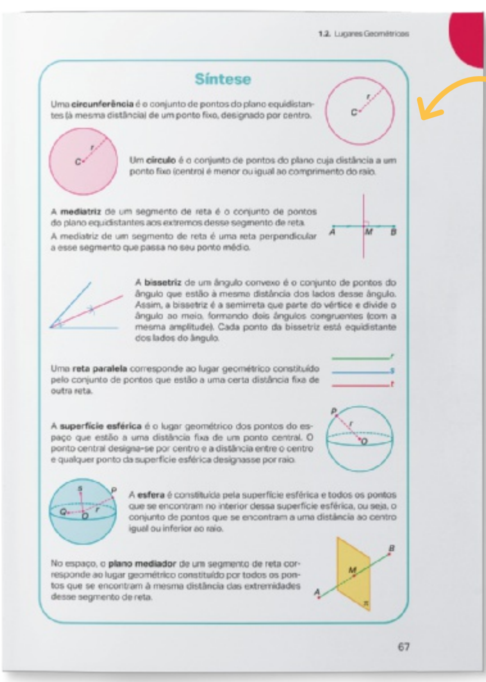
Explicação dos conteúdos

Exemplos

Exercícios

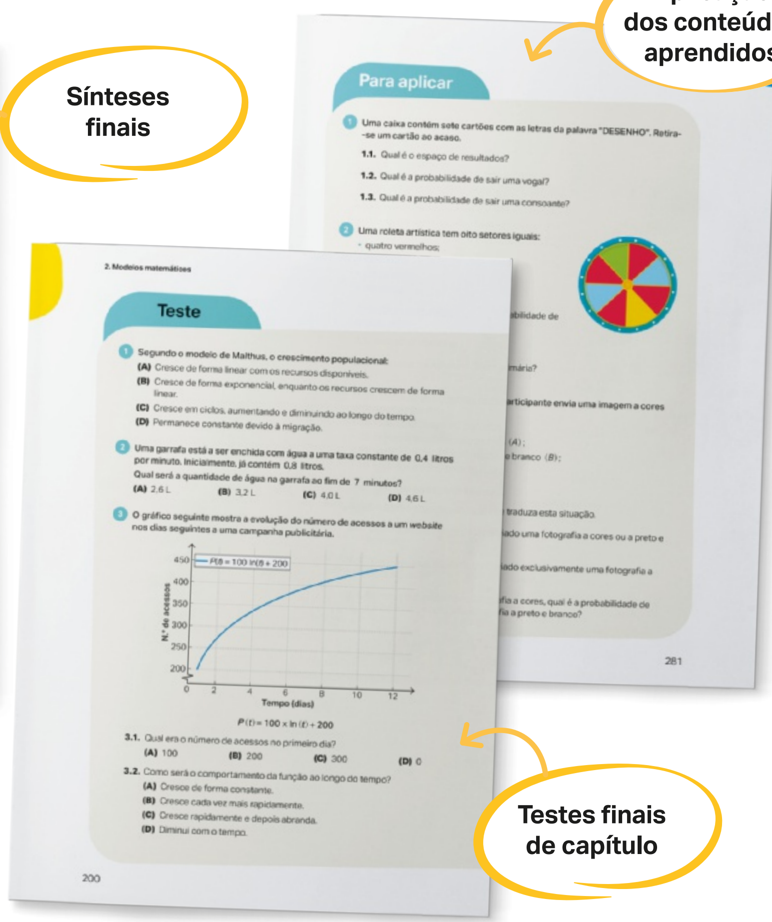
Tarefas

Ao longo do teu manual…



Sínteses finais

Avaliações



Aplicação dos conteúdos aprendidos

Testes finais de capítulo

Índice

3

1

Geometria

Manual Digital

Vídeos
Área do trapézio

Área do losango e do papagaio

Perímetro e área de figuras geométricas

O **perímetro** é o comprimento total **do contorno** de uma figura.

O perímetro determina-se somando o comprimento de todos os lados que limitam a figura geométrica.

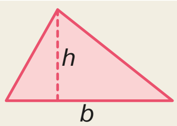
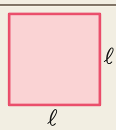
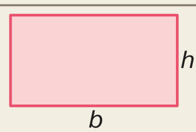
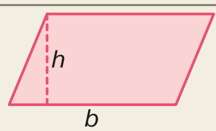
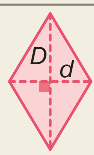
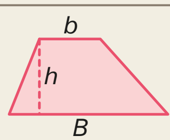
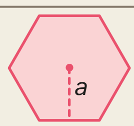
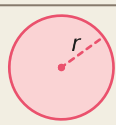
No caso do círculo, o perímetro é determinado pelo produto seguinte:

$$P_{\text{círculo}} = 2\pi r$$

Em que r é o raio da circunferência e π é o número irracional cujo valor é aproximadamente $3{,}1416$.

A **área** é a medida da superfície de uma figura plana; em termos simples, é o espaço que a figura ocupa no plano.

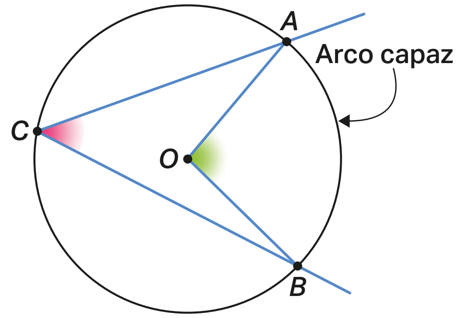
Áreas de figuras planas

Triângulo		$A = \frac{b \times h}{2}$	b – base h – altura
Quadrado		$A = \ell^2$	ℓ – lado
Retângulo		$A = b \times h$	b – base h – altura
Paralelogramo		$A = b \times h$	b – base h – altura
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$	D – diagonal maior d – diagonal menor
Trapézio		$A = \frac{B + b}{2} \times h$	B – base maior b – base menor h – altura
Polígono regular		$A = \frac{P}{2} \times a$	P – perímetro a – apótema
Círculo		$A = \pi r^2$	r – raio

Ângulos da circunferência

Numa circunferência de centro O:

- o ângulo BOA diz-se um ângulo ao centro;
- o ângulo BCA diz-se um ângulo inscrito na circunferência;
- a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente e igual ao dobro da amplitude do ângulo inscrito correspondente.



$$B\hat{O}A = 2B\hat{C}A$$

Manual Digital

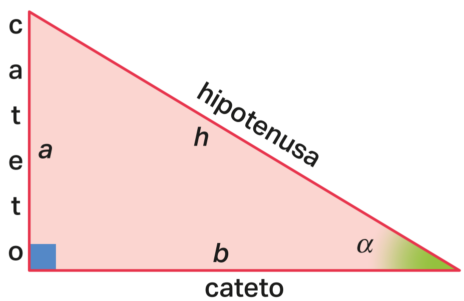
Vídeo
Amplitude de um ângulo inscrito num arco de circunferência

Triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto denomina-se hipotenusa e os lados que formam o ângulo reto designam-se por catetos.

Teorema de Pitágoras

$$\boldsymbol{h^2 = a^2 + b^2}$$



Razões trigonométricas

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto oposto}}{\textit{comprimento da hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto adjacente}}{\textit{comprimento da hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto oposto}}{\textit{comprimento do cateto adjacente}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

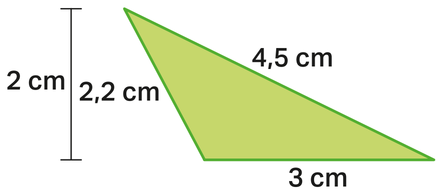
Antes de começar

1 Dado um retângulo com 8 cm de base e 5 cm de altura, determina o seu perímetro e a sua área.

2 Considera o triângulo escaleno ao lado. Determina:

2.1. o perímetro;

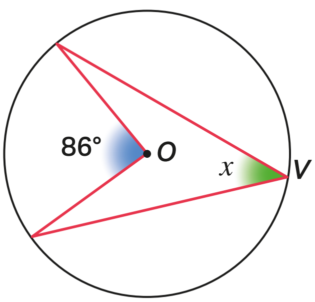
2.2. a área.



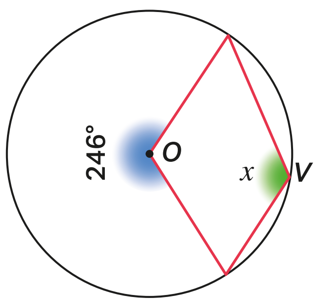
3 Qual é o perímetro e a área de um círculo de raio 10 cm ?

4 Em cada uma das seguintes figuras, sendo O o centro da circunferência, determina a amplitude do ângulo x .

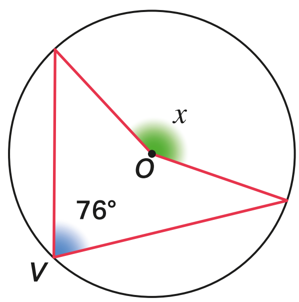
a)



b)

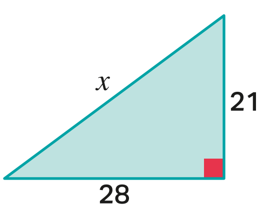


c)

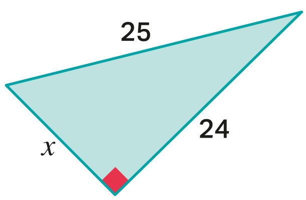


5 Em cada uma das seguintes situações, determina o comprimento em falta.

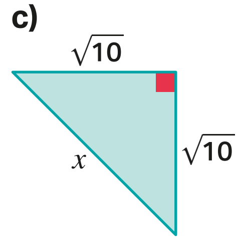
a)



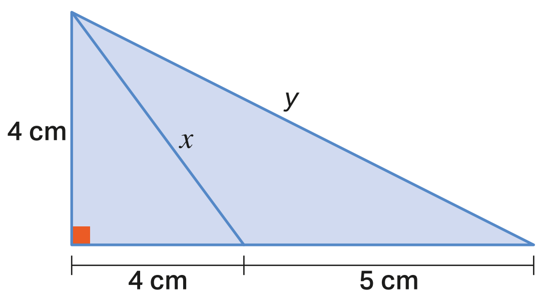
b)



c)

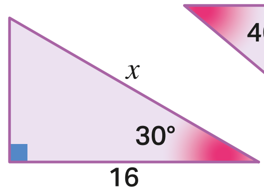


6 Determina o valor de x e de y.

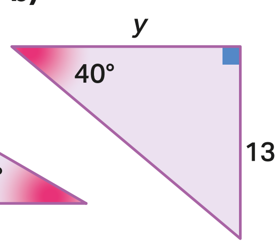


7 Determina a medida em falta.

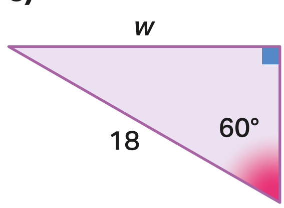
a)



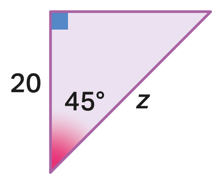
b)



c)



d)

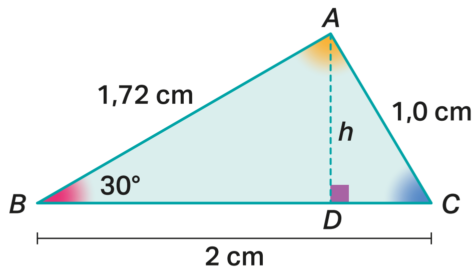


8 Considera o triângulo ao lado.

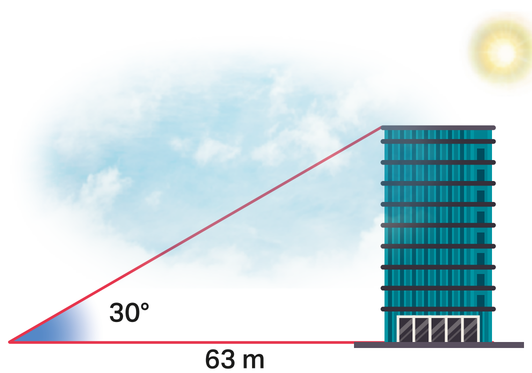
Determina:

8.1. a altura do triângulo;

8.2. a área do triângulo.



9 Qual é a altura do prédio?



1 Geometria

1.1. Áreas e volumes

1.1.1. Área de um círculo e de setores circulares

Uma **circunferência** é o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto designado por centro da circunferência.

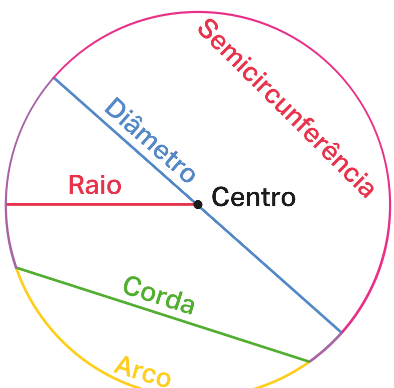
O **círculo** é a região do plano delimitada por uma circunferência, incluindo a circunferência e todos os pontos internos à circunferência.

A distância entre o centro da circunferência e um ponto qualquer da circunferência designa-se por **raio da circunferência**.

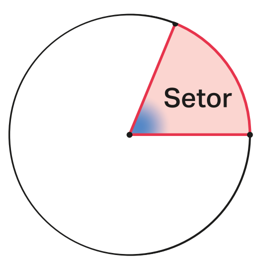
Uma **corda** é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência.

Um **arco** de circunferência é uma parte da circunferência cujos extremos são dois dos seus pontos.

O **diâmetro** de uma circunferência corresponde ao comprimento de uma corda que passa no centro da circunferência. O comprimento do diâmetro é duas vezes o comprimento do raio da circunferência.



Um **setor circular** corresponde a uma parte do círculo delimitada por dois raios e o arco correspondente.



A descoberta da fórmula da área do círculo tem raízes na antiguidade, com contribuições importantes de matemáticos gregos e indianos.

O matemático grego Arquimedes (287-212 a. C.) desenvolveu um método conhecido por **método de exaustão** para aproximar a área do círculo. Ele inscrevia e circunscrevia polígonos regulares dentro e fora do círculo, aumentando o número de lados gradualmente. Ao fazer isso, ele conseguiu demonstrar que a área do círculo se aproximava da fórmula atualmente usada. Este método é considerado o precursor do cálculo integral.

Mais tarde, matemáticos indianos, como Aryabhata (século V), já utilizavam aproximações para o número π e fórmulas para calcular áreas de figuras circulares. Durante a Idade Média, matemáticos árabes preservaram e expandiram esses conhecimentos, influenciando o desenvolvimento do cálculo.

No século XVII, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveram o cálculo diferencial e integral, formalizando completamente os conceitos matemáticos que permitem determinar a área do círculo de forma rigorosa.

Assim:

A área do círculo é dada por:

$$A = \pi r^2$$

em que r é o raio e π (aproximadamente $3{,}1416$) é a constante que representa a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro.

Exemplo 1

A área de um círculo de raio 2 cm, aproximada às centésimas, é:

$$A = \pi 2^2 = 4\pi \approx 12{,}57\text{ cm}^2 \text{ (2 c.d.).}$$

Neste caso, o perímetro do círculo de raio 2 cm, aproximado às centésimas, é:

$$P = 2 \times 2 \times \pi = 4\pi \approx 12{,}57\text{ cm} \text{ (2 c.d.).}$$

Exemplo 2

O valor exato da área de um círculo de raio 6 cm é: $A = \pi\, 6^2 = 36\pi\text{ cm}^2$.

Já, o valor exato do perímetro desse círculo é: $P = 2 \times 6 \times \pi = 12\pi\text{ cm}$.

Exercício

1 **Determina o valor exato da área de um círculo com:**

1.1. raio 3 cm.

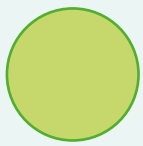
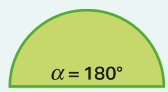
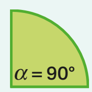
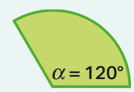
1.2. diâmetro 3 cm.

1.3. diâmetro 8 cm.

Tarefa

1 **Determina o motivo de cada imagem dos seguintes padrões.**

- Com um compasso, desenha um círculo de papel, de raio 10 cm.
- Determina a área do círculo.
- Divide-o em duas partes iguais, cada setor com amplitude de $180°$.
- Observa que cada uma dessas partes corresponde exatamente a metade da área do círculo.
- Determina a área exata de um quarto do mesmo círculo.
- Divide agora o círculo em setores circulares com ângulos diferentes (por exemplo, $45°$, $120°$) e determina a área de cada setor circular.
- Completa a seguinte tabela.

Setor circular				
Em quantas partes foi dividido o círculo?	1	2		
Área do setor circular (2 c.d.)	$100\pi \approx 314{,}16$	$\frac{1}{2} \times 100\pi =$ $= 50\pi \approx 157{,}08$		
Amplitude do setor circular (α)	$360°$	$180°$		
Razão $\frac{\alpha}{360°}$	$\frac{360°}{360°} = 1$	$\frac{180°}{360°}$		
$\frac{\alpha}{360°} \times A_{\text{círculo}}$ **(2 c.d.)**	$1 \times 100\pi =$ $= 100\pi$ $\approx 314{,}16$	$\frac{180°}{360°} \times 100\pi =$ $=$ ______ $\approx$ ______		

- Repara que é possível determinar a área do setor circular, desde que sejam conhecidos o raio e a amplitude do setor circular. Consegues definir uma fórmula? Escreve-a.

Nota que a área de um setor circular é diretamente proporcional à sua amplitude.

Considerando um setor circular de raio r e amplitude $360°$, o que corresponde a um círculo, e um setor circular de raio r e amplitude α, temos:

$$\frac{A_{\text{círculo}}}{360°}=\frac{A_{\text{setor circular}}}{\alpha} \qquad \frac{\pi r^2}{360°}=\frac{A_{\text{setor circular}}}{\alpha} \qquad \frac{\alpha}{360°}\pi r^2=A_{\text{setor circular}}$$

Assim, se um setor circular tiver uma amplitude α, a área desse setor circular será proporcional a essa fração do círculo.

A área de um setor circular é dada por:

$$A_{\text{setor circular}}=\frac{\alpha}{360°}\pi r^2$$

em que r é o raio e α a amplitude do setor circular.

Exemplo 3

Considerando um círculo de raio 5 cm, temos que a sua área é $A=\pi 5^2=25\pi$.

Nesse círculo, um setor circular de amplitude $80°$ tem a área exata de:

$$A_{\text{sector circular}}=\frac{80°}{360°}25\pi=\frac{2}{9}25\pi=\frac{50}{9}\pi$$

Exemplo 4

A amplitude de um setor circular de área 4π e raio 4 cm é dada por:

$$\begin{aligned}A_{\text{setor circular}}=\frac{\alpha}{360°}\pi r^2 \Leftrightarrow 4\pi=\frac{\alpha}{360°}\pi 4^2 \Leftrightarrow 4\pi=\frac{\alpha}{360°}16\pi \\ \Leftrightarrow \frac{4\pi}{16\pi}=\frac{\alpha}{360°} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{\alpha}{360°} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{4}\times 360° \\ \Leftrightarrow \alpha=90°\end{aligned}$$

Exercício

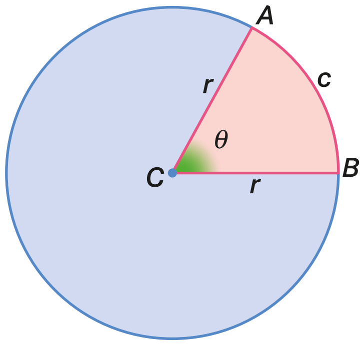
2 **Determina a área de um setor circular de:**

2.1. raio 2 cm e amplitude $60°$.

2.2. diâmetro 5 cm e amplitude $120°$.

2.3. raio 15 cm e amplitude $10°$.

Também é possível determinar a área de um setor circular conhecendo o raio e o comprimento do arco que o define.



De forma análoga, a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que o define.

Considerando um setor circular de raio r, arco com comprimento c e o círculo de raio r, em que o comprimento do arco que o define corresponde ao perímetro do círculo, temos que:

$$\frac{A_{\text{círculo}}}{P_{\text{círculo}}} = \frac{A_{\text{setor circular}}}{c}$$

$$\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{A_{\text{setor circular}}}{c}$$

$$\frac{r}{2} = \frac{A_{\text{setor circular}}}{c}$$

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{rc}{2}$$

A área de um setor circular é dada por:

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{rc}{2}$$

em que r é o raio do setor circular e c o comprimento do arco que o define.

Exemplo 5

Sabendo que um setor circular tem um arco de perímetro 4π e raio 2, a área desse setor circular é:

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{2 \times 4\pi}{2} = 4\pi$$

Exercícios

3 Determina o valor exato da área de um setor circular de:

3.1. raio 2 cm e comprimento do arco 15 cm.

3.2. diâmetro 5 cm e comprimento do arco 15 cm.

3.3. raio 15 cm e comprimento do arco 15 cm.

4 Qual é a amplitude de um setor circular de raio 2 cm e comprimento do arco 2π cm?

1.1.2. Volumes de sólidos geométricos

O volume de um sólido geométrico corresponde ao espaço que ele ocupa. O estudo dos volumes é essencial em diversas áreas, como engenharia, arquitetura e física.

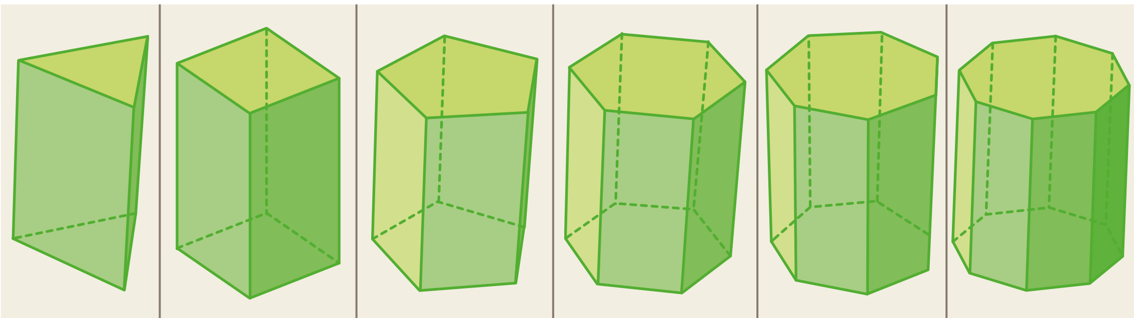
Manual Digital

Vídeo
Volume de um prisma reto

Prismas

Um **prisma** é um sólido geométrico com duas bases paralelas entre si e faces laterais formadas por paralelogramos.

Existem diferentes tipos de prismas:



Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal	Prisma heptagonal	Prisma octogonal

O volume de um prisma é dado por:

$$V_{\text{prisma}} = A_b \times h$$

em que A_b é a área da base do prisma e h a altura do prisma.

Exemplo 6

O volume de um prisma de base triangular, com área $20\ \text{cm}^2$ e altura de $10\ \text{cm}$, é:

$$V_{\text{prisma}} = 20 \times 10 = 200\ \text{cm}^3$$

Exemplo 7

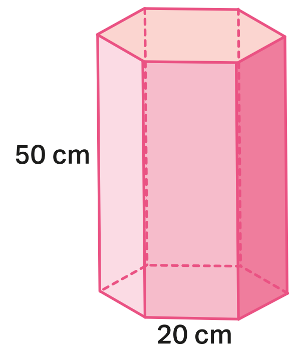
O volume de um prisma de base quadrangular de lado $3\ \text{cm}$ e altura de $5\ \text{cm}$ é:

$$V_{\text{prisma}} = 3 \times 3 \times 5 = 45\ \text{cm}^3$$

Manual Digital

Vídeo
Volume de um prisma triangular reto

Exemplo 8



Para determinar o volume do prisma hexagonal regular ao lado, primeiro é necessário determinar a área da base.

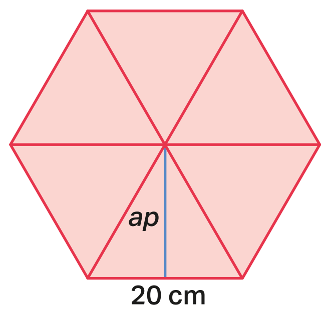
Ao dividir o hexágono regular através das suas diagonais, obtêm-se seis triângulos equiláteros, de lado 20 cm.

Logo, a área da base do prisma será dada por:

$$A_b = 6 \times A_{\text{triângulo}}$$

Assim,

$$20^2 = ap^2 + 10^2 \Leftrightarrow 400 = ap^2 + 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ap^2 = 300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ap = \sqrt{300} \Leftrightarrow ap = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$



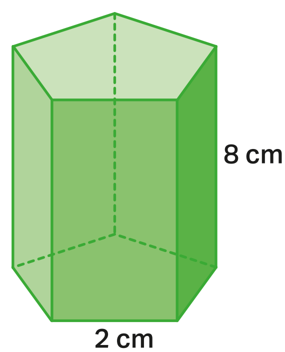
Logo,

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{P}{2} \times ap = \frac{6 \times 20}{2} \times 10\sqrt{3} = 60 \times 10\sqrt{3} = 600\sqrt{3}.$$

Assim,

$$V_{\text{prisma}} = 600\sqrt{3} \times 50 = 3000\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Exemplo 9



Para determinar o volume do prisma pentagonal regular ao lado, vamos começar por determinar a área da base pentagonal, de lado 2 cm.

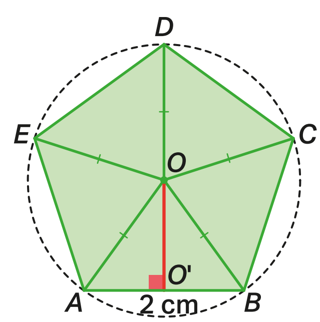
A base é constituída por cinco triângulos isósceles iguais de base 2 cm.

O ângulo AOB corresponde a um ângulo ao centro do pentágono, logo $A\hat{O}B = \frac{360°}{5} = 72°$.

Logo, $A\hat{O}O' = \frac{72°}{2} = 36°$.

Assim:

$$tg\,36° = \frac{\overline{AO'}}{\overline{OO'}} \Leftrightarrow tg\,36° = \frac{1}{\overline{OO'}} \Leftrightarrow \overline{OO'} = \frac{1}{tg\,36°}$$
$$\Leftrightarrow \overline{OO'} \approx 1{,}38 \text{ cm}$$



Portanto, $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times ap}{2} \approx \frac{2 \times 1{,}38}{2} = 1{,}38 \text{ cm}^2$

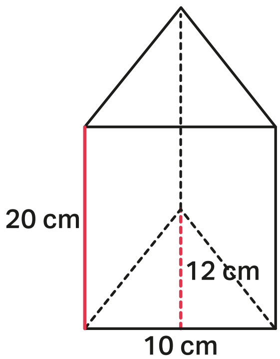
e $A_b \approx 5 \times 1{,}38 = 6{,}9 \text{ cm}^2$

Logo, $V_{\text{prisma}} \approx 6{,}9 \times 8 = 55{,}2 \text{ cm}^3$

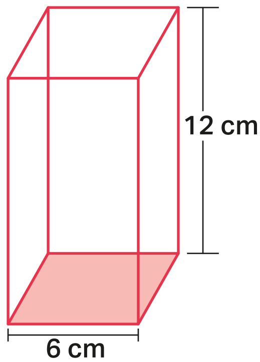
Exercícios

5 Determina o volume dos seguintes prismas. Nos casos em que precisares de fazer arredondamentos, conserva 2 casas decimais.

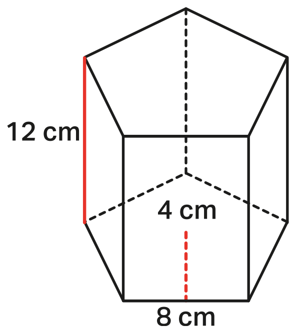
5.1. Prisma triangular



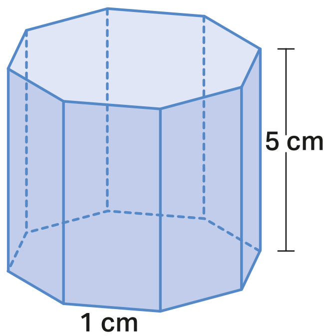
5.2. Prisma quadrangular



5.3. Prisma pentagonal regular



5.4. Prisma octagonal regular



6 Dado um cubo de volume $2\sqrt{2}$, qual é a medida da sua aresta?

Manual Digital

Vídeo
Volume de um cilindro

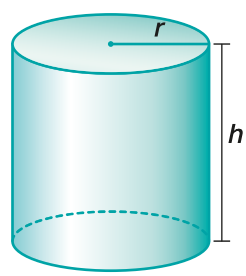
Cilindros

Um **cilindro** é um sólido geométrico constituído por duas bases circulares idênticas e superfície lateral curva.

O volume de um cilindro é dado por:

$$V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = \pi\, r^2 \times h$$

em que r é o raio da base do cilindro e h a altura do cilindro.



Exemplo 10

O volume de um cilindro de raio 5 cm e altura 12 cm é:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi\, 5^2 \times 12 = 25\pi \times 12 = 300\pi \text{ cm}^3$$

Manual Digital

GeoGebra
Volume de uma pirâmide

Vídeo
Volume de uma pirâmide triangular

Exercício

7 Determina o volume de um cilindro com:

7.1. 3 cm de raio da base e 10 cm de altura.

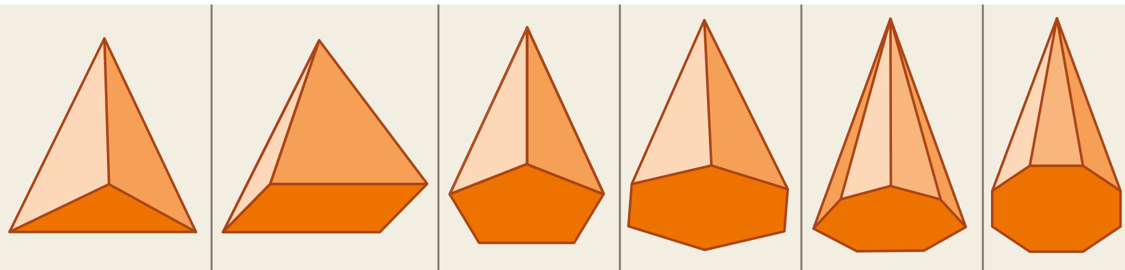
7.2. 2 cm de diâmetro da base e 4 cm de altura.

7.3. 12 cm de diâmetro da base e 12 cm de altura.

Pirâmides

Uma **pirâmide** é um sólido geométrico com uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram num vértice comum.

Tal como os prismas, existem diferentes tipos de pirâmides, de acordo com a forma da base.



Pirâmide triangular	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal	Pirâmide heptagonal	Pirâmide octagonal

Tarefa

2 Explora a animação *Volume de uma pirâmide* disponível na Escola Virtual. Sabendo que cada pirâmide tem base e altura iguais ao prisma, responde às seguintes questões.

2.1. Quantas pirâmides de base e altura igual ao prisma são necessárias para o preencher?

2.2. Completa:

$$V_{\text{prisma}} = \square \times V_{\text{pirâmide}}$$

2.3. Substitui V_{prisma} pela fórmula que te permite determinar o volume de um prisma.

2.4. Resolve a expressão anterior em ordem a $V_{\text{pirâmide}}$.

2.5. O que concluis?

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura.

O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$$

em que A_b é a área da base da pirâmide e h a altura da pirâmide.

Exemplo 11

O volume de uma pirâmide de base quadrada, de lado 6 cm, e altura 9 cm, é:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 9 = 108 \text{ cm}^3$$

Exemplo 12

O volume de uma pirâmide triangular, com 20 cm^2 de área da base e altura 15 cm, é:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 20 \times 15 = 100 \text{ cm}^3$$

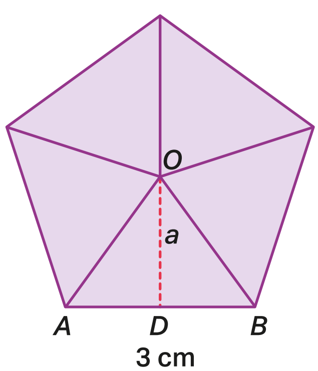
Exemplo 13

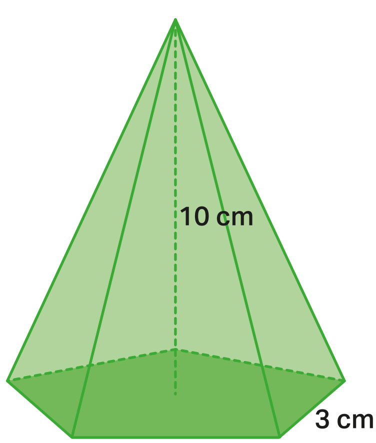
O volume de uma pirâmide quadrangular, de lado 3 cm e altura 5 cm, é:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 5 = 15 \text{ cm}^3$$

Exemplo 14

Para determinar o volume da seguinte pirâmide pentagonal regular, determinemos a área da base.





Manual Digital

GeoGebra
Volume de um cone

Assim, $A\hat{O}B = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, $A\hat{O}D = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ e

$tg\,36^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow tg\,36^\circ = \dfrac{1,5}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \overline{OD} = \dfrac{1,5}{tg\,36^\circ} \Leftrightarrow \overline{OD} \approx 2,06\text{ cm}$.

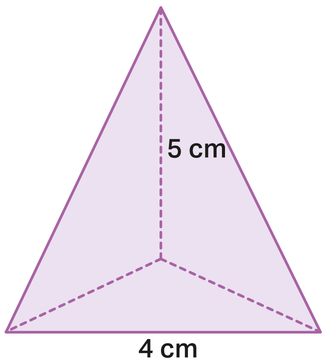
Portanto, $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \times ap}{2} \approx \dfrac{3 \times 2,06}{2} = 3,09\text{ cm}^2$ e $A_b \approx 5 \times 3,09 = 15,45\text{ cm}^2$.

Logo, $V_{\text{prisma}} \approx \dfrac{1}{3} \times 15,45 \times 10 = 51,5\text{ cm}^3$.

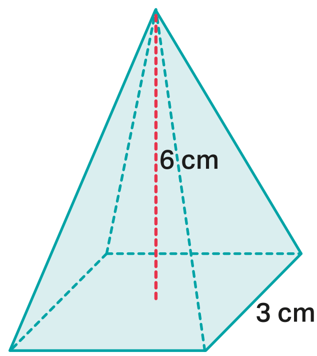
Exercício

8 Determina o volume das seguintes pirâmides, cujas bases são polígonos regulares.

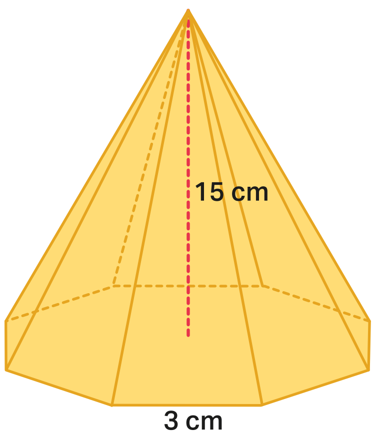
8.1.



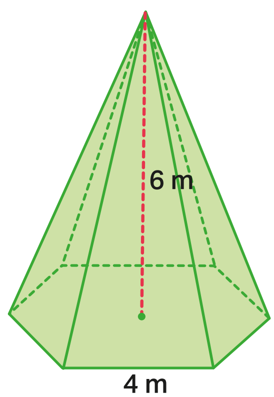
8.2.



8.3.



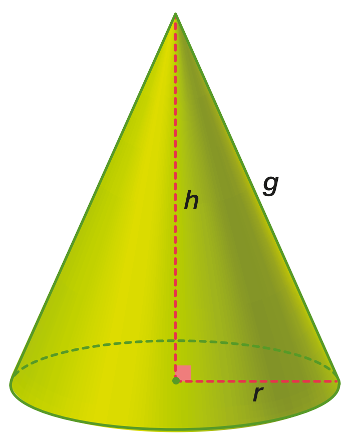
8.4.



Cones

O **cone** é um sólido geométrico de base circular e superfície lateral curva que converge num vértice.

Num cone, podemos identificar a **geratriz** que corresponde ao segmento de reta que une o vértice do cone a qualquer ponto da circunferência que forma a base.



Tarefa

3 Explora a animação *Volume de um cone* disponível na Escola Virtual.
O que concluis?

Manual Digital

Vídeo
Volume de um cone

O volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro com a mesma base e a mesma altura.

O volume de um cone é dado por:

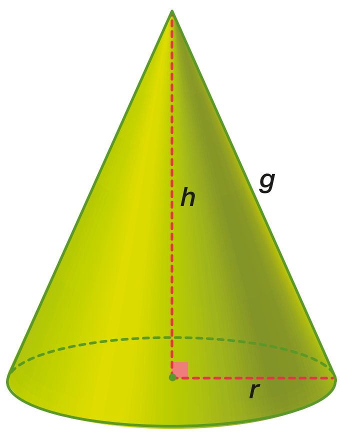
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times \pi\, r^2 \times h$$

em que r é o raio da base do cone e h a altura do cone.

Exemplo 15

O volume de um cone com altura de 10 cm e raio da base de 4 cm é:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi\, 4^2 \times 10 = \frac{160}{3}\pi \text{ cm}^3$$



Exercício

9 **Determina o volume dos seguintes cones:**

9.1. com 3 cm de raio e 10 cm de altura.

9.2. com 2 cm de diâmetro e 4 cm de altura.

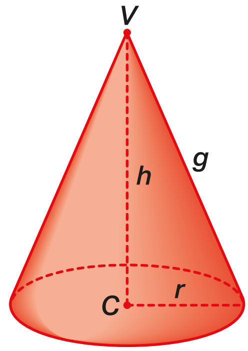
9.3. com 12 cm de diâmetro e 12 cm de altura.

Repara que, num cone regular, a altura forma um ângulo reto com o raio. Podemos, assim, aplicar o Teorema de Pitágoras, para relacionar os comprimentos do raio da base, da altura do cone e da sua geratriz.

Exemplo 16

Sabendo que o raio da base do cone é 2 cm e que a sua altura é 6 cm, temos que:

$$g^2 = 2^2 + 6^2 \Leftrightarrow g^2 = 4 + 36$$
$$\Leftrightarrow g^2 = 40$$
$$\Leftrightarrow g = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\text{ cm}$$



Exercício

10 **Determina o comprimento da geratriz de cada um dos seguintes cones:**

10.1. com 3 cm de raio e 10 cm de altura.

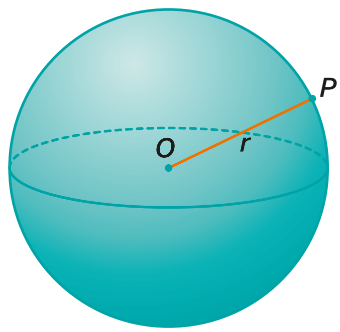
10.2. com 2 cm de diâmetro e 4 cm de altura.

10.3. com 12 cm de diâmetro e 12 cm de altura.

Esferas

A superfície esférica corresponde a todos os pontos equidistantes de um ponto central, que designamos por centro da esfera.

Uma **esfera** é um sólido geométrico constituído pela superfície esférica e todos os pontos interiores.



Arquimedes e a descoberta do volume da esfera

O matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a. C.--212 a. C.) é referido como tendo sido o primeiro a encontrar uma fórmula para o cálculo do volume da esfera. Para isso, Arquimedes usou um método chamado método de exaustão, precursor do cálculo integral, à semelhança do que fez para o círculo. Ele comparou a esfera com cilindros e cones inscritos e circunscritos, calculando as suas áreas e volumes de forma aproximada.

Arquimedes

O volume de uma esfera é dado por:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

em que r é o raio da esfera.

Manual Digital

Vídeo
Volume de uma esfera

Exemplo 17

O volume de uma esfera de raio 7 cm é:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi\, 7^3 = \frac{4}{3}\pi \times 343 = \frac{1372}{3}\pi\text{ cm}^3$$

Exercício

11 **Determina o volume das seguintes esferas, apresentando o valor exato:**

11.1. uma esfera de raio 2 cm.

11.2. uma esfera de raio $1{,}5\text{ cm}$.

11.3. uma esfera de diâmetro 6 cm.

1.1.3. Cálculo da área da superfície de sólidos geométricos

A **superfície de um sólido** é tudo o que o envolve externamente, ou seja, tudo aquilo que se consegue "tocar" por fora do objeto. De forma simples, poderíamos dizer que corresponde à "pele" do sólido.

Exemplos:

- a superfície de um **cubo** é composta pelas suas **seis faces quadradas**;
- num **cilindro**, a superfície corresponde às **duas bases circulares** e à **face lateral curva** (como um rótulo de lata);
- numa **esfera**, a superfície corresponde a toda a parte redonda exterior, mesmo não existindo arestas.

Assim, a área da superfície de um sólido geométrico corresponderá à soma das áreas de todas as suas faces.

O cálculo da área da superfície esférica de um sólido é relevante em diferentes situações da vida real, como nas construções, no *design* industrial, entre outros, uma vez que a área pode corresponder à quantidade de material necessário para cobrir todo o sólido por fora, caso se queira pintar, embalar, forrar, etc.

Manual Digital

Atividade
Planificação de prismas

Vejamos o caso de poliedros, sólidos geométricos em que toda as faces são planas, como os prismas e as pirâmides.

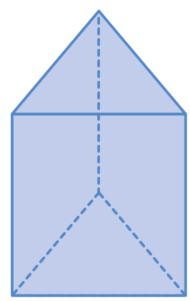
Para determinar a área da superfície de um poliedro, é útil calcular a área de cada uma das figuras geométricas que surgem na planificação do sólido.

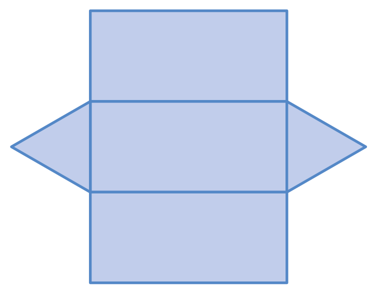
Prismas

Um prisma é um sólido com duas bases poligonais paralelas e congruentes, ligadas por faces laterais que são paralelogramos, normalmente retângulos, no caso concreto dos prismas retos. O número de faces laterais é determinado pelo número de lados do polígono.

Exemplo 18

Num prisma triangular regular, em que a base é um triângulo equilátero de lado 6 cm e a altura do prisma é 10 cm, temos que:



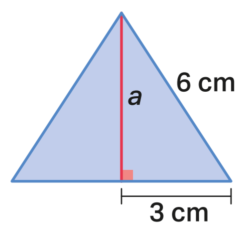


$$AS_{\text{Prisma triangular}} = 2 \times A_{\text{base}} + 3 \times A_{\text{face lateral}}$$

Em que,

- a altura do triângulo da base é:

$$\begin{aligned} 6^2 = 3^2 + a^2 &\Leftrightarrow 36 = 9 + a^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 36 - 9 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 27 \\ &\Longrightarrow a = 3\sqrt{3}\text{ cm} \end{aligned}$$



- a área da base é:

$$A_{\text{base}} = \frac{b \times a}{2} = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

- a área de cada face lateral (retângulo) é:

$$A_{face} = c \times l = 6 \times 10 = 60\text{ cm}^2$$

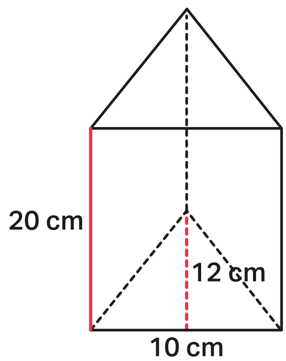
Logo:

$$AS_{\text{Prisma triangular}} = 2 \times 9\sqrt{3} + 3 \times 60 = 18\sqrt{3} + 180 \approx 211{,}2\text{ cm}^2$$

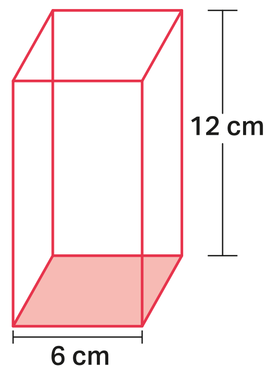
Exercícios

12 Determina a área da superfície dos seguintes prismas. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

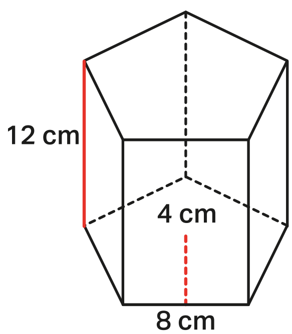
12.1.



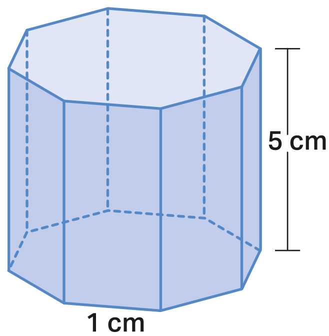
12.2.



12.3.



12.4.



13 Prova que a área da superfície de um cubo de lado a é dada por $6a^2$.

Manual Digital

Vídeo
Área da superfície de um poliedro

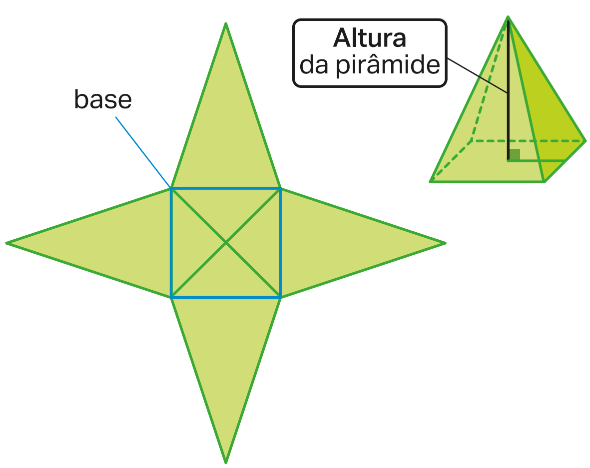
Pirâmides

Uma pirâmide tem uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram num ponto comum chamado vértice. O número de faces laterais é determinado pelo número de lados do polígono da base.

Exemplo 19

Numa pirâmide quadrangular regular cujo lado da base é 4 cm e a altura é 6 cm, temos que:

$$AS_{\text{Pirâmide triangular}} = A_{\text{base}} + 4 \times A_{\text{face lateral}}$$



Manual Digital

Vídeo
Área da superfície de pirâmides regulares

Em que:

- a altura do triângulo da face (apótema da pirâmide) é:

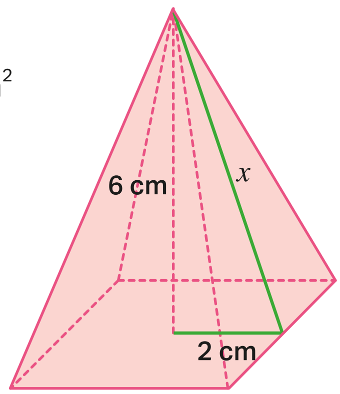
$$x^2 = 6^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 40 \Leftrightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

- a área da face lateral (triângulo) é:

$$A_{face} = \frac{b \times a}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{10}}{2} = 4\sqrt{10} \text{ cm}^2$$

- a área da base é:

$$A_{base} = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$



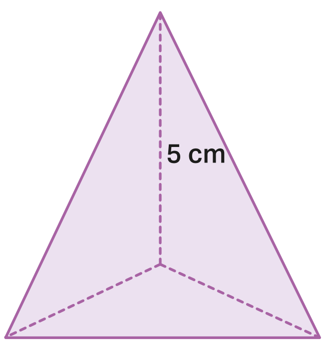
Logo:

$$\begin{aligned} AS_{\text{Pirâmide triangular}} &= A_{base} + 4 \times A_{\text{face lateral}} \\ &= 16 + 4 \times 4\sqrt{10} \\ &= 16 + 16\sqrt{10} \approx 66{,}6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

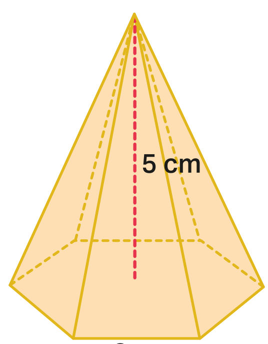
Exercício

14 **Determina a área da superfície das seguintes pirâmides regulares. Apresenta o resultado arredondado às décimas.**

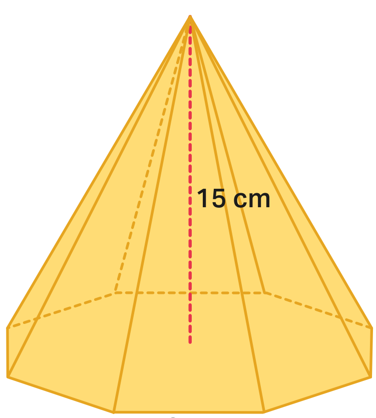
14.1.



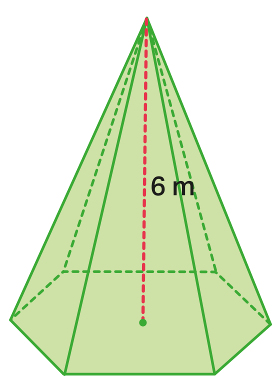
14.2.



14.3.



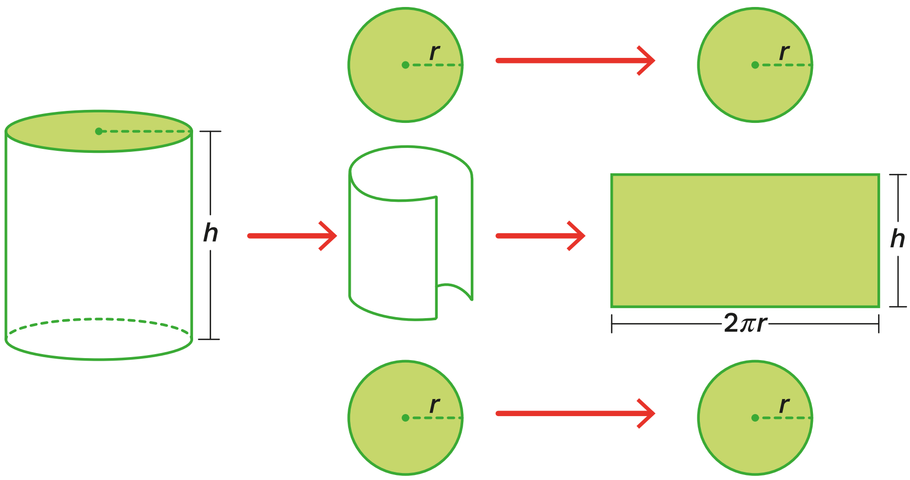
14.4.



Vejamos, agora, o caso dos sólidos não poliedros, como a esfera, o cone e o cilindro. Neste caso, existem superfícies curvas, contudo, continua a ser possível determinar a área da superfície desses sólidos.

Cilindro

O cilindro é composto por duas bases circulares e uma superfície lateral curva. De notar que essa superfície lateral curva corresponde a um retângulo cujo comprimento será igual ao perímetro da circunferência da base e a largura é igual à altura do cilindro.



Assim,

$AS_{\text{cilindro}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{face lateral}}$

$AS_{\text{cilindro}} = 2A_{\text{base}} + P_{\text{base}} \times h$

$AS_{\text{cilindro}} = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times h$

$AS_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

A área da superfície do cilindro é dada por:

$$AS_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

em que $\boldsymbol{r}$ é o raio da base e $\boldsymbol{h}$ é a altura do cilindro.

Exemplo 20

A área da superfície de um cilindro com 10 cm de altura e raio da base de 4 cm é:

$$AS_{\text{cilindro}} = 2\pi 4^2 + 2\pi \times 4 \times 10 = 32\pi + 80\pi = 112\pi \approx 351{,}9 \text{ cm}^2$$

Manual Digital

Vídeos
Planificação de cilindros

Área da superfície de cilindros

Manual Digital

Vídeo
Planificação de cones

Exercício

15 Determina a área da superfície de um cilindro com:

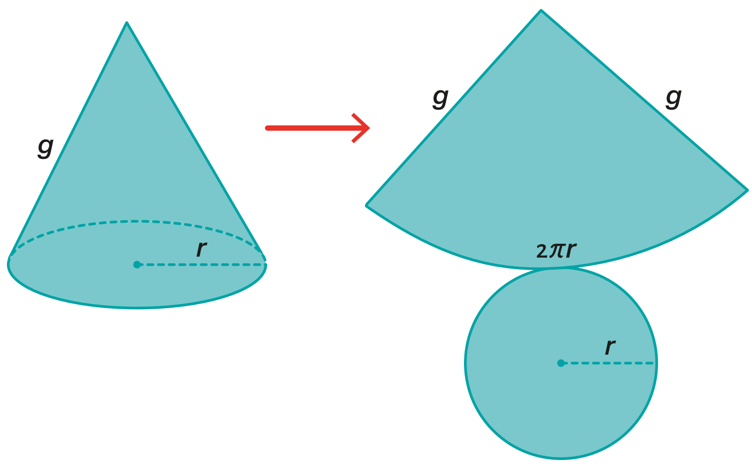
15.1. 3 cm de raio da base e 10 cm de altura.

15.2. 2 cm de diâmetro da base e 4 cm de altura.

15.3. 12 cm de diâmetro da base e 12 cm de altura.

Cone

Um cone é um sólido geométrico com uma base circular e uma superfície lateral curva que converge num vértice. Repara que a planificação de um cone resulta num círculo, correspondente à base, e numa secção circular, correspondente à superfície curva lateral.



Assim, $AS_{\text{cone}} = A_{\text{base}} + A_{\text{face lateral}}$

Em que:

- a área da base é $A_{\text{base}} = \pi r^2$;
- a área da face lateral curva corresponde a um setor circular de raio g (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$, logo

$$A_{\text{face lateral}} = \frac{g \times 2\pi r}{2} = \pi r g \,.$$

Então:

$$AS_{\text{cone}} = \pi r^2 + \pi r g$$

A área da superfície do cone é dada por:

$$AS_{\text{cone}} = \pi r^2 + \pi r g$$

em que r é o raio da base e g é a geratriz do cone.

Exemplo 21

A área da superfície de um cone, cuja geratriz mede 5 cm e o raio da base 3 cm, é:

$$AS_{\text{cone}} = \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 5 = 9\pi + 15\pi = 24\pi \approx 75{,}4\text{ cm}^2$$

Manual Digital

Vídeo
Área da superfície de um cone

Exercícios

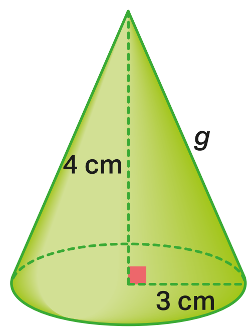
16 **Determina a área da superfície de um cone com:**

16.1. 3 cm de raio e geratriz 10 cm.

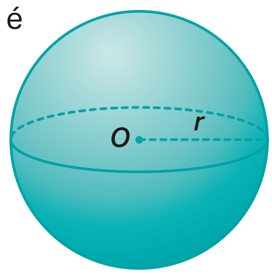
16.2. 2 cm de diâmetro e geratriz 4 cm.

16.3. 12 cm de diâmetro e geratriz 12 cm.

17 **Qual é a área da superfície de um cone com altura de 4 cm e raio da base de 3 cm?**



Esfera



A esfera é um sólido perfeitamente redondo e, como tal, não é possível planificá-la sem distorção.

A planificação de um sólido significa transformá-lo numa superfície plana sem alterar as suas dimensões, o que funciona para sólidos como prismas, cilindros e cones, mas não para a esfera.

Sendo uma superfície curva em todas as direções, sem arestas ou faces planas, quando tentamos achatá-la num plano, ocorre alongamento ou compressão, causando distorção.

Embora não seja possível uma planificação perfeita, existem algumas técnicas aproximadas e que são utilizadas em algumas situações conhecidas, tais como:

1. mapas cartográficos: a projeção de mapas (como Mercator) tenta representar a Terra, mas introduz sempre distorções em áreas ou formas;
2. superfícies geodésicas: dividir a esfera em pequenos polígonos (como um icosaedro) ajuda a aproximar a sua planificação;
3. fatias de laranja: cortar a esfera em várias partes ajuda a desenhá-la no plano, como quando representamos os meridianos nos mapas.

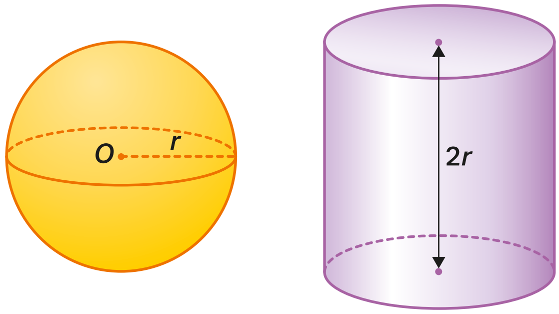
No entanto, mesmo assim, Arquimedes foi capaz de encontrar uma fórmula que nos

Manual Digital

Atividade
Área de uma superfície esférica

permite determinar a área da superfície esférica.

Verificou que a a área da superfície esférica é **igual à área lateral de um cilindro** com o mesmo raio r e altura igual a $2r$, ou seja, a altura da esfera.



$$AS_{esfera} = AL_{cilindro} = (2\pi r) \times (2r) = 4\pi r^2$$

A área da superfície da esfera é dada por:

$$AS_{esfera} = 4\pi r^2$$

em que r é o raio da esfera.

Exemplo 22

A área da superfície de uma esfera de raio 3 cm é:

$$AS_{esfera} = 4\pi 3^2 = AS_{esfera} = 36\pi\text{ cm}^2 \approx 113{,}1\text{ cm}^2$$

Exercício

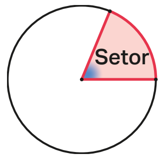
18 **Determina a área da superfície de uma esfera com:**

18.1. 2 cm de raio.

18.2. 5 cm de diâmetro.

18.3. 3 cm de diâmetro.

Síntese

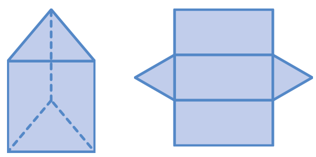
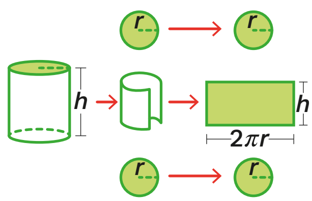
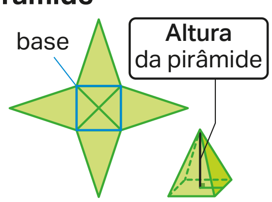
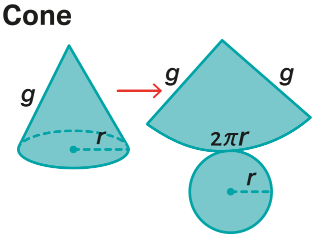
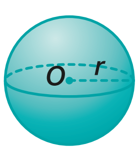


Um **setor circular** corresponde a uma parte do círculo delimitada por dois raios e o arco correspondente.

Perímetro do círculo/circunferência: $P = 2\,\pi\,r$

Área do círculo: $A = \pi\,r^2$

Área de um setor circular	
$A_{\text{setor circular}} = \dfrac{\alpha}{360°}\pi\,r^2$ em que r é o raio e α a amplitude do setor circular.	$A_{\text{setor circular}} = \dfrac{rc}{2}$ em que r é o raio do setor circular e c o comprimento do arco que o define.

Sólido	Volume	Área da superfície
Prisma 	$V_{\text{prisma}} = A_b \times h$ em que A_b é a área da base do prisma e h a altura do prisma.	$AS_{\text{Prisma}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{faces laterais}}$
Cilindro 	$V_{\text{cilindro}} = A_b \times h$ $= \pi\,r^2 \times h$ em que r é o raio da base do cilindro e h a altura do cilindro.	$AS_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ em que r é o raio da base e h é a altura do cilindro.
Pirâmide 	$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \times A_b \times h$ em que A_b é a área da base da pirâmide e h a altura da pirâmide.	$AS_{\text{Pirâmide}} = A_{\text{base}} + A_{\text{faces laterais}}$
Cone 	$V_{\text{cone}} = \dfrac{1}{3} \times A_b \times h$ $= \dfrac{1}{3} \times \pi\,r^2 \times h$ em que r é o raio da base do cilindro e h a altura do cilindro.	$AS_{\text{cone}} = \pi r^2 + \pi rg$ em que r é o raio da base e g é a geratriz do cone.
Esfera 	$V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi\,r^3$ em que r é o raio da esfera.	$AS_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$ em que r é o raio da esfera.

Para aplicar

1 **Calcula:**

1.1. a área de um semicírculo com raio 7 cm.

1.2. área de um quarto de círculo de diâmetro 12 cm.

1.3. a área do setor circular de raio 5 cm e amplitude $120°$.

1.4. área de um setor circular de raio $1{,}5\text{ cm}$ e comprimento do arco 6 cm.

2 **Uma piza de 30 cm de diâmetro é cortada em oito fatias iguais. Qual é a área de cada fatia?**

3 **O responsável pelo viveiro Botanical Garden & Zoo di Terra, em Santa Maria, está a fazer algumas melhorias. Neste momento, está a preparar um canteiro circular com 3 m de diâmetro.**

3.1. Nesse canteiro, ele vai plantar alecrim-bravo e sabe que, em média, e para que o canteiro fique composto, deve plantar 1 pé de alecrim-bravo por metro quadrado. De quantos pés de alecrim-bravo ele irá precisar?

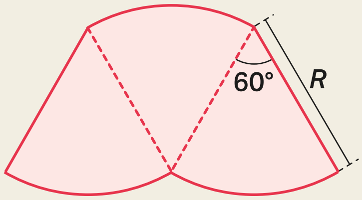
3.2. Uma vez que o alecrim-bravo é uma espécie protegida em Cabo Verde, ele pretende vedar esse canteiro. De quantos metros de rede precisa?

4 **Ao duplicar o raio de um círculo, em quanto aumenta a sua área? Justifica.**

5 **Numa pequena praça existe uma fonte com a forma de um setor circular de raio 10 m e amplitude $90°$. É necessário organizar a limpeza dessa fonte, mas, para isso, a equipa responsável precisa de calcular a área da fonte de forma a conhecer a quantidade dos produtos e o tempo necessário. Qual é a área do setor circular?**

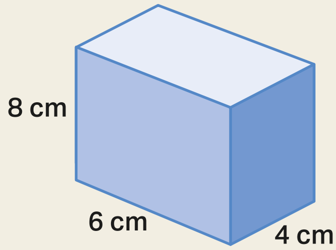
6 **Num hotel pretende-se construir uma piscina com uma forma invulgar.**

A figura representa a vista superior da piscina, que será formada por três setores circulares idênticos, cada um com amplitude $60°$.
O raio R deverá ser um número natural.

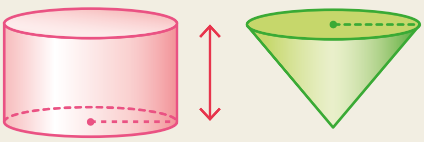


No entanto, o hotel já tem outra piscina de formato retangular, de $50\text{ m} \times 24\text{ m}$, e o proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor do que a área ocupada pela piscina já existente. No máximo, qual poderá ser o comprimento de R?

7 Calcula o volume e a área da superfície de um prisma de base retangular com largura $4\ \text{cm}$, comprimento $6\ \text{cm}$ e altura $8\ \text{cm}$.



8 Se um cone e um cilindro têm a mesma base e a mesma altura, como se relacionam os seus volumes?

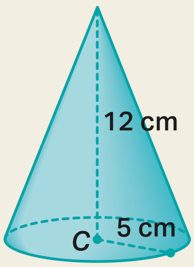


9 Considere um cone com altura de $12\ \text{cm}$ e raio da base de $5\ \text{cm}$. Determina:

9.1. o volume;

9.2. a geratriz;

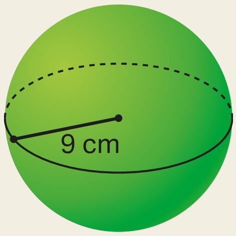
9.3. a área da superfície.



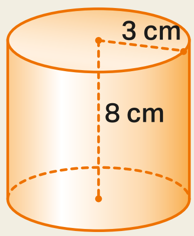
10 Uma esfera tem de raio $9\ \text{cm}$.

10.1. Qual é a área da superfície?

10.2. Qual o volume?

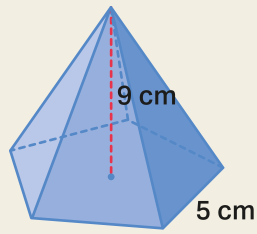


11 Determina a área da superfície e o volume de um cilindro com $8\ \text{cm}$ de altura e raio da base de $3\ \text{cm}$.



Para aplicar

12 Uma pirâmide regular de base pentagonal tem cada lado da base com 5 cm e a altura da pirâmide é de 9 cm. Determina a área total da superfície.

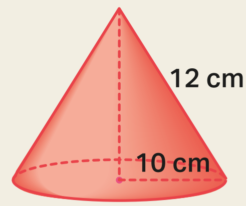


13 A base de um cone tem 10 cm de diâmetro e a sua geratriz mede 12 cm.

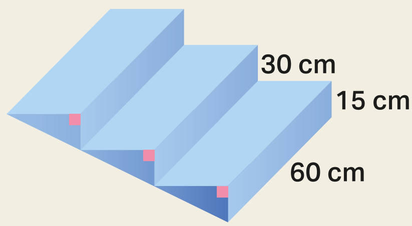
13.1. Determine a área da superfície do cone.

13.2. Determine a altura do cone.

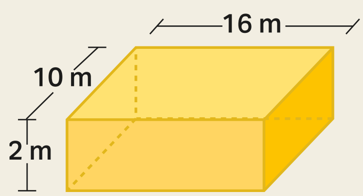
13.3. Determine o volume do cone.



14 Qual é a quantidade de cimento (em centímetros cúbicos) necessário para preencher 10 degraus de uma escada como a indicada na figura?



15 Um pedreiro tem de colocar azulejo numa piscina com as seguintes dimensões:



15.1. Quantos metros quadrados de azulejo serão necessários?

15.2. Sabendo que cada caixa de azulejo traz 10 m^2 de azulejo, quantas caixas de azulejo será necessário comprar?

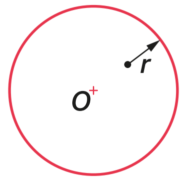
15.3. Depois de concluída a obra, é necessário encher a piscina com água. O proprietário vai contratar um camião-cisterna com capacidade de 30 m^3 para transportar a água e encher a piscina. Quantas viagens o camião-cisterna terá de realizar, no mínimo, sabendo que a piscina terá água até 2 m da sua altura máxima?

1.2. Lugares Geométricos

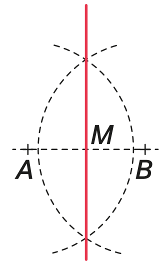
Em Matemática, um **lugar geométrico** consiste num conjunto de pontos, no plano ou no espaço, que satisfazem uma mesma propriedade. Por outras palavras, um lugar geométrico corresponde ao conjunto de pontos que obedecem a uma determinada condição.

Assim, existe uma infinidade de lugares geométricos; são exemplos a circunferência (e o círculo), a mediatriz e a bissetriz.

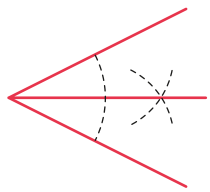
Circunferência



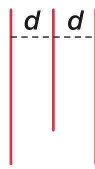
Mediatriz



Bissetriz



Par de retas paralelas



Manual Digital

Vídeo
Lugares geométricos: bissetriz de um ângulo

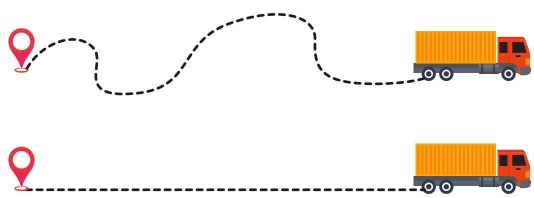
Exemplo 23

- Quando se desenha num papel, mantendo sempre a ponta do lápis a 3 cm de um ponto fixo, o resultado será uma circunferência.

- Um farol ilumina uma área em forma de um setor circular.

- Uma bissetriz pode representar o ponto ideal para se colocar um ouvinte entre duas colunas de som.

- O movimento de um carro durante um determinado percurso define um lugar geométrico, que pode ser uma linha reta ou curva no plano, a qual se designa por trajetória. Imagina que à medida que o carro se desloca, ele vai marcando pontos no espaço (normalmente, num plano, como uma estrada), e esses pontos, juntos, formam o lugar geométrico do seu movimento.

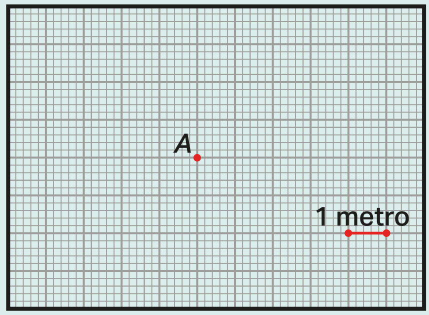


Vejamos, então, as propriedades que caracterizam diferentes lugares geométricos, e como podem ser traçados usando instrumentos de desenho como a régua e o compasso.

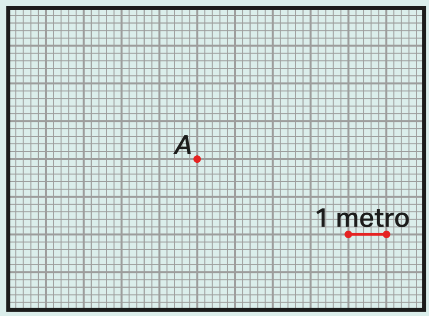
Tarefa

4 O professor João está a trabalhar com os seus alunos diferentes lugares geométricos. Para isso, está a dar-lhes indicações para que percebam melhor os diferentes lugares geométricos. Vamos ajudá-los!

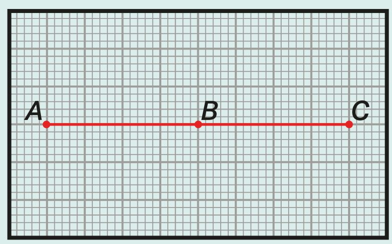
4.1. O professor disse ao Pedrito que se colocasse exatamente a 3 metros de distância dele. Supõe que o professor se coloca na posição A. Onde poderá colocar-se o Pedrito, considerando a escala indicada?



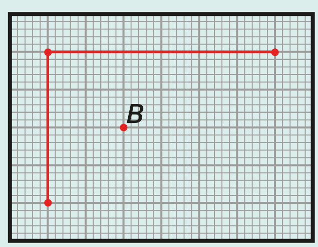
4.2. E se o professor disser ao Pedrito para se colocar a menos de 3 metros de distância dele. Onde é que o Pedrito se teria de colocar?



4.3. De seguida, o professor chamou o Filipe. Disse ao Pedrito para se colocar exatamente à mesma distância do professor e do Filipe. O Pedrito colocou-se exatamente ao meio, entre os dois. Considera que o professor ocupa a posição A, o Filipe a posição C e o Pedrito a posição B? Há outras posições possíveis para obedecer à indicação do professor?



4.4. Por fim, o professor disse ao Pedrito para se colocar numa posição que lhe permitisse estar à mesma distância das duas paredes que formam o canto da sala. Ele colocou-se no ponto B. Mas, quando o Pedrito escolheu a sua posição, o professor disse-lhe: "Está bem! Mas quero que te coloques mais longe das paredes". Se tu fosses o Pedrito, onde te colocarias?



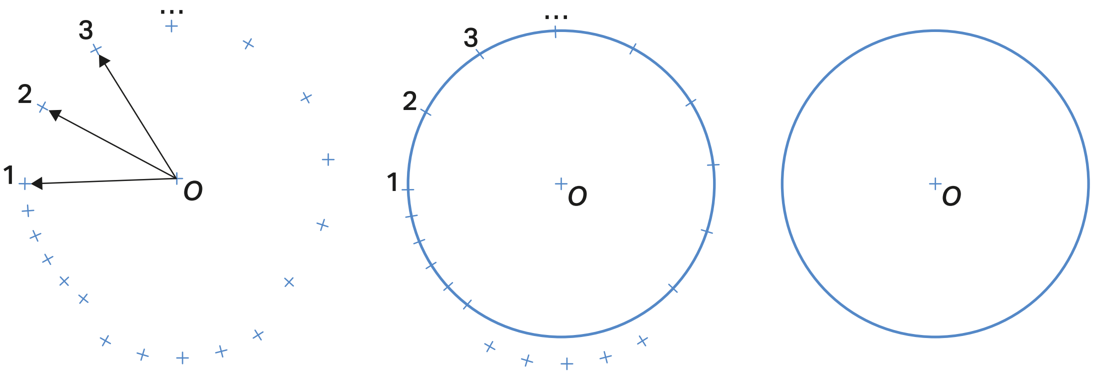
Manual Digital

Vídeo
Circunferência

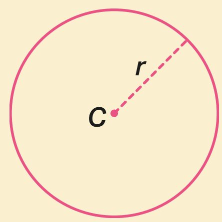
1.2.1. Circunferência e círculo

Todos os pontos que se encontram à mesma distância de um outro ponto fixo, ao qual designamos por centro, formam uma circunferência.

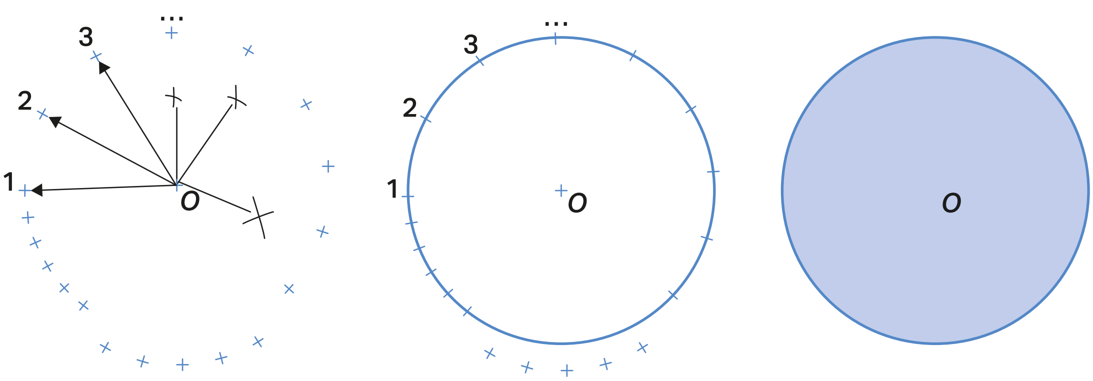
Quando o professor pediu ao Pedrito para se colocar a 3 metros de distância dele, o Pedrito tinha de cumprir a indicação da distância, mas podia colocar-se em qualquer posição "à volta" do professor.



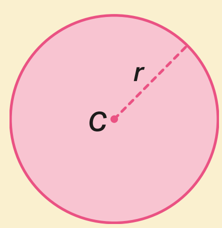
Uma **circunferência** é o conjunto de pontos do plano equidistantes (à mesma distância) de um ponto fixo, designado por centro.



Contudo, se essa distância puder ser inferior, o Pedrito já se pode aproximar mais do professor, ficando no interior do círculo de raio de 3 cm.



Um **círculo** é o conjunto de pontos do plano cuja distância a um ponto fixo (centro) é menor ou igual ao comprimento do raio.



Vê o vídeo.

Repara que uma circunferência corresponde apenas ao contorno, enquanto um círculo inclui o interior.

Manual Digital

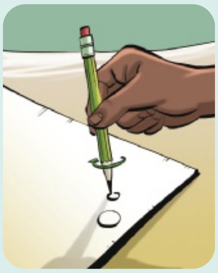
Vídeos
Lugares geométricos: circunferência e círculo

Tarefa

5 Traçar uma circunferência com compasso

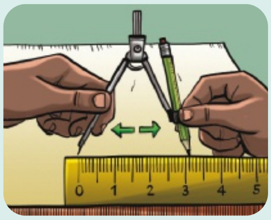
Instruções:

1. Marca um ponto O no papel (centro).

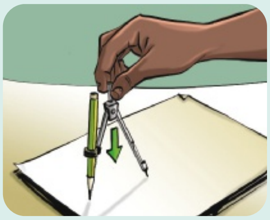


2. Escolhe um raio (ex.: $3\ \text{cm}$).

3. Abre o compasso com o raio definido.



4. Coloca a ponta seca do compasso no ponto O, mantendo a abertura definida.



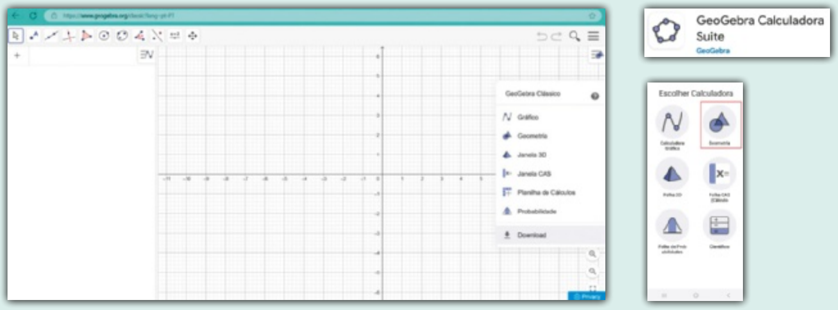
5. Com a ponta seca fixa no ponto O, traça uma circunferência.

Nota: Para obter um círculo, pinta o interior da circunferência.

Tarefa

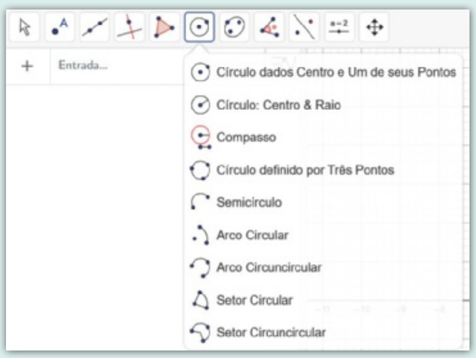
6 **Construção de uma circunferência no GeoGebra**

1. Abre o GeoGebra no *browser* do teu computador ou na aplicação do teu telemóvel, na funcionalidade Geometria.



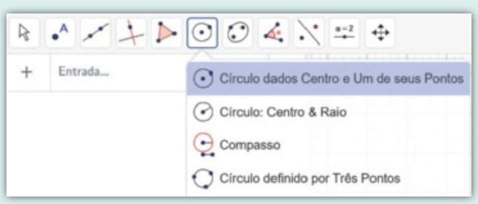
Nota: As orientações e imagens ilustrativas que se apresentam correspondem à utilização do *software* num *browser* do computador. Na aplicação do telemóvel funciona de modo análogo.

2. Existem diferentes opções para a construção de uma circunferência no GeoGebra. Vejamos algumas delas.

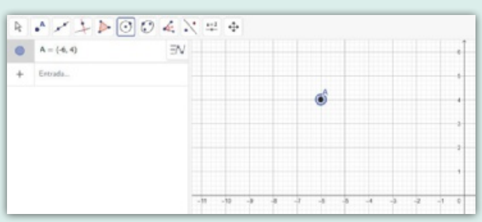


a) **Círculo dados o centro e um dos seus pontos**

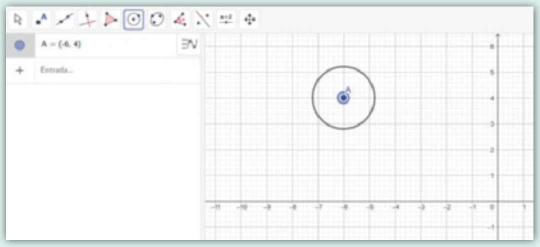
- Seleciona a opção "Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos"



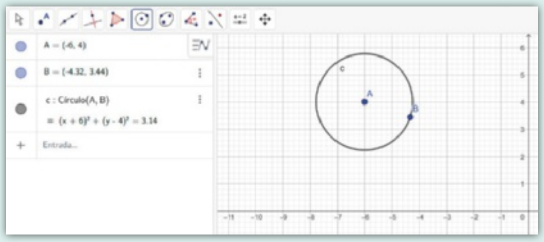
- Clica na tela para definir o centro.



• Arrasta o cursor até encontrares o ponto que pretendes para definir a circunferência.

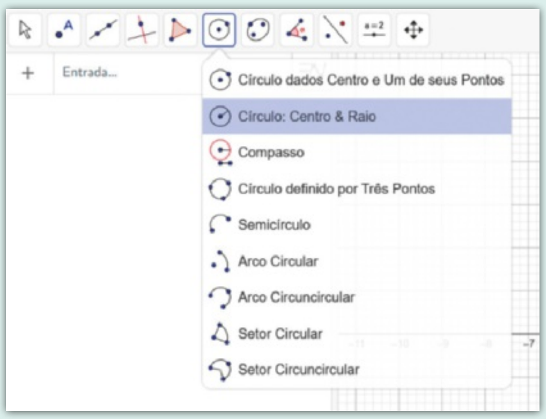


• Clica novamente para definir o ponto e a circunferência ficará traçada.

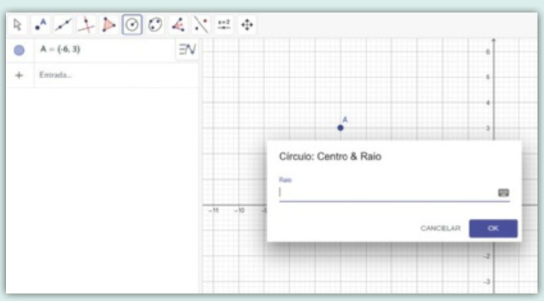


b) Círculo dados o centro e o raio

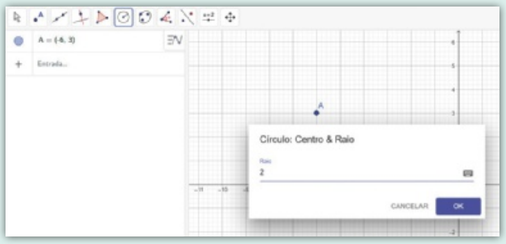
• Seleciona a opção "Círculo: Centro & Raio"



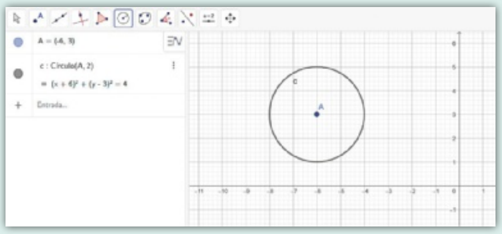
• Clica na tela para definir o centro. Logo de seguida, surgirá uma caixa de texto para indicares o raio.



- Na caixa de texto, indica a medida que pretendes para o raio, por exemplo, 2 unidades, e, de seguida, clica em OK.



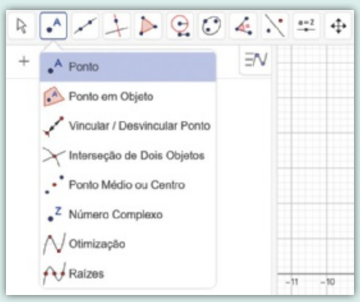
- A circunferência de centro *A* e raio 2 ficará definida.

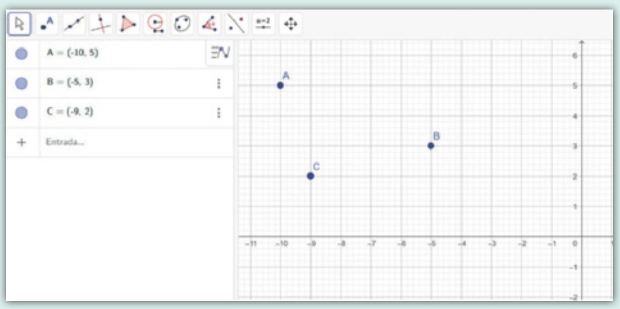


c) Usando o compasso: Para utilizar esta opção temos, primeiramente, de definir o raio da circunferência.

- Marca três pontos na tela.

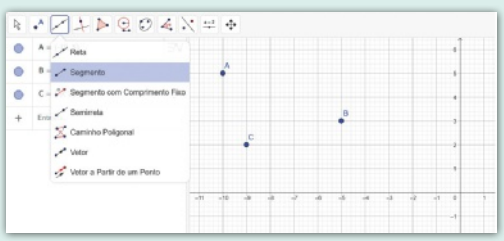
  Utilizando a opção "Ponto", de seguida, clica na tela nas posições onde pretendes definir os pontos.

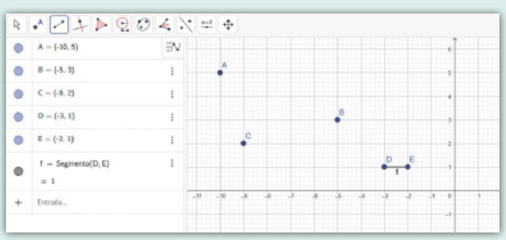




- Traça um segmento de reta.

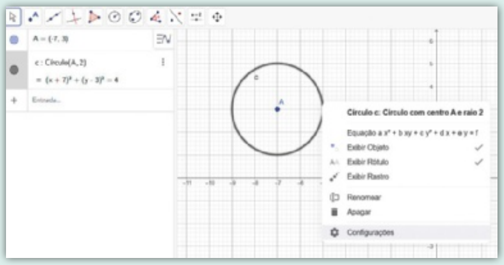
  Utilizando a opção "Segmento", clica na tela por forma a definir uma extremidade do segmento e, de seguida, clica novamente por forma a definires a outra extremidade do segmento de reta.



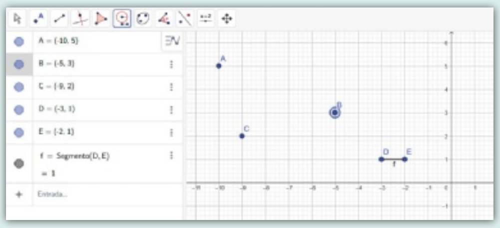


Vamos traçar a circunferência definindo o raio através de dois pontos.

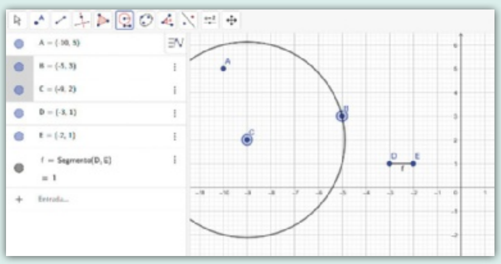
- Seleciona a opção “Compasso”.



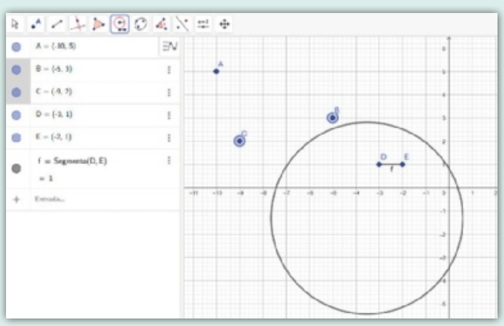
- Clica nos dois pontos que te permitirão definires o raio da circunferência, por exemplo, B e C.



- Quando selecionares o segundo ponto, o *software* traçará imediatamente a circunferência que tem raio $\overline{BC}$.

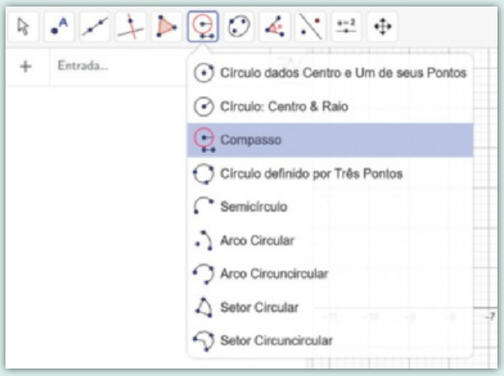


- Repara que esta circunferência é “móvel”, apenas o raio foi definido. Para definir o seu centro, tens de clicar num ponto previamente marcado para tal.

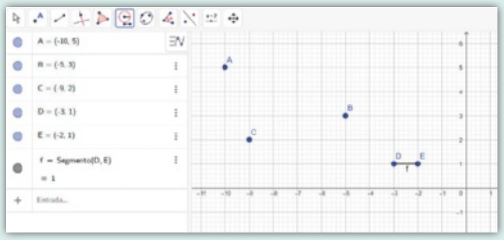


Também podes traçar a circunferência definindo o raio através de um determinado segmento de reta.

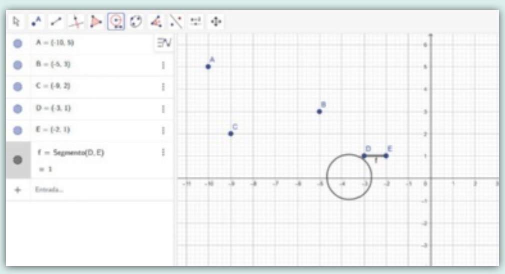
- Seleciona a opção “Compasso”.



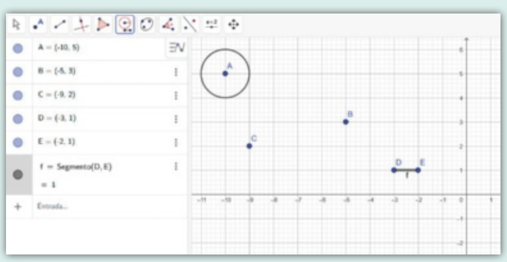
- Seleciona o segmento de reta que definirá o raio da circunferência.



- Assim que selecionares o segmento de reta, surgirá uma circunferência com esse raio.

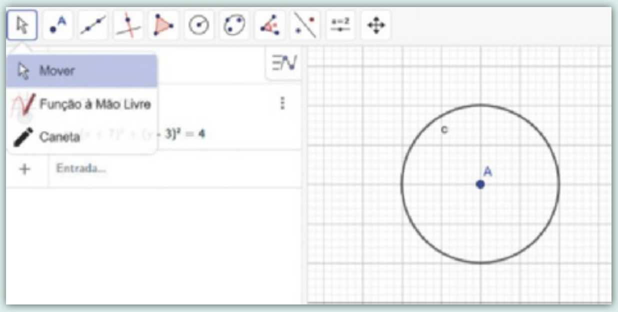


- Tal como na situação anterior, essa circunferência é “móvel”, pois ainda não tem centro definido. Clica no ponto que pretendes para centro da circunferência, por exemplo, A, e a circunferência ficará completamente definida.

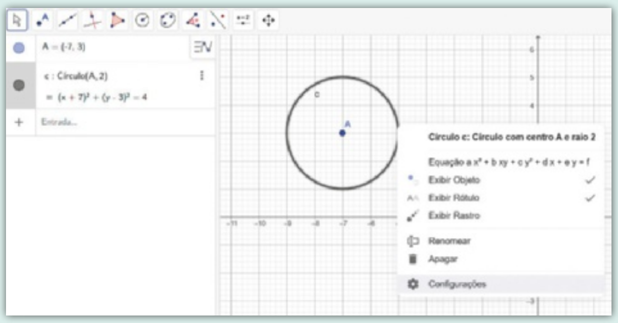


Para definires um círculo, basta “preencher” o interior da circunferência seguindo os seguintes passos:

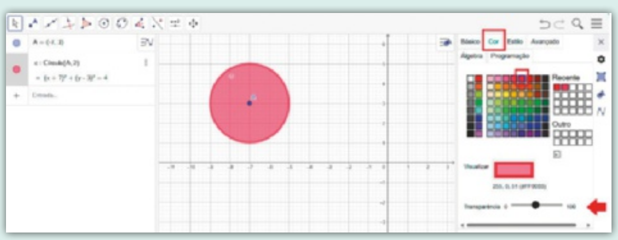
- Altera a funcionalidade do cursor para “Mover”.



- Clica sobre a circunferência. Surgirão várias opções, escolhe “Configurações”.



- No lado direito surgirão várias opções. Seleciona o separador “Cor”, de seguida escolhe a cor pretendida para o interior do círculo e aumenta a transparência da cor.

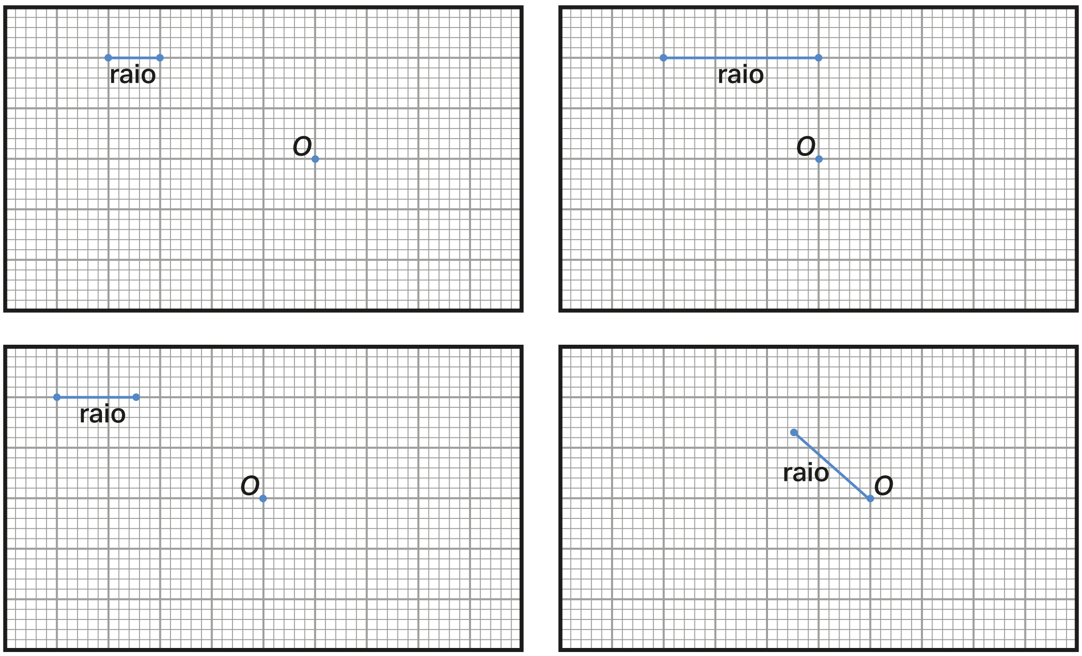


Exercícios

19 Utilizando compasso e lápis, desenha uma circunferência de centro O e raio $1{,}5\ \text{cm}$.

20 Utilizando compasso e lápis, desenha um círculo de centro O e raio $2{,}5\ \text{cm}$.

21 Considerando o centro e o raio indicados nas figuras, desenha as respetivas circunferências.



22 Explora o *software* GeoGebra traçando as circunferências e o círculo indicados nos exercícios anteriores.

23 Um cão está preso a uma árvore com uma corda de 5 metros de comprimento. Ele pode andar livremente até onde a corda permitir, mas não consegue ultrapassar esse limite.

Qual é o lugar geométrico dos pontos que o cão pode alcançar?

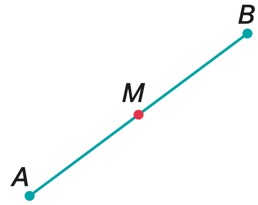
Manual Digital

GeoGebra
Lugares geométricos: mediatriz de um segmento de reta

Atividade
Mediatriz - Para começar

1.2.2. Mediatriz

O ponto médio de um segmento de reta encontra-se exatamente à mesma distância dos extremos desse segmento de reta.



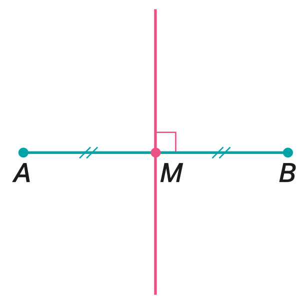
Mas existem mais pontos nessas condições: são os pontos que formam a mediatriz do segmento de reta.

Quando o professor pediu ao Pedrito para se colocar à mesma distância dele e do Filipe, o Pedrito fez muito bem, colocou-se no ponto médio do segmento de reta definido pelas posições do professor e do Filipe. Mas havia outras possibilidades.

Vê o vídeo.

A **mediatriz** de um segmento de reta é o conjunto de pontos do plano equidistantes aos extremos desse segmento de reta.

A mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular a esse segmento que passa no seu ponto médio.



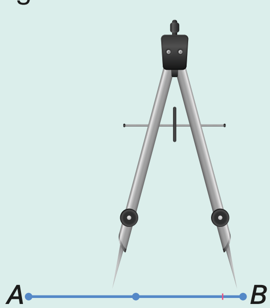
Tarefa

7 Traçar uma mediatriz com régua e compasso

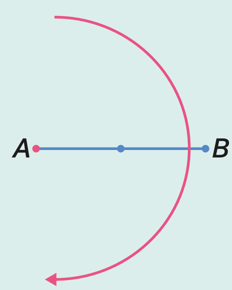
Instruções:

1. Traça um segmento de reta AB .

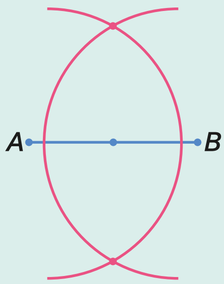
2. Abre o compasso de forma que a sua abertura seja um pouco maior do que metade da medida do segmento.



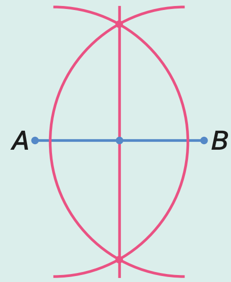
3. Mantendo sempre a abertura, coloca a ponta seca do compasso no ponto *A* e traça um arco de circunferência.



4. Com a mesma abertura no compasso, faz o mesmo na extremidade oposta, no ponto B.



5. Os arcos traçados cruzam-se em dois pontos, um acima do segmento de reta e outro abaixo. Com a régua, una esses dois pontos e obtém a mediatriz do segmento AB.



Manual Digital

Vídeo
Mediatriz de um segmento de reta

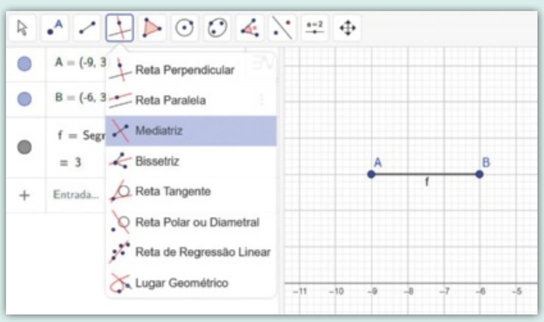
Tarefa

8 **Construção da mediatriz de um segmento de reta no GeoGebra**

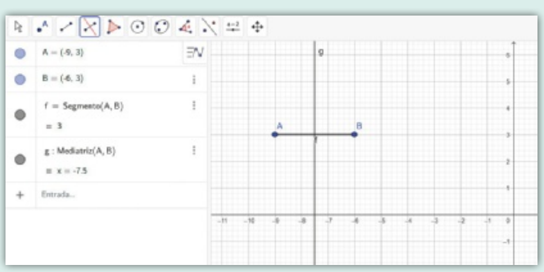
1. Abra o GeoGebra.

2. Defina o segmento de reta AB.

3. Seleciona a opção "Mediatriz".



4. Clica num extremo do segmento de reta, por exemplo, o ponto A, e de seguida no outro, no caso, no ponto B. A mediatriz do segmento de reta fica automaticamente definida.



Nota: Altera a medida e a posição do segmento de reta e verifica o que acontece.

Manual Digital

Vídeo
Construção da mediatriz e do ponto médio de um segmento de reta

Tarefa

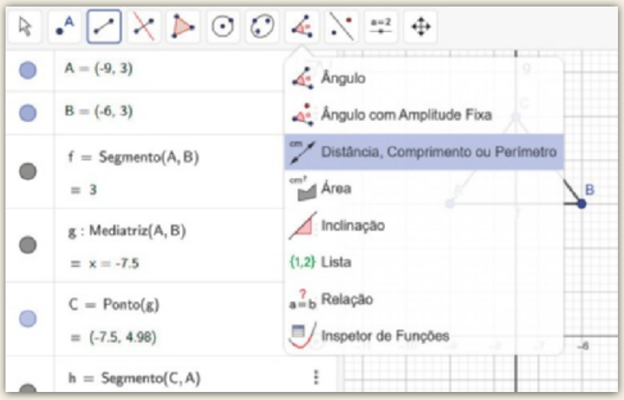
9

Usando material de desenho: régua e compasso

1. Traça um segmento de reta AB com 8 cm.
2. Constrói a sua mediatriz.
3. Escolhe um ponto *P* na mediatriz e mede a distância do segmento de reta AP e do segmento de reta BP.
4. O que verificas?
5. Compara o seu resultado com o dos teus colegas, sendo que escolheram pontos diferentes da mediatriz.

Usando o GeoGebra

1. Traça um segmento de reta AB.
2. Traça a mediatriz do segmento de reta.
3. Define um ponto *C* na mediatriz da reta, escolhendo a opção "Ponto" e clicando sobre a mediatriz.
4. Escolhendo a opção "Segmento de reta", define os segmentos de reta AC e BC.
5. Escolhendo a opção de medição de "Distância, Comprimento ou Perímetro", seleciona o segmento AC para medir o seu comprimento.

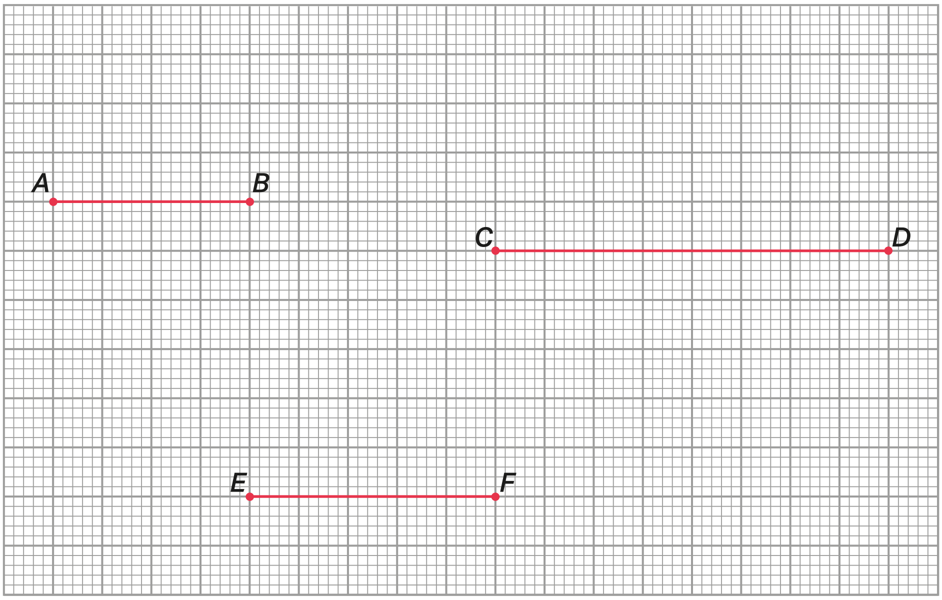


6. De seguida, procede da mesma maneira para medir o comprimento do segmento BC.
   A medida do comprimento de cada um desses segmentos de reta surgirá na tela.
7. Alterando o modo do cursor para "Mover", movimenta o ponto *C* ao longo da mediatriz. O que verificas?

Como sugere a definição, qualquer ponto da mediatriz encontra-se à mesma distância dos extremos do segmento de reta.

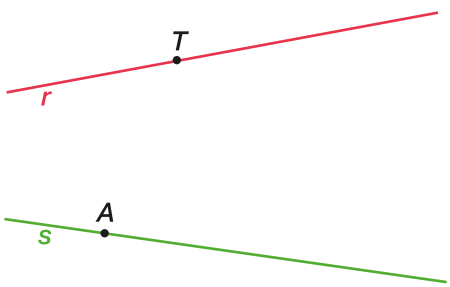
Exercícios

24 Traça a mediatriz dos seguintes segmentos de reta.



25 Explora o *software* GeoGebra traçando mediatrizes de diferentes segmentos de reta.

26 Considera as retas r e s, não paralelas, e os pontos T e A. Marca na reta s o ponto S, sabendo que T pertence à mediatriz do segmento de reta AS.



1.2.3. Bissetriz de um ângulo convexo

Um ângulo é a região do plano delimitada por duas semirretas com a mesma origem. Essa origem comum chama-se vértice do ângulo e as duas semirretas com origem no vértice são os lados do ângulo.

Quando o professor pediu ao Pedrito para se colocar numa posição para estar à mesma distância das duas paredes, o Pedrito tinha várias opções, pois existe uma infinidade de pontos nessas condições.

O conjunto de pontos que se encontram à mesma distância dos dois lados de um ângulo correspondem à bissetriz do ângulo.

Manual Digital

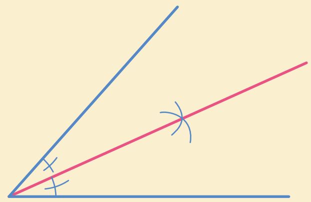
Atividade
Bissetriz - Para começar

Vídeo
Construção da bissetriz de um ângulo

Vê o vídeo *Construção da bissetriz de um ângulo*.

Assim, a bissetriz é a semirreta com origem no vértice de um ângulo e que o divide ao meio, formando dois ângulos congruentes (de igual amplitude) e, conforme se verificou no vídeo, cada ponto da bissetriz está equidistante dos lados do ângulo, ou seja, à mesma distância de ambos.

A **bissetriz de um ângulo** é o conjunto de pontos do ângulo que estão à mesma distância dos lados desse ângulo.

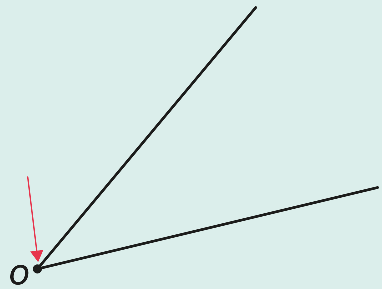


Tarefa

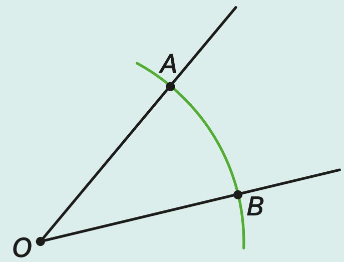
10 Traçar uma bissetriz com régua e compasso

Instruções:

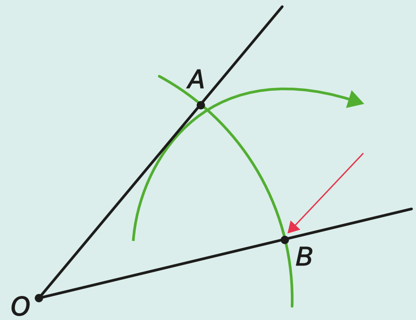
1. Traça um ângulo de vértice O.
2. Abre um pouco o compasso e coloca a ponta seca no vértice do ângulo, o ponto O.



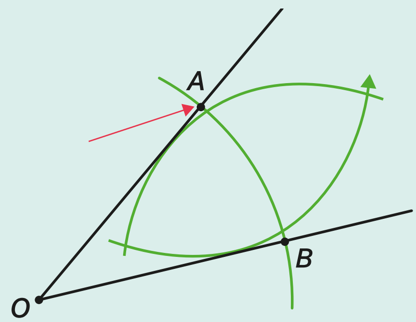
3. Traça um arco de circunferência sobre os lados do ângulo, definindo assim os pontos A e B, interseção do arco com cada uma das semirretas.



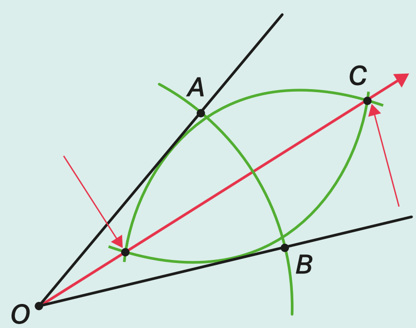
4. Com a ponta seca no ponto B traça um arco de circunferência com o compasso virado para dentro do ângulo.



5. Mantendo a abertura do compasso, procede da mesma forma com a ponta seca no ponto A.



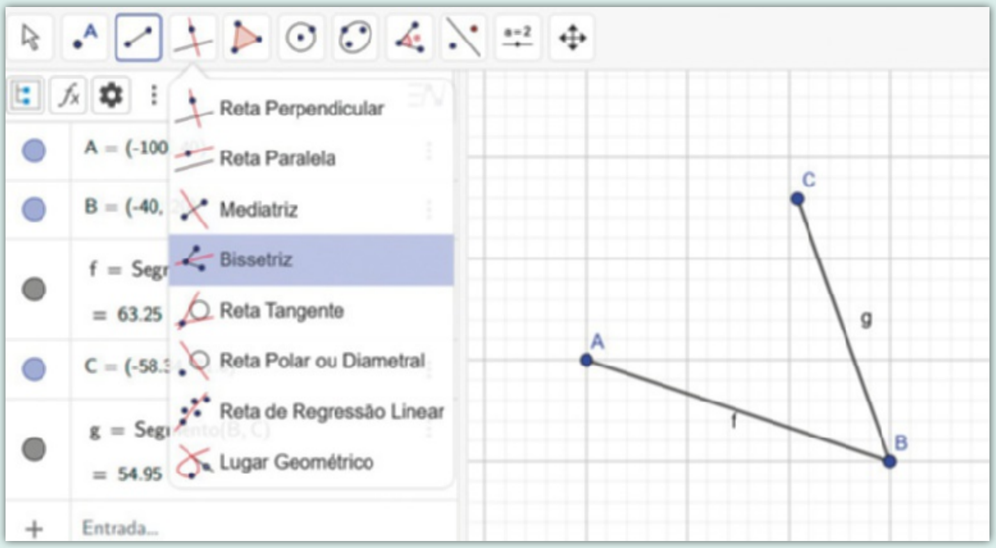
6. Repara que os arcos que traçaste se intersetam em dois pontos. Chamemos C a um deles. Traça uma semirreta com origem em O e que passe em C. A semirreta OC é a bissetriz.



Tarefa

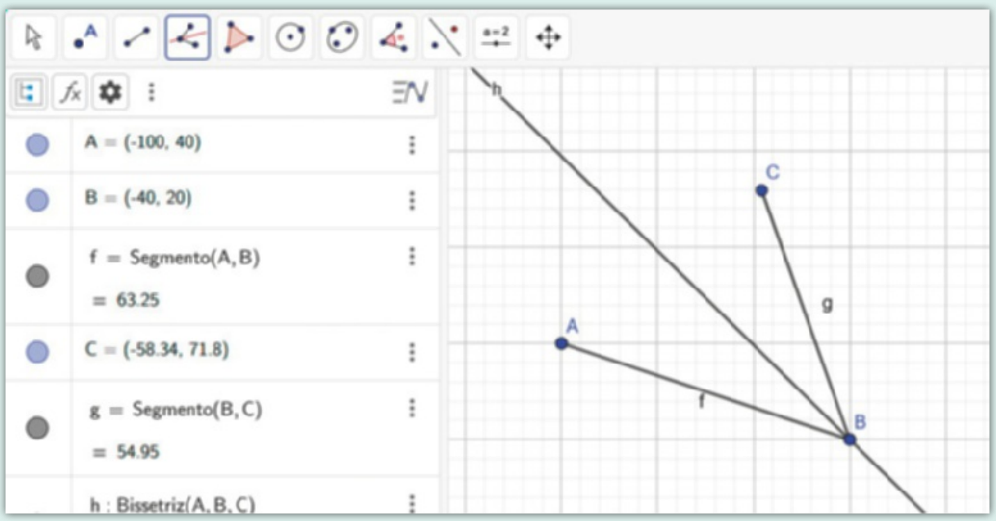
11 **Construção da bissetriz de um ângulo no GeoGebra**

1. Abre o GeoGebra.
2. Define os segmentos de reta AB e BC, para definirem o ângulo ABC.
3. Seleciona a opção "Bissetriz".



4. Clica sequencialmente nos três pontos que definem o ângulo, no ponto A, de seguida no ponto B, que corresponde ao vértice do ângulo, e por fim no ponto C.

   A bissetriz do ângulo fica automaticamente definida.



Nota: Movimenta os diferentes pontos que definem o ângulo e verifica o que acontece com a bissetriz.

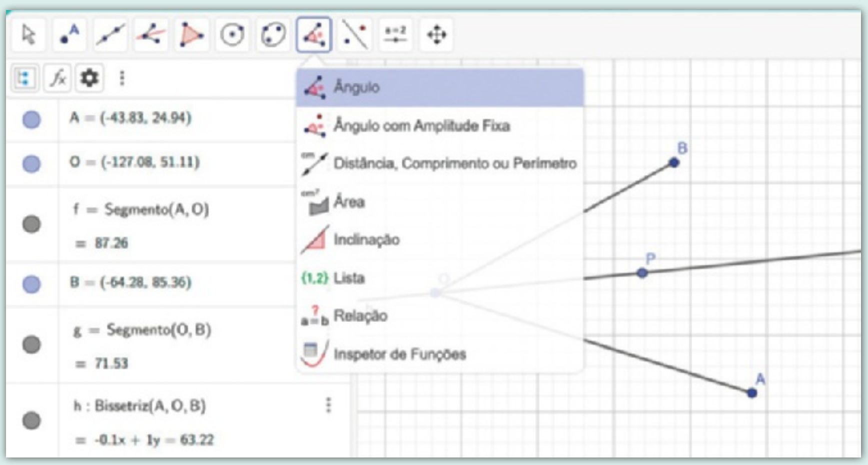
Tarefa

12 **Usando material de desenho: régua e compasso**

1. Traça um ângulo AOB com a amplitude que entender.
2. Constrói a sua bissetriz.
3. Marca um ponto P na bissetriz.
4. Mede a amplitude dos ângulos AOP e POB.
5. O que verificas?
6. Compara o teu resultado com o dos teus colegas, se escolheram pontos diferentes da mediatriz.

Usando o GeoGebra

1. Traça um ângulo AOB.
2. Traça a bissetriz do ângulo.
3. Define um ponto P na bissetriz do ângulo escolhendo a opção "ponto" e clicando sobre a bissetriz.
4. Escolhendo a opção de medição de "Ângulo", seleciona os pontos que definem o ângulo AOP para medir a sua amplitude.



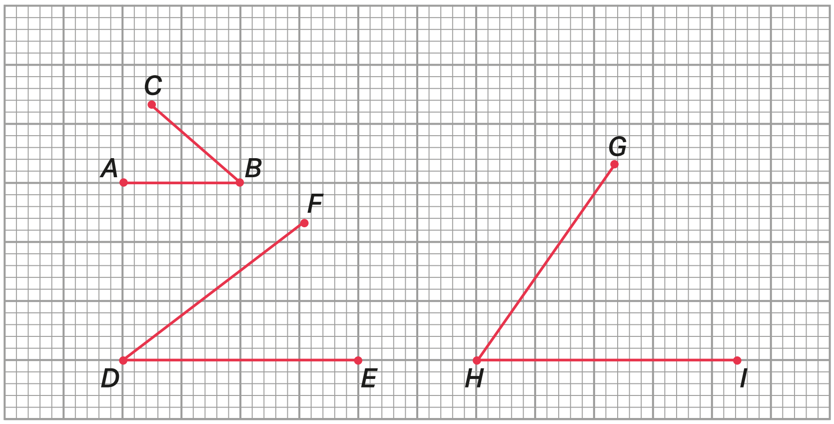
5. De seguida, procede da mesma forma para medir a amplitude do ângulo POB.

   As amplitudes de cada um desses ângulos surgirá na tela.
6. Alterando o modo do cursor para "Mover", movimenta o ponto C ao longo da bissetriz. O que verificas?

Como sugere a definição, a bissetriz divide o ângulo em dois ângulos com a mesma amplitude.

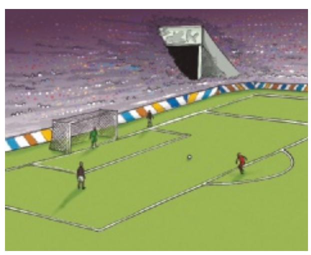
Exercícios

27 Traça a bissetriz dos seguintes ângulos:



28 Num jogo de futebol, no momento em que um dos adversários remata à baliza, o guarda-redes lembrou-se das suas aulas de matemática para ver se estava bem posicionado na baliza para ter mais possibilidades de defender o remate.

28.1. Considerando as imagens que se seguem, qual é a posição mais favorável para o guarda-redes defender o remate?



28.2. Em matemática, qual é o nome dessa posição?

1.2.4. Reta paralela

Duas retas complanares, ou seja, contidas num mesmo plano, dizem-se paralelas se nunca se cruzarem por mais que se prolonguem nos dois sentidos. Ou seja, não existe nenhum ponto de interseção entre elas. As duas retas mantêm sempre a distância entre si. Desta forma, podemos definir um lugar geométrico.

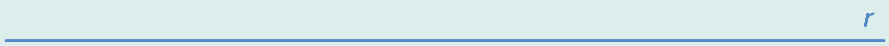
Uma **reta paralela** a outra reta dada corresponde ao lugar geométrico constituído pelo conjunto de pontos que se encontram a uma distância fixa dessa reta.

Tarefa

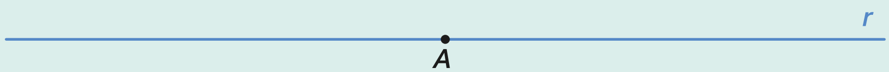
13 **Traçar uma reta paralela a outra dada, a uma distância determinada**

Instruções:

1. Considera uma reta r.

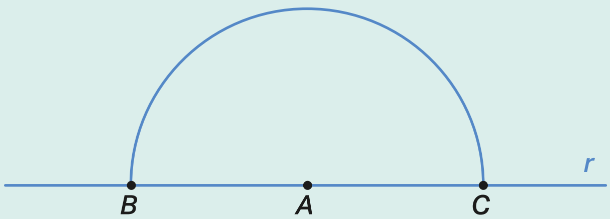


2. Marca um ponto A na reta r.

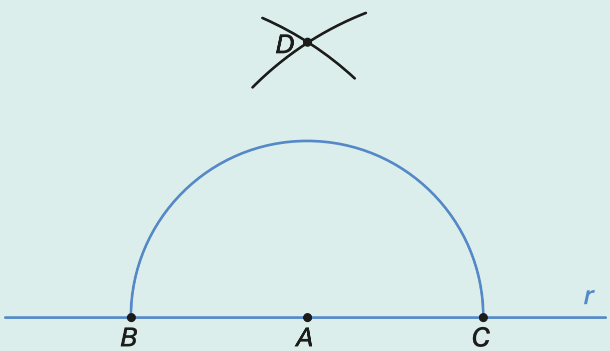


3. Traça uma reta perpendicular a r passando por A.

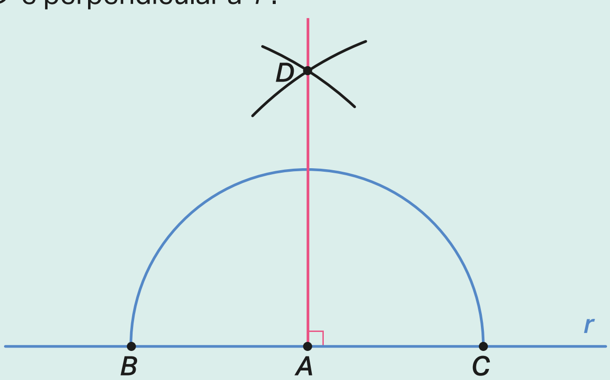
a) Traça um arco de centro em A e marca as interseções B e C do arco com a reta r.



b) Com centro em B traça um arco de raio superior a metade do comprimento de BC. Procede da mesma forma, com o mesmo raio, tendo o ponto C como centro. Identifica como D o ponto de interseção dos dois arcos.

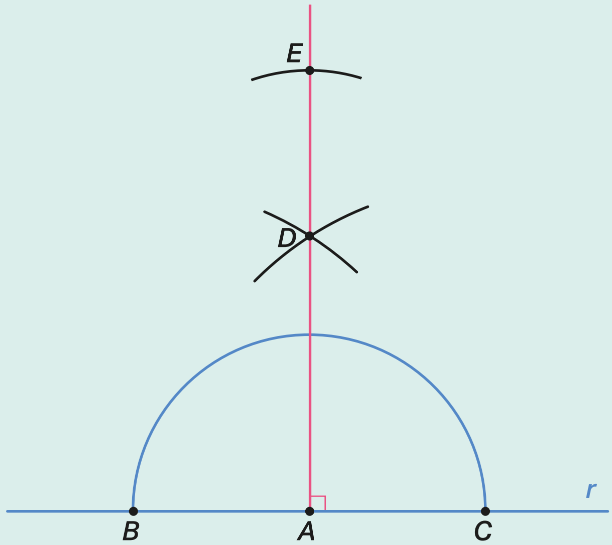


c) A reta AD é perpendicular a r.



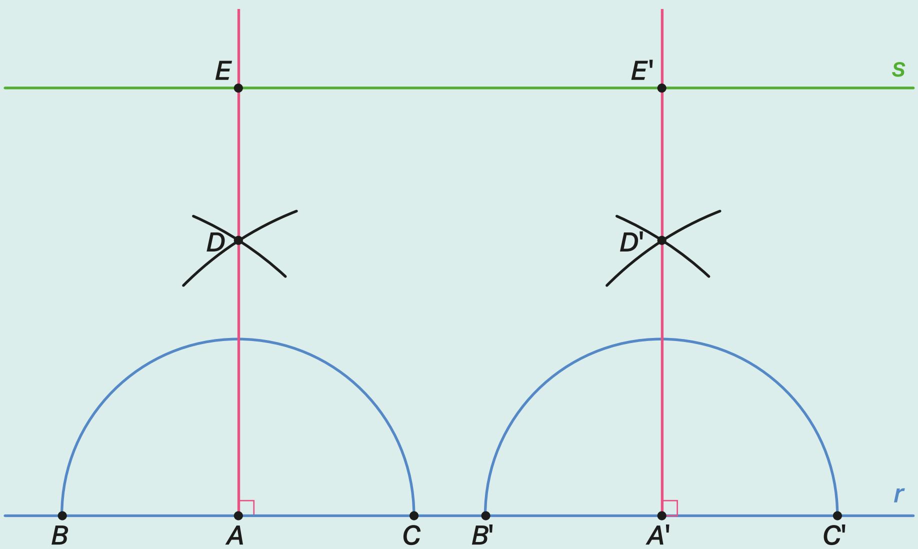
4. Define a distância entre as retas.

5. Com centro em A e com o compasso aberto de forma a respeitar a distância definida no ponto anterior, traça um arco que corte AD e no ponto de interseção marca o ponto E.



6. Marca um ponto A' em r e procede da mesma forma que em A.

7. A reta s que passa em E e em E' é uma reta paralela à reta r à distância definida no ponto 4.



Exercícios

29 **Considera uma reta r num plano.**

29.1. Traça o lugar geométrico definido pelo conjunto de todos os pontos que estão a uma distância fixa de 3 cm da reta r em ambos os lados da reta.

29.2. Que figura geométrica representa esse conjunto de pontos? Justifica a tua resposta, com base na definição de lugar geométrico.

30 **Num terreno, vai ser construída uma estrada reta. Por razões de segurança, uma vedação será colocada a 2 metros de distância da estrada, paralela a ela, dos dois lados.**

Qual é o lugar geométrico definido pela vedação?

Manual Digital

Vídeo
Superfície esférica e esfera

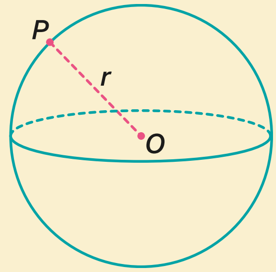
1.2.5. Esfera

Uma esfera é um sólido geométrico constituído por todos os pontos do espaço que se encontram à mesma distância, ou inferior, de um outro ponto fixo do espaço ao qual designamos por centro.

O conjunto de pontos que se encontram à mesma distância do centro define uma superfície esférica.

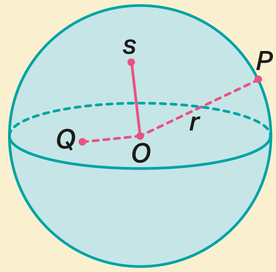
A **superfície esférica** é o lugar geométrico dos pontos do espaço a uma distância fixa de um ponto central.

O ponto central designa-se por centro e a distância entre o centro e qualquer ponto da superfície esférica designa-se por raio.



De forma análoga, definimos uma esfera.

A **esfera** é constituída pela superfície esférica e todos os pontos que se encontram no interior dessa superfície esférica, ou seja, o conjunto de pontos que se encontram a uma distância ao centro igual ou inferior ao raio.



Vê vídeo *Superfície esférica e esfera*.

Exercícios

31 Considera um ponto P no espaço. Define-se um conjunto S constituído por todos os pontos que estão a 10 cm de distância de P. Como se designa geometricamente o conjunto S? Justifica a tua resposta referindo o conceito de lugar geométrico.

32 Um sistema de localização por rádio identifica a posição de um avião com base na sua distância a uma torre de controlo. Sabendo que o avião está exatamente a 150 km da torre, qual é o lugar geométrico de todos os pontos possíveis onde o avião pode estar?

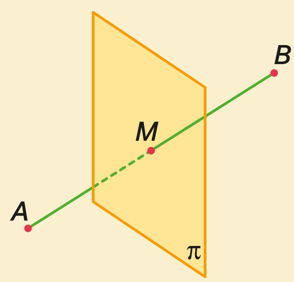
33 Um satélite de vigilância capta sinais de uma explosão e regista que a onda de choque se propaga a partir do ponto da explosão atingindo sensores em todas as direções ao mesmo tempo.

Ao fim de 10 segundos, a frente da onda de choque atingiu os sensores a 3 km de distância da explosão. Qual é o lugar geométrico dos pontos atingidos exatamente nesse momento?

1.2.6. Plano Mediador

No espaço, um plano perpendicular a um segmento de reta, dividindo-o em duas partes iguais, designa-se por plano mediador. Todos os pontos do plano mediador encontram-se à mesma distância das duas extremidades do segmento de reta.

No espaço, o **plano mediador** de um segmento de reta corresponde ao lugar geométrico constituído por todos os pontos que se encontram à mesma distância das extremidades desse segmento de reta.



Exercícios

34 Sejam A e B dois pontos no espaço. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B? Justifique com base em propriedades geométricas.

35 Duas antenas de telecomunicações, A e B, estão instaladas em locais diferentes. Um técnico quer instalar um repetidor. Para garantir um sinal equilibrado, o repetidor tem de localizar-se à mesma distância das antenas A e B. Qual é o lugar geométrico onde o repetidor pode ser instalado, ficando sempre à mesma distância de A e de B?

1.2.7. Resolução de exercícios

As definições matemáticas que aprendeste sobre lugares geométricos permitem-te resolver situações reais, como veremos a seguir.

Exemplo 24

A figura representa o mapa da ilha de Santiago, onde vai ser instalada uma nova antena de comunicações em São Jorge dos Órgãos.

Sabe-se que a antena permite transmitir sinal, sem qualquer constrangimento, até uma distância de 30 km.

A localização da antena nesta localidade permitirá fornecer sinal de comunicação a toda a ilha?

Resolução

Considerando que a antena ficará localizada em São Jorge dos Órgãos e que emite até uma distância de 30 km, em todas as direções, o lugar geométrico que nos permitirá descobrir todo o seu alcance é o círculo. No caso, um círculo de raio 30 km.

É possível resolver a questão recorrendo a instrumentos de desenho ou ao GeoGebra. Em ambos os casos é necessário ter em consideração a escala do mapa.

- Instrumentos de desenho

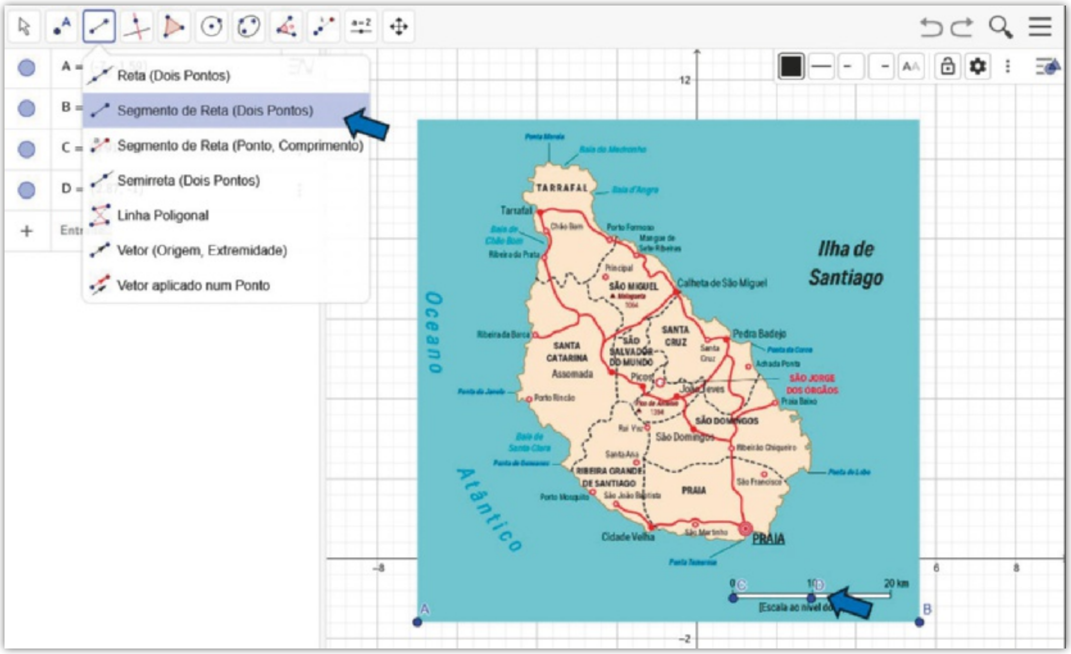
Com o compasso com uma abertura correspondente a 30 km (tendo em consideração a escala do mapa) e centro em São Jorge dos Órgãos, traça uma circunferência e verifica se toda a ilha fica no interior dessa circunferência.

- GeoGebra

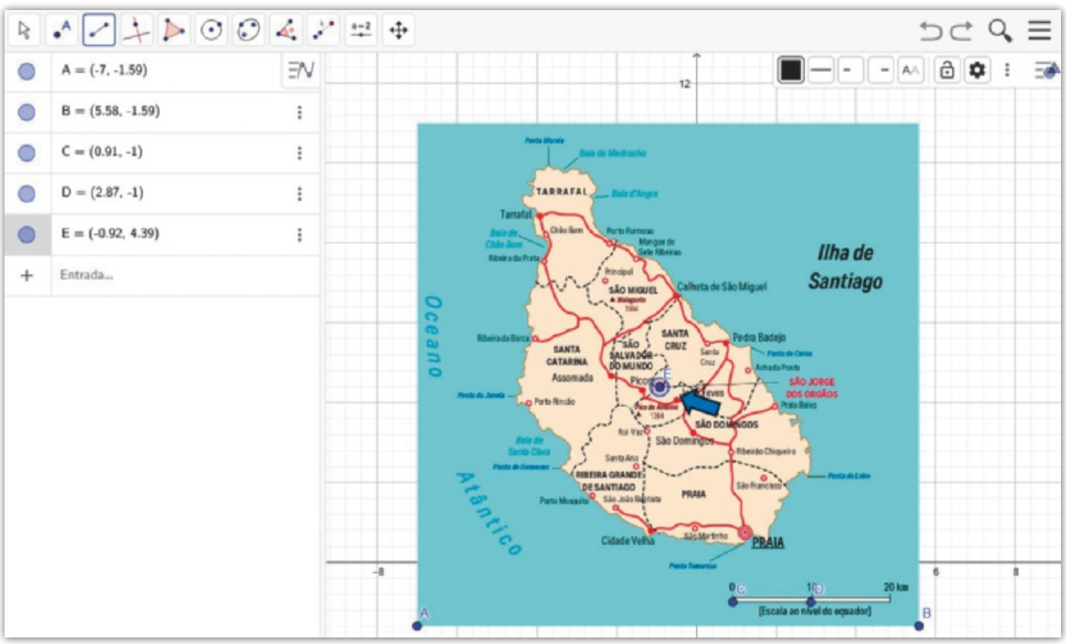
Tira uma fotografia ao mapa e guarde-a no seu dispositivo.

Abre o GeoGebra, copia a fotografia e cola-a no GeoGebra.

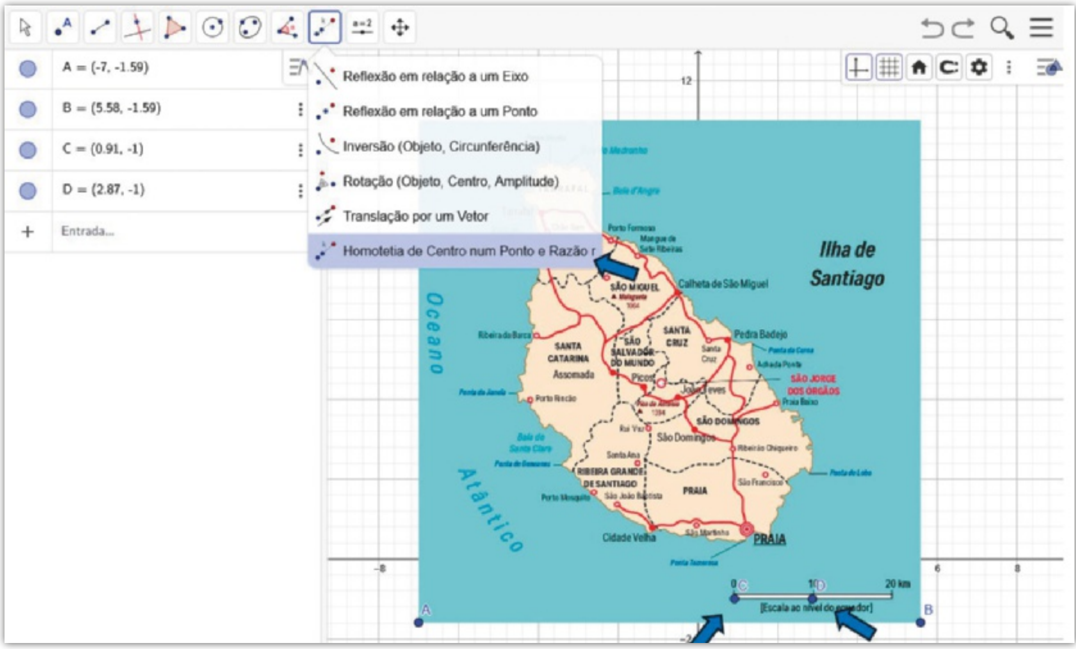
Utilizando a opção “Segmento”, define um segmento de reta sobre a escala presente na imagem.



Marca o ponto E, que será o centro do círculo, sobre São Jorge dos Órgãos.

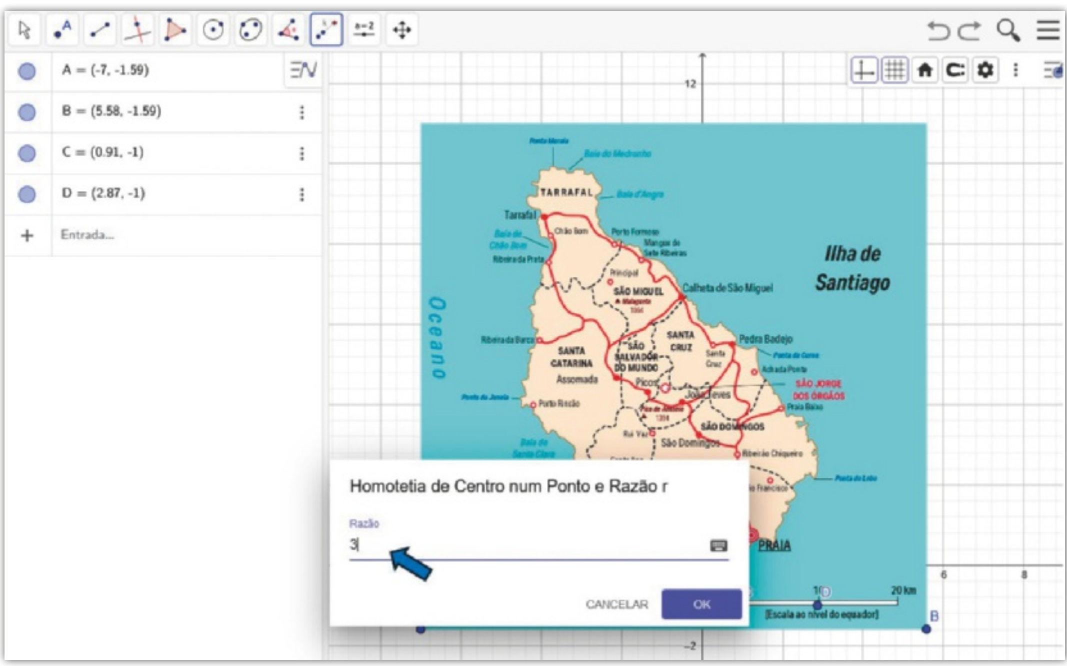


Seleciona a opção Homotetia, de seguida o segmento de reta CD e o ponto C.

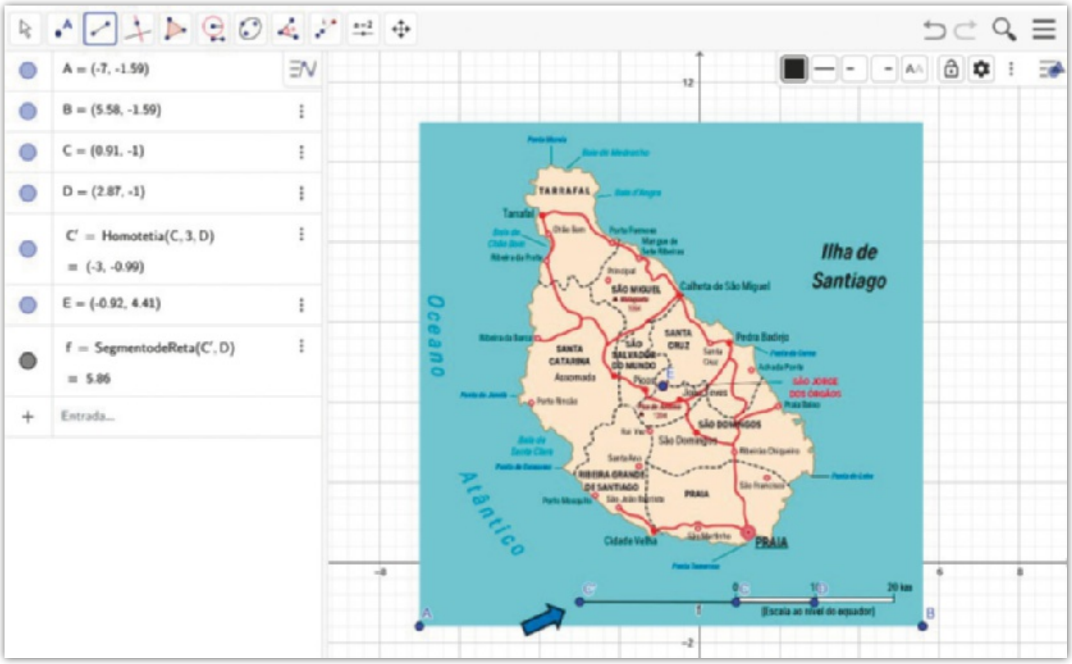


Depois, ser-te-á solicitada a indicação do Fator, escreve 3 e clica em OK.

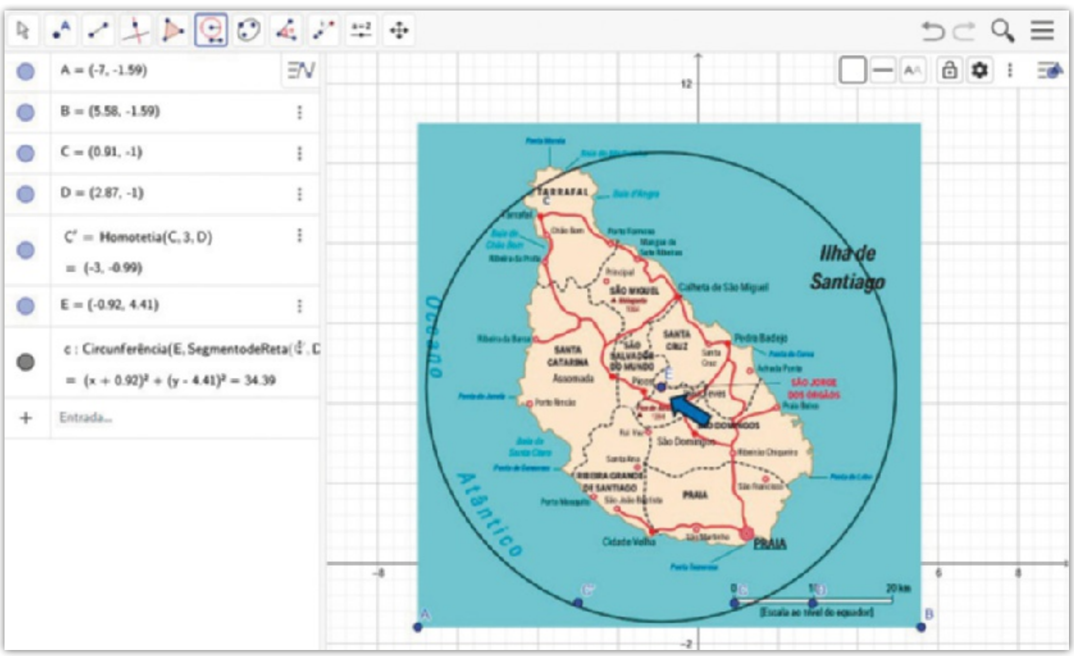
Nota: Uma homotetia "expande" um objeto de acordo com um fator. No caso, temos o segmento de reta correspondente a 10 km, de acordo com a escala, e pretendemos definir um raio de 30 km, ou seja, três vezes maior, como tal indicamos que o fator da homotetia deve ser 3.



Obtiveste um segmento de reta $C'D$ tal que $\overline{C'D} = 3\,\overline{CD}$, ou seja, corresponde, de acordo com a escala, a uma distância de $30\ \text{km}$.



Agora, clica na opção “Compasso”, de seguida no ponto E e no segmento de reta $C'D$. Surgirá um círculo com raio $C'D$; arrasta-o para fazer coincidir o centro com o Ponto E, clicando sobre E.

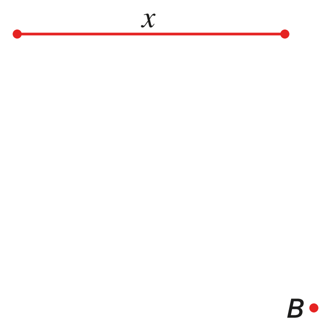


Verificamos que nem toda a ilha se encontra ao alcance da antena, por exemplo o Tarrafal não se encontra no círculo. Assim, nem toda a ilha receberá o sinal de comunicação da antena instalada em São Jorge dos Órgãos.

Exercícios

36 **Resolve os seguintes problemas de contexto real recorrendo aos conceitos de lugares geométricos que aprendeste.**

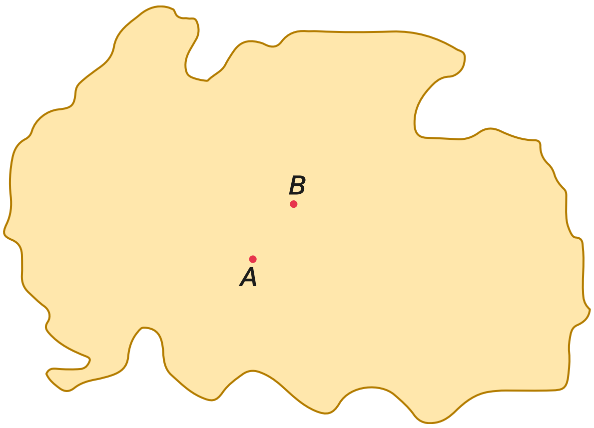
36.1. Sabendo que no ponto B se localiza uma estátua e que se pretende construir ao seu redor um canteiro, desenha, com rigor, a área onde será instalado o canteiro de flores de maneira que todo o seu limite esteja sempre à distância x, indicada na imagem, da estátua.



36.2. Vai ser instalado na ilha de São Vicente um conjunto de painéis solares que deverão ficar localizados a mais de 10 km e a menos de 20 km do Mindelo.

Assinala no mapa, recorrendo a uma construção rigorosa com recurso a lápis e material de desenho, ou ao GeoGebra, a zona onde poderão ficar instalados os painéis solares.

36.3. Na seguinte figura, está representado um mapa de uma zona onde será localizada uma estação de recolha de lixo. As localidades A e B estão a uma distância de 10 km uma da outra. A estação de recolha do lixo deverá ser localizada à mesma distância das duas localidades, mas a mais de 20 km de cada uma das localidades devido aos odores libertados.



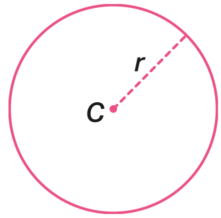
A lápis, e com recurso a material de desenho e de construção, assinala no mapa os pontos correspondentes aos locais onde poderá ser instalada a estação de recolha de lixo.

37 **Recentemente, foi instalada na praia do Tarrafal uma torre de vigia para nadadores-salvadores. Contudo, e como a praia é muito grande, as entidades camarárias e as empresas hoteleiras estão a pensar instalar mais uma torre de vigia.**

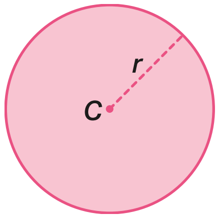
No seguinte mapa da praia do Tarrafal, está indicada a localização da primeira torre instalada.

Se fosses um técnico onde sugeririas a colocação da nova torre? Justifica a tua resposta com base nos conhecimentos que adquiriste nesta unidade.

Síntese



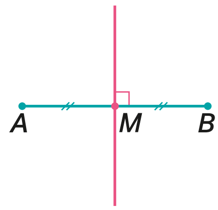
Uma **circunferência** é o conjunto de pontos do plano equidistantes (à mesma distância) de um ponto fixo, designado por centro.

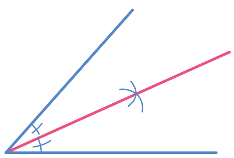


Um **círculo** é o conjunto de pontos do plano cuja distância a um ponto fixo (centro) é menor ou igual ao comprimento do raio.

A **mediatriz** de um segmento de reta é o conjunto de pontos do plano equidistantes aos extremos desse segmento de reta.

A mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular a esse segmento que passa no seu ponto médio.

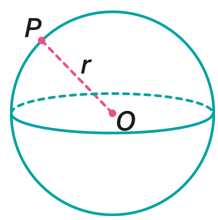


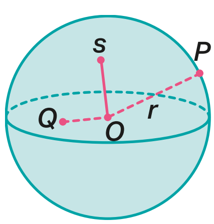


A **bissetriz** de um ângulo convexo é o conjunto de pontos do ângulo que estão à mesma distância dos lados desse ângulo. Assim, a bissetriz é a semirreta que parte do vértice e divide o ângulo ao meio, formando dois ângulos congruentes (com a mesma amplitude). Cada ponto da bissetriz está equidistante dos lados do ângulo.

Uma **reta paralela** corresponde ao lugar geométrico constituído pelo conjunto de pontos que estão a uma certa distância fixa de outra reta.

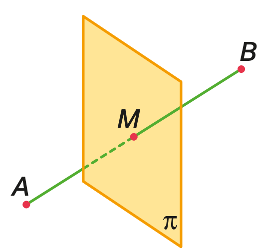
A **superfície esférica** é o lugar geométrico dos pontos do espaço que estão a uma distância fixa de um ponto central. O ponto central designa-se por centro e a distância entre o centro e qualquer ponto da superfície esférica designasse por raio.





A **esfera** é constituída pela superfície esférica e todos os pontos que se encontram no interior dessa superfície esférica, ou seja, o conjunto de pontos que se encontram a uma distância ao centro igual ou inferior ao raio.

No espaço, o **plano mediador** de um segmento de reta corresponde ao lugar geométrico constituído por todos os pontos que se encontram à mesma distância das extremidades desse segmento de reta.



Para aplicar

1 Considera as seguintes instruções:

1. Marca um ponto fixo C.

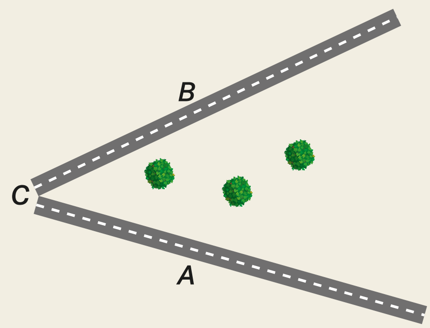
2. Traça o conjunto de pontos a 3 cm de C.

Seguindo estas instruções, qual o lugar geométrico que obtém? Justifica a tua resposta.

2 **Um satélite emite sinais que se propagam uniformemente em todas as direções a partir de um ponto fixo no espaço. Ao fim de 5 segundos, os sinais atingem todos os pontos situados a 1500 km do satélite. A que lugar geométrico corresponde o conjunto de pontos atingidos nesse momento?**

3 **Um avião é localizado por radar. Sabe-se apenas que está exatamente a 200 km do aeroporto. Qual o lugar geométrico definido pelo conjunto de todas as posições possíveis do avião nesse momento?**

4 **Os habitantes da rua A e da rua B pretendem plantar árvores no campo relvado que se situa entre as duas ruas. Pretende-se que as árvores fiquem alinhadas para estarem à mesma distância das duas ruas.**



Constrói o lugar geométrico ondem devem ficar plantadas as árvores.

5 **Numa praça irá ser montado um palco retilíneo com 20 metros de largura.**

Deseja-se instalar uma cabina de som e luz de forma que:

- a cabina esteja à mesma distância dos extremos do palco;
- a cabina esteja localizada a uma distância entre 30 e 60 metros do palco.

Faz um esboço da situação e marca o lugar geométrico dos pontos possíveis para instalar a cabina de som e luz.

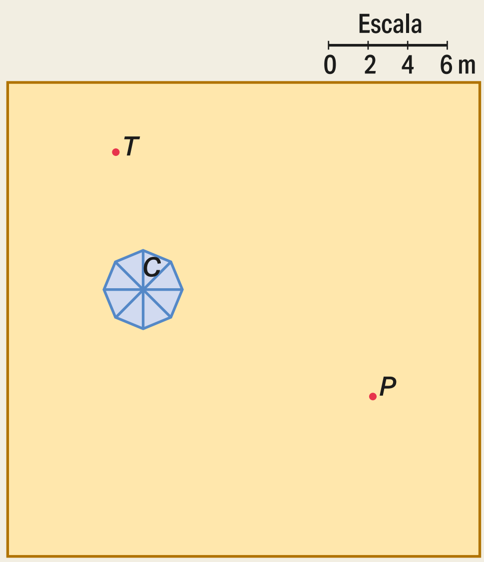
6 **Vai realizar-se uma feira no largo da Câmara de São Filipe, Fogo.**

Na figura seguinte, está representada a área da feira, onde se encontram assinaladas as posições do coreto e dos pontos T e P, onde serão instalados postes de iluminação.

A Domingas e o irmão vão trabalhar nessa feira, mas em duas bancas diferentes. No entanto, ambas se encontram a 6 metros de distância do coreto e à mesma distância dos dois postes de iluminação.

Usando o esquema, realiza uma construção geométrica rigorosa a lápis que te permita assinalar os locais onde a Domingas e o irmão vão trabalhar.

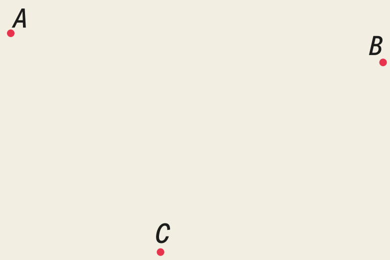
Assinala os pontos com as letras D e D'.



7 **Três vizinhos resolveram construir um poço entre as três casas. Decidiram que o poço deveria ficar à mesma distância delas.**

Considerando que as casas se localizam nos pontos A, B e C, determina, recorrendo a construções geométricas rigorosas, onde deverá localizar-se o poço.

Assinala o ponto com a letra P.

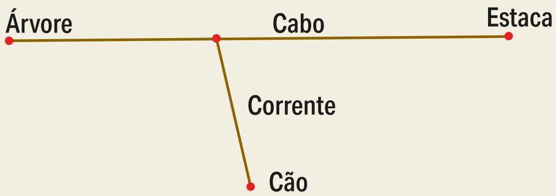


Para aplicar

8 **Um cão encontra-se preso a um sistema de corrente, que funciona da seguinte forma:**

- o cão está preso a uma corrente com 3 metros de comprimento;
- essa corrente, por sua vez, está presa a um cabo rente ao chão, com 10 metros de comprimento.

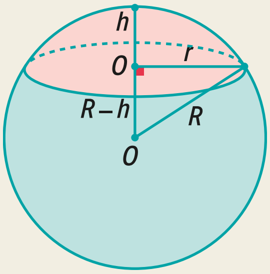
Considerando o seguinte esquema e utilizando instrumentos de desenho, defina o lugar geométrico ao qual o cão terá acesso.



9 **Uma superfície esférica de raio 12 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 9 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência.**

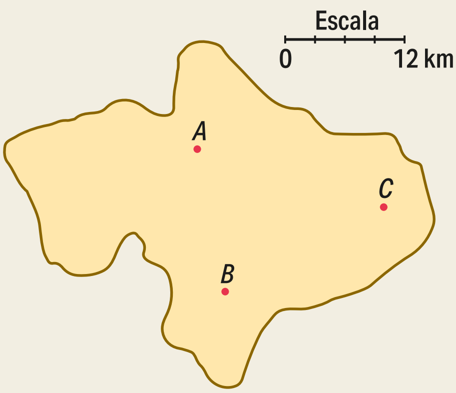
Qual é o raio dessa circunferência?

Sugestão: Considera o triângulo formado, conforme sugere a figura, sendo R o raio da esfera e r o raio da circunferência formada pelo corte do plano.



10 **Num dos parques eólicos da ilha de Santo Antão está a estudar-se a possibilidade de instalar mais colunas geradoras.**

Na figura seguinte está representada uma área onde foram instaladas três colunas geradoras, indicadas pelos pontos A, B e C. Pretende-se instalar mais uma coluna geradora que deverá ficar na área definida, à mesma distância das três colunas, mas a pelo menos 12 km da coluna A.



Recorrendo a construções geométricas, verifica se é possível instalar uma coluna nestas condições. Justifica a tua resposta.

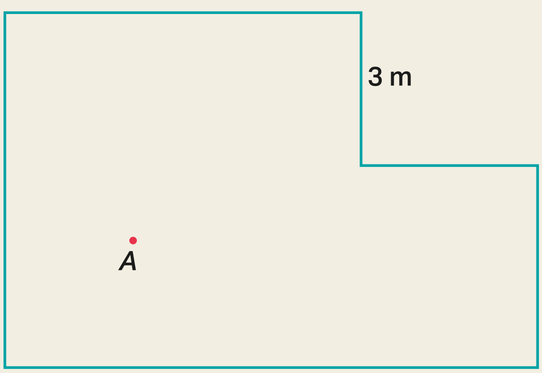
11 No mapa que se segue está representada a ilha da Boa Vista.

Uns turistas de visita à ilha pretendem ficar alojados num local que se situe a menos de 5 quilómetros da Praia das Dunas, mas que se situe mais perto da Praia de Chaves do que da Ponta Antónia.

Sombreia a lápis a zona do mapa onde os turistas poderão ficar alojados.

12 **O Rafael está a ver televisão na sua sala. Considerando a planta da sua sala, sabemos que ele se encontra na posição indicada pela letra A e que a televisão se encontra a, pelo menos, 3 metros de distância.**

Assinala na planta, a lápis e recorrendo a material de desenho, todos os pontos da sala onde poderá estar localizada a televisão.



1.3. Transformações geométricas

© SIARB

As transformações geométricas fazem parte da história da Humanidade. Mesmo antes da Matemática ser conhecida como tal, já na Pré-História o ser humano aplicava transformações geométricas nas suas primeiras representações artísticas realizadas em paredes, tetos e outras superfícies de cavernas e abrigos. Um exemplo são as transformações geométricas que surgem representadas numa pintura rupestre do sítio de El Buey, na Bolívia.

Também a tapeçaria, uma forma de expressão artística, apresenta padrões geométricos e simetrias, como é visível no tapete Pazyryk (Sibéria), datado do século V a. C.

Na cerâmica, outra forma de expressão artística, e em diferentes pontos do mundo, o ser humano também recorreu à geometria para embelezar as suas criações. Na cerâmica chinesa, que remonta ao período neolítico (3000 a. C.), é visível a presença do uso de transformações geométricas na sua decoração, tal como acontece com a cerâmica da Grécia Antiga.

 Taça; Autoria Desconhecida Neolítico; Terracota CIAJG-Coleção José de Guimarães ©Vasco Célio	 Por Marcus Cyron © CC BY-SA 4.0
Bacia de cerâmica da fase Majiayao, em que a ornamentação pintada apresenta motivos abstratos de linhas onduladas, paralelas e cruzadas, triângulos, círculos e pontos. **Centro Internacional das Artes José de Guimarães,** Guimarães.	Prato de cerâmica orientalizante de Rodes com a margem cortada como a borda de um escudo. Museu de Belas-Artes, Boston.

Na verdade, pode dizer-se que as transformações geométricas têm as suas raízes na Grécia Antiga, embora o conceito formal tenha evoluído muito mais tarde. Gregos, como Euclides, estudavam figuras congruentes, ou seja, figuras que podiam ser sobrepostas por movimentos como rotação e reflexão, apesar de não utilizarem o termo "transformação".

No século XVII, com o desenvolvimento da geometria analítica, por Descartes, começaram-se a representar geometricamente figuras e movimentos no plano cartesiano, e, no século XIX, o matemático Felix Klein (1849-1925) deu início ao estudo da geometria baseada em grupos de transformações. Mais tarde, Evgraf Fedorov

(1853-1919) estudou os padrões no plano ao estudar os grupos cristalográficos e, graças aos seus trabalhos, foi possível determinar que há apenas sete tipos de frisos.

Klein propôs o **Programa de Erlangen**, isto é, uma proposta de unificação das geometrias por meio de grupos de simetria que classificava as diferentes geometrias (como a euclidiana ou hiperbólica), com base nos grupos de transformações que preservavam as suas propriedades. Só, nesse momento, é que o estudo das isometrias ganhou rigor e profundidade, sendo visto como importante para a compreensão da estrutura do espaço.

O artista gráfico Maurits Cornelis Escher (1898-1972) ficou famoso por manipular a geometria, traçando desenhos com paradoxos visuais, preenchendo de forma regular o plano, explorando o infinito e as metamorfoses, com recurso a padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes. As suas obras ficaram conhecidas pelos seus desenhos impossíveis, pelas ilusões espaciais que concebeu e pelos padrões que desenvolveu.

Hoje, as transformações geométricas são fundamentais, não só na matemática pura, mas também em arte, arquitetura, *design* e computação gráfica.

1.3.1. Congruência de figuras

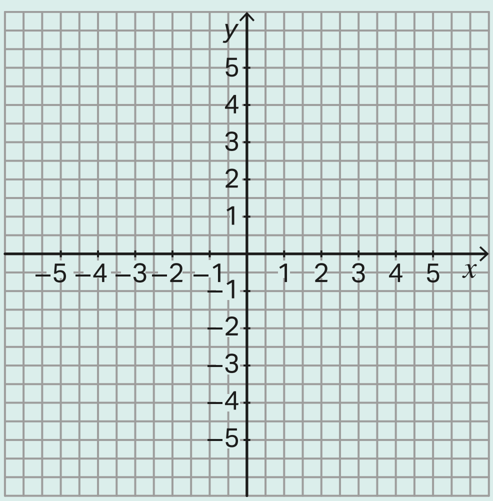
Tarefa

14 Figuras que se encaixam

Material necessário:

- Papel vegetal ou papel transparente
- Tesoura
- Lápis, régua, transferidor
- Plano cartesiano impresso

1. Utiliza o plano cartesiano nas páginas finais do livro.



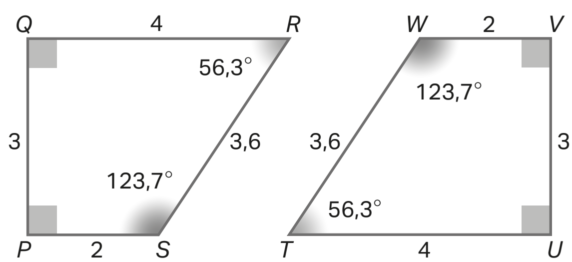
2. Desenha no plano cartesiano dois triângulos com os seguintes vértices:
   a) Triângulo T1: $A(1\ ,\ 1)$, $B(4\ ,\ 1)$, $C(2\ ,\ 4)$
   b) Triângulo T2: $A'(3\ ,\ 2)$, $B'(6\ ,\ 2)$, $C'(4\ ,\ 5)$
3. Coloca papel vegetal sobre o triângulo T_1 e decalca (copia) o triângulo.
4. Recorta o triângulo e tenta encaixá-lo exatamente sobre o triângulo T_2, usando apenas movimentos rígidos (sem dobrar ou esticar).
5. Foi possível sobrepor perfeitamente? Que movimentos fizeste?
6. Mede os comprimentos dos lados e a amplitude dos ângulos dos dois triângulos. O que concluis?

   Os dois triângulos têm o mesmo tamanho e forma, apesar de se encontrarem em posições diferentes. Dizemos que os dois triângulos são congruentes. Portanto, a congruência de figuras ocorre quando duas figuras têm exatamente a mesma forma e o mesmo tamanho, embora possam estar em posições diferentes no plano.

Duas figuras congruentes são figuras que têm **o mesmo tamanho** e **a mesma forma**, mesmo que estejam em posições diferentes no plano.

Duas figuras dizem-se **congruentes** se é possível obter uma a partir da outra por meio de uma ou mais transformações geométricas que não altere as suas dimensões, por exemplo, uma **translação**, **rotação** ou **reflexão**. Em nenhum dos casos se altera o **tamanho nem a forma** da figura original.

Exemplo 25



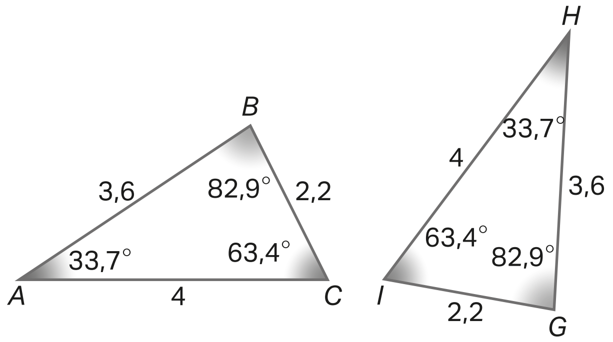
Os trapézios $[PQRS]$ e $[TUVW]$ são congruentes, pois têm lados e ângulos correspondentes iguais.

- $\overline{QR} = \overline{TU} = 4$ (lado maior)
- $Q\hat{R}S = U\hat{T}W = 56{,}3°$ (ângulo menor)
- $\overline{RS} = \overline{TW} = 3{,}6$
- $R\hat{S}P = T\hat{W}V = 123{,}7°$ (ângulo maior)
- $\overline{SP} = \overline{WV} = 2$ (lado menor)
- $S\hat{P}Q = W\hat{V}U = 90°$
- $\overline{PQ} = \overline{UV} = 3$
- $P\hat{Q}R = V\hat{U}T = 90°$

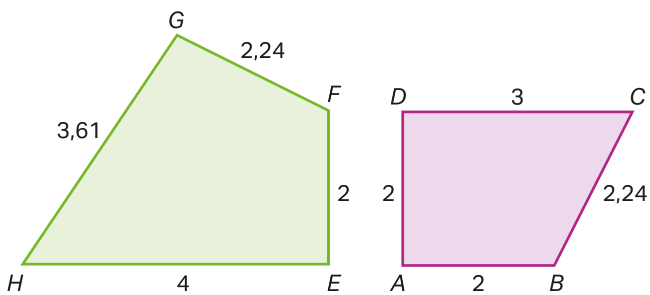
Exercício

38 Indica, justificando, se as seguintes figuras são congruentes.

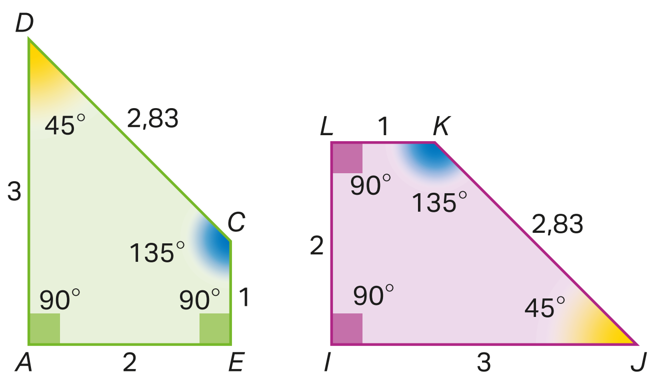
38.1.



38.2.



38.3.



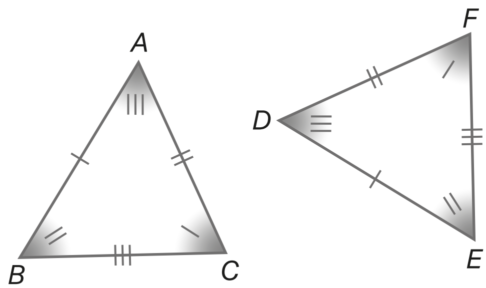
Características das figuras congruentes:

- os lados correspondentes têm os mesmos comprimentos;
- os ângulos correspondentes têm as mesmas amplitudes;
- sobrepõem-se perfeitamente se forem colocadas uma sobre a outra.

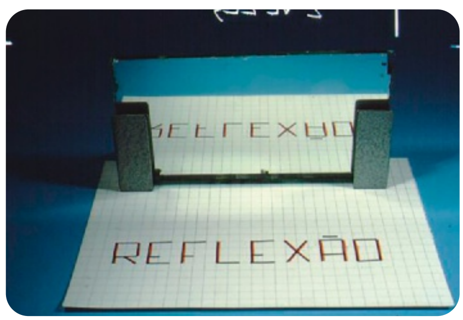
Exemplo 26

- Duas peças de um *puzzle* com o mesmo molde.

- Dois triângulos com lados e ângulos exatamente iguais, mesmo que um esteja virado ao contrário.



- Uma letra impressa e o seu reflexo num espelho (ex.: a letra "A").



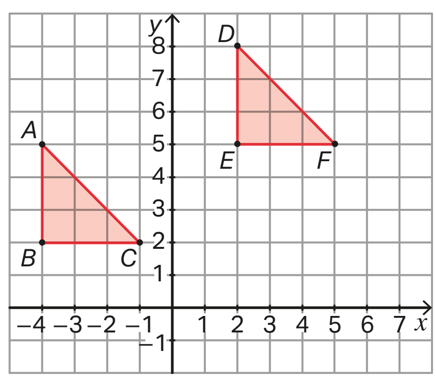
Notação: Se duas figuras A e B são congruentes, escreve-se: $A \cong B$.

Exemplo 27

Os triângulos ABC e DEF são congruentes e escreve-se $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

As coordenadas dos vértices dos triângulos são as seguintes:

$A(-4\,,\ 5)$; $B(-4\,,\ 2)$; $C(-1\,,\ 2)$ e
$D(2\,,\ 8)$; $E(2\,,\ 5)$; $F(5\,,\ 5)$



- $\overline{AB} = d(A\,,\ B) = \sqrt{(-4-(-4))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

  e

  $\overline{DE} = d(D\,,\ E) = \sqrt{(2-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

  Logo, $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Recorda:
Distância entre dois pontos
$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

- $\overline{AC} = d(A\,,\ C) = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

  e

  $\overline{DF} = d(D\,,\ F) = \sqrt{(2-5)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

  Logo, $\overline{AC} = \overline{DF}$.

- $\overline{BC} = d(B\,,\ C) = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

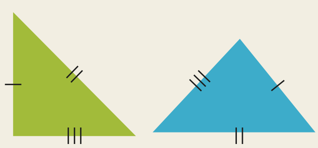
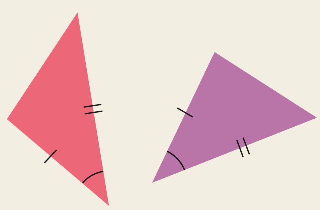
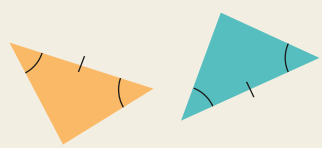
  e

  $\overline{EF} = d(E\,,\ F) = \sqrt{(2-5)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

  Logo, $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Assim, pelo critério de congruência de triângulos LLL, os triângulos são congruentes.

Recorda:

Critérios de congruência de triângulos		
LLL	**LAL**	**ALA**
Dois triângulos são congruentes se tiverem os três lados correspondentes iguais.	Dois triângulos são congruentes se tiverem dois lados correspondentes e o ângulo por eles formado igual.	Dois triângulos são congruentes se tiverem um lado e os dois ângulos adjacentes a esse lado iguais.
		

Exercício

39 **Considera os seguintes triângulos no plano cartesiano:**
- **Triângulo T_1 com vértices em $A(2\,;\ 1)$, $B(5\,;\ 1)$, $C(3{,}5\,;\ 4)$.**
- **Triângulo T_2 com vértices em $A'(0\,;\ 3)$, $B'(0\,;\ 6)$, $C'(3\,;\ 4{,}5)$.**

39.1. Representa graficamente os dois triângulos num plano cartesiano.

39.2. Calcula os comprimentos dos lados dos dois triângulos.

39.3. Os triângulos são congruentes? Justifica a resposta.

1.3.2. Conceito de transformação geométrica

Tarefa

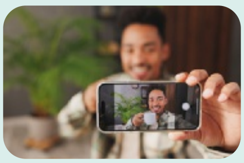
15 Considera as seguintes situações:

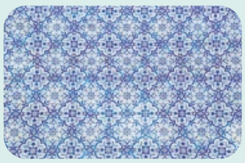

O movimento de uma peça num jogo de xadrez


A imagem obtida quando utilizamos uma lupa de aumento


O movimento que a hélice de um avião realiza


A imagem que obtemos quando nos observamos ao espelho


A imagem obtida quando utilizado o *zoom* numa fotografia digital


Padrões em painel de azulejos decorativos


Maquete


A imagem de uma paisagem refletida na superfície de um lago

15.1. Analisa cada uma das situações, identifica o que mudou relativamente à forma, ao tamanho, à posição, à orientação, e, por fim, completa a tabela.

Situação	Imagem final			
	Forma	Tamanho	Posição	Orientação
Movimento da peça de xadrez				
Imagem obtida com uma lupa				
Movimento de uma hélice				
Imagem ao espelho				
***Zoom* numa fotografia digital**				
Painel de azulejos decorativos				
Maquete				
Paisagem refletida num lago				

15.2. Em quais das situações a imagem obtida tem a mesma forma e tamanho que a original?

15.3. Todas as situações referidas correspondem a uma transformação geométrica. *Consegues explicar por palavras tuas o que é uma transformação geométrica?*

Nas situações apresentadas, as imagens obtidas, apesar de surgirem noutra posição, com outra orientação, ou com um tamanho diferente, mantêm a forma original.

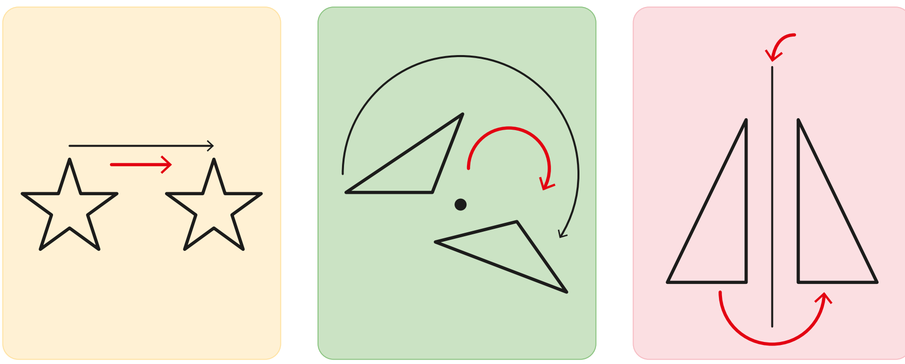
- **Movimento de uma peça num jogo de xadrez –** Quando deslizamos uma peça do xadrez, por exemplo, uma torre, no tabuleiro, a peça mantém-se, não muda de forma, mudou apenas de posição. Aplicamos uma translação à peça.
- **Imagem obtida com uma lupa –** Quando usamos uma lupa para aumentar algo, a imagem que visualizamos tem uma forma igual à da imagem original, apenas aumentou de tamanho. Realizamos uma ampliação.
- **Movimento de uma hélice –** Quando as pás de uma hélice giram em torno de um ponto fixo, elas mantêm a sua forma e tamanho, mudam apenas de posição. Acontece uma rotação.
- **Imagem ao espelho –** Quando nos observamos ao espelho, a imagem que vemos refletida é a nossa própria imagem. A imagem refletida resulta de uma transformação por reflexão.
- ***Zoom* numa fotografia digital –** Quando fazemos *zoom* numa fotografia digital, a imagem aumenta ou diminui de tamanho, mas mantém a forma: é uma dilatação (ampliação ou redução).
- **Painel de azulejos decorativos –** Em muitos painéis de azulejos vemos que o azulejo utilizado é o mesmo, apenas vai sendo colocado em diferentes posições, por forma a criar repetições, como frisos ou simetrias, que podem envolver translações, rotações e reflexões.
- **Maquete –** Uma maquete é uma representação de, por exemplo, um edifício a uma escala menor, para depois ser reproduzido em tamanho real. Uma maquete corresponde a uma redução do objeto real que irá ser construído.
- **Paisagem refletida num lago –** A imagem da paisagem refletida no lago preserva as formas da imagem original (a paisagem), correspondendo a uma reflexão vertical, semelhante à de um espelho.

Todas estas transformações permitiram criar novas figuras a partir de figuras originais, maiores, menores ou em posições diferentes. As transformações geométricas são mudanças realizadas em imagens, como: transportar, espelhar, rodar, ampliar ou reduzir, e podem acontecer em qualquer figura, sejam formas geométricas simples ou imagens complexas.

Uma transformação geométrica é uma correspondência que associa a cada ponto de uma figura (figura original) um e um só ponto de outra figura.

Uma **transformação geométrica** é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original, se forma outra geometricamente igual (congruente) ou semelhante (ampliação ou redução) à primeira.

Percebe-se que, em algumas situações, as formas são conservadas, mantendo os comprimentos e os ângulos, como quando movemos, rodamos ou refletimos a imagem original. Neste caso, dizemos que a figura geométrica sofreu uma **isometria**.



Translação Rotação Reflexão

Exemplo 28

- Ao mover uma imagem para um novo local, realizamos uma **translação**.
- Ao girar em torno de um ponto, realizamos uma **rotação**.
- Ao refletir uma figura em relação a um eixo, realizamos uma **reflexão**.

Noutra situações, o tamanho da imagem original alterou-se, ficando maior (ampliação) ou menor (redução), contudo a forma manteve-se. Nestes casos diz-se que a imagem sofreu uma **homotetia**.

A **homotetia** é uma transformação geométrica, não isométrica, que altera o tamanho de uma figura, mas mantém a sua forma e a orientação relativa dos seus pontos.

Exemplo 29

Na tarefa, das transformações geométricas apresentadas, são homotetias as seguintes:

- imagem obtida com uma lupa;
- *zoom* numa fotografia digital;
- maquete.

Exercício

40 **Considera as seguintes situações e indica se representam uma homotetia ou uma isometria. Justifica a tua escolha.**

(A) Um logótipo é ampliado para ser usado num cartaz, mantendo exatamente a mesma forma.

(B) Uma figura geométrica é refletida num espelho.

(C) Um padrão é deslocado para a direita ao longo de uma faixa, sem ser redimensionado.

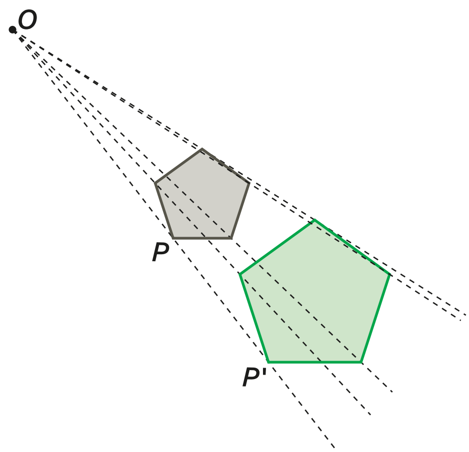
(D) Um desenho é reduzido para caber numa etiqueta, sem distorção.

(E) Um triângulo é rodado em torno de um ponto no plano.

Em termos simples, uma homotetia é um redimensionamento proporcional em relação a um ponto fixo, chamado centro da homotetia.

Assim, dada uma figura no plano, uma **homotetia de centro** $\boldsymbol{O}$ e razão k transforma cada ponto P da figura num ponto P' tal que:

- O, P e P' estão alinhados;
- $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$, com $k > 0$.



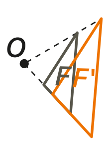
Assim:

- se $k > 1$, a figura **aumenta** de tamanho, diz-se uma ampliação;
- se $0 < k < 1$, a figura **diminui** de tamanho, diz-se uma redução;
- se $k = 1$, a figura **não se altera.**

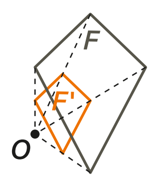
Exercício

41 **Em cada uma das seguintes situações, considerando** F **como a figura original, indica o centro da homotetia, referindo se corresponde a uma ampliação ou redução.**

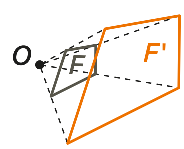
(A)



(B)



(C)



1.3.3. Isometrias e as suas propriedades

As isometrias são transformações geométricas que preservam as distâncias entre pontos e as amplitudes dos ângulos. Isso significa que, ao aplicar uma isometria a uma figura, o seu tamanho e a sua forma não se alteram – apenas muda a sua posição ou orientação no plano. As figuras transformadas por isometrias são, por isso, congruentes com as figuras originais.

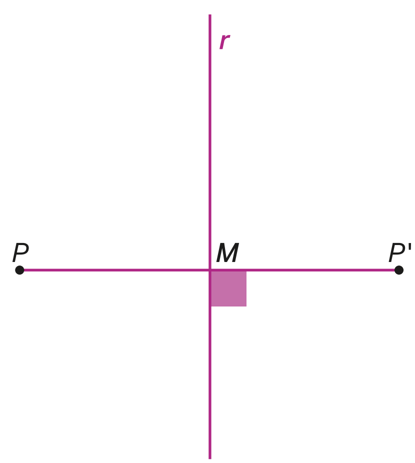
Uma **isometria** é uma transformação geométrica que preserva a distância entre pontos e a amplitude dos ângulos, isto é, a figura inicial e o seu transformado são congruentes.

Reflexão

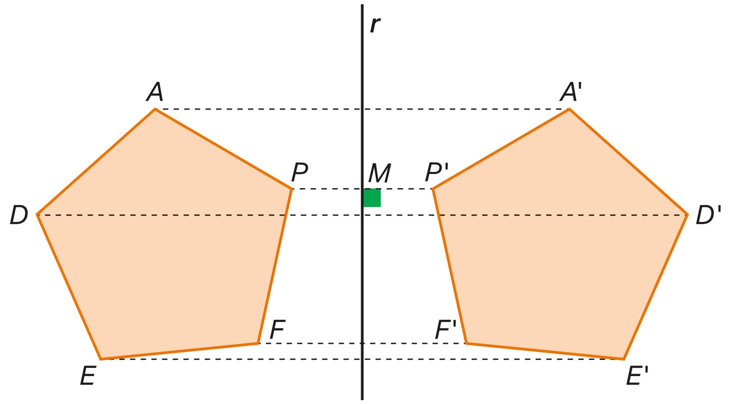
Uma reflexão é uma transformação geométrica que "espelha" uma figura em relação a uma reta (no plano) – essa reta diz-se eixo de reflexão.

Numa reflexão, com eixo r, cada ponto P da figura original corresponde a um ponto P' de tal forma que:

- r é o eixo de reflexão;
- P' é o simétrico de P;
- o segmento PP' é perpendicular ao eixo r;
- a distância de P a r é igual à distância de P' a r, ou seja, para qualquer ponto $M \in r$, $\overline{PM} = \overline{P'M}$.



Uma figura e a sua imagem obtida por reflexão são sempre congruentes e a figura original e a sua reflexão sobrepõem-se ponto a ponto se dobradas uma sobre a outra pelo eixo r.



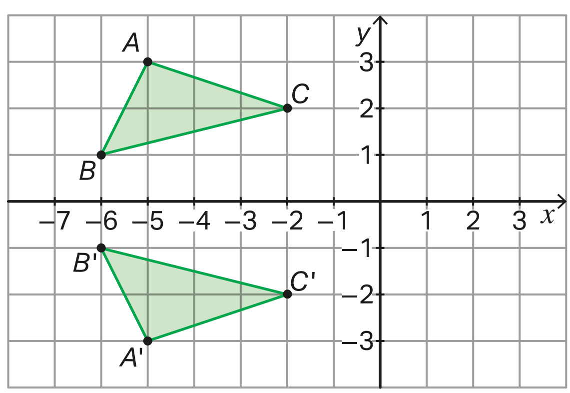
Portanto, uma reflexão:

- muda o sentido de abertura dos ângulos sem alterar sua amplitude;
- cada ponto da figura original tem uma imagem do outro lado do eixo, à mesma distância, mas em sentido oposto;
- as figuras resultantes são congruentes – têm a mesma forma e tamanho.

Exemplo 30

Num referencial cartesiano:

- Se refletirmos um triângulo em relação ao eixo das ordenadas, cada ponto $(x\,,\ y)$ resulta no tranformado de coordenadas $(-x\,,\ y)$.
- Ao refletir o triângulo ABC em que $A(-5\,,\ 3)$, $B(-6\,,\ 1)$ e $C(-2\,,\ 2)$ em relação ao eixo das abcissas, obtém-se o triângulo $A'B'C'$ de coordenadas: $A'(-5\,,\ -3)$, $B'(-6\,,\ -1)$ e $C'(-2\,,\ -2)$. Ou seja, um ponto de coordenadas $(x\,,\ y)$ transforma-se noutro de coordenadas $(x\,,\ -y)$.

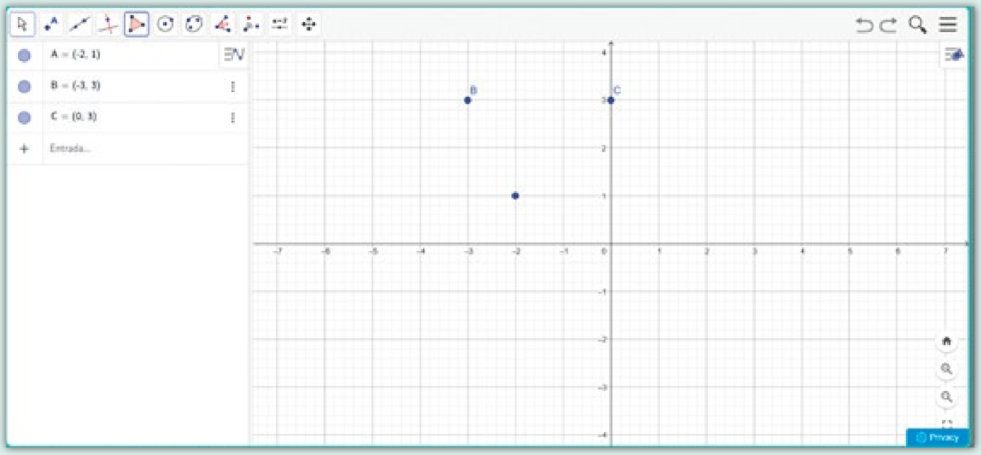


Tarefa

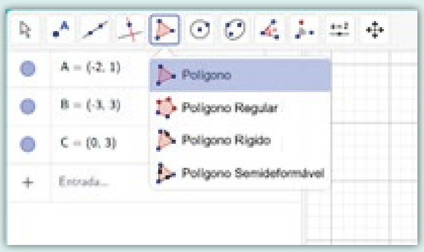
16 Realizar uma reflexão no GeoGebra

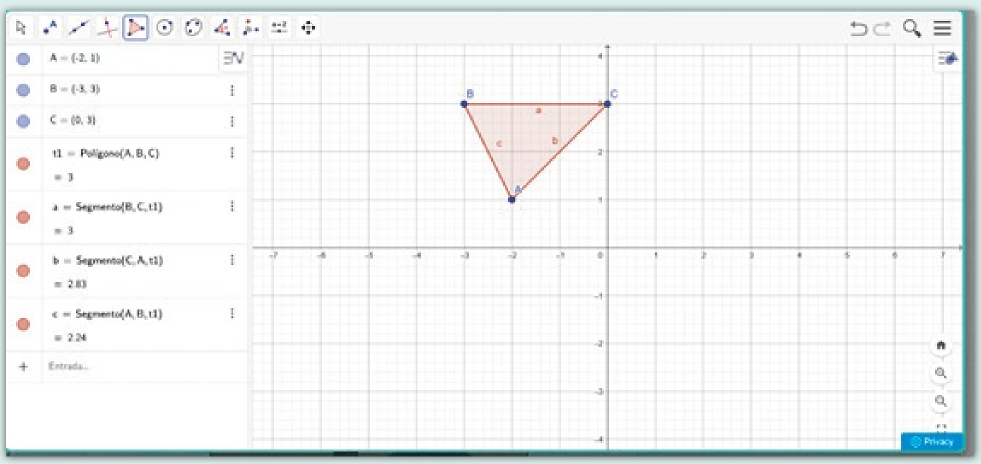
1. Abre o software.

2. Marca três pontos, por exemplo, $A(-2,\ 1)$, $B(-3,\ 3)$ e $C(0,\ 3)$.

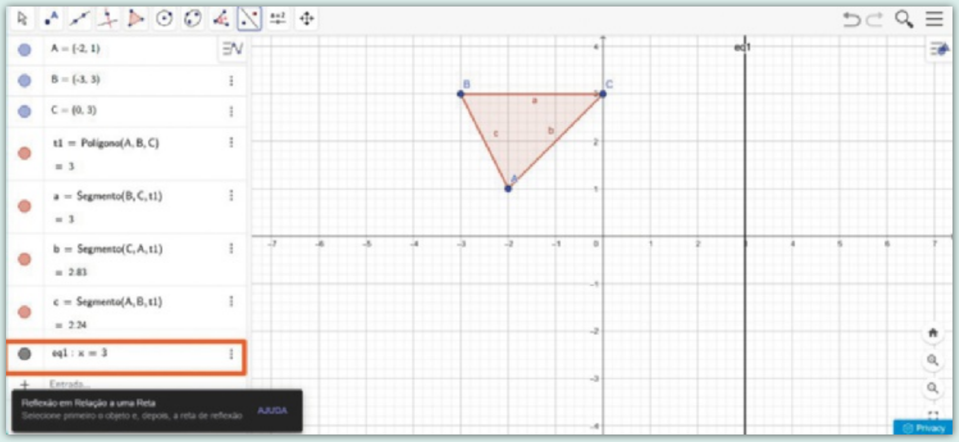


3. Define o triângulo ABC, utilizando a opção Polígono e, de seguida, selecionando os pontos A, B e C.

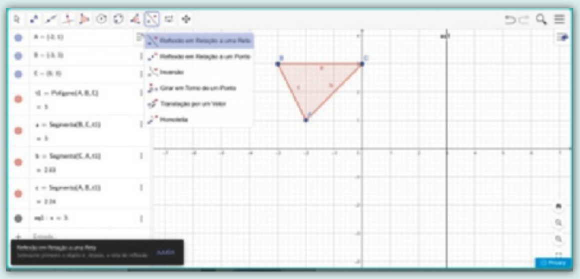




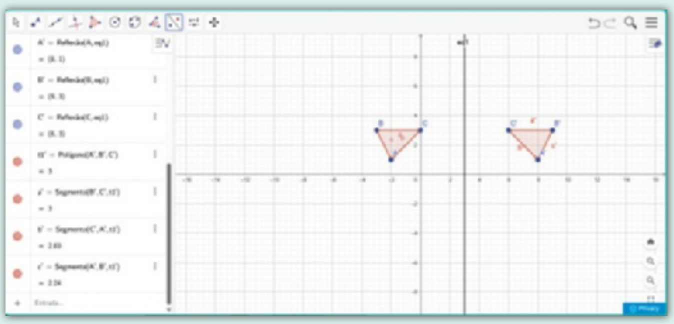
4. Traça o eixo de reflexão, por exemplo, a reta $x = 3$, escrevendo a equação da reta na caixa de entrada.



5. Seleciona a opção Reflexão em Relação a uma Reta, selecionando de seguida o triângulo e por fim a reta de reflexão.



6. O *software* constrói a reflexão do triângulo ABC em relação à reta $x = 3$.



Exploração:

Experimenta aplicar outras reflexões ao triângulo ABC, por exemplo, em relação ao eixo das ordenadas $(x = 0)$, e outros tipos de retas, como retas que passem nos vértices e lados do triângulo ($y = 3$; $y = 1$, $x = -3$; $x = -2$; $y = x + 3$; $y = -2x - 3$; ...).

O que concluis?

Explora com outro tipo de figuras geométricas.

Verifica, utilizando as ferramentas de medição do GeoGebra, que o comprimento dos segmentos de reta e a amplitude dos ângulos não se alteram após a reflexão.

Manual Digital

Vídeo
Translação

Exercícios

42 Considera o ponto $A(3, 2)$.

42.1. Representa o ponto A num referencial cartesiano.

42.2. Quais as coordenadas do ponto A', que resulta da aplicação de uma reflexão do ponto A em relação ao eixo dos y?

42.3. Quais as coordenadas do ponto A'', que resulta da aplicação de uma reflexão do ponto A em relação ao eixo dos x?

43 Dado o triângulo com vértices $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(4, 1)$:

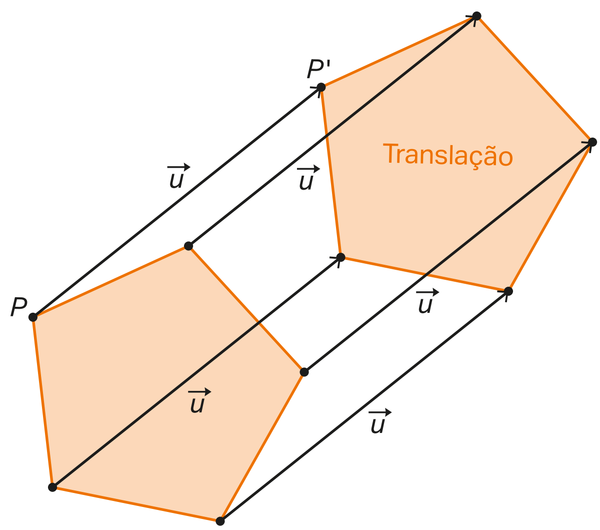
43.1. representa o triângulo num referencial cartesiano;

43.2. reflete o triângulo ABC em relação ao eixo dos y;

43.3. reflete o triângulo ABC em relação ao eixo dos x.

Translação

Uma translação é uma transformação geométrica que move todos os pontos de uma figura na mesma direção e pela mesma distância – sem girar, espelhar ou alterar o tamanho ou a forma da figura, sem alterar a forma, a orientação e o tamanho. Essa movimentação é, normalmente, definida por um vetor.



Numa translação no plano associada ao vetor $\vec{u}$, cada ponto P da figura original corresponde a um ponto P'.

- $\vec{u}$ é o vetor de orientação da translação.

A figura original e a sua translação são congruentes. As translações conservam a direção e o comprimento de segmentos de reta e as amplitudes dos ângulos.

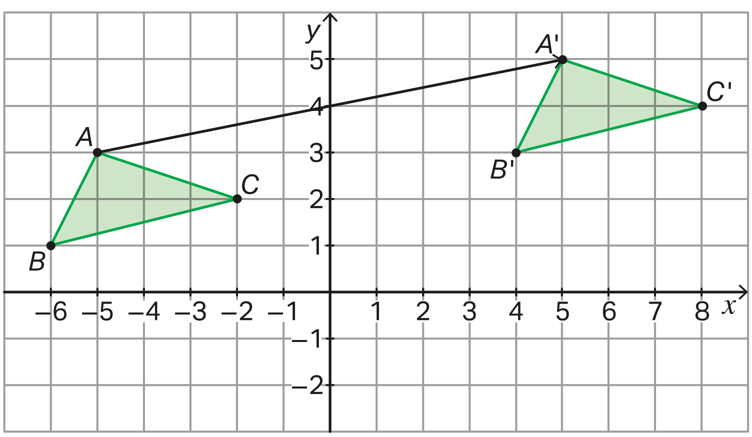
Portanto, uma translação:

- preserva a orientação da figura;
- cada ponto $(x\,,\ y)$ é deslocado segundo um vetor $\vec{v}=(a\,,\ b)$ resultando em
$$(x'\,,\ y') \longrightarrow (x+a\,,\ y+b)\,;$$
as figuras resultantes são congruentes – têm a mesma forma e tamanho.

Exemplo 31

- Dado um ponto $P(2\,,\ 3)$ e aplicando uma translação pelo vetor $\vec{v}=(4\,,\ -1)$, obtemos o ponto $P'(2+4\,,\ 3-1)=P'(6\,,\ 2)$.

- O triângulo ABC, em que $A(-5\,,\ 3)$, $B(-6\,,\ 1)$ e $C(-2\,,\ 2)$, sofreu uma translação segundo o vetor $\overrightarrow{AA'}$:
$$\overrightarrow{AA'}=A'-A=(5\,,\ 5)-(-5\,,\ 3)=(10\,,\ 2)$$
Resultando no triângulo $A'B'C'$ de coordenadas:
$$A'(-5+10\,,\ 3+2)=(5\,,\ 5)$$
$$B'(-6+10\,,\ 1+2)=(4\,,\ 3)$$
$$C'(-2+10\,,\ 2+2)=(8\,,\ 4)$$

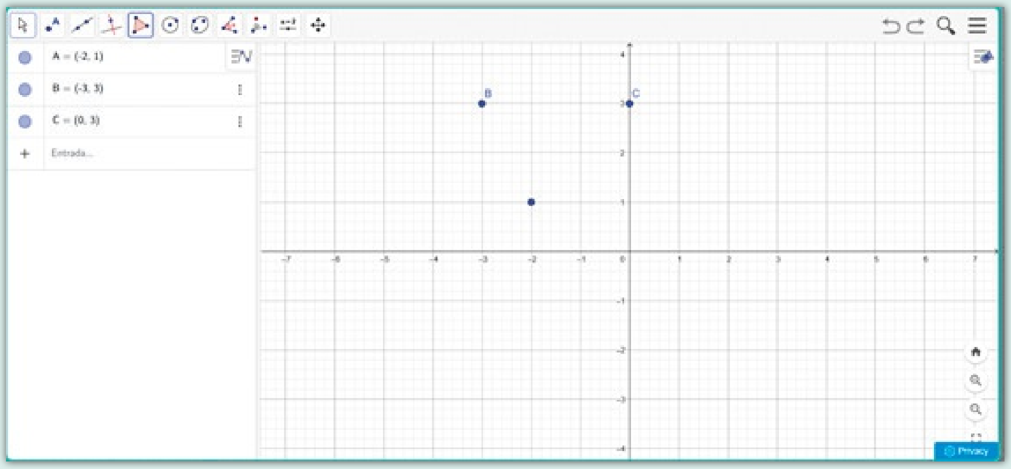


Tarefa

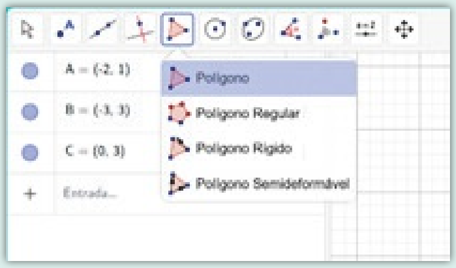
17 Realizar uma translação no GeoGebra

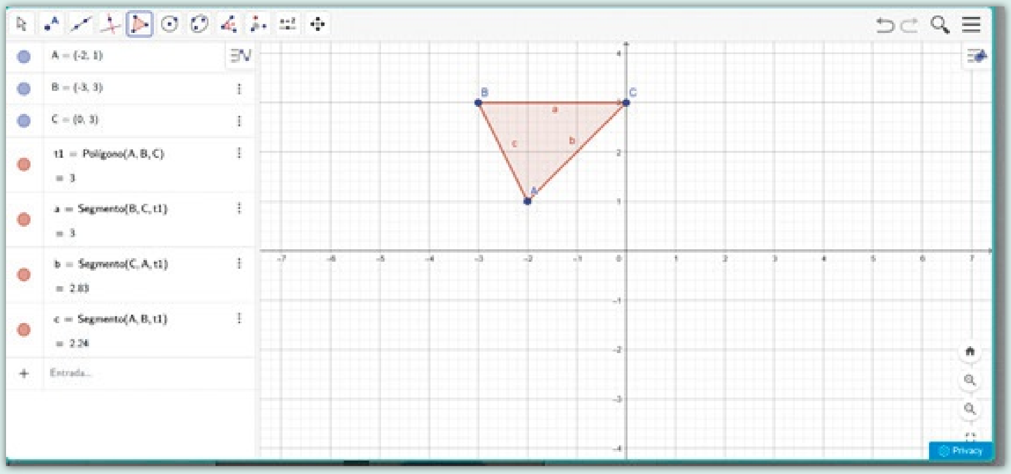
1. Abre o *software.*

2. Marca três pontos, por exemplo, $A(-2,\ 1)$, $B(-3,\ 3)$ e $C(0,\ 3)$.



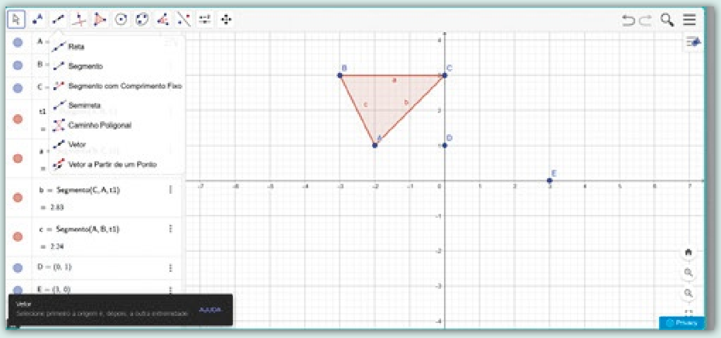
3. Define o triângulo ABC, utilizando a opção Polígono e, de seguida, selecionando os pontos A, B e C.

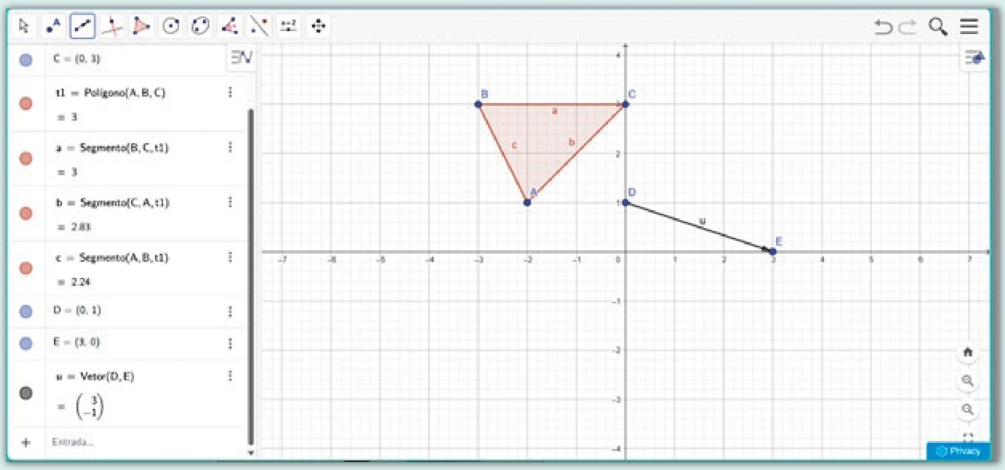




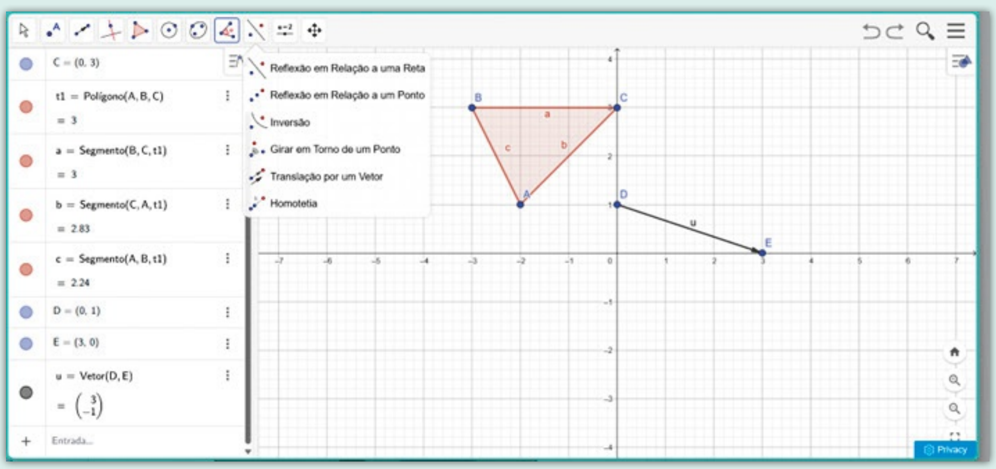
4. Define o vetor associado à translação, marcando os pontos que definem o vetor e, de seguida, utilizando a opção vetor.

Por exemplo, os pontos $D(0\,,\ 1)$ e $E(3\,,\ 0)$.

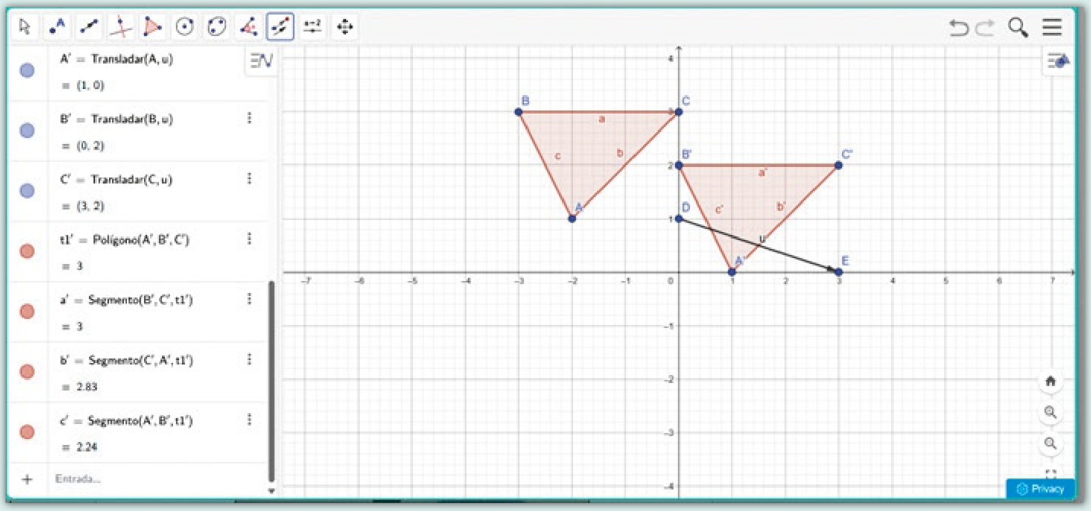




5. Seleciona a opção Translação por um Vetor, selecionando, de seguida, o triângulo e, por fim, o vetor da translação.



6. O *software* constrói a translação do triângulo segundo o vetor $\overrightarrow{DE}$.



Exploração:

Experimenta aplicar outras translações ao triângulo ABC, por exemplo, segundo o vetor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, ... que têm a direção de lados do triângulo.

O que concluis?

Experimenta com outro tipo de figuras geométricas.

Verifica, utilizando as ferramentas de medição do GeoGebra, que o comprimento dos segmentos de reta e a amplitude dos ângulos não se alteram após a translação.

Exercício

44 **Dado o triângulo com vértices $A(2,\ 1)$, $B(4,\ 1)$ e $C(3,\ 3)$: aplica a translação definida pelo vetor $\vec{v} = (-2,\ 4)$.**

44.1. Indica as coordenadas dos vértices do triângulo $A'B'C'$, resultado da translação.

44.2. Representa graficamente os triângulos original e o transformado num referencial cartesiano.

44.3. Verifica que os dois triângulos são congruentes, tratando-se de uma isometria.

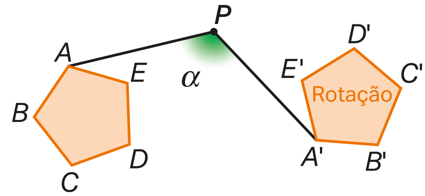
Rotação

Uma rotação é uma transformação geométrica que roda uma figura à volta de um ponto fixo, chamado centro de rotação, por um determinado ângulo e num certo sentido (horário ou anti-horário).

Numa rotação com centro de rotação P e amplitude α, cada ponto A da figura original corresponde a um ponto A' da figura resultante, tal que:

- P é o centro de rotação;
- α é a amplitude do ângulo de rotação; $\overline{PA} = \overline{PA'}$

  $A\hat{P}A' = B\hat{P}B' = C\hat{P}C' = D\hat{P}D' = E\hat{P}E' = \alpha$



A rotação pode ter dois sentidos:

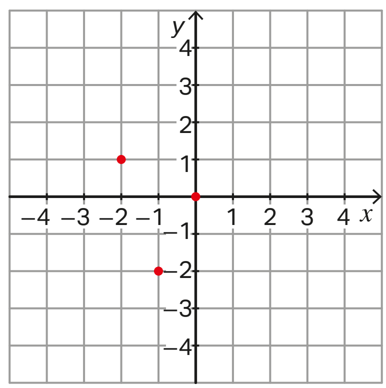
- positivo: quando a figura se move no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;
- negativo: quando a figura se move no mesmo sentido dos ponteiros do relógio.

Portanto, uma rotação:

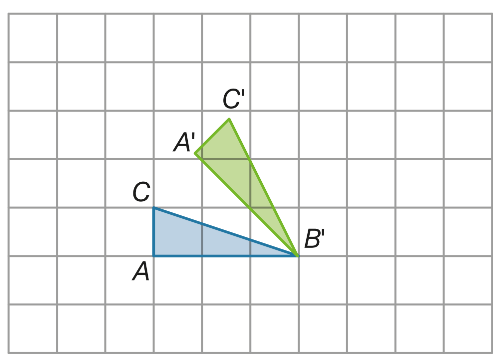
- preserva a orientação relativa da figura,
- cada ponto gira numa circunferência com centro no ponto fixo,
- as figuras resultantes são congruentes – têm a mesma forma e tamanho.

Exemplo 32

- A rotação de $90°$ (sentido anti-horário) e centro na origem do ponto $(-2, 1)$ resulta no ponto $(-1, -2)$.



- A rotação de $-45°$ (sentido horário) e centro em B do triângulo ABC resulta no triângulo $A'B'C'$.



Manual Digital

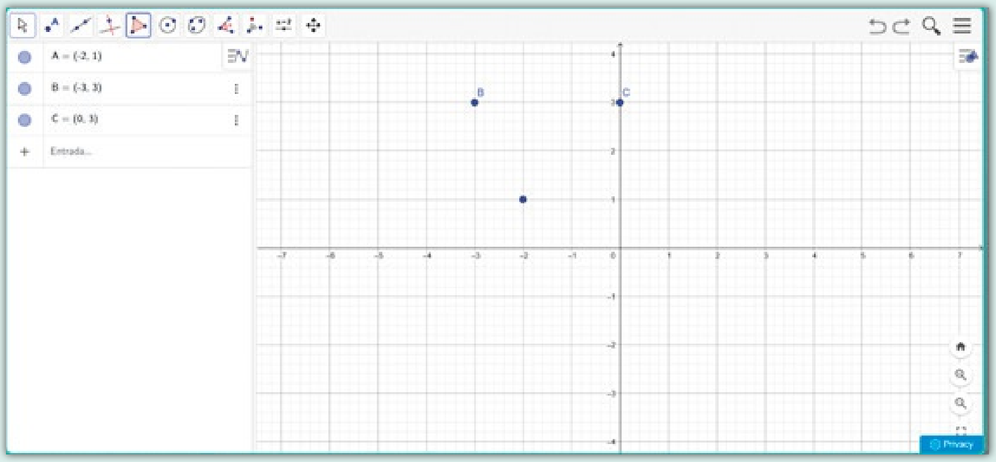
Vídeo
Rotação
- conceito

Tarefa

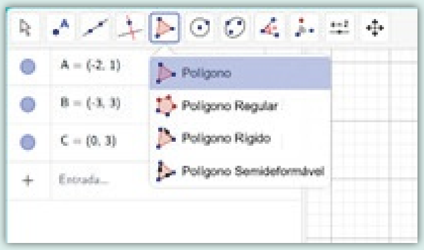
18 Realizar uma rotação no GeoGebra

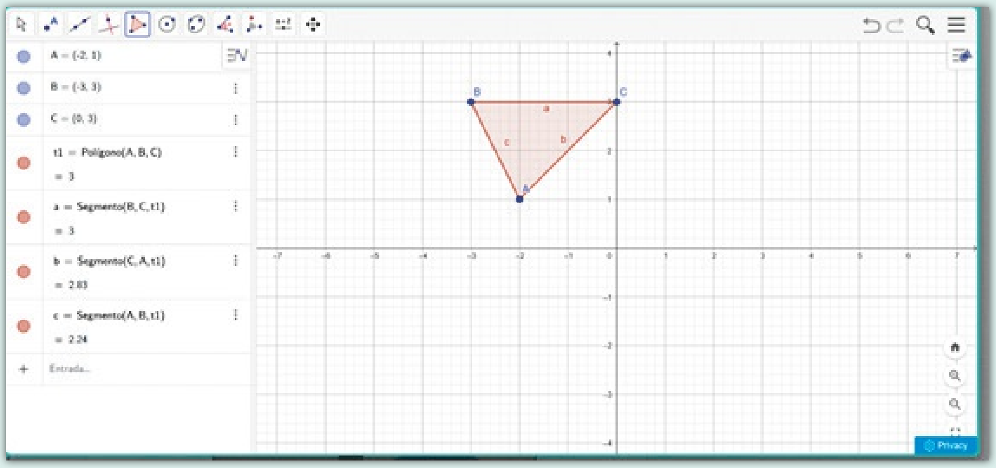
1. Abre o *software.*

2. Marca três pontos, por exemplo, $A(-2\,,\ 1)$, $B(-3\,,\ 3)$ e $C(0\,,\ 3)$.

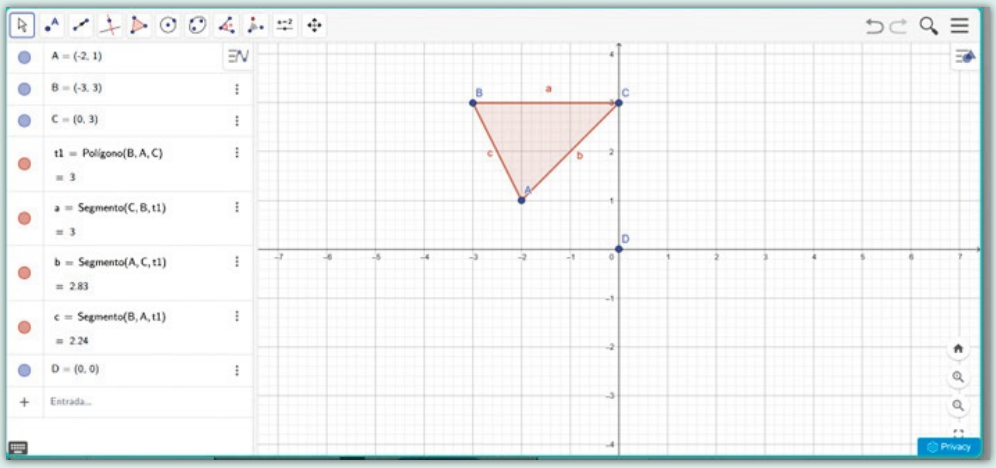


3. Define o triângulo ABC utilizando a opção Polígono e, de seguida, selecionando os pontos A , B e C .

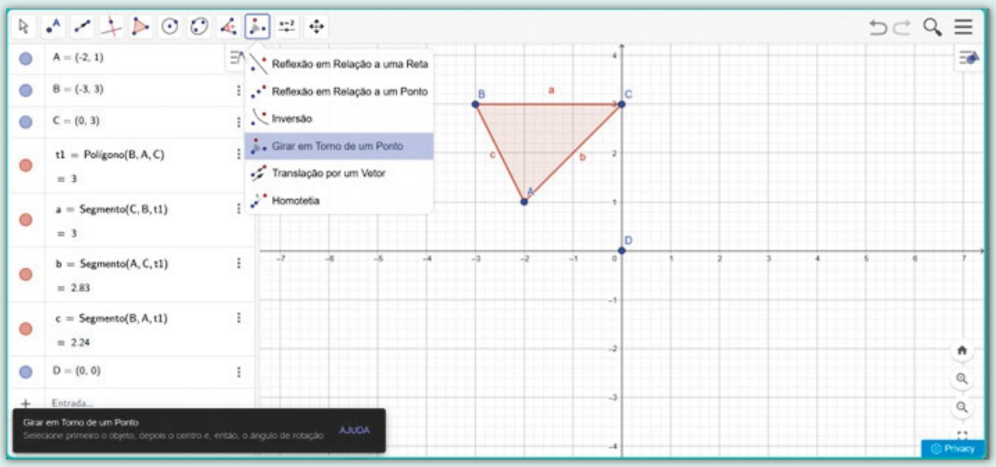


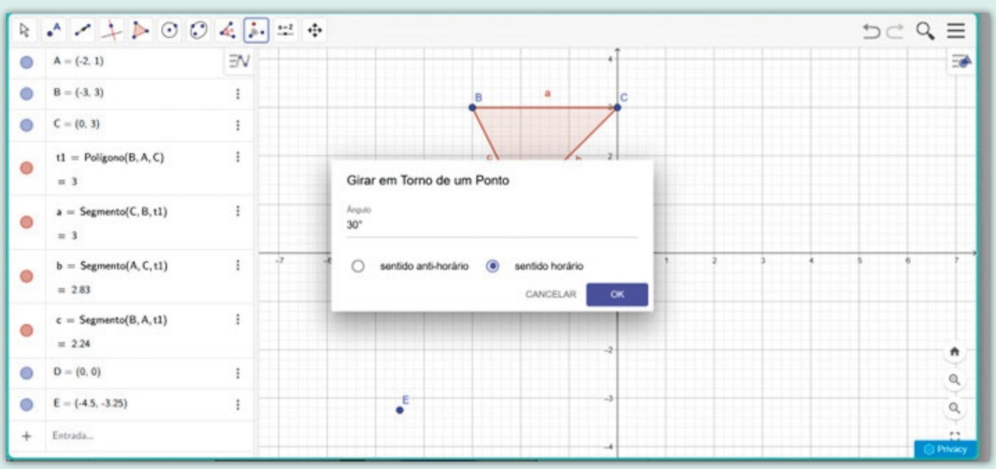


4. Define o centro da rotação, por exemplo, a origem $(0\,,\ 0)$.

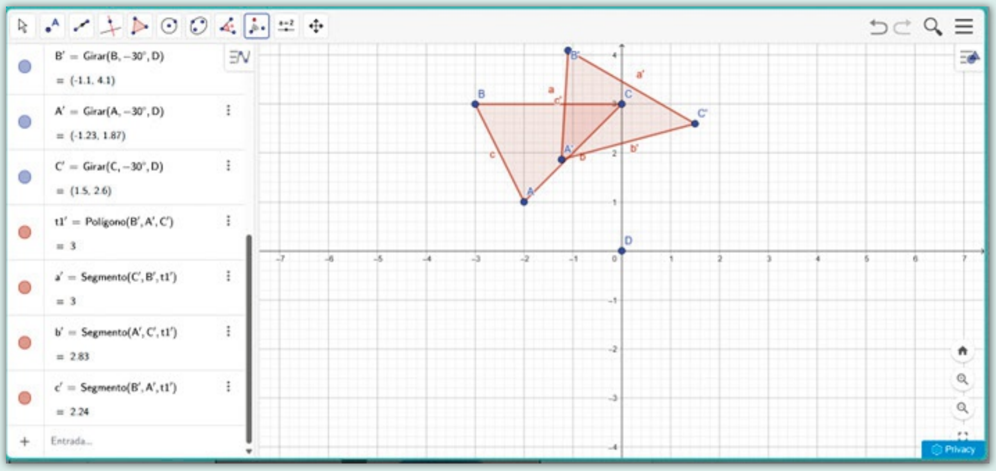


5. Seleciona a opção Girar em Torno de um Ponto, selecionando de seguida o triângulo, o centro da rotação e definindo o ângulo de rotação, por exemplo, $30°$ no sentido horário.





6. O *software* constrói a rotação de $30°$, no sentido horário, e centro em $(0, 0)$ do triângulo ABC.



Exploração:

Experimenta aplicar outras rotações ao triângulo ABC variando o ângulo de rotação e o centro de rotação, por exemplo, os vértices do triângulo e outros pontos externos e internos do triângulo. O que concluis?

Experimenta com outro tipo de figuras geométricas.

Verifica, utilizando as ferramentas de medição do GeoGebra, que o comprimento dos segmentos de reta e a amplitude dos ângulos não se alteram após a translação.

Exercício

45 **O triângulo $A'B'C'$ resulta da rotação do triângulo ABC.**

45.1. Qual é o centro da rotação?

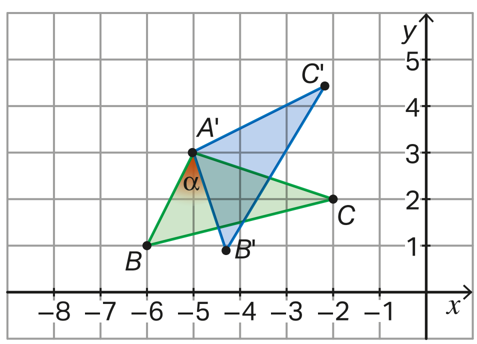
45.2. Qual é o ângulo de rotação?

(A) $45°$ no sentido horário

(B) $45°$ no sentido anti-horário

(C) $90°$ no sentido horário

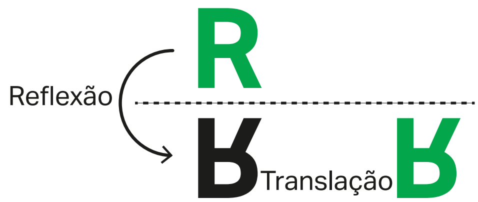
(D) $120°$ no sentido anti-horário



Reflexão deslizante

Uma reflexão deslizante é uma transformação geométrica composta que junta duas operações sucessivas:

- **uma reflexão** numa reta (ou eixo);
- **uma translação** ao longo dessa mesma reta.



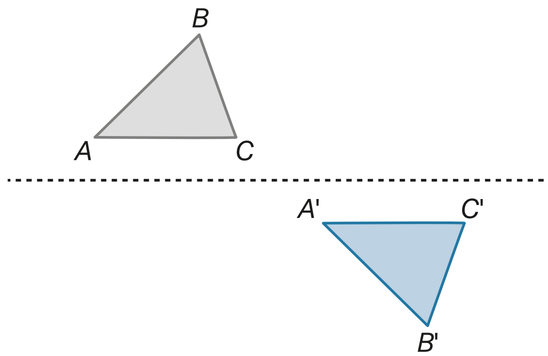
Manual Digital

Vídeo
Reflexão deslizante

Em termos simples, é como espelhar uma figura e depois deslizá-la ao longo do eixo de reflexão.

Uma reflexão deslizante:

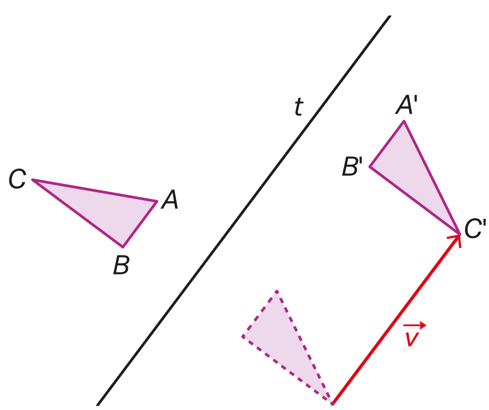
- preserva o tamanho e a forma da figura;
- muda a orientação da figura (tal como a reflexão simples),
- as figuras resultantes são congruentes – têm a mesma forma e tamanho.



Exemplo 33

- Recorrendo a pegadas na areia, em que o pé direito deixa uma marca que é refletida para obter o pé esquerdo, mas o passo seguinte está mais à frente, deslizamos essa imagem ao longo da direção da marcha.

- Refletir o triângulo ABC, segundo o eixo de reflexão t, seguindo-se uma translação, segundo o vetor $\vec{v}$.



Manual Digital

Vídeo
Simetrias de translação e de reflexão deslizante

Tarefa

19 Explorar reflexões deslizantes no GeoGebra

19.1. Constrói no GeoGebra um triângulo ABC.

19.2. Aplica uma reflexão ao triângulo, obtendo o triângulo $A'B'C'$ e de seguida aplica uma translação ao triângulo $A'B'C'$, segundo um vetor com a mesma direção do eixo de reflexão, resultando o triângulo $A''B''C''$.

19.3. Agora, usando a mesma reflexão e a mesma translação que definiste no exercício **19.2.**, aplica primeiro a translação que ao triângulo ABC e ao triângulo obtido a reflexão.

19.4. O que concluis?

19.5. Experimenta com outras figuras geométricas e outras reflexões e translações.

Numa reflexão deslizante, e uma vez que o vetor de translação é paralelo ao eixo de reflexão, a ordem das transformações, reflexão e translação, não altera o resultado final.

Ou seja, se o vetor de translação $\vec{v}$ for colinear com o eixo de reflexão, a composição

$$\text{Reflexão} \circ \text{Translação} = \text{Translação} \circ \text{Reflexão}.$$

Quando o vetor de translação $\vec{v}$ não for colinear com o eixo de reflexão, não estamos a falar de uma reflexão deslizante, e a ordem pela qual se aplicam as transformações geométricas é importante.

Exercício

46 Considera o ponto $A(2\,,\ 3)$.

46.1. Representa graficamente o ponto, num referencial cartesiano.

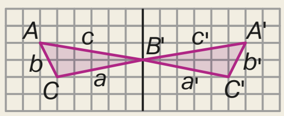
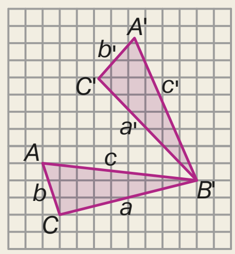
46.2. Reflete o ponto A em relação ao eixo dos x.

46.3. Aplica ao ponto refletido a translação associada ao vetor $\vec{v} = (4\,,\ 0)$.

46.4. Indica as coordenadas finais do ponto após a reflexão deslizante.

Propriedades das isometrias

Depois de estudar as diferentes isometrias, vamos resumir as suas propriedades.

<table>
<tr><th>Isometria</th><th>Translação</th><th>Reflexão</th><th>Rotação</th><th>Reflexão deslizante</th></tr>
<tr><td>Comprimento dos segmentos</td><td colspan="4" rowspan="2">Preserva</td></tr>
<tr><td>Amplitude dos ângulos</td></tr>
<tr><td>Direção e sentido dos segmentos de reta orientados</td><td>Preserva</td><td colspan="3">Não preserva</td></tr>
<tr><td>Pontos fixos (Pontos que se mantêm)</td><td>Nenhum</td><td>Os pontos que se encontrarem no eixo de reflexão

</td><td>O centro, caso pertença à figura

</td><td>Nenhum</td></tr>
</table>

Exercício

47 **Lê com atenção e indica se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando.**

(A) Todas as isometrias preservam as distâncias entre pontos.

(B) Uma translação pode alterar a orientação da figura.

(C) A reflexão é a única isometria que inverte a orientação.

(D) A reflexão deslizante não é uma isometria porque envolve duas transformações.

(E) Uma figura submetida a uma rotação mantém a forma e o tamanho.

(F) A composição de duas reflexões no mesmo eixo equivale a uma translação.

(G) Em todas as translações, há sempre, pelo menos, um ponto que não se altera (ponto fixo).

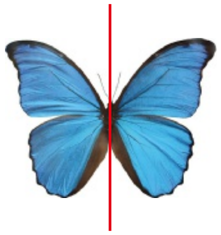
1.4. Simetrias

Manual Digital

Vídeo
Simetrias de reflexão

A simetria é uma propriedade de uma figura, segundo a qual, após uma transformação, a figura se mantém igual ao momento inicial.

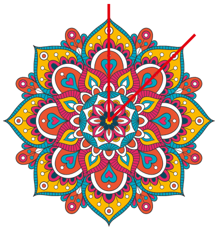
As simetrias estão presentes em muitos contextos da vida real. Podes encontrar na arte, na Natureza, na arquitetura,… muitos exemplos de figuras que satisfazem esta propriedade.



A borboleta pode ser refletida segundo um eixo vertical, mantendo-se a mesma imagem

Um setor da flor pode ser rodado, dando origem a toda a flor, mantendo a forma original

A fachada deste edifício é simétrica relativamente a um eixo vertical.



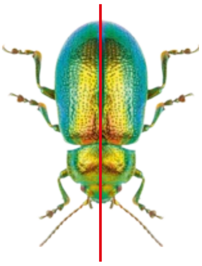
A mandala foi construída repetindo um setor dela. Se a fores rodando, numa certa amplitude, a figura original mantem-se.

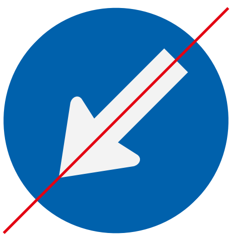
Vejamos dois tipos de simetria.

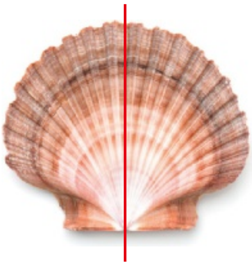
Simetria axial

Uma figura plana diz-se que tem **simetria axial** quando existe uma reflexão tal que a imagem da figura por essa reflexão é a própria figura. Diz-se que a figura plana tem um **eixo de simetria**.

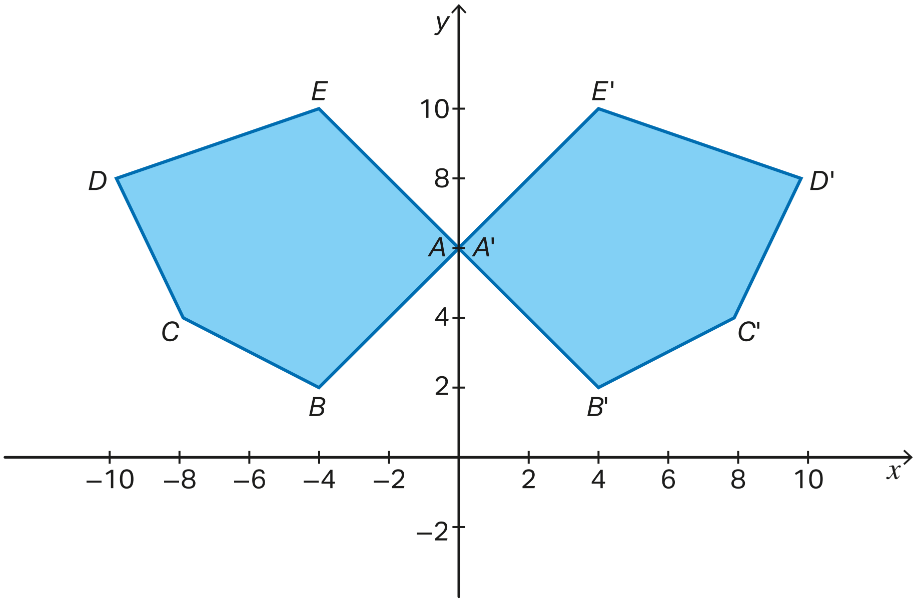
Nos exemplos que se seguem repara que, se dobrarmos a figura pelo eixo traçado, ela sobrepõe-se ponto a ponto.





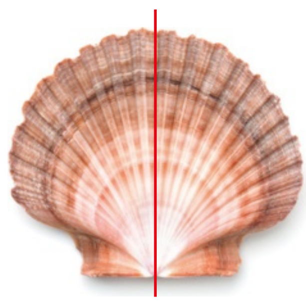


Numa figura com simetria axial, a cada ponto P da figura, em que P não pertence ao eixo de simetria, está associado um ponto P', tal que a reta r (eixo de simetria) é mediatriz do segmento $[PP']$.

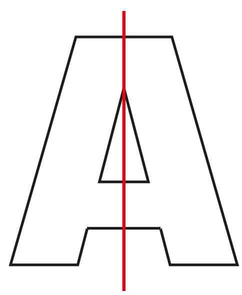


Exemplo 34

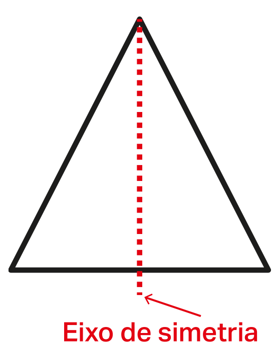
- As conchas de vieiras são geralmente simétricas, relativamente a um eixo vertical.



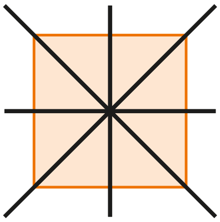
- A letra A maiúscula tem simetria axial.



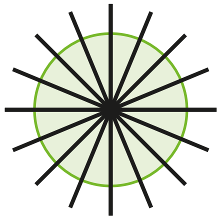
- Um triângulo isósceles tem um eixo de simetria que é a reta que parte do vértice do ângulo diferente (o ângulo formado pelos dois lados iguais) e vai até ao ponto médio do lado desigual (a base). Esse eixo divide o triângulo em duas partes iguais, uma vez que corresponde à mediatriz do lado diferente e à bissetriz do ângulo diferente.



- Um quadrado tem quatro eixos de simetria, apresentando quatro simetrias axiais.



- Um círculo tem uma infinidade de eixos de simetria. Todas as retas que passam pelo centro do círculo dividem-no em dois semicírculos congruentes.



Tarefa

20 Eixos de simetria nos polígonos regulares

Materiais:

- Folhas quadriculadas ou papel vegetal
- Régua e compasso
- Lápis e marcadores

Instruções:

1. **Constrói os seguintes polígonos regulares**, com precisão:
   - triângulo equilátero
   - quadrado
   - pentágono regular
   - hexágono regular
2. Recorta cada uma das figuras.
3. Para cada um dos polígonos regulares construídos, investiga, através de dobragens, todos os eixos de simetria.
4. Compara os teus resultados com os dos teus colegas.
5. Traça, em cada figura, **todos os eixos de simetria** possíveis.
6. Para cada polígono, **responde**:
   - Quantos lados tem?
   - Quantos eixos de simetria conseguiste traçar?
7. Preencha a tabela.

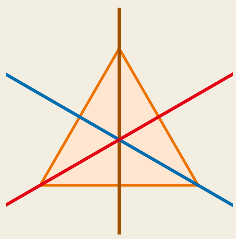
Polígono	N.º de lados	N.º de eixos de simetria	Os eixos passam por vértices?
Triângulo equilátero	3		
Quadrado	4		
Pentágono regular	5		
Hexágono regular	6		

8. **Conclusão (resposta aberta)**

- O que podes concluir sobre a relação entre o número de lados de um polígono regular e o número de eixos de simetria?

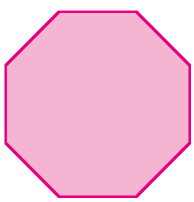
  Para cada vértice de um polígono regular, podemos considerar uma reta que passe por ele e que contenha o centro do polígono. Como os lados e os ângulos são iguais, vamos encontrar um eixo de simetria da figura. Um polígono regular tem tantos eixos de simetria quanto o número de vértices.

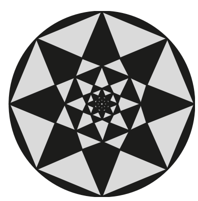
Qualquer polígono regular tem tantos eixos de simetria como lados.

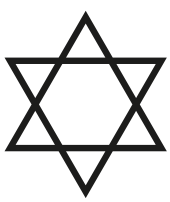
Triângulo equilátero	Pentágono regular
 **3** eixos de simetria **3** simetrias de reflexão	 **5** eixos de simetria **5** simetrias de reflexão

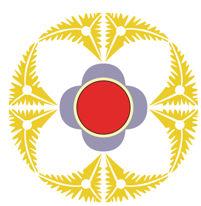
Exercícios

48 Indica, para cada uma das seguintes figuras, o número de simetrias axiais.

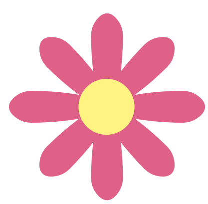
48.1.


48.2.


48.3.


48.4.


48.5.


48.6.


49 Identifica dois exemplos reais de simetria axial fora da sala de aula (em casa, na rua, num objeto ou elemento da Natureza). Regista com uma foto ou desenho e indica o eixo de simetria.

Manual Digital

Vídeos
Resolver problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação

Simetria de rotação

50 **Observa as seguintes figuras geométricas.**

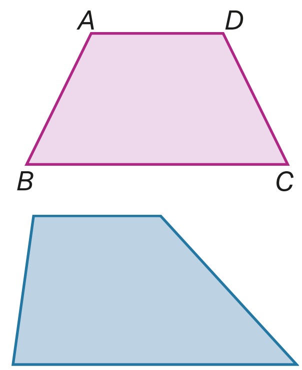
Para cada figura:

50.1. Identifica se tem simetria axial, justificando.

50.2. Traça o eixo de simetria.

50.3. Desenha o reflexo da figura do outro lado do eixo.

50.4. Explica com as tuas palavras o que é simetria axial, com base no que observaste.



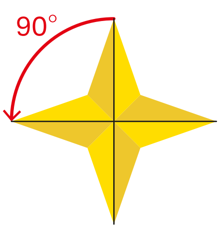
Tarefa

21 **Em pares, criem uma figura original simétrica usando apenas um compasso e régua. Depois, expliquem qual o eixo de simetria da vossa criação.**

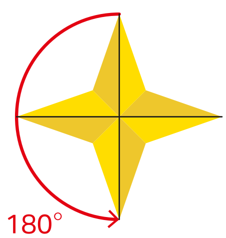
Simetria de rotação

Dizemos que uma figura tem simetria de rotação quando, ao ser rodada uma determinada amplitude, em torno de um ponto, coincide consigo mesma.

Observa o exemplo seguinte.



Um quarto de volta



Meia volta

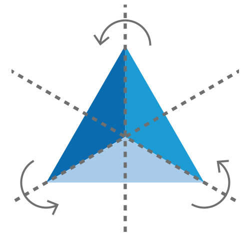
Três quartos de volta

Uma volta

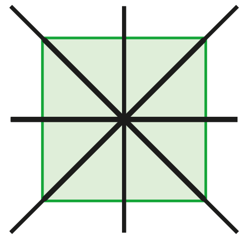
A figura contínua com o mesmo aspeto nas quatro situações de rotação. Isto acontece porque a figura goza da propriedade de simetria de rotação.

Uma figura tem **simetria de rotação de ordem** $\boldsymbol{n}$ **se existir uma rotação com centro** $\boldsymbol{O}$ e amplitude $\theta = \frac{360°}{n}$ de modo que a figura coincide com a original após essa rotação, e isso acontece n vezes numa rotação completa de $360°$.

Exemplo 35

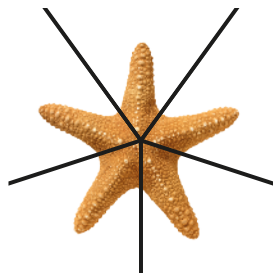


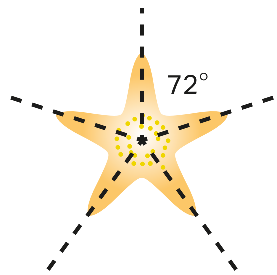
- Triângulo equilátero: tem simetrias de rotação de $120°$, $240°$ e $360°$, logo, a ordem de simetria é 3.



- Quadrado: tem simetrias de rotação de $90°$, $180°$, $270°$ e $360°$, logo, a ordem de simetria é 4.

- Estrela de cinco pontas regular: tem simetrias de rotação de $72°$, $144°$, $216°$, $288°$, $360°$, logo, a ordem é 5.

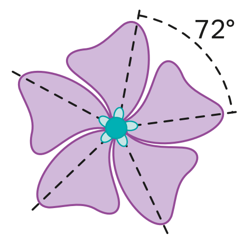




- Uma figura em que um motivo se repete cinco vezes igualmente espaçados, como na imagem, tem simetria de rotação de:

$$\frac{360°}{5} = 72°$$

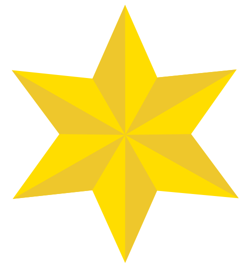
Logo, tem simetrias de rotação de $72°$, $144°$, $216°$, $288°$ e $360°$.



- Uma estrela com seis pontas igualmente espaçadas têm simetria de rotação de:

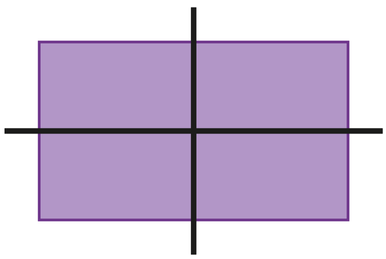
$$\frac{360°}{6} = 60°$$

Logo, tem simetrias de rotação de $60°$, $120°$, $180°$, $240°$, $300°$ e $360°$.



Uma figura sem simetria de rotação apenas coincide consigo própria após $360°$, logo, a sua ordem é 1.

- Reparemos, agora, que há figuras que só gozam da propriedade de simetria de rotação por $180°$ e (naturalmente) $360°$. Um exemplo é o de um retângulo, não quadrado, tem simetria de rotação de ordem 2.



Simetria central

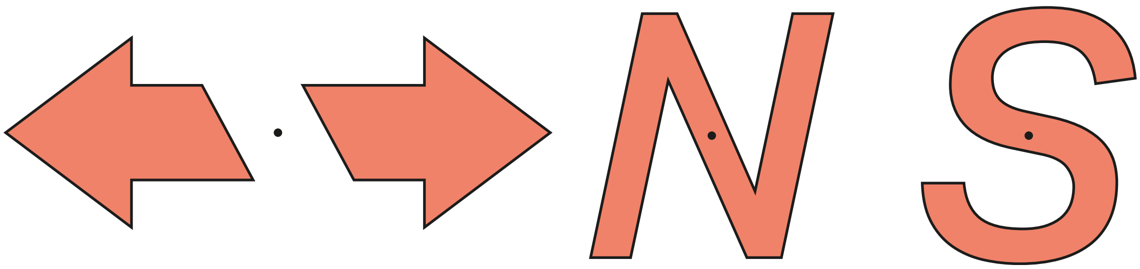
Manual Digital

Vídeos
Simetrias de reflexão e de rotação

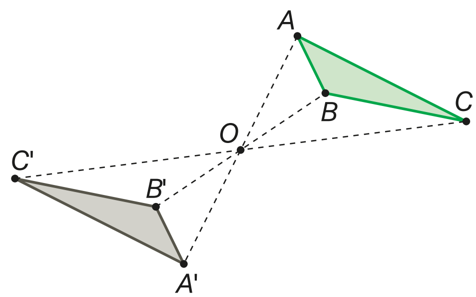
Frisos

Uma figura plana diz-se que tem simetria central quando tem simetria de rotação de ordem 2. Ou seja, após uma rotação de $180°$ ela mantém o seu aspeto.

As figuras seguintes têm apenas duas simetrias de rotação $(180°$ e $360°)$, centradas no ponto assinalado.



Uma simetria central de centro O resulta de uma rotação de $180°$ em que ao ponto P corresponde um ponto P' tal que o ponto O é o ponto médio de $[PP']$.



Nesta situação, dizemos que o ponto simétrico de P é P'.

Exemplo 36

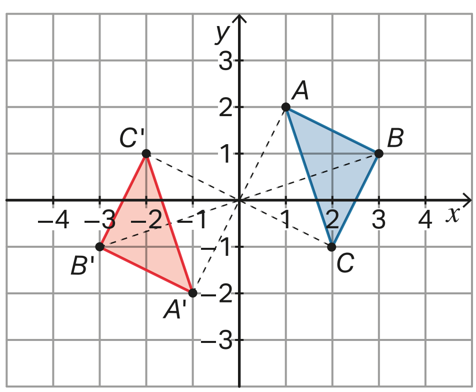
Aplicando uma rotação de amplitude $180°$ e de centro em O, a origem, ao triângulo $[ABC]$ na figura, obtemos o triângulo $[A'B'C']$, tal que:

$A\,(1\,,\,2) \longrightarrow A'(-1\,,\,-2)$

$B\,(3\,,\,1) \longrightarrow B'(-3\,,\,-1)$

$C\,(2\,,\,-1) \longrightarrow C'(-2\,,\,1)$

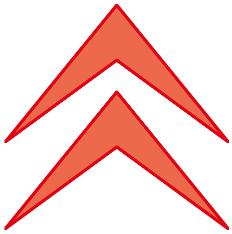
De forma geral, uma rotação de amplitude $180°$ e de centro na origem, $(0\,,\,0)$, transforma o ponto $A\,(x\,,\,y)$ no ponto $A'(-x\,,\,-y)$.



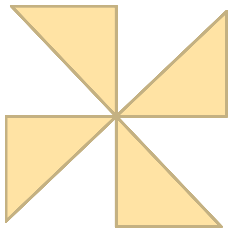
Exercícios

51 Para cada figura indica quantas simetrias de rotação existem.

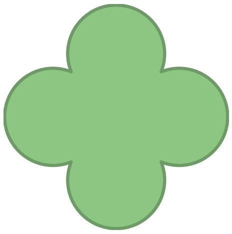
51.1.



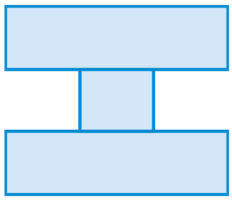
51.2.



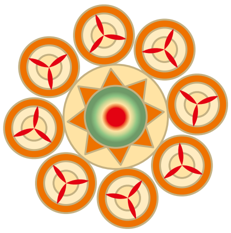
51.3.



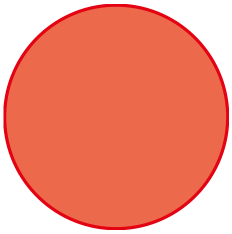
51.4.



51.5.



51.6.



52 Indica o valor lógico das seguintes afirmações.

52.1. Um hexágono regular tem simetria de rotação de ordem 6.

52.2. Um trapézio isósceles tem simetria de rotação de $180°$.

52.3. Um retângulo tem simetria de rotação de ordem 2.

52.4. Um círculo tem simetria de rotação de qualquer ângulo.

52.5. Uma letra "N" (em tipo de letra normal) tem simetria de rotação de $180°$.

53 Completa a tabela.

Figura	Ângulo mínimo de rotação que gera coincidência	Ordem de simetria
Triângulo equilátero		
Quadrado		
Pentágono regular		
Retângulo (não quadrado)		
Círculo		

Tarefa

22 Produção artística

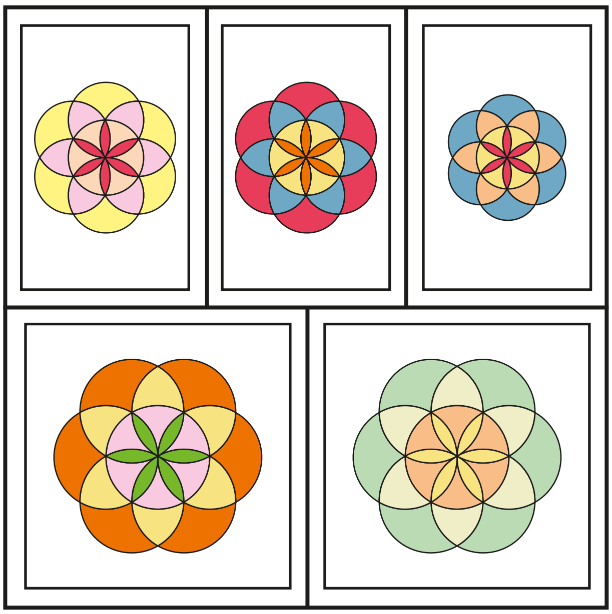
Cria uma figura com **simetria de rotação de ordem 4**, definindo bem o centro, repetindo um motivo quatro vezes em torno do centro.

Usa régua e compasso ou um *software* como o GeoGebra.

1.4.1. Rosáceas, frisos, padrões e pavimentações

Rosáceas

Em Matemática, **rosáceas** são figuras geométricas com simetrias de rotação em torno de um ponto central.



Assim, uma rosácea:

- possuí um centro de simetria (o ponto em torno do qual a figura roda);
- a figura coincide consigo própria após rotações de um certo ângulo.
- o número de simetrias de rotação está relacionado com o número de repetições no círculo (ex.: quatro rotações, cada uma de $90°$);
- podem ou não ter também simetrias axiais.

Uma **rosácea** é uma figura que apresenta **simetrias de rotação** em torno de um ponto central (pode ou não ter também simetrias axiais), mantendo-se **invariante sob essas transformações**.

Alguns exemplos de rosáceas podem ser encontrados na Arte, em particular, em elementos arquitetónicos:

Rosácea de estilo gótico, na Catedral de Notre-Dame, Paris, França

Janela com vitral na basílica Santa Croce, Florença, Itália

Mosaico ornamental em El Jem – Tunisia.

Frisos

Em Matemática, frisos são padrões geométricos que se repetem infinitamente numa única direção por meio de translações.

Assim, num friso existem sempre translações, mas também se podem observar outras isometrias:

- translação (sempre presente);
- reflexão (horizontal ou vertical);
- rotações.

Um **friso** é um padrão geométrico que se repete **infinitamente numa só direção** (linear), mantendo-se invariante sob pelo menos **uma translação** ao longo dessa direção.

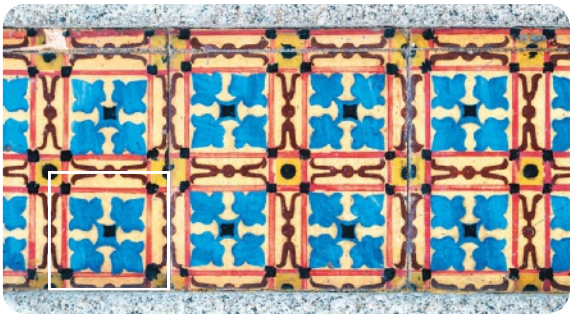
Num friso, é possível identificar sempre o motivo-base, ou seja, a menor parte do padrão que, ao ser repetida por translação, permite construir todo o friso.

Um **motivo-base** é a figura mínima que, através de uma translação ao longo de uma direção, gera todo o friso sem sobreposições nem espaços.

Exemplo 37

- Frisos em azulejos ou muros.

- Bordas de tapeçarias ou roupa.



- Arquitetura, frisos gregos e romanos

Exercício

54 **Observa o friso abaixo.**

54.1. Indica o motivo-base.

54.2. Que tipo de isometrias identificas?

Padrões

Um padrão é uma figura que se repete regularmente no plano, segundo uma rede de translações em pelo menos duas direções distintas.

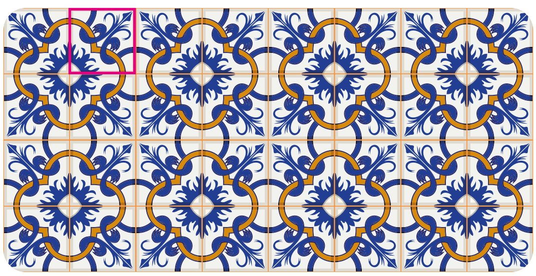
Um padrão tem as seguintes características:

- tem por base um motivo (figura simples);
- repetido por translações no plano;
- pode também apresentar rotações e translações.

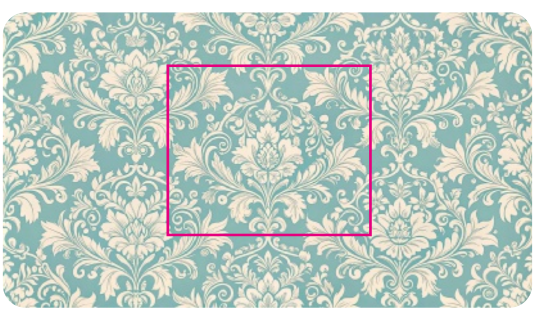
O **motivo-base** num padrão é o elemento gráfico mais simples e repetível a partir do qual se constrói todo o padrão. É a unidade fundamental que, ao ser replicada (por repetição, simetria, rotação, translação, etc.), gera o conjunto visual completo do padrão.

Exemplo 38

- Num azulejo decorativo, o motivo-base pode ser uma flor ou uma forma geométrica.



- Num tecido estampado ou papel de parede, pode ser uma figura que se repete a intervalos regulares.



Nem sempre o motivo-base é óbvio à primeira vista. Às vezes, é preciso isolar a menor unidade que se repete para o identificar corretamente.

Manual Digital

Atividade
Pavimentações do plano

Exercícios

55 Cria um padrão com base num triângulo ou quadrado. Indica as translações usadas e simetrias observadas.

56 Considera o seguinte painel de azulejo:

56.1. Identifica o motivo-base.

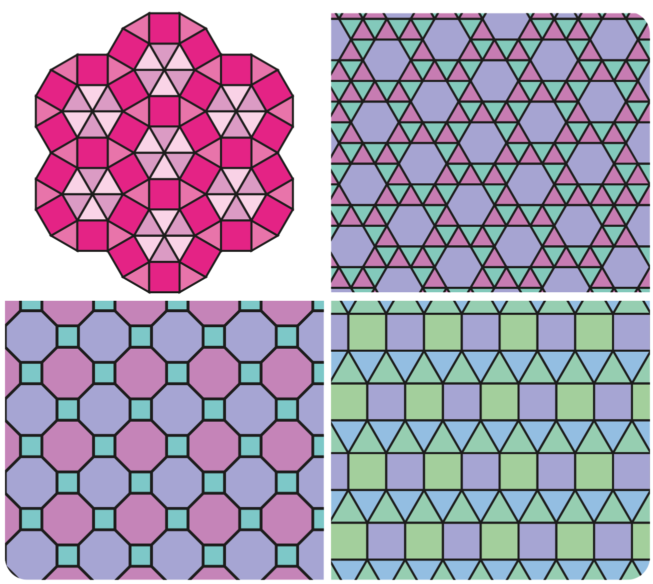
56.2. Que tipo de isometrias consideras terem sido utilizadas para a construção deste padrão?

Pavimentações

Uma **pavimentação** é uma cobertura completa e sem sobreposições do plano com figuras geométricas (geralmente polígonos), chamadas ladrilhos, de forma que não fiquem espaços vazios.

Existem diferentes tipos de pavimentações, dependendo do tipo de figuras geométricas utilizadas.

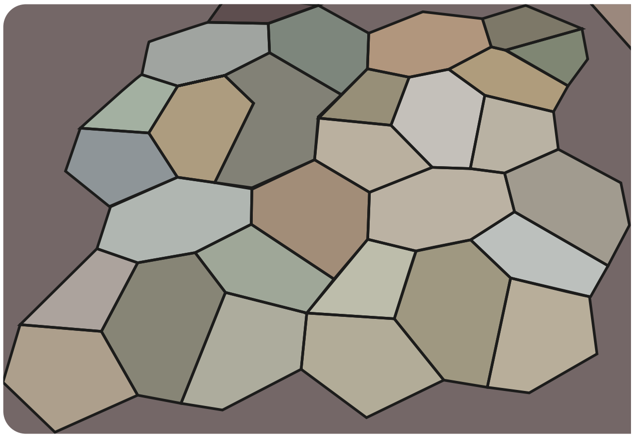
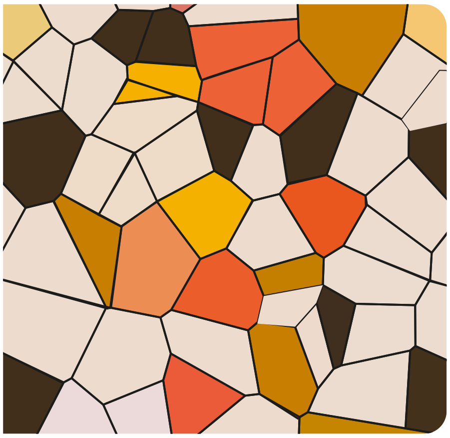
- **Semirregulares**: combinam dois ou mais polígonos regulares.



- **Regulares**: usam um único polígono regular (triângulo, quadrado, hexágono)

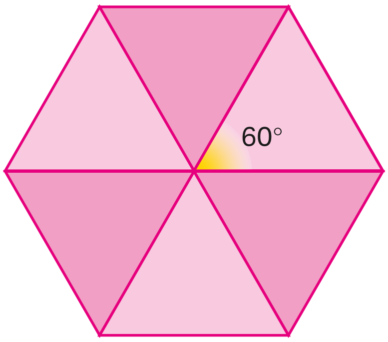


- **Irregulares**: recorrem a polígonos não regulares, mas podem seguir regras geométricas.

Podemos comprovar que triângulos equiláteros podem pavimentar o plano, por observação dos ângulos internos que partilham um vértice. Repara.

Para pavimentar o plano com triângulos equiláteros, convergimos em cada vértice 6 ladrilhos:



Em cada um dos triângulos, temos a convergir para o vértice um ângulo de amplitude de 60°. Então, os 6 ladrilhos todos juntos, vão formar, naquele vértice, um ângulo de $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, cobrindo totalmente aquela zona.

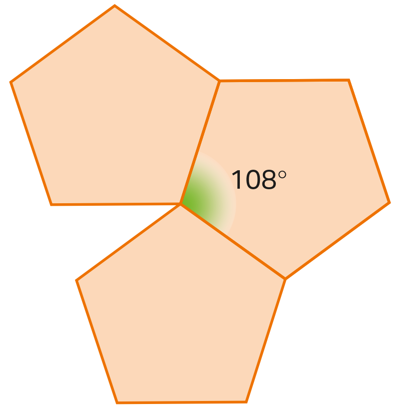
Vejamos, agora, que usando pentágonos regulares não é possível pavimentar o plano.

Cada ladrilho terá, em cada vértice, um ângulo interno com amplitude de $108°$.

Se juntarmos dois ladrilhos, num vértice, teremos $2 \times 108° = 216°$, fica espaço vazio.

Se juntarmos três ladrilhos, num vértice, teremos $3 \times 108° = 324°$, continua a ficar espaço vazio.

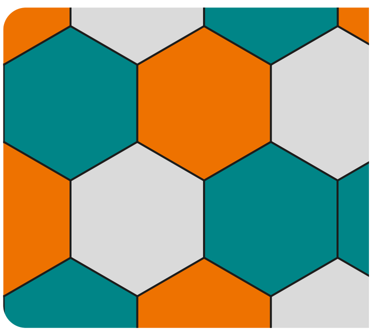
Se juntarmos quatro ladrilhos, num vértice, teremos $4 \times 108° = 432°$, só seria possível se houvesse sobreposição de peças, que não pode ocorrer em pavimentações.

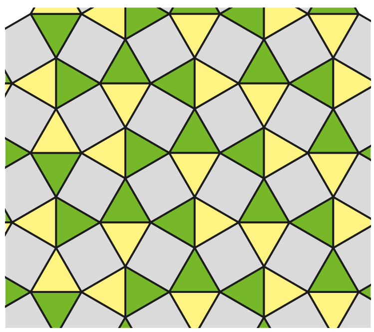


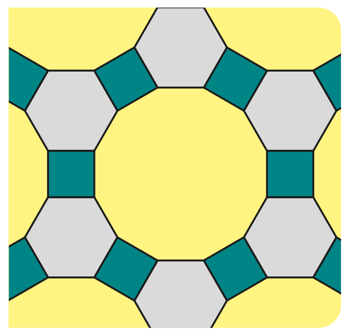
Exercícios

57 **Triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos são os únicos polígonos regulares que podem pavimentar o plano sozinhos. Justifica com base no estudo dos ângulos internos.**

58 **Em cada uma das seguintes imagens, indica o tipo de pavimentações.**







1.4.2. Aplicação artística

A Matemática e a Arte, embora pareçam disciplinas distintas, encontram-se de forma surpreendente no estudo da simetria, da repetição e da forma.

Propomos a realização de um projeto que te convida a explorar essa ligação através da criação de uma obra original inspirada em frisos, padrões, rosáceas ou pavimentações. Usando transformações geométricas como translações, rotações e reflexões, vais aplicar os conhecimentos de geometria para produzir uma composição visualmente interessante, rigorosa e criativa. O objetivo é mostrar que a matemática também pode ser bela – e que a Arte pode ter lógica.

Projeto: Arte matemática – Geometria com criatividade

Objetivo:

Promover o desenvolvimento do pensamento geométrico, da criatividade e da apreciação estética através da criação de obras baseadas em frisos, padrões, rosáceas e pavimentações.

Conceitos a trabalhar:

- **Isometrias** (translação, rotação, reflexão)
- **Frisos e simetrias**
- **Padrões e pavimentações** regulares, semirregulares e com motivos próprios
- **Rosáceas** com diferentes ordens de simetria

Tarefa

23 **A tua missão é criar uma obra artística com base em conceitos matemáticos. Usa a geometria para desenhar beleza.**

Escolha do tema: Cada grupo ou aluno escolhe um dos seguintes:

- Criar um **friso** com repetições de uma figura usando translação e simetrias.
- Construir uma **rosácea** com centro de rotação.
- Elaborar uma **pavimentação** tipo mosaico, inspirada em Escher ou em padrões islâmicos.
- Compor um **padrão artístico** que envolva, pelo menos, duas isometrias.

Execução

Podem usar papel vegetal, compasso, régua, esquadro ou ferramentas digitais, como GeoGebra.

Apresentem a explicação das **transformações geométricas** que usaram e **como as aplicaram**.

Exposição final

Quando concluírem o trabalho, podem organizar uma exposição na escola ou na sala, criando um pequeno cartaz explicativo junto de cada obra.

Poderá ser também interessante promoverem uma votação nas obras mais criativas, rigorosas ou surpreendentes.

Síntese

Figuras congruentes: figuras que têm **o mesmo tamanho** e **a mesma forma**, mesmo que estejam em posições diferentes no plano (viradas, refletidas ou deslocadas).

Características das figuras congruentes:

- os lados correspondentes têm os mesmos comprimentos;
- os ângulos correspondentes têm a mesma amplitude;
- sobrepõem-se perfeitamente se forem colocadas uma sobre a outra.

Transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original, se forma outra geometricamente igual (congruente) ou semelhante (ampliação ou redução) à primeira.

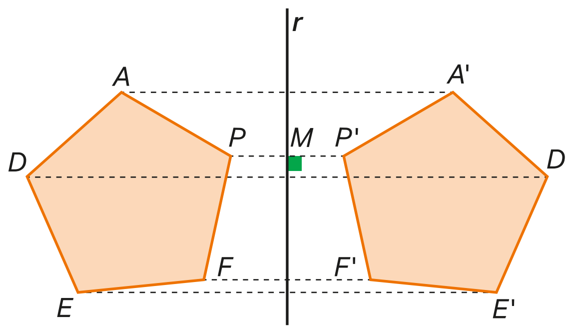
Homotetia é uma transformação geométrica não isométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém a sua forma e a orientação relativa dos seus pontos.

Isometria é uma transformação geométrica que preserva a distância entre pontos e a amplitude dos ângulos, isto é, a figura inicial e o seu transformado são congruentes.

- **Reflexão** é uma transformação geométrica que "espelha" uma figura em relação a uma reta (no plano) ou a um plano (no espaço tridimensional), essa reta diz-se eixo de reflexão.

  Numa reflexão, com eixo r, cada ponto P da figura original corresponde a um ponto P' de tal forma que:

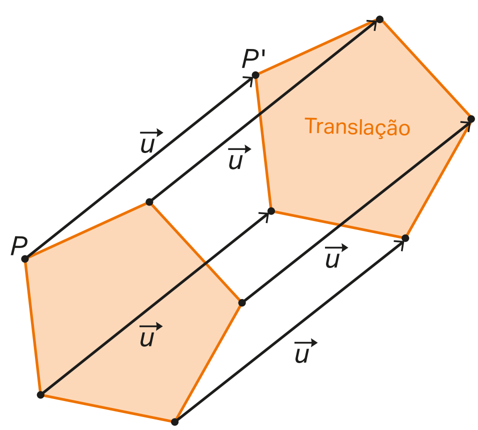
  - r é o eixo de reflexão;
  - P' é o simétrico de P;
  - o segmento PP' é perpendicular ao eixo r;
  - a distância de P a r é igual à distância de P' a r, ou seja, para qualquer ponto $M \in r$, $\overline{PM} = \overline{P'M}$.



- **Translação** é uma transformação geométrica que move todos os pontos de uma figura na mesma direção e pela mesma distância – sem girar, espelhar ou alterar o tamanho ou a forma da figura é definida por um vetor.

  Numa translação no plano associada ao vetor $\vec{u}$, cada ponto P da figura original corresponde a um ponto P' tal que:

  - $\vec{u}$ é o vetor de orientação da translação
  - $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$

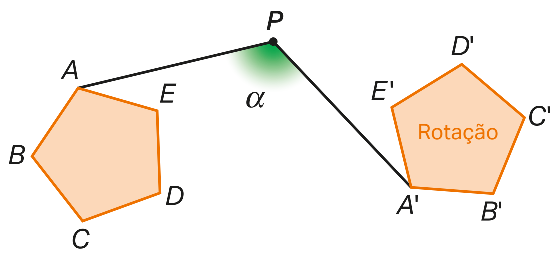


Síntese

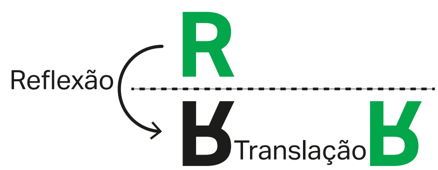
- **Rotação** é uma transformação geométrica que roda uma figura à volta de um ponto fixo, chamado centro de rotação, por um determinado ângulo e num certo sentido (horário ou anti-horário).

  Numa rotação com centro de rotação P e amplitude α, cada ponto A da figura original corresponde um ponto A' da figura rotacionada, tal que:

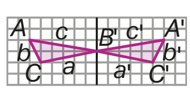
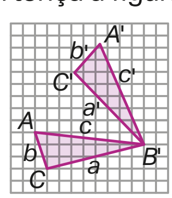
  - P é o centro de rotação;
  - α é a amplitude do ângulo de rotação;
  - $\overline{PA} = \overline{PA'}$
  - $A\hat{P}A' = B\hat{P}B' = C\hat{P}C' = D\hat{P}D' = E\hat{P}E' = \alpha$



- **Reflexão deslizante** é uma transformação geométrica composta que junta duas operações sucessivas:
  - **uma reflexão** numa reta (ou eixo);
  - **uma translação** ao longo dessa mesma reta.

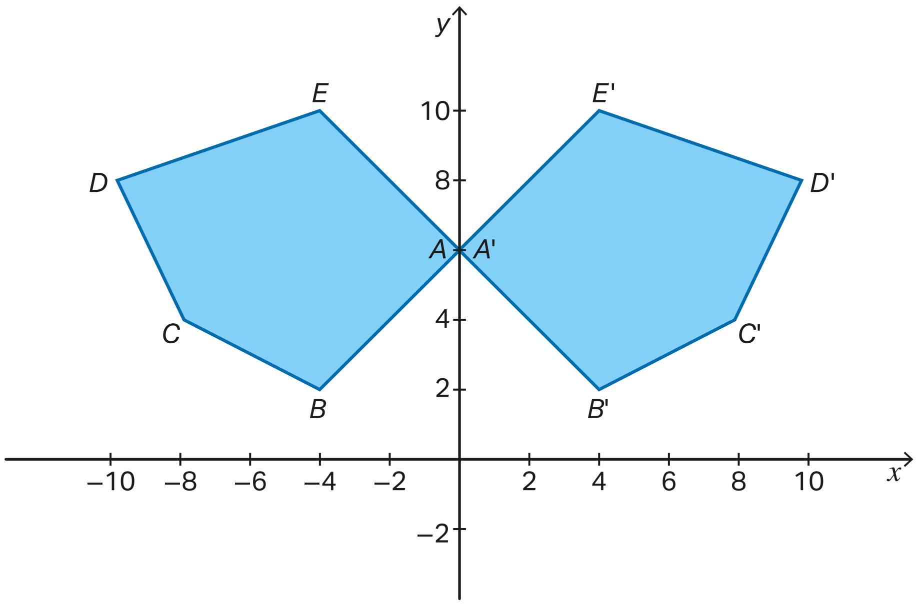


Propriedades das isometrias

Isometria	Translação	Reflexão	Rotação	Reflexão deslizante
Comprimento dos segmentos	**Preserva**			
Amplitude dos ângulos				
Direção e sentido dos segmentos de reta orientados	**Preserva**	**Não preserva**		
Pontos fixos (Pontos que se mantém)	Nenhum	Os pontos que se encontrarem no eixo de reflexão 	O centro, caso pertença à figura 	Nenhum

Síntese

Uma figura plana diz-se que tem **simetria axial** quando existe uma reflexão tal que a imagem da figura por essa reflexão é a própria figura. Diz-se que a figura plana tem um **eixo de simetria.**



Uma figura plana diz-se que tem **simetria central** quando existe uma rotação de $180°$, tal que a imagem da figura por essa rotação é a própria figura.

Uma figura tem **simetria de rotação de ordem** n se existir uma rotação com centro O e amplitude $\theta = \frac{360°}{n}$ tal que a figura coincide com a original após essa rotação, e isso acontece n vezes numa rotação completa de $360°$.

Conceito	Base geométrica	Isometrias associadas	Exemplos reais
Rosácea	Rotação num ponto	Rotação, reflexão	Rosácea gótica, mandala
Friso	Translação linear	Translação + outras isometrias	Frisos de azulejos
Padrão	Translação no plano	Translação + rotação/reflexão	Tecidos, papel de parede
Pavimentação	Ocupação de todo o plano	Variadas, depende dos ladrilhos	Mosaicos, chão em azulejo

Para aplicar

1 **Lê as afirmações e indica o valor lógico de cada uma, corrigindo as falsas.**

(A) Todas as transformações isométricas conservam o tamanho e a forma da figura.

(B) A homotetia é uma transformação isométrica.

(C) A reflexão deslizante é a composição de uma reflexão com uma translação.

(D) A simetria central equivale a uma rotação de $180°$.

(E) Os frisos possuem apenas translações.

(F) Uma rosácea pode ter simetria rotacional e simetria axial.

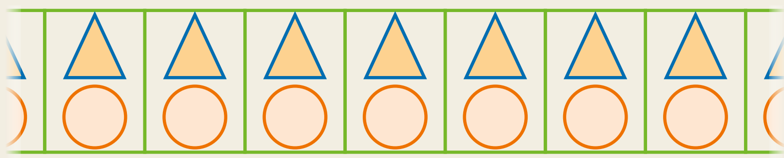
(G) Um padrão é sempre uma repetição regular num plano, sem sobreposições, nem intervalos.

(H) A simetria rotacional existe quando há pelo menos um eixo de simetria.

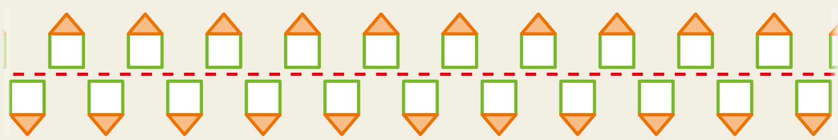
(I) As figuras congruentes podem ter orientação diferente.

2 **Identifica, para cada friso, todas as isometrias presentes.**

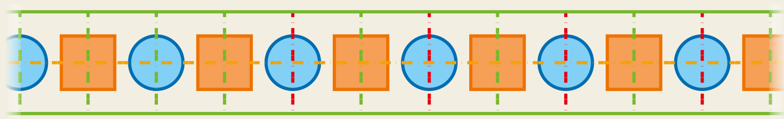
2.1.



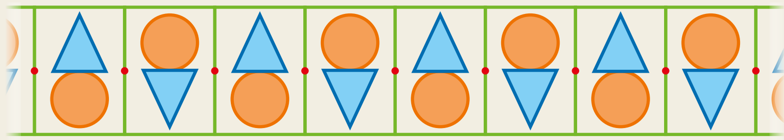
2.2.



2.3.



2.4.

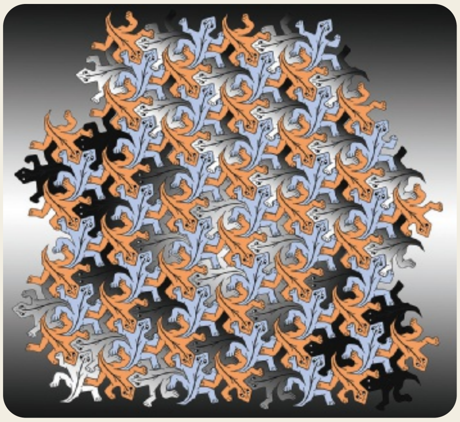


Para aplicar

3 Observa o seguinte padrão:

3.1. Identifica o motivo-base.

3.2. Quais são as isometrias presentes neste padrão?



4 Indica, em cada uma das figuras, o número de simetrias axiais, centrais e de rotação.

4.1.

4.2.

4.3.

4.4.

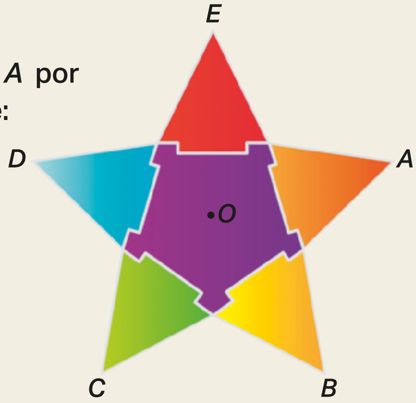
5 Na imagem ao lado, qual é a imagem do ponto A por meio de uma rotação de centro O e amplitude:

5.1. 72°

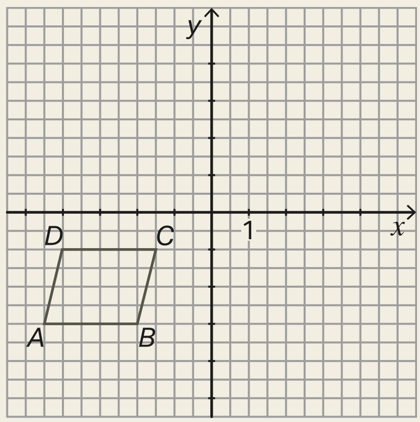
5.2. – 72°

5.3. 144°

5.4. – 216°



6 **Considera o seguinte paralelogramo representado num referencial cartesiano, em que cada quadrícula corresponde a uma unidade de medida.**



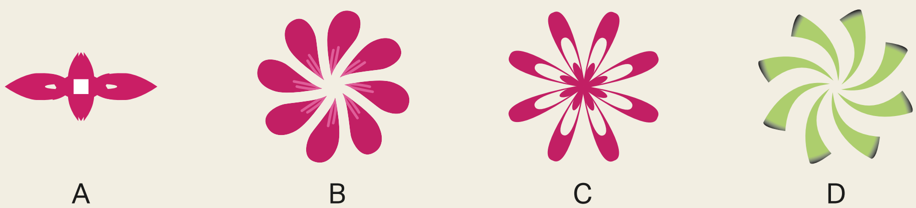
6.1. Indica as coordenadas dos vértices do paralelogramo.

6.2. Aplicando uma reflexão associada ao eixo $x = -1$, indica as coordenadas dos vértices do paralelogramo no paralelogramo refletido $[A'B'C'D']$.

6.3. Quais são as coordenadas dos vértices do paralelogramo $[ABCD]$ após lhe ser aplicada uma translação segundo o vetor $\vec{v}(5\ ,\ 0)$.

6.4. Esboça o paralelogramo resultante de uma rotação de centro em C e amplitude $45°$.

7 **Observa as seguintes rosáceas.**



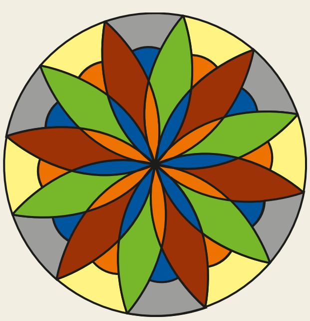
7.1. Qual tem simetria de reflexão e simetria de rotação de ângulo mínimo $45°$?

7.2. Qual não tem simetria de reflexão?

7.3. Qual a rosácea que apenas apresenta simetria de rotação?

7.4. Qual o ângulo mínimo de rotação?

8 **Observa a seguinte rosácea.**



8.1. A rosácea apresenta simetria **rotacional**? Se sim, qual o ângulo mínimo de rotação que a deixa invariante?

8.2. Apresenta simetria **axial**? Se sim, quantos eixos de simetria possui?

8.3. Se aplicares uma **rotação de $60°$** em torno do centro da rosácea, a figura coincide consigo mesma?

8.4. Explica por que razão esta figura é considerada uma rosácea e não um friso ou um padrão.

Teste

1 Considera o ponto fixo C e um número real positivo r. O conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a C é **menor ou igual** a r corresponde:

(A) À superfície esférica de centro C e raio r.

(B) À parte interna da esfera, excluindo a superfície.

(C) À esfera, incluindo a superfície.

(D) A um plano esférico.

2 A área de um círculo A é de 9π. Qual o perímetro de um círculo B, tal que o raio de B é o dobro do raio de A?

(A) 12π **(B)** 18π **(C)** 36π **(D)** 81π

3 Um setor circular tem raio 6 cm e amplitude $90°$. Qual das afirmações é verdadeira?

(A) Ocupa metade da área do círculo.

(B) O comprimento do arco é igual ao raio.

(C) A área do setor é um quarto da área do círculo.

(D) O setor tem sempre a mesma área, qualquer que seja o raio.

4 Considera, no espaço, um ponto P. Qual o lugar geométrico definido pelos pontos do espaço cuja distância ao ponto P é igual a 10 cm?

(A) Superfície esférica de centro em P e raio 10 cm.

(B) Círculo de centro em P e raio 10 cm.

(C) Esfera de centro P e raio 10 cm.

(D) Circunferência de centro P e raio 10 cm.

5 A Maria disse: "O volume de um cone é igual ao de um cilindro com a mesma base e altura". O que se pode concluir?

(A) Os dois têm o mesmo volume.

(B) A altura do cone é o triplo da do cilindro.

(C) O raio da base do cone é maior.

(D) A Maria está errada, pois o volume do cone é menor.

6 Um guarda-redes posiciona-se exatamente à mesma distância dos dois postes. A sua posição pertence a:

(A) Uma circunferência

(B) Uma bissetriz

(C) Uma mediatriz

(D) Um setor circular

7 **Uma transformação que conserva forma e tamanho chama-se:**

(A) Homotetia

(B) Isometria

(C) Dilatação

(D) Ampliação

8 **Qual das seguintes figuras apresenta simetria de rotação de ordem 4?**

(A) Um triângulo equilátero

(B) Um quadrado

(C) Um retângulo

(D) Um círculo

9 **Qual das afirmações sobre simetria é verdadeira?**

(A) Um pentágono regular tem 10 eixos de simetria.

(B) Um triângulo escaleno tem exatamente uma simetria axial.

(C) Um círculo tem infinitos eixos de simetria.

(D) Um losango nunca tem simetria rotacional.

10 **Um triângulo equilátero é submetido a uma rotação de $120°$ no plano, com centro num dos seus vértices.**

Qual das afirmações é verdadeira sobre a figura resultante?

(A) A figura resultante é congruente, mas com orientação oposta à original.

(B) A figura resultante coincide exatamente com a figura original.

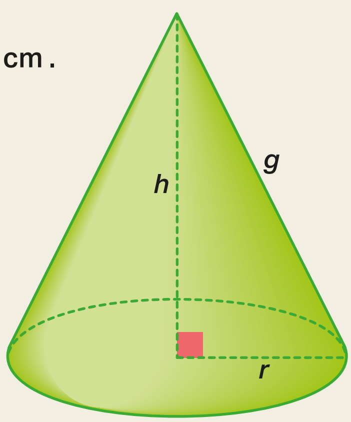
(C) A figura resultante tem o mesmo perímetro, mas não é sobreponível à original.

(D) A figura resultante é um triângulo isósceles com vértices trocados.

11 **A geratriz de um cone mede 13 cm e a altura é 5 cm.**

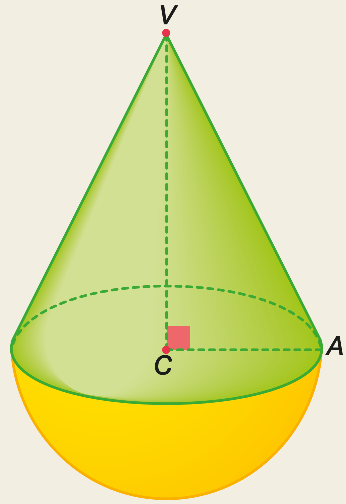
11.1. Qual é o raio da base?

11.2. Qual o volume de um **cilindro** com a mesma base e a mesma altura?



Teste

12 **Considera o sólido geométrico ao lado, composto por um cone e uma semiesfera. Sabendo que $\overline{AC} = 6$ cm e que $\overline{VA} = 18$ cm.**



12.1. Qual é a altura do cone?

12.2. Determina o volume da figura.

12.3. Determina a área da superfície da figura.

13 **Dois amigos colocam-se à mesma distância de um poste. Qual é o lugar geométrico dos pontos possíveis para as suas ocupações?**

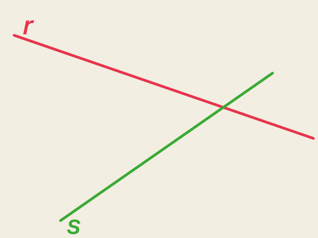
14 **Uma estação de tratamento de resíduos tem de estar à mesma distância de duas aldeias, mas fora de um círculo de centro no ponto médio entre as duas aldeias e raio de 20 km. Representa a situação.**

15 **Um radar, localizado numa torre de controlo ao nível do mar, deteta um avião que se encontra a 6 km de distância. Considera que o radar emite sinais em todas as direções.**

15.1. Qual é o lugar geométrico dos pontos onde o avião pode estar, sabendo apenas essa distância?

15.2. Sabendo que o avião se encontra na vertical de um ponto do solo a $4,5$ km da torre determina a sua altitude.

16 **Considera duas retas, r e s.**

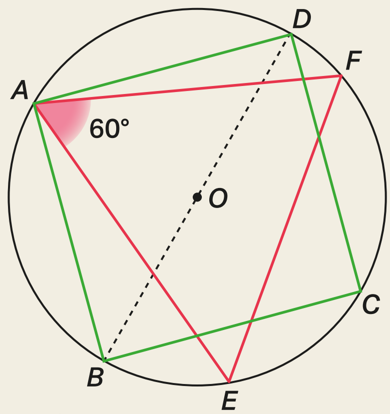


16.1. Recorrendo a instrumentos de desenho, representa os pontos que se encontram à mesma distância de r e s.

16.2. Qual o nome dado a esse lugar geométrico?

16.3. Quantos pontos se encontram exatamente a 2 cm de distância das retas r e s?

17 Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto O, um triângulo $[AEF]$ e um quadrado $[ABCD]$, ambos com vértices na circunferência.



17.1. O triângulo $[AEF]$ é equilátero? (Recorda que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de $180°$)

17.2. O triângulo representado possui alguma simetria? Indica qual ou quais.

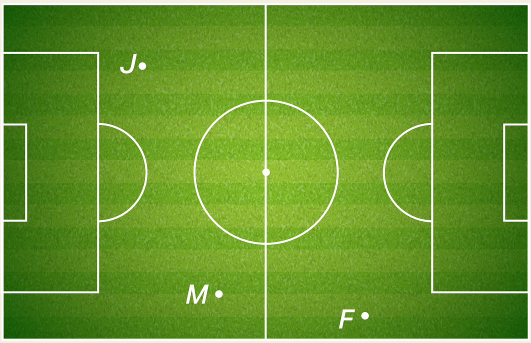
17.3. Que tipo de isometrias identificas no quadrado?

17.4. Indica uma rotação que permita movimentar o ponto A do triângulo até ao ponto B do quadrado.

17.5. Indica dois pontos que pertençam à mediatriz do segmento de reta $[BD]$.

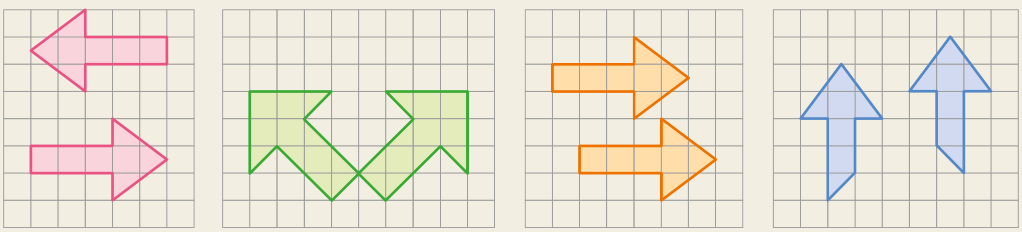
18 Na figura está representado o esquema de um campo de futebol onde estão a jogar o Manuel, o José e o Filipe.

Supõe que, num determinado momento do jogo, os três jogadores, representados, respetivamente, pelas letras M, J e F, se encontram nas posições representadas no esquema e que o árbitro se encontra à mesma distância dos três jogadores.



Será que o árbitro se pode encontrar fora da área central do campo? Justifica a sua resposta recorrendo a instrumentos de desenho.

19 Considera as seguintes figuras.



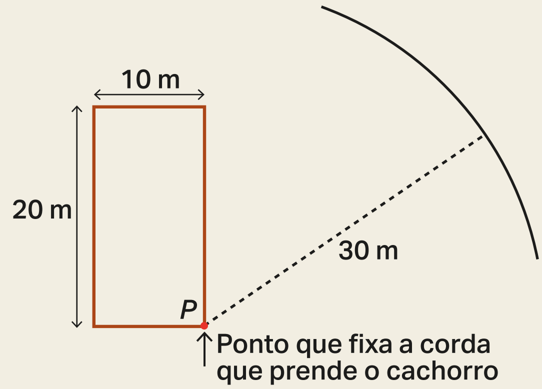
(A) **(B)** **(C)** **(D)**

Para cada figura, indica uma isometria, ou composição de isometrias, que permita transformar uma imagem na outra.

Teste

20 Um cão está preso na extremidade de uma corda de 30 metros, no canto inferior de uma casa de planta retangular, com dimensões 10 metros por 20 metros.

Na figura, o ponto P representa o local onde essa corda foi fixada.
O espaço em volta da casa está livre de qualquer obstáculo, como árvores ou muros.



20.1. Considerando o comprimento da corda, o cão conseguirá atingir o canto oposto da casa?

20.2. Se o cão se deslocar ao redor da casa com a corda esticada ao máximo, essa trajetória delimitará a região a que o cão terá acesso. Qual será aproximadamente a área dessa região?

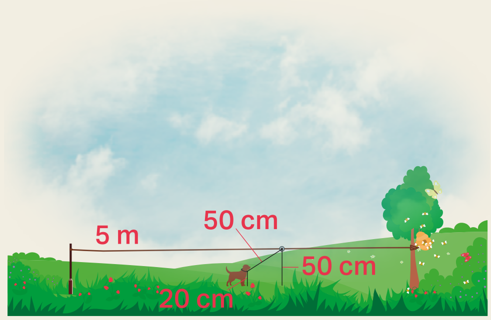
(A) $675\pi\ \text{m}^2$ **(B)** $700\pi\ \text{m}^2$

(C) $725\pi\ \text{m}^2$ **(D)** $900\pi\ \text{m}^2$

21 Um cão encontra-se preso a um sistema de corrente, conforme ilustra a figura.

O cabo de 5 metros encontra-se a uma altura de 50 cm.

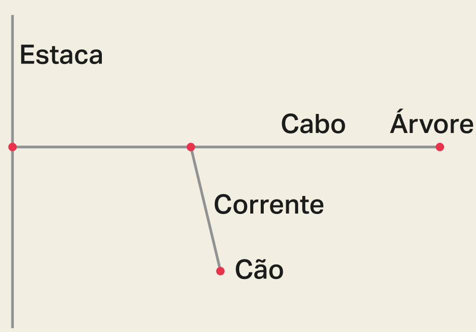
O ponto onde o cão está preso à corrente encontra-se a 20 cm do chão e a corrente tem um comprimento de 50 cm.



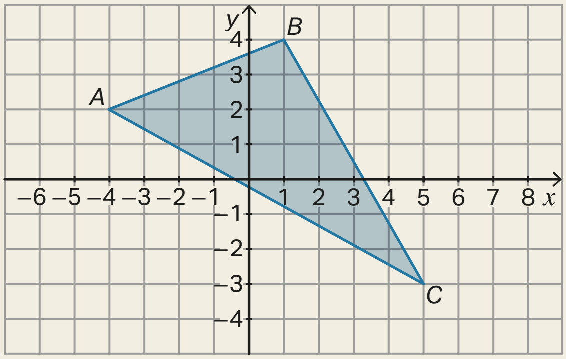
21.1. Qual a distância máxima a que o cão se pode afastar do cabo.

21.2. Considera o seguinte esquema e assinala, com rigor, o espaço a que o cão tem acesso.

21.3. Qual é a área do espaço determinado na alínea anterior?



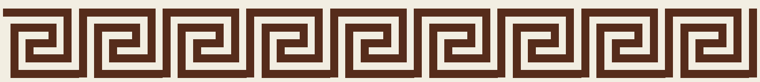
22 Considera o seguinte triângulo representado no plano cartesiano.

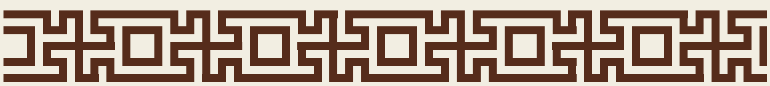


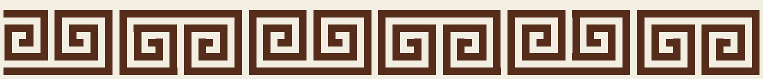
Indica as coordenadas dos pontoa A, B e C, depois de aplicada uma simetria axial, segundo a reta:

22.1. $y = 5$ **22.2.** $x = 0$ **22.3.** $y = 0$

23 Indica, para cada um dos seguintes frisos, as isometrias presentes.

(A) 

(B) 

(C) 

24 O João, aluno do 11.º ano, disse que uma reflexão muda a orientação da figura, mas mantém o tamanho.
Ele está correto? Justifica.

25 Considera duas figuras P e Q no plano cartesiano.
A figura P é um triângulo com vértices em $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ e $C(2, 5)$.
A figura Q tem vértices em $A'(3, 1)$, $B'(6, 1)$ e $C'(4, 4)$.

25.1. Representa graficamente os dois triângulos num plano cartesiano.

25.2. Verifica se os lados correspondentes têm o mesmo comprimento, utilizando a distância entre dois pontos.

25.3. As figuras são congruentes? Justifica.

25.4. Que tipo de transformação geométrica permite transformar a figura P na figura Q? Explica o teu raciocínio.

2

Modelos matemáticos

2 Modelos matemáticos

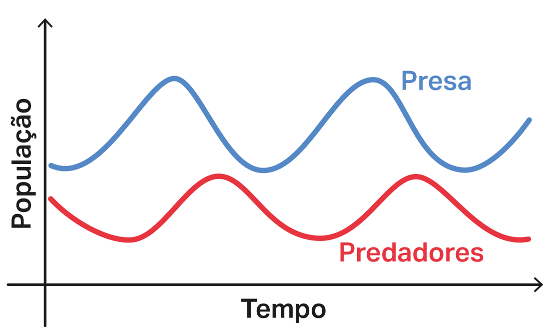
2.1. Crescimento populacional

2.1.1. Introdução aos modelos populacionais

A **modelação matemática** é uma ferramenta essencial na compreensão e previsão de fenómenos naturais e sociais. Em diversas áreas do conhecimento, desde a biologia à economia. A modelação permite descrever, analisar e prever a evolução de sistemas dinâmicos. Um dos exemplos mais estudados é o crescimento populacional, que ocorre em ecossistemas naturais, comunidades humanas e até em culturas de células em laboratório.

O termo **população** refere-se a um conjunto de indivíduos da mesma espécie que habitam uma determinada região e interagem entre si. Na biologia, uma população pode ser composta por organismos como uma colónia de bactérias, um grupo de lobos numa floresta ou a população humana de um país. No contexto estatístico, população pode significar qualquer conjunto de elementos passível de estudo, como eleitores de uma cidade ou veículos em circulação numa rodovia.

Em ecologia, a dinâmica populacional analisa variações ao longo do tempo, influenciadas por fatores ambientais e biológicos. Um exemplo clássico é a população de presas e predadores, que pode apresentar ciclos periódicos de crescimento e de declínio. Já em demografia, o estudo da população humana avalia indicadores como taxa de crescimento, envelhecimento populacional e distribuição geográfica.



Os **modelos populacionais** são representações matemáticas que descrevem a evolução do número de indivíduos ao longo do tempo. Estes modelos ajudam a entender padrões de crescimento, diminuição e estabilidade das populações, considerando fatores como natalidade, mortalidade, migração e interações com o ambiente. A escolha do modelo adequado depende da natureza do sistema em estudo e dos objetivos da análise.

A modelação populacional tem raízes na matemática aplicada desde o século XVIII. Um dos primeiros modelos foi desenvolvido por Thomas Malthus (1798), que propôs que o crescimento populacional ocorre de forma exponencial enquanto os recursos crescem de forma linear, levando a crises de escassez. Posteriormente, Pierre-François Verhulst aperfeiçoou esse modelo ao introduzir o conceito de capacidade de suporte ambiental, resultando no modelo logístico.

Thomas Malthus

No século XX, a modelação populacional expandiu-se com o trabalho de Alfred Lotka e Vito Volterra, que desenvolveram equações diferenciais para descrever a interação entre populações de presas e predadores. Atualmente, os modelos computacionais e estatísticos avançados são amplamente utilizados para prever tendências demográficas, avaliar impactos ambientais e auxiliar no planeamento urbano.

Exercícios

1 **Uma população de aves começa com 100 indivíduos e cresce a uma taxa de 20% ao ano.**

1.1. Completa a tabela para os primeiros 5 anos.

1.2. Ao fim de quantos anos a população de aves irá ultrapassar os 300 indivíduos?

1.3. Escreve uma expressão que permita determinar o número de aves ao fim de n anos.

Ano	Número de aves
0	100
1	
2	
3	
4	
5	

2 **Para se preparar para um exame de acesso ao ensino superior, a Rita vai aumentar o seu estudo durante 10 dias. Para isso, resolveu estudar 30 minutos no primeiro dia e aumentar 10 minutos nos dias seguintes ao tempo de estudo realizado no dia anterior.**

2.1. Ao fim de quantos dias o estudo da Rita irá durar mais de uma hora?

2.2. No 7.º dia qual será a duração de estudo da Rita?

2.3. A Rita vai estudar três horas em algum dos dias? Justifica a tua resposta.

2.1.2. Modelos discretos e contínuos de crescimento populacional

Os modelos populacionais podem ser classificados como discretos ou contínuos, dependendo da forma como o tempo é considerado na análise.

Os **modelos discretos** descrevem a população em intervalos de tempo separados, como anos ou gerações. Um exemplo é o modelo de crescimento geométrico, em que a população num momento futuro, depende da população anterior multiplicada por uma taxa de crescimento fixada. Outro exemplo de um modelo discreto pode ser a aplicação ao estudo da reprodução sazonal de aves migratórias, em que as contagens populacionais são feitas anualmente.

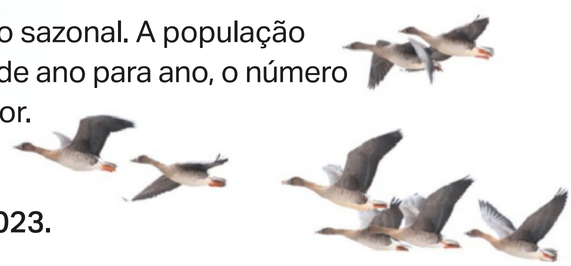
Os **modelos contínuos** utilizam equações diferenciais para representar mudanças populacionais, de forma ininterrupta, ao longo do tempo. O modelo exponencial contínuo, por exemplo, descreve populações que crescem proporcionalmente ao seu tamanho a cada instante. Um modelo contínuo pode ser usado para modelar o crescimento de uma cultura bacteriana em laboratório, em que a taxa de crescimento é influenciada constantemente por fatores como a disponibilidade de nutrientes e a temperatura.

Exemplo 1

Modelo discreto – Aves migratórias

Uma espécie de ave migratória tem reprodução sazonal. A população é contabilizada uma vez por ano. Sabe-se que, de ano para ano, o número de aves cresce 20% em relação ao ano anterior.

Em 2020, a população era de 5000 aves.



Vamos determinar a população de aves em 2023.

Sabemos que o crescimento é de 20%, logo:

Como o número de aves aumenta 20% em relação ao ano anterior, em 2021 o número de aves será:

$$5000 \times 1{,}2 = 6000$$

Analogamente, para 2022 teremos:

$$6000 \times 1{,}2 = 7200$$

Ano	2020	2021	2022	2023
N.º de aves	5000	6000	7200	8640

E, para 2023, teremos:

$$7200 \times 1{,}2 = 8640$$

Em 2023, a população será de cerca de 8640 aves.

Exemplo 2

Modelo contínuo: Bactérias em crescimento

Num laboratório, uma cultura bacteriana cresce continuamente. A taxa de crescimento é proporcional à quantidade de bactérias existentes. Inicialmente, existem 200 bactérias e a taxa de crescimento é $k = 0{,}5$ por hora.

Nos modelos de crescimento contínuos, utilizamos funções exponenciais e logarítmicas que iremos aprofundar neste tema.

Escrevemos a função que representa a população ao fim de t horas.

Usamos o modelo contínuo:

$$P(t) = P_0 \times e^{kt}$$

Com P_0 a representar o n.º de elementos iniciais e k a taxa de crescimento da população.

Então, neste exemplo, o número de bactérias $P(t)$ passadas t horas após o início da experiência, é dado por:

$$P(t) = 200 \times e^{0{,}5t}$$

Quantas bactérias existirão ao fim de três horas?

$$P(3) = 200 \times e^{0{,}5 \times 3} = 200 \times e^{1{,}5} \approx 896$$

Após três horas, existirão cerca de 896 bactérias.

Exercício

3 **Para cada uma das seguintes situações indica, justificando, se o modelo populacional descrito é discreto ou contínuo.**

(A) Uma cultura de leveduras cresce num meio com temperatura controlada, sendo medida a cada instante.

(B) Uma população de peixes é medida, no final de cada época de desova, uma vez por ano.

(C) O número de células cancerígenas num organismo cresce continuamente ao longo do tempo.

(D) Um biólogo analisa a variação do número de rãs numa lagoa, com contagens feitas mensalmente.

(E) O crescimento de uma colónia de bactérias é estudado com base em sensores que recolhem dados a cada segundo.

(F) O número de coelhos numa reserva é contado em cada primavera.

2.2. Modelos discretos

2.2.1. Crescimento linear

Como verificámos, os modelos de crescimento procuram descrever a evolução do tamanho de uma população ao longo do tempo. Nos modelos discretos, o tempo é considerado em instantes separados (dias, meses, anos, etc.). Os dois tipos de modelos discretos que vamos estudar são o crescimento linear discreto e o modelo exponencial discreto.

Crescimento linear discreto

No **crescimento linear discreto**, a população aumenta ou diminui sempre da mesma quantidade a cada intervalo de tempo.

Fórmula: $P(n) = P_0 + n \cdot r$

Em que:

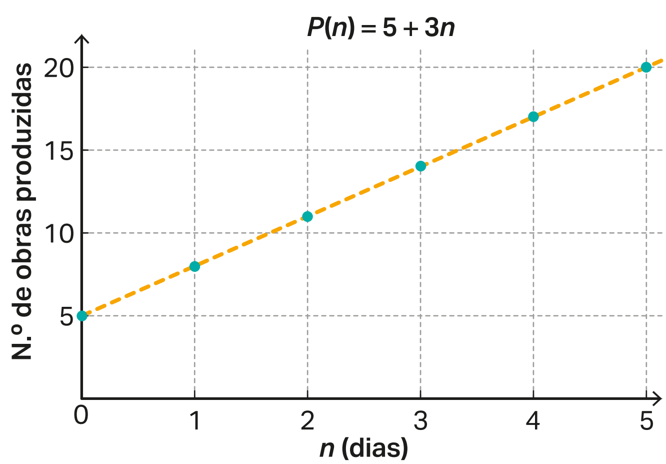
- P_n é o n-ésimo termo;
- P_0 é o primeiro termo;
- r é a razão;
- n é a ordem do termo.

Exemplo 3

Um artista de cerâmica produz três obras de arte por dia. No início da observação do seu trabalho, tinha cinco obras concluídas.

O modelo de crescimento linear discreto é dado pela expressão: $P(n) = 5 + 3n$, em que n representa o número de dias passados.

Como podemos verificar no gráfico ao lado, a cada dia que passa são aumentadas três obras de arte. Os pontos representados no gráfico pertencem a uma mesma reta que contém todos os pontos.

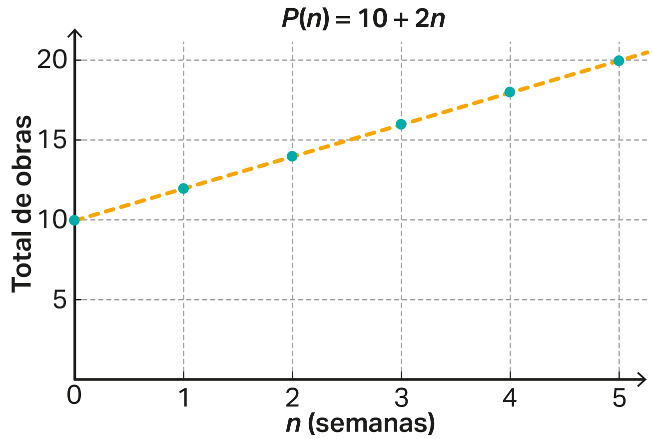


Exemplo 4

Uma galeria acrescenta duas obras novas por semana, começando com 10.

Modelo de crescimento linear:

$$P(n) = 10 + 2n$$



Quantas obras de arte terá a galeria ao fim de três semanas?

$$P(3) = 10 + 2 \times 3 = 16$$

Ao fim de três semanas, a galeria terá 16 obras de arte.

Quantas semanas são necessárias decorrer para a galeria ter 22 obras de arte?

$$P(n) = 22 \Leftrightarrow 10 + 2n = 22 \Leftrightarrow 2n = 12 \Leftrightarrow n = 6$$

Para a galeria ter 22 obras de arte será necessário decorrer seis semanas.

Sequência de Fibonacci

Leonardo Fibonacci foi um matemático italiano do século XIII, conhecido por introduzir na Europa o sistema de numeração hindu-arábico e, principalmente, pela famosa sequência à qual se atribui o seu nome. A **sequência de Fibonacci** é uma sucessão numérica em que, cada termo, é a soma dos dois anteriores, começando por 0 e 1: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$ Essa sequência aparece em diversos fenómenos da Natureza, como o arranjo de folhas nas plantas e a espiral nas conchas, sendo um exemplo fascinante da ligação entre a matemática e o mundo natural.

Como referido, a **sequência de Fibonacci** é uma famosa sucessão numérica em que cada número é obtido pela soma dos dois anteriores, revelando padrões surpreendentes presentes na Natureza, na arte e na matemática.

n **(posição)**	$F(n)$ **(n-ésimo termo)**
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

Fórmula da sequência de Fibonacci:

Para $n \geqslant 2$:

$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Com condições iniciais:

$F(0) = 0$

$F(1) = 1$

Exercícios

4 **Qual é o termo de ordem 12 da sequência de Fibonacci?**

5 **Na sequência de Fibonacci existe algum termo cujo valor é 107? Justifica a tua resposta.**

2.2.2. Progressão aritmética

Quando algo cresce sempre da mesma maneira, ou seja, é acrescentado o mesmo valor em cada etapa, dizemos que esse crescimento é linear. Isso acontece, por exemplo, quando recebemos um valor fixo por semana ou somamos o mesmo número a cada dia.

É justamente esse tipo de padrão que estudamos com a progressão aritmética.

Exemplo 5

Imagina que a Ana decide poupar **10 escudos por semana.** Na primeira semana ela tem **10 escudos**, na segunda **20 escudos**, na terceira **30 escudos**, e assim por diante.

O valor que a Ana tem forma uma sequência:

10, 20, 30, 40, ...

Neste caso, o valor aumenta **sempre mais 10.** Isso é uma **progressão aritmética.**

Definição de progressão aritmética (PA)

Uma **progressão aritmética** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando (ou subtraindo) um número fixo ao termo anterior. Esse número fixo é chamado de razão da PA (representado por r).

Uma **progressão aritmética** é **crescente** quando a sua razão é positiva.

Exemplo 6

A progressão aritmética $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ é uma progressão aritmética crescente de razão $r = 2$, em que o primeiro termo é também 2.

Uma **progressão aritmética** é **decrescente** quando a sua razão é negativa.

Exemplo 7

A progressão aritmética $100, 90, 80, 70, \ldots$ é uma progressão aritmética decrescente de razão $r = -10$, em que o primeiro termo é também 100.

Uma **progressão aritmética** é **constante** quando a sua razão é zero.

Exemplo 8

A progressão aritmética $7, 7, 7, 7, \ldots$ é uma progressão aritmética constante de razão $r = 0$, em que o primeiro termo é também 7.

Exercícios

6 **Completa os próximos três termos da progressão aritmética: $3, 6, 9, \ldots$**

7 **A sequência $20, 17, 14, \ldots$ é uma progressão aritmética? Se sim, qual é a sua razão e qual é o 7.º termo?**

8 **Numa progressão aritmética, o primeiro termo é 4 e a razão é 3. Qual é o 10.º termo?**

9 **Numa progressão aritmética, o primeiro termo é 29 e a razão é -3. Qual é o 6.º termo?**

O **termo geral** é uma fórmula que permite encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética sem precisar de calcular todos os anteriores.

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

$$P_n = P_1 + (n - 1) \times r$$

Em que:

- P_n é o n-ésimo termo;
- P_1 é o primeiro termo;
- r é a razão;
- n é a ordem do termo.

Exemplo 9

O João vive em São Vicente e quer juntar dinheiro para ir à cidade da Praia no próximo ano. Ele decide começar a poupar 1000 escudos no primeiro mês, aumentando esse valor em 500 escudos a cada mês.

A sequência da poupança mensal do João forma uma progressão aritmética:

1000, 1500, 2000, 2500, ...

Primeiro termo: $P_1 = 1000$

Razão: $r = 500$

Se quisermos saber quanto o João vai poupar no 6.º mês, usamos a fórmula do termo geral:

$$P_6 = P_1 + (6 - 1) \cdot r \Leftrightarrow P_6 = 1000 + 5 \times 500 \Leftrightarrow P_6 = 1000 + 2500 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P_6 = 3500 \text{ escudos}$$

Exercícios

10 **Numa progressão aritmética, temos $P_1 = 100$ e $r = -5$. Qual é o valor do 20.º termo?**

11 **Uma vendedora no mercado de Assomada vende pratos de cachupa. No primeiro dia, ela vendeu 10 pratos e, em cada dia seguinte, ela conseguiu vender dois pratos a mais do que no dia anterior. Quantos pratos venderá no 7.º dia?**

Quando queremos saber a soma de vários termos seguidos de uma progressão aritmética usamos a fórmula da soma dos n primeiros termos.

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (S_n)

$$S_n = \frac{P_1 + P_n}{2} \times n$$

Exemplo 10

Dada a progressão aritmética: $3\,,\ 6\,,\ 9\,,\ 12\,,\ 15\ldots$

A soma dos cinco primeiros termos é:

$$S_5 = \frac{P_1 + P_5}{2} \times 5 = \frac{3+15}{2} \times 5 = 45$$

Exercícios

12 **Uma sequência aritmética começa em 2 e tem razão 3. Qual é a soma dos 10 primeiros termos?**

13 **Numa progressão aritmética temos: $P_1 = 50$, $r = -5$. Calcula a soma dos seis primeiros termos.**

14 **Em Mindelo, um jovem junta 4000 escudos no 1.º mês e aumenta o valor poupado em 300 escudos por mês. Quanto terá juntado ao fim de 12 meses?**

2.2.3. Crescimento/decaimento exponencial

No **crescimento exponencial discreto**, a população é multiplicada por uma taxa constante a cada período.

Fórmula: $P(n) = P_0 \bullet r^n$

Em que:

- $P(n)$ é a população no instante n;
- P_0 é a população inicial;
- r é a razão ($r > 1$ para crescimento; $0 < r < 1$ para decrescimento);
- n é o número de períodos.

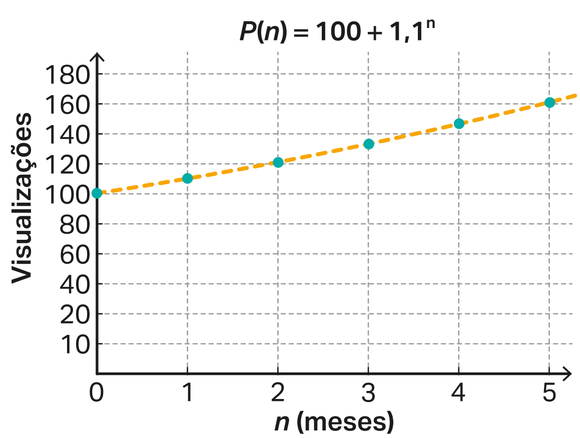
Exemplo 11

Um canal de vídeo tem 100 visualizações iniciais e cresce 10% por mês.

O modelo de crescimento linear exponencial é dado pela expressão:

$P(n) = 100 \times 1{,}1^n$

Como podemos verificar, no gráfico ao lado, a cada mês que passa aumenta o número de visualizações. Como o aumento não é linear, os pontos representados no gráfico não estão alinhados numa mesma reta, mas sim numa linha com uma ligeira curvatura.



Exemplo 12

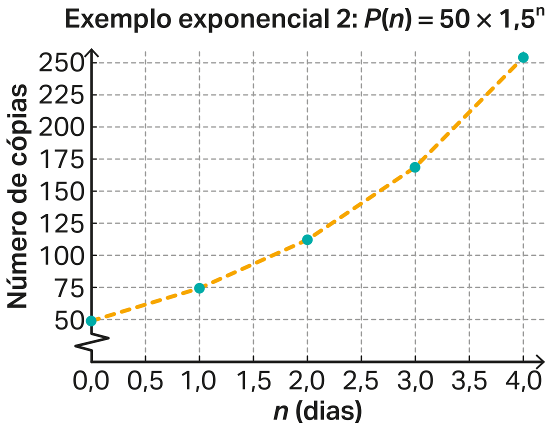
Uma publicação é partilhada 50 vezes numa rede social. O número de partilhas dessa publicação aumenta 50% por dia:

$P(n) = 50 \times 1{,}5^n$

Quantas partilhas terão sido realizadas ao fim de dois dias? E ao fim de quatro dias?

$P(2) = 50 \times 1{,}5^2 = 50 \times 2{,}25 = 112{,}5$

$P(4) = 50 \times 1{,}5^4 = 50 \times 5{,}0625 = 253{,}125$



Ao fim de dois dias, terão sido realizadas cerca de 113 partilhas e, ao fim de quatro dias, cerca de 253 partilhas.

Como verificámos nos exemplos anteriores, o crescimento exponencial discreto ocorre quando uma quantidade aumenta a uma taxa fixa multiplicativa em intervalos regulares. Ou seja, multiplica-se por um mesmo número a cada passo.

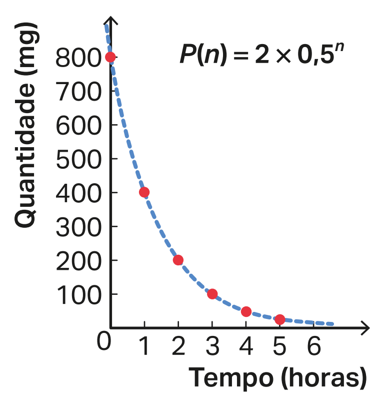
Mas o decaimento exponencial discreto ocorre quando uma quantidade diminui a uma taxa fixa multiplicativa em intervalos regulares, como no próximo exemplo.

O tipo de modelo exponencial discreto em que a quantidade diminui é comum em situações como: eliminação de remédios do organismo; perda de valor de um carro; decaimento radioativo, entre outras.

Exemplo 13

Supõe que uma pessoa toma **800 mg de um medicamento** e, a cada hora, o corpo elimina **metade da quantidade.** Isso representa uma **diminuição exponencial com razão** $q = 0{,}5$.

Tempo (horas)	Quantidade (mg)	Cálculo
0	800	$800 \times 0{,}5^0$
1	400	$800 \times 0{,}5^1$
2	200	$400 \times 0{,}5^2$
3	100	$200 \times 0{,}5^3$
4	50	$100 \times 0{,}5^4$
5	25	$50 \times 0{,}5^5$



Neste exemplo, o modelo de decrescimento é dado por $P(n) = 800 \times 0{,}5^n$. Os pontos estão alinhados numa curva, mas com sentido decrescente.

Crescimento/decaimento exponencial e progressão geométrica

As progressões geométricas são sequências numéricas em que cada termo é obtido multiplicando o anterior por uma constante fixa, chamada razão. As progressões geométricas estão diretamente ligadas aos modelos de crescimento ou decaimento exponencial, pois representam situações em que a variação ocorre de forma multiplicativa ao longo do tempo, como no aumento de populações, juros compostos ou eliminação de medicamentos no corpo.

Manual Digital

Vídeo
Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas

2.2.4. Progressão geométrica

Uma **progressão geométrica** é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo chamado razão (representado por r).

Exemplo 14

$2, 4, 8, 16, \ldots$ é uma progressão geométrica de razão $r = 2$.

$P_1 = 2$ $\qquad$ $P_2 = P_1 \times 2 = 4$

$P_3 = P_2 \times 2 = 8$ $\qquad$ $P_4 = P_3 \times 2 = 16$

Exercícios

15 **Dada a progressão geométrica: $3, 6, 12, \ldots$ qual é o 5.º termo?**

16 **Dada a progressão geométrica $81, 27, 9, \ldots$ qual é a razão? E qual é o 6.º termo?**

Fórmula do termo geral da progressão geométrica

Para calcular qualquer termo de uma progressão geométrica sem precisar listar todos os anteriores, utilizamos a **fórmula do termo geral**, que permite identificar diretamente o valor de um termo em qualquer ordem da sequência.

$$P_n = P_1 \times r^{n-1}$$

Em que:

- P_n é o n-ésimo termo;
- P_1 é o primeiro termo;
- r é a razão;
- n é a ordem do termo.

Exemplo 15

Dada a progressão geométrica com $P_1 = 2$ e $r = 3$, vamos determinar o 5.º termo.

$$P_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

Exemplo 16

Dada a progressão geométrica com $P_1 = 10$ e $r = 0{,}5$, vamos determinar o 4.º termo.

$$P_4 = 10 \times 0{,}5^3 = 10 \times 0{,}125 = 1{,}25$$

Exercícios

17 **Uma progressão geométrica tem como termo inicial 5 e razão 2. Qual é o 7.º termo?**

18 **Uma publicação numa rede social começa com três partilhas. A cada hora, o número de partilhas triplica. Quantas partilhas terá a publicação após cinco horas?**

19 **Uma progressão geométrica começa com 1000 e é dividida por 10 a cada passo. Qual é o 6.º termo?**

Quando precisamos saber o total acumulado dos primeiros termos de uma progressão geométrica, utilizamos a fórmula da soma dos n termos, que permite calcular o valor total de uma sequência com crescimento (ou decaimento) multiplicativo.

Soma dos n termos de uma progressão geométrica

$$S_n = P_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Exemplo 17

Dada a progressão geométrica: 2, 4, 8, 16, 32, ..., vamos determinar a soma dos cinco primeiros termos:

$$S_5 = 2 \times \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 2 \times \frac{1 - 32}{1 - 2} = 2 \times 31 = 62$$

Verificação: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$

Exercícios

20 **Calcula a soma dos seis primeiros termos da progressão geométrica: 3, 6, 12, ...**

21 **Considera uma progressão geométrica com termo inicial de 1000 e razão igual a $0{,}5$. Qual é a soma dos quatro primeiros termos da progressão?**

2.3. Modelos contínuos

Após compreendermos os **modelos discretos**, que descrevem a evolução de sistemas em intervalos separados de tempo (como anos, meses, dias ou horas), vamos agora estudar os **modelos contínuos**.

Os modelos contínuos são modelos matemáticos que permitem descrever situações em que as variações ocorrem **de forma ininterrupta ao longo do tempo**. Em vez de observar o sistema apenas em momentos específicos, como nos modelos discretos, nos modelos contínuos consideramos que o tempo flui de maneira contínua, permitindo representar mudanças instantâneas e mais detalhadas.

Esse tipo de modelação é essencial em fenómenos como:

- o crescimento de populações bacterianas em laboratório;
- a evolução de doenças;
- a acumulação de capital com juros compostos contínuos;
- a difusão de calor ou substâncias.

Características dos modelos contínuos

- utilizam **funções matemáticas contínuas**, como exponenciais, logarítmicas ou logísticas;
- são frequentemente expressos por **equações diferenciais**, que relacionam uma variável com a sua taxa de variação no tempo;
- permitem maior precisão na previsão e análise de sistemas dinâmicos em tempo real.

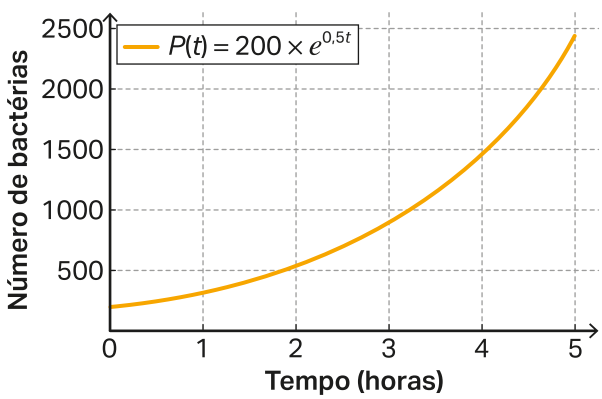
Nestas situações, a evolução em cada instante é importante porque as mudanças ocorrem de forma contínua e podem ter efeitos significativos mesmo em curtos períodos de tempo.

Por exemplo, no crescimento de bactérias ou na propagação de uma doença, pequenas variações, a cada momento, podem alterar drasticamente o comportamento do sistema em pouco tempo. A modelação contínua permite captar essas variações instantâneas, oferecendo uma descrição mais fiel e útil para a tomada de decisões em tempo real.

Exemplo 18

O gráfico ao lado representa o crescimento contínuo de uma cultura de bactérias ao longo do tempo. A curva mostra como a população aumenta de forma acelerada, refletindo o carácter exponencial do modelo contínuo.

Crescimento contínuo de uma cultura de bactérias

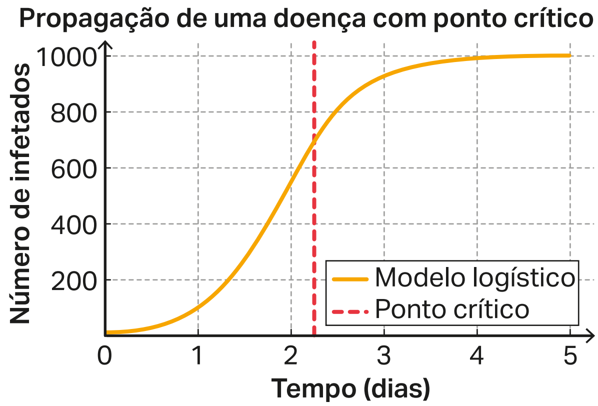


Exemplo 19

Manual Digital

Vídeo
Resolução de problemas envolvendo progressões geométricas

O gráfico ao lado representa a propagação de uma doença segundo um modelo logístico. A curva mostra um crescimento rápido no início, atingindo um ponto crítico (destacado a vermelho), em que a taxa de contágio é mais acelerada. Após esse ponto, o crescimento desacelera à medida que a população infetada se aproxima do limite máximo (capacidade de infeção). Este tipo de modelo contínuo é essencial para identificar momentos críticos e agir preventivamente na gestão de surtos.



2.3.1. Modelo linear contínuo

O **modelo linear contínuo** descreve situações em que uma quantidade varia a uma **taxa constante ao longo do tempo**. Diferente do modelo exponencial, em que a mudança depende do valor atual, neste modelo o crescimento ou decrescimento acontecem de forma uniforme. Esse tipo de modelação é útil para descrever processos com variação constante, como o enchimento de um tanque com fluxo constante ou o aumento linear de temperatura.

Fórmula do modelo linear contínuo

A equação geral do modelo linear contínuo é:

$$P(t) = P_0 + r \times t$$

Em que:

- $P(t)$ é a quantidade no instante no t;
- P_0 é o valor inicial (quando $t = 0$);
- r é a taxa de variação constante;
- t é o tempo.

Quando $r > 0$, verifica-se crescimento, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta.

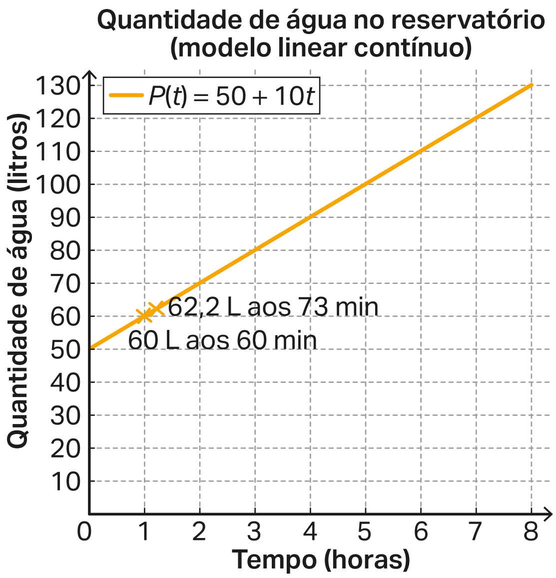
Quando $r < 0$, verifica-se decrescimento, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta.

Exemplo 20

Enchimento de um reservatório

Um reservatório começa com 50 litros de água e recebe 10 litros por hora. A função que descreve a quantidade de água no reservatório ao longo do tempo é:

$$P(t) = 50 + 10t$$



Ao fim de 1 hora (60 minutos): $P(t) = 50 + 10 \times 1 = 60$

O reservatório terá 60 litros de água.

Ao fim de 73 minutos (1,22 horas): $P(t) = 50 + 10 \times 1{,}22 = 62{,}17$

O reservatório terá aproximadamente $62{,}2$ litros de água.

Este exemplo mostra como o modelo linear contínuo permite calcular facilmente a quantidade em qualquer instante, mesmo fora dos múltiplos exatos de tempo. O gráfico acima mostra que a quantidade de água aumenta de forma linear e constante com o tempo.

Exemplo 21

Perda de temperatura

Um corpo aquecido a 80 °C é colocado numa sala a 20 °C e perde calor a uma taxa constante de 5 °C por minuto. A temperatura $T(t)$ do corpo ao fim de t minutos é:

$$T(t) = 80 - 5t \text{ (com } T(t) \geqslant 20)$$

Temperatura do corpo após seis minutos:

$$T(6) = 80 - 5 \times 6 = 50\ °\text{C}$$

Após seis minutos, a temperatura do corpo será de $50\ °\text{C}$.

Tempo para que o corpo atinja a temperatura de $20\,°C$:

$$
\begin{aligned}
T(t) = 20 &\Leftrightarrow 80 - 5t = 20\\
&\Leftrightarrow -5t = 20 - 80\\
&\Leftrightarrow -5t = -60\\
&\Leftrightarrow t = \frac{-60}{-5}\\
&\Leftrightarrow t = 12
\end{aligned}
$$

Ao fim de 12 minutos, o corpo atinge a temperatura de $20\,°C$.

Exemplo 22

Um tanque de água tem, inicialmente, 120 litros. Um sistema de bombeamento começa a retirar água à razão constante de oito litros por minuto.

a) Escreve a função que representa a quantidade de água no tanque, ao fim de t minutos.

b) Qual será a quantidade de água após 10 minutos?

c) Após quanto tempo o tanque ficará vazio?

d) Representa graficamente a função.

Resolução

a) Modelo linear contínuo: $P(t) = 120 - 8t$

b) $P(10) = 120 - 8 \times 10 = 120 - 80 = 40$

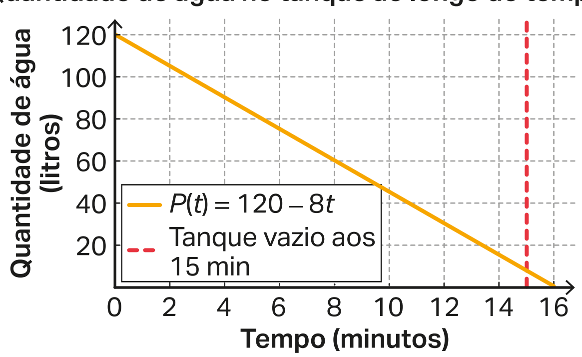
Após 10 minutos a quantidade de água será de 40 litros.

c) O tanque fica vazio quando $P(t) = 0$.

$$
\begin{aligned}
P(t) = 0 &\Leftrightarrow 120 - 8t = 0\\
&\Leftrightarrow -8t = -120\\
&\Leftrightarrow t = \frac{-120}{-8}\\
&\Leftrightarrow t = 15
\end{aligned}
$$

O tanque fica vazio ao fim de 15 minutos.

d) **Quantidade de água no tanque ao longo do tempo**



Exercícios

22 **Uma fábrica produz 150 peças por hora. No início da produção de um dia já existiam 300 peças prontas.**

22.1. Qual é a função que representa o total de peças ao fim de t horas?

22.2. Quantas peças haverá ao fim de cinco horas?

22.3. Ao fim de quantas horas haverá 1500 peças?

23 **Um medicamento no sangue é eliminado a uma taxa constante de 2 mg por hora. Se a dose inicial é de 40 mg:**

23.1. Escreve a expressão da quantidade restante ao fim de t horas.

23.2. Quando restarão apenas 10 mg no organismo?

23.3. Representa graficamente a função.

24 **A temperatura de um líquido aumenta a uma taxa constante de 3 °C por minuto. Se a temperatura inicial do líquido é 18 °C:**

24.1. Qual será a temperatura do líquido ao fim de 12 minutos?

24.2. Após quanto tempo o líquido atinge 39 °C?

Construção de um modelo linear contínuo

A modelação linear contínua permite-nos representar situações do quotidiano com **crescimento** ou **decréscimo constantes**. Quando temos **dados organizados em tabela** (por exemplo, tempo e quantidade), podemos verificar se existe uma **variação constante** entre os valores. Se essa variação for regular, podemos ajustar um **modelo linear contínuo** à situação.

O processo segue três passos simples:

1. **Verificar a taxa de variação** entre os dados — se for constante, é um bom indício de modelo linear.
2. **Identificar o valor inicial** — normalmente associado ao instante $t = 0$.
3. **Construir a função** da forma: $P(t) = P_0 + r \times t$

Este método é útil para **prever valores futuros**, estimar quando algo irá acontecer, ou **compreender o comportamento de um fenómeno ao longo de um período de tempo**. É uma das formas mais acessíveis e práticas de aplicar a matemática ao mundo real.

Exemplo 23

Uma empresa regista o número total de encomendas entregues ao longo dos dias. Os dados recolhidos são:

Dia	Encomendas entregues
1	120
2	145
3	170
4	195
5	220

1. Verificar se há crescimento linear

Vamos verificar se o número de encomendas cresce sempre na mesma razão:

- Dia 2 − Dia 1: $145 - 120 = 25$
- Dia 3 − Dia 2: $170 - 145 = 25$
- Dia 4 − Dia 3: $195 - 170 = 25$
- Dia 5 − Dia 4: $220 - 195 = 25$

O crescimento é constante: **aumenta 25 encomendas por dia.**

1. **Identificar o valor inicial:**

$$P(0) = 120 \ (\textit{no primeiro dia})$$

2. **Construir a função da forma:**

   Usamos a fórmula do modelo linear contínuo:

   $P(t) = P_0 + r \times t$

   $P(t) = 120 + 25 \times t \quad (\textit{com } t \textit{ em dias desde o dia } 1)$

Exercícios

25 **Numa estufa regista-se a altura de uma planta durante os primeiros dias de crescimento.**

Dia	Altura (cm)
0	5
1	8
2	11
3	14

25.1. Verifica se o crescimento é linear.

25.2. Escreve o modelo linear que representa a altura da planta em função do tempo.

25.3. Usa o modelo para prever a altura ao fim de 10 dias.

26 **Um líquido arrefece a uma taxa constante. A temperatura é medida em diferentes momentos.**

Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	90
2	84
4	78
6	72

26.1. Confirma se o arrefecimento é linear.

26.2. Determina a equação que modela a temperatura do líquido ao longo do tempo.

26.3. Qual será a temperatura ao fim de 10 minutos?

26.4. Ao fim de quantos minutos a temperatura será $30\ °C$?

2.3.2. Modelo exponencial contínuo

O **modelo exponencial contínuo** descreve situações de crescimento ou decrescimento muito rápido. Esse tipo de comportamento é comum em fenómenos como:

- crescimento de populações bacterianas;
- propagação de vírus;
- juros compostos contínuos;
- decaimento radioativo;
- crescimento de investimentos.

Enquanto no modelo linear a variação é **constante**, no modelo exponencial ela é **proporcional** à quantidade existente.

Modelo exponencial contínuo

A quantidade varia proporcionalmente ao seu valor atual.

Fórmula:

$$P(t) = P_0 \times e^{r \times t}, \text{ sendo } r \text{ constante}$$

Aqui, r representa a **taxa de crescimento** ou **decréscimo relativa**:

Quando $r > 0$, verifica-se crescimento exponencial, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta.

Quando $r < 0$, verifica-se decrescimento exponencial, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta.

O número de Neper: e

O número e (aproximadamente, **2,718**) é uma **constante matemática irracional** que aparece em muitos fenómenos de crescimento contínuo.

Assim como o número π está associado aos círculos, o número e está associado ao **crescimento contínuo** e aos **logaritmos naturais**.

Por exemplo:
- se um capital cresce com juros compostos continuamente, a fórmula inclui e;
- se uma bactéria se divide continuamente, o seu crescimento segue um padrão que envolve $e^{r \times t}$.

A utilização do número de Neper (e) permite modelar a variação **em cada instante** com extrema precisão.

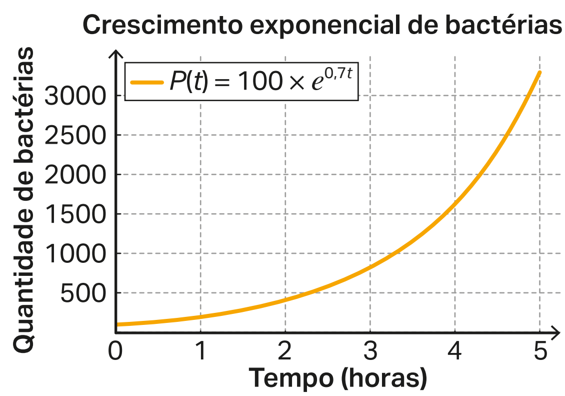
Exemplo 24

Crescimento exponencial (com gráfico)

Uma cultura de bactérias começa com 100 células e cresce continuamente a uma taxa de 70% por hora.

A função que descreve esse crescimento é:

$$P(t) = 100 \times e^{0,7 \times t}$$



Neste crescimento exponencial, o gráfico mostra que a população cresce lentamente, no início, e depois acelera rapidamente.

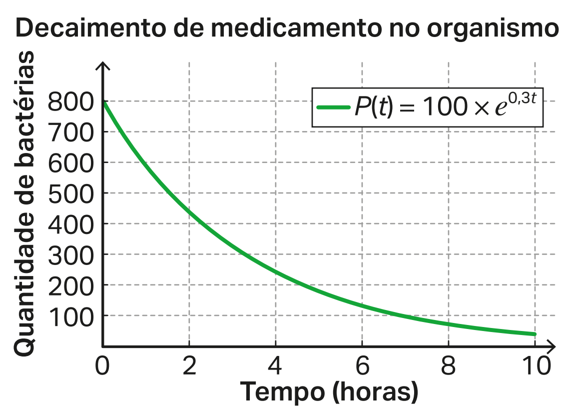
Exemplo 25

Decaimento exponencial

Um medicamento é administrado no organismo com uma dose inicial de 800 mg. A quantidade no sangue decresce continuamente a uma taxa de 30% por hora.

A função que descreve essa eliminação é:

$$P(t) = 800 \times e^{-0,3 \times t}$$



O gráfico mostra uma rápida redução inicial da quantidade, que depois vai diminuindo cada vez mais lentamente.

Exemplo 26

Crescimento exponencial

Um investimento de 5000 € cresce com uma taxa contínua de 5% ao ano.

A fórmula é:

$$P(t) = 5000 \times e^{0,05 \times t}$$

A tabela seguinte mostra o valor do investimento ao longo de cinco anos:

Tempo (anos)	Valor (€)
0	5000,00
1	≈ 5256,36
2	≈ 5525,85
3	≈ 5809,17
4	≈ 6107,01
5	≈ 6420,13

Este exemplo mostra como o capital cresce, de forma cada vez mais acentuada, ao longo do tempo.

Exercícios

27 **Num lago isolado, a população de peixes era de 300 e cresce continuamente a uma taxa de 12% ao ano.**

27.1. Escreve a função $P(t)$ que representa a população, ao fim de t anos.

27.2. Qual será a população ao fim de cinco anos?

27.3. Após quantos anos a população duplicará?

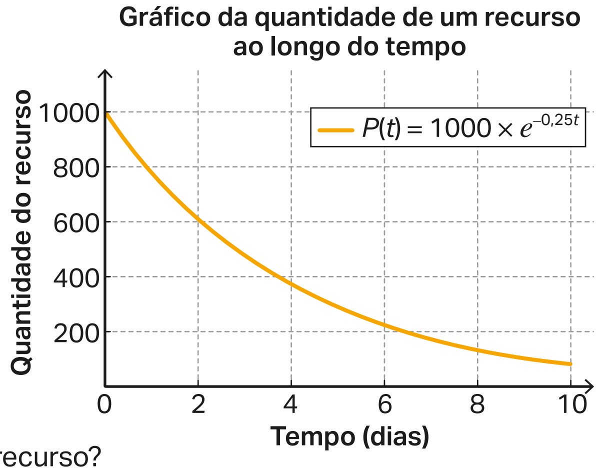
28 **A população de uma cidade era de $120\,000$ habitantes em 2020. Estima-se que cresça continuamente a uma taxa de $1,8\%$ ao ano.**

28.1. Determina a função que descreve a população $P(t)$, com t em anos desde 2020.

28.2. Estima a população em 2030.

28.3. Em que ano a população atingirá $200\,000$ habitantes?

29 **O gráfico ao lado mostra a quantidade de um certo recurso natural (em unidades) ao longo do tempo (em dias), modelada por uma função exponencial contínua. Responde às seguintes questões com base no gráfico.**



29.1. Esta função representa um crescimento ou um decréscimo?

29.2. Qual era a quantidade inicial do recurso?

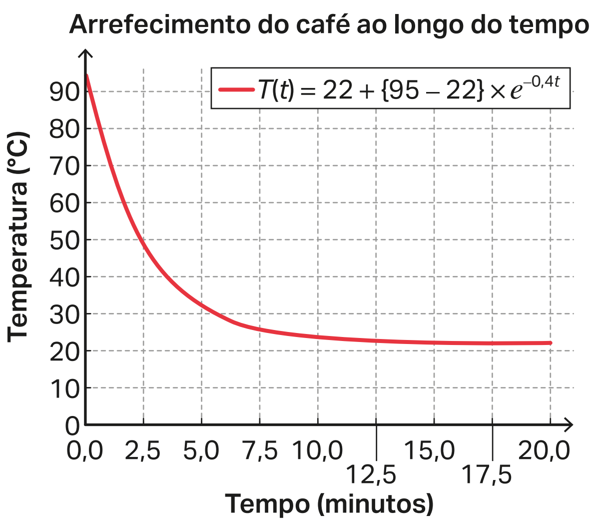
29.3. Estima a quantidade do recurso ao fim de quatro dias.

29.4. O que acontece à quantidade do recurso à medida que o tempo avança indefinidamente?

29.5. Em que intervalo de tempo a quantidade passou de 1000 para aproximadamente 500 unidades?

29.6. A quantidade do recurso alguma vez será igual a zero? Explica.

30 **O gráfico ao lado mostra como a temperatura de um café servido a $95\ °C$ diminui ao longo do tempo, numa sala com temperatura constante de $22\ °C$. A variação segue um modelo de decaimento exponencial contínuo. Responde às seguintes questões com base no gráfico.**



30.1. Qual é a temperatura inicial do café no instante $t = 0$?

(A) $22\ °C$

(B) $0\ °C$

(C) $73\ °C$

(D) $95\ °C$

30.2. O que acontecerá à temperatura do café ao longo do tempo?

(A) Atingirá zero graus.

(B) Irá subir após 10 minutos.

(C) Irá aproximar-se dos $22\ °C$ sem nunca os ultrapassar.

(D) Oscilará entre $22\ °C$ e $95\ °C$.

Construção de um modelo exponencial contínuo

A **modelação exponencial contínua** permite-nos representar situações do quotidiano, em que há **crescimento ou decréscimo proporcional** da quantidade existente. Quando temos dados organizados em tabela (por exemplo, tempo e quantidade), podemos verificar se a taxa de variação **aumenta ou diminui progressivamente**, indicando que a mudança depende do valor atual.

Se esse comportamento for identificado, podemos ajustar um **modelo exponencial contínuo** à situação.

O processo segue quatro passos simples:

1. **Identificar o valor inicial**, geralmente no instante $t = 0$.
2. **Verificar a variação relativa** entre os dados (se o valor se multiplica de forma consistente, é um indício de comportamento exponencial).
3. **Construir a função da forma:**

   $$P(t) = P_0 \times e^{r \times t}$$

   em que r representa a **taxa de crescimento** (se positiva) ou **decréscimo** (se negativa).
4. **Verificar a consistência do modelo** para os restantes valores existentes.

Este modelo é fundamental para prever evoluções rápidas (como crescimento de populações, investimentos ou decaimento de substâncias), ajudando-nos a **interpretar o comportamento dinâmico de fenómenos reais** ao longo do tempo.

Exemplo 27

Uma empresa está a crescer rapidamente e o número de clientes é registado ao longo de várias semanas.

Tempo (semanas) t	Número de clientes $P(t)$
0	500
2	745
4	1110

Objetivo: Ajustar um modelo exponencial contínuo à forma:

$$P(t) = P_0 \times e^{r \times t}$$

Passo 1: Identificar P_0

Do valor inicial, sabemos que: $P_0 = P(0) = 500$.

Passo 2: Verificar a variação relativa

Usamos o ponto $(t = 2\ ,\ P(2) = 745)$

$$745 = 500 \times e^{r \times 2}$$

$$\frac{745}{500} = \frac{500 \times e^{r \times 2}}{500}$$

$$1{,}49 = e^{r \times 2}$$

Aplicamos o logaritmo natural (explicado na página 156):

$$\ln(1{,}49) = 2r \implies r = \frac{\ln(1{,}49)}{2} \approx \frac{0{,}298}{2} \approx 0{,}199$$

Passo 3: Escrever o modelo

$$P(t) = 500 \times e^{0{,}199 \times t}$$

Passo 4: Verificação com $t = 4$

$$P(4) = 500 \times e^{0{,}199 \times 4} \approx 500 \times e^{0{,}796} \approx 500 \times 2{,}217 \approx 1108{,}5$$

Como o valor obtido está próximo de 1100, podemos validar o modelo.

Exercício

31 Um investigador acompanha a propagação de uma planta invasora num parque natural. Ao longo de várias semanas, regista a área coberta (em m²) pela planta.

Tempo (semanas) t	Área coberta $A(t)$ (m²)
0	200
2	302
4	456

31.1. Verifica se é adequado usar um modelo exponencial contínuo. Justifica.

31.2. Considerando que o crescimento é exponencial, determina a função $A(t) = A_0 \times e^{rt}$ que ajusta os dados.

31.3. Estima a área coberta ao fim de seis semanas.

31.4. Após quantas semanas a área coberta pela planta ultrapassará os 1000 m²?

2.3.3. Modelo logarítmico contínuo

Antes de começarmos a estudar o modelo logarítmico contínuo, vamos aprofundar (ou recordar) o que é um logaritmo, para compreendermos o seu funcionamento e como ele se aplica à modelação matemática.

Logaritmos

Um **logaritmo** é o **inverso da potenciação.** Quando temos uma potência como:

$$10^3 = 1000$$

o logaritmo responde à pergunta: **"a que expoente devo elevar 10 para obter 1000?"**

A resposta é:

$$\log_{10}(1000) = 3$$

Ou seja, o **logaritmo decimal** (ou comum) de 1000 é 3, porque $10^3 = 1000$.

Definição geral:

$$\log_b(x) = y \iff b^y = x$$

Em que:
- b é a **base** do logaritmo (número que está a ser elevado);
- x é o **resultado** da potência;
- y é o **expoente** que procuramos.

Exemplos simples:
- $\log_{10}(100) = 2$, porque $10^2 = 100$.
- $\log_2(8) = 3$, porque $2^3 = 8$.
- $\log_5(25) = 2$, porque $5^2 = 25$.
- $\log_3(1) = 0$, porque qualquer número elevado a 0 é 1.
- $\log_a(a) = 1$, para qualquer $a > 0$.

Exercício

32 Calcula os seguintes logaritmos.

32.1. $\log_{10}(1000)$ **32.2.** $\log_2(32)$ **32.3.** $\log_4(1)$

32.4. $\log_7(49)$ **32.5.** $\log_5(5)$

Logaritmos especiais

Logaritmo decimal: $\log(x)$

- O **logaritmo decimal**, representado por $\log(x)$, é o logaritmo de base 10 e indica o expoente ao qual devemos elevar 10 para obter um determinado número.

Exemplo 28

$\log(10\,000) = 4$, porque $10^4 = 10\,000$

Manual Digital

Atividade
Crescimento exponencial

Logaritmo natural: ln (x)

O **logaritmo natural**, representado por $\ln(x)$, é o logaritmo de base e (onde $e \approx 2{,}718$) e é amplamente utilizado em fenómenos de crescimento e decréscimo contínuos na Natureza e na matemática.

Exemplo 29

- $\ln(e) = 1$, porque $e^1 = e$
- $\ln(1) = 0$, porque $e^0 = 1$

Exercício

33 **Calcula os seguintes logaritmos.**

33.1. $\log(0{,}01)$ **33.2.** $\ln(1)$ **33.3.** $\ln\left(e^3\right)$

33.4. $\log(100\,000)$ **33.5.** $\ln\left(e^{-2}\right)$

Modelo logarítmico contínuo

Em certos fenómenos, o crescimento é rápido no início e vai **abrandando ao longo do tempo**, como:

- diminuição da perceção de som ou luz;
- a saturação de uma rede social ou plataforma (o número de novos utilizadores tende a estabilizar);
- diminuição da velocidade de uma reação química, com o passar do tempo.

Nesses casos, ajustamos um **modelo logarítmico contínuo**, geralmente da forma:

$$P(t) = a \times \ln(t) + b$$

Em que:

- $P(t)$ representa a variável no tempo t;
- a indica o "ritmo" de crescimento;
- b é o valor-base (ou ponto de partida).

Exemplo 30

Perceção do som (escala de decibéis)

O ouvido humano não percebe o som de forma linear, mas sim logarítmica: um som 10 vezes mais intenso não parece 10 vezes mais alto. O nível sonoro é medido numa escala logarítmica.

Modelo:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Significado das variáveis:

- L é o nível sonoro em decibéis (dB);
- I é a intensidade do som medida (em watts por metro quadrado);
- I_0 é a intensidade de referência (geralmente, o menor som que o ouvido humano pode perceber).

Exemplo 31

Saturação de utilizadores numa rede

Quando um novo serviço ou aplicação é lançado, o número de utilizadores cresce rapidamente no início, mas esse crescimento abranda com o tempo. Este é um comportamento típico de um modelo logarítmico.

Modelo:

$$U(t) = a \times \ln(t) + b$$

Significado das variáveis:

- $U(t)$ é o número total de utilizadores ao fim de t unidades de tempo;
- t é o tempo desde o lançamento da plataforma;
- a é o ritmo inicial de crescimento dos utilizadores;
- b é o número inicial de utilizadores (os fundadores, *beta testers*, etc.).

Exemplo 32

Crescimento logarítmico de utilizadores

Uma nova aplicação foi lançada e registou um crescimento rápido nas primeiras semanas. O número de utilizadores ao fim de t semanas é modelado pela função:

$$P(t) = 120 \times \ln(t) + 300$$

- Quantos utilizadores havia ao fim de uma semana?

$$P(1) = 120 \times \ln(1) + 300 = 0 + 300 = 300$$

  Ao fim de uma semana, havia 300 utilizadores.

- Quantos utilizadores havia ao fim de quatro semanas?

$$P(4) = 120 \times \ln(4) + 300 \approx 120 \times 1{,}386 + 300 \approx 166{,}32 + 300 \approx 466{,}32$$

  Ao fim de quatro semanas havia cerca de 466 utilizadores.

Manual Digital

Atividade
Crescimento logarítmico

- A partir de que semana o número de utilizadores ultrapassa 600?

$P(t) > 600$

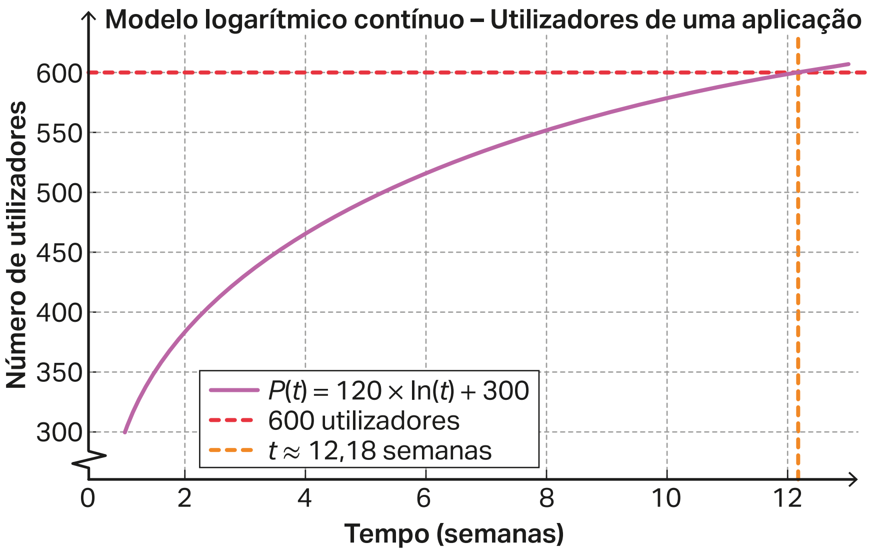
$120 \times \ln(t) + 300 > 600 \implies$

$\ln(t) > \dfrac{300}{120}$

$\ln(t) > 2{,}5 \implies$

$t > e^{2{,}5}$

Como $e^{2{,}5} \approx 12{,}18$, o número de utilizadores ultrapassa 600 na 13.ª semana.



O gráfico mostra um crescimento **rápido no início,** que **abranda com o tempo**, típico de um comportamento logarítmico.

Exercícios

34 **O número de utilizadores registados numa plataforma segue o modelo:**

$$U(t) = 150 \times \ln(t) + 500$$

em que $t > 0$ representa o tempo em semanas após o lançamento.

34.1. Quantos utilizadores havia, ao fim de uma semana?

34.2. E ao fim de cinco semanas?

34.3. A partir de que semana o número de utilizadores ultrapassa 1000 ?

35 **Um organismo cresce de acordo com o modelo:**

$$P(t) = 90 \times \ln(t+1)$$

35.1. Qual é a população inicial do organismo?

35.2. Qual será a população ao fim de três dias?

35.3. O crescimento da população é constante? Justifica a tua resposta.

36 **A função $P(t) = 80 \times \ln(t) + 150$ representa o número de pessoas interessadas num novo produto ao longo de t dias.**

36.1. Qual é o valor de $P(1)$?

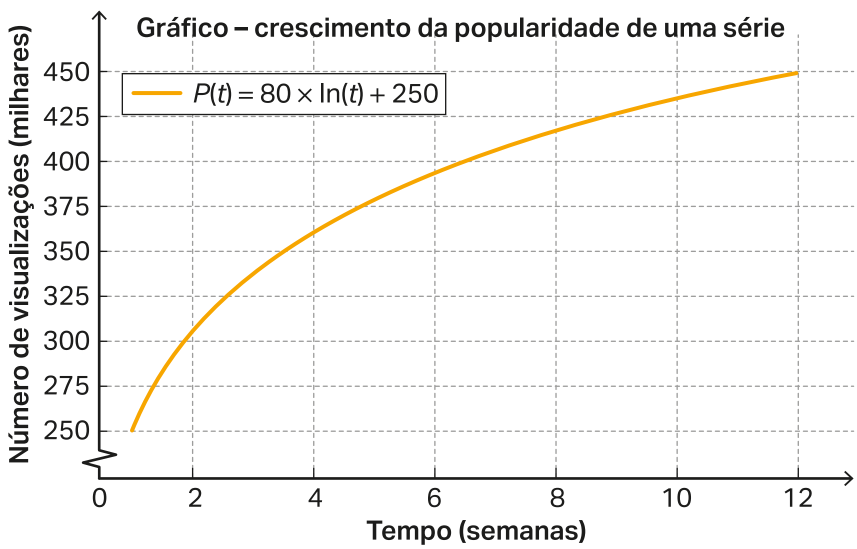
(A) 80 **(B)** 0

(C) 150 **(D)** 230

36.2. O que representa a constante 150 na função?

37 **O gráfico seguinte representa a evolução da popularidade de uma série de televisão nas primeiras semanas após o lançamento. A função é:**

$$P(t) = 80 \times \ln(t) + 250$$



37.1. O crescimento do número de visualizações é linear, exponencial ou logarítmico? Justifica a tua resposta.

37.2. Qual era a popularidade da série na 1.ª semana?

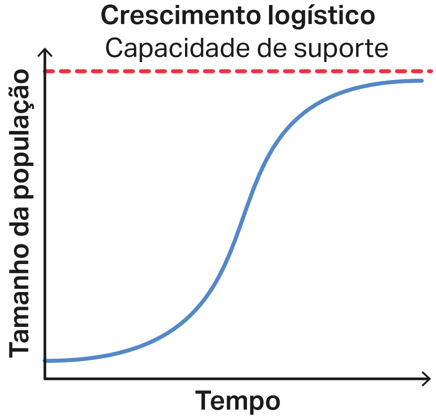
37.3. Aproximadamente, em que semana a popularidade atinge 400 mil visualizações?

37.4. O crescimento será infinito? Porquê?

2.3.4. Modelo logístico contínuo

Em muitas situações reais, o crescimento de uma população ou de uma quantidade não pode continuar indefinidamente. Mesmo que o crescimento seja inicialmente rápido (como no modelo exponencial), ele tende a abrandar com o tempo, devido a limitações de recursos, espaço ou competição.

É, nesses contextos, que entra o modelo logístico contínuo, que descreve um crescimento inicialmente acelerado, seguido por uma desaceleração progressiva até estabilizar.



O modelo logístico foi proposto, no século XIX, pelo matemático e estatístico Pierre-François Verhulst. Em 1838, Verhulst desenvolveu este modelo para melhorar o modelo exponencial de crescimento populacional, levando em conta limitações ambientais: como comida, espaço e outras pressões naturais.

Pierre-François Verhulst

Chamou o modelo de crescimento de "logistique", por se aproximar de um limite máximo, ao qual hoje chamamos de capacidade de suporte ou valor-limite.

A fórmula mais comum do modelo logístico é:

$$P(t) = \frac{K}{1 + A \times e^{-rt}}$$

Em que:

- $P(t)$ é a quantidade no tempo t;
- K é o valor-limite (capacidade máxima do sistema);
- A é a constante que depende da condição inicial;
- r é a taxa de crescimento (positiva);
- e é o número de Neper (aproximadamente, 2,718).

Este modelo é utilizado em diversas áreas em que o crescimento é inicialmente rápido mas se torna limitado por fatores externos, como recursos, resistência ou saturação. Exemplos comuns incluem:

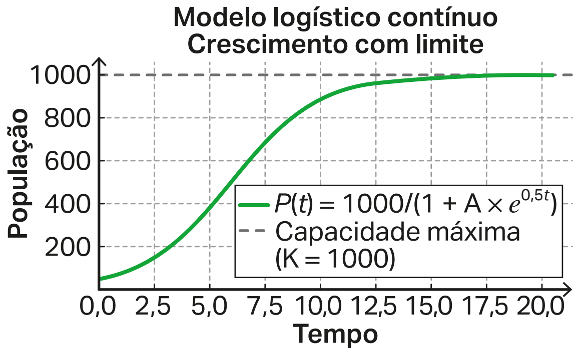
- **ecologia** (crescimento populacional em ambientes limitados);
- **epidemiologia** (propagação de doenças com imunidade ou controlo);
- **economia** (adoção de produtos no mercado);
- **tecnologia** (utilização de redes sociais ou aplicações ao longo do tempo).

O modelo logístico apresenta um comportamento característico, ao longo do tempo, dividido em três fases principais, que refletem a transição entre o crescimento acelerado inicial e a estabilização final.

Comportamento do modelo

- **Início:** crescimento quase exponencial, rápido e crescente.
- **Meio:** abrandamento progressivo (ponto de inflexão).
- **Final:** estabilização (a curva aproxima-se de K, sem o ultrapassar).

O gráfico seguinte ilustra o comportamento do modelo logístico contínuo.



- A curva começa com um **crescimento rápido**, semelhante ao exponencial.
- Depois de certo tempo, o crescimento **abranda** à medida que a população se aproxima da **capacidade máxima** ($K = 1000$).
- Por fim, a curva **estabiliza** e nunca ultrapassa o limite, pois os recursos disponíveis são limitados.

Exemplo 33

Crescimento da população numa ilha

A população de uma ilha cresce de acordo com o modelo logístico:

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 19 \times e^{-0,4t}}$$

Em que:

- $P(t)$ é a população ao fim de t anos;
- $K = 1000$ é a capacidade máxima da ilha.

■ População inicial da ilha.
Basta tomar $t = 0$.

$$P(0) = \frac{1000}{1 + 19 \times e^{-0,4 \times 0}} = \frac{1000}{1 + 19} = \frac{1000}{20} = 50$$

A população inicial da ilha era de 50 habitantes.

■ Estimar a população, ao fim de cinco anos.
Basta tomar $t = 5$.

$$P(5) = \frac{1000}{1 + 19 \times e^{-0,4 \times 5}} = \frac{1000}{1 + 19 \times e^{-2}} \approx \frac{1000}{1 + 19 \times 0,1353} \approx \frac{1000}{3,5707} \approx 280,1$$

É estimável que a população da ilha, ao fim de cinco anos, seja cerca de 280 habitantes.

Exemplo 34

Adoção de uma aplicação móvel

A função $U(t)=\dfrac{2000}{1+99\times e^{-0,6t}}$ modela o número de utilizadores de uma nova aplicação ao longo do tempo t, em semanas.

- Número de utilizadores iniciais:

$$U(0)=\frac{2000}{1+99\times e^{-0,6\times 0}}=\frac{2000}{1+99}=\frac{2000}{100}=20$$

Inicialmente, havia 20 utilizadores da nova aplicação.

- Estimar o número de utilizadores, ao fim de oito semanas:

$$U(8)=\frac{2000}{1+99\times e^{-0,6\times 8}}=\frac{2000}{1+99\times e^{-4,8}}\approx\frac{2000}{1+99\times(0,0082)}\approx 1104$$

Ao fim de oito semanas, estima-se a existência de cerca de 1104 utilizadores.

Exemplo 35

Propagação de um vírus numa escola

Numa escola, o número de infetados ao longo do tempo t (em dias) segue o modelo:

$$I(t)=\frac{500}{1+24\times e^{-0,3\times t}}$$

- Número máximo de infetados possível:

$K=500$ é o valor-limite. Logo, o valor máximo teórico possível é de 500 infetados.

- Ao fim de quanto tempo o número de infetados será, aproximadamente, 250?

$250=I(t)$

$$250=\frac{500}{1+24\times e^{-0,3\times t}}\Leftrightarrow 1+24\times e^{-0,3\times t}=\frac{500}{250}\Leftrightarrow$$

$$1+24\times e^{-0,3\times t}=2\Leftrightarrow 24\times e^{-0,3\times t}=1\Leftrightarrow$$

$$e^{-0,3\times t}=\frac{1}{24}\Leftrightarrow -0,3\times t=\ln\left(\frac{1}{24}\right)\Leftrightarrow$$

$$t=\frac{\ln(24)}{0,3}\Leftrightarrow t\approx\frac{3,178}{0,3}\approx 10,6$$

Ao fim de 11 dias o número de infetados será, aproximadamente, 250.

Exercícios

38 **Uma colónia de microrganismos apresenta um crescimento populacional, em laboratório, segundo o modelo:**

$$M(t) = \frac{800}{1 + 15 \times e^{-0,6 \times t}}$$

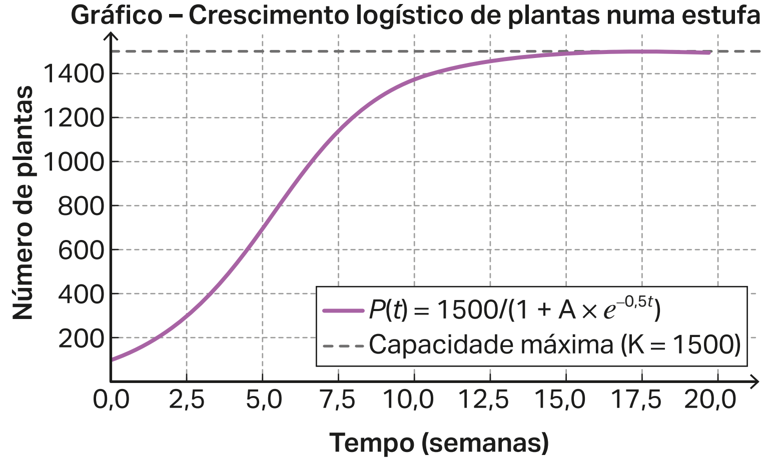
38.1. Qual era a população inicial?

38.2. Estima a população, ao fim de cinco horas.

38.3. Qual é o valor-limite que a população não ultrapassa?

39 **O número de plantas, numa estufa, cresce com o tempo t (em semanas) segundo o modelo logístico:**

$$P(t) = \frac{1500}{1 + 14 \times e^{-0,5 \times t}}$$



39.1. Quantas plantas havia no momento inicial?

39.2. Estima o número de plantas ao fim de oito semanas.

39.3. O que representa a linha horizontal a cinzento no gráfico?

40 **Uma empresa tecnológica lançou um novo produto. O número de clientes ao longo do tempo t (em meses) é dado por:**

$$P(t) = \frac{12\,000}{1 + 59 \times e^{-0,3 \times t}}$$

40.1. Quantos clientes havia no início?

40.2. Estima o número de clientes ao fim de seis meses.

40.3. Aproximadamente, em que mês o número de clientes atinge metade do valor máximo?

Síntese

Crescimento populacional

- **Modelação matemática**: Ferramenta usada para descrever, analisar e prever a evolução de sistemas, como o crescimento populacional, através de equações matemáticas.

Modelos discretos e contínuos de crescimento populacional

Os modelos populacionais podem ser:

- **Discretos**: analisam a população em intervalos de tempo separados (ex.: anos).
- **Contínuos**: descrevem a variação populacional de forma ininterrupta, ao longo do tempo.
- **Diferença-chave**:
  - Discreto → mudanças em instantes separados.
  - Contínuo → mudanças a todo o instante.

Modelos discretos

Como exemplos, estudamos: **crescimento linear**, **crescimento exponencial** e **progressões aritméticas e geométricas**.

Crescimento linear discreto

No **crescimento linear discreto** a população aumenta ou diminui sempre na mesma quantidade a cada intervalo de tempo.

Fórmula: $P(n) = P_0 + n \cdot r$

Em que:
- $P(n)$ é a população no instante n;
- P_0 é a população inicial;
- r é a razão, variação fixa a cada passo de tempo;
- n é o número de ordem.

Sequência de Fibonacci

- Cada termo é a **soma dos dois anteriores**.
- **Fórmula da sequência de Fibonacci:**
- **Termos da sequência de Fibonacci**: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Manual Digital

Atividade
Crescimento logístico

Síntese

Progressão aritmética (PA)

Uma **progressão aritmética** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando (ou subtraindo) um número fixo ao termo anterior. Esse número fixo é chamado de razão da PA (representado por r).

Fórmula do termo geral da PA: $P_n = P_1 + (n - 1) \times r$

Uma **progressão aritmética** é **crescente** quando a sua razão é positiva.
Uma **progressão aritmética** é **decrescente** quando a sua razão é negativa.
Uma **progressão aritmética** é **constante** quando a sua razão é zero.

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (S_n)

$$S_n = \frac{P_1 + P_n}{2} \times n$$

Crescimento exponencial discreto

No **crescimento exponencial discreto** a população é multiplicada por uma taxa constante a cada período.

Fórmula: $P(n) = P_0 \cdot r^n$

Em que:
- $P(n)$ é a população no instante n;
- P_0 é a população inicial;
- r é a razão de crescimento ($r > 1$ para crescimento; $0 < r < 1$ para decrescimento);
- n é a ordem do instante.

Progressão geométrica

Uma **progressão geométrica** é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo chamado razão (representado por r).

Fórmula: $P_n = P_1 \times r^{n-1}$

Em que:
- P_n é o n-ésimo termo;
- P_0 é o primeiro termo;
- r é a razão;
- n é a ordem do termo.

Fórmula da soma dos n termos de uma progressão geométrica

$$S_n = P_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Síntese

Modelos contínuos

Como exemplos, estudamos: **modelo linear contínuo**, **exponencial contínuo**, **logarítmo contínuo e logístico**.

Modelo linear contínuo

A equação geral do modelo linear contínuo é:

$$P(t) = P_0 + r \times t$$

Em que:

- $P(t)$ é a quantidade no instante t;
- P_0 é o valor inicial (quando $t = 0$);
- r é a taxa de variação constante;
- t é o tempo.

Quando $r > 0$, verifica-se crescimento, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta.

Quando $r < 0$, verifica-se decrescimento, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta.

Construção de um modelo linear contínuo

A modelação linear contínua permite-nos representar situações do quotidiano com **crescimento ou decréscimo constantes**. Quando temos **dados organizados em tabela** (por exemplo, tempo e quantidade), podemos verificar se existe uma **variação constante** entre os valores. Se essa variação for regular, podemos ajustar um **modelo linear contínuo** à situação.

O processo segue três passos simples:

1. **Verificar a taxa de variação** entre os dados — se for constante, é um bom indício de modelo linear.
2. **Identificar o valor inicial** — normalmente associado ao instante $t = 0$.
3. **Construir a função** da forma: $P(t) = P_0 + r \times t$

Modelo exponencial contínuo

Enquanto no modelo linear a variação é **constante**, no modelo exponencial ela é **proporcional** à quantidade existente.

$$P(t) = P_0 \times e^{r \times t}, \text{ sendo } r \text{ constante}$$

Síntese

Aqui, r representa a **taxa de crescimento** ou **decréscimo relativa**:

Quando $r>0$, verifica-se crescimento exponencial, $P(t)$ aumenta à medida que t aumenta.

Quando $r<0$, verifica-se decréscimo exponencial, $P(t)$ diminui à medida que t aumenta.

Construção de um modelo exponencial contínuo

A **modelação exponencial contínua** permite-nos representar situações do quotidiano em que há **crescimento ou decréscimo proporcional** à quantidade existente. Quando temos dados organizados em tabela (por exemplo, tempo e quantidade), podemos verificar se a taxa de variação **aumenta ou diminui progressivamente**, indicando que a mudança depende do valor atual.

Se esse comportamento for identificado, podemos ajustar um **modelo exponencial contínuo** à situação.

O processo segue quatro passos simples:

1. **Identificar o valor inicial**, geralmente no instante $t=0$.
2. **Verificar a variação relativa** entre os dados (se o valor se multiplica de forma consistente, é um indício de comportamento exponencial).
3. **Construir a função da forma:**

   $$P(t)=P_0\times e^{r\times t}$$

   em que r representa a **taxa de crescimento** (se positiva) ou **decréscimo** (se negativa).
4. **Verificar a consistência do modelo** para os restantes valores existentes.

O número de Neper – e

O número e (aproximadamente **2,718**) é uma **constante matemática irracional** que aparece naturalmente em muitos fenómenos de crescimento contínuo.

Logaritmos

Definição geral:

$$\log_b(x)=y \iff b^y=x$$

Em que:

- b é a **base** do logaritmo (número que está a ser elevado);
- x é o **resultado** da potência;
- y é o **expoente** que procuramos.

Síntese

Logaritmos especiais

Logaritmo decimal: $\log(x)$

O **logaritmo decimal**, representado por $\log(x)$, é o logaritmo de base 10 e indica o expoente ao qual devemos elevar 10 para obter um determinado número.

Logaritmo natural: $\ln(x)$

O **logaritmo natural**, representado por $\ln(x)$, é o logaritmo de base e (onde $e \approx 2{,}718$) e é amplamente utilizado em fenómenos de crescimento e decréscimo contínuos na Natureza e na matemática.

Modelo logarítmico contínuo

Em certos fenómenos, o crescimento é rápido no início e vai **abrandando ao longo do tempo.** Nesses casos, ajustamos um **modelo logarítmico contínuo**, geralmente da forma:

$$P(t) = a \times \ln(t) + b$$

Em que:

- $P(t)$ representa a variável no tempo t;
- a indica o "ritmo" de crescimento;
- b é o valor-base (ou ponto de partida);
- $\ln(t)$ representa o **logaritmo natural**.

Modelo logístico contínuo

Em muitas situações reais, o crescimento de uma população ou de uma quantidade **não pode continuar indefinidamente**. Nesses casos, ajustamos o **modelo logístico contínuo**, que descreve um crescimento inicialmente acelerado, seguido por uma desaceleração progressiva até estabilizar.

A fórmula mais comum do modelo logístico contínuo é:

$$P(t) = \frac{K}{1 + A \times e^{-rt}}$$

Em que:

- $P(t)$ é a quantidade no tempo t;
- K é o valor-limite (capacidade máxima do sistema);
- A é a constante que depende da condição inicial;
- r é a taxa de crescimento (positiva);
- e é o número de Neper (aproximadamente, $2{,}718$).

Para aplicar

1 Explica a diferença entre um modelo discreto e um modelo contínuo de crescimento populacional, dando um exemplo para cada modelo.

2 Qual das seguintes afirmações descreve melhor um modelo discreto de crescimento populacional?

(A) O número de indivíduos muda continuamente, ao longo do tempo.

(B) A população é medida em intervalos regulares, como anos ou meses.

(C) A taxa de crescimento depende de fatores como temperatura a cada segundo.

(D) O número de indivíduos é constante ao longo do tempo.

3 O que é a sequência de Fibonacci?

Escreve os seus oito primeiros termos e descreve a sua regra de formação.

4 Uma população inicial de 100 aves cresce 20% ao ano.

4.1. Preenche a seguinte tabela.

Ano	Número de aves
0	100
1	
2	
3	
4	
5	

4.2. Após quantos anos a população ultrapassará 300 aves?

4.3. Escreve a expressão geral para o número de aves ao fim de n anos.

5 Define o que é uma progressão aritmética e indica como se calcula o n-ésimo termo.

6 Na progressão aritmética 10, 8, 6, 4, ..., a razão é:

(A) 2 **(B)** -2 **(C)** 4 **(D)** -4

Para aplicar

7 A Rita estuda 30 minutos, no primeiro dia, e aumenta a duração de estudo, diariamente, em 10 minutos.

7.1. Ao fim de quantos dias estudará mais de 1 hora (60 minutos)?

7.2. Quanto tempo estudará ao 7.º dia?

7.3. A Rita estudará três horas (180 minutos) em algum dos dias? Justifica.

8 Numa progressão aritmética temos $P_1 = 12$ e razão $r = -3$. Qual é o valor do 10.º termo?

9 Um ciclista percorre uma estrada a uma velocidade constante de 18 km/h. Se ele já percorreu 9 km, qual é a distância total percorrida após duas horas?

(A) 36 km

(B) 45 km

(C) 27 km

(D) 21 km

10 Qual é a característica fundamental de uma progressão geométrica?

(A) Soma de termos iguais.

(B) Subtrai-se sempre o mesmo valor.

(C) Cada termo é o dobro do anterior.

(D) Cada termo é obtido multiplicando o anterior por uma razão constante.

11 Um contentor de leite contém 300 litros, no início da manhã. A cada hora, são retirados 25 litros para distribuição.

11.1. Escreve a expressão que representa a quantidade de leite no contentor, ao fim de t horas.

11.2. Quantos litros restam ao fim de seis horas?

11.3. Após quanto tempo restarão apenas 100 litros?

11.4. O que acontece se aplicares o modelo para $t = 12$ horas? Esse valor faz sentido?

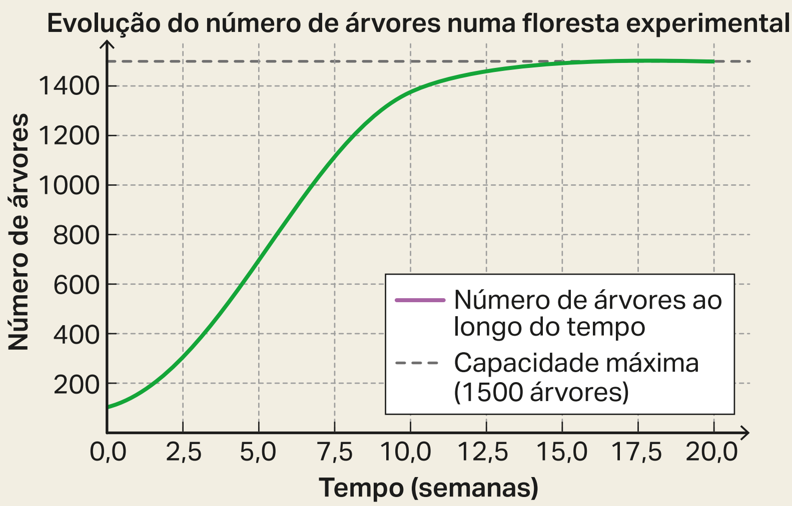
12 **Um paciente toma uma dose de 600 mg de um medicamento. O medicamento é eliminado, do corpo do paciente, continuamente a uma taxa de 20% por hora.**

12.1. Escreve a função que representa a quantidade de medicamento no organismo, ao longo do tempo.

12.2. Quantos miligramas restarão após quatro horas?

12.3. Após quanto tempo restarão apenas 100 mg?

13 **O gráfico seguinte apresenta a evolução do número de árvores, numa floresta, ao longo do tempo (em semanas).**



13.1. Que tipo de crescimento é representado?

(A) Linear

(B) Exponencial

(C) Logarítmico

(D) Logístico

13.2. O que indica o ponto de inflexão na curva?

(A) Onde a população começa a diminuir

(B) Onde o crescimento acelera sem parar

(C) Onde o crescimento atinge o ritmo mais rápido antes de abrandar

(D) Onde a curva se cruza com o eixo do tempo

Para aplicar

14 O nível sonoro L (em db) pode ser determinado em função da intensidade I de um som em relação a uma referência I_0 de acordo com a seguinte expressão:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

14.1. Calcula o nível sonoro L quando $\frac{I}{I_0} = 1000$.

14.2. E se a intensidade for apenas 10 vezes superior à referência?

14.3. A diferença entre $10\ \text{dB}$ e $30\ \text{dB}$, nos valores de intensidade, representa o dobro do som? Explica.

15 Um reservatório contém, inicialmente, 200 litros de água. Está a ser abastecido a uma taxa constante de 12 litros por minuto.

Qual será a quantidade de água no depósito, após 15 minutos?

16 Explica a diferença entre os modelos exponencial contínuo e logístico contínuo com exemplos práticos.

17 Uma plantação de milho foi iniciada com 80 plantas e a sua evolução, ao longo das semanas, é dada por:

$$P(t) = \frac{1200}{1 + 14 \times e^{-0,4t}}$$

17.1. Qual é o número inicial de plantas de milho?

17.2. Estima o número de plantas, ao fim de 10 semanas.

17.3. A plantação poderá ultrapassar 1200 plantas?
Justifica.

18 **O número de utilizadores de uma nova marca de telemóvel é dado por:**

$$P(t) = \frac{500\,000}{1 + 199 \times e^{-0{,}6t}}$$

18.1. Qual era o número de utilizadores no momento do lançamento ($t = 0$)?

18.2. Após quanto tempo (aproximadamente) haverá 300 000 utilizadores?

18.3. O que representa o número 500 000 neste modelo?

19 **Um agricultor cabo-verdiano está a monitorizar o crescimento de uma planta de moringa, nos primeiros dias após a germinação.**

Os dados foram recolhidos em ambiente controlado, com rega e luz solar constantes e são apresentadas na seguinte tabela.

Tempo (dias) t	Altura da planta $H(t)$ (cm)
0	10
3	16
6	25,6

19.1. Verifica se é adequado usar um modelo exponencial contínuo para descrever o crescimento da planta. Justifica com base nos dados.

19.2. Considerando que o crescimento é exponencial, determina a função do tipo $H(t) = H_0 \times e^{r \times t}$ que se ajusta aos dados fornecidos.

19.3. Estima a altura da planta, ao fim de 10 dias.

19.4. Após quantos dias a altura da planta ultrapassará 50 cm ?

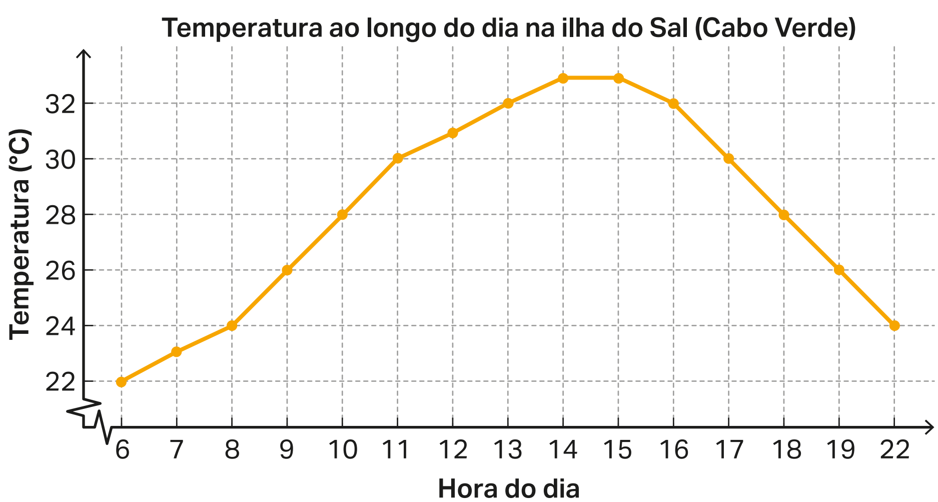
2.4. Derivada de funções reais de variável real e aplicações

2.4.1. Taxa média de variação de uma função

A taxa média de variação (TMV) de uma função mede como o valor da função muda, em média, ao longo de um intervalo. Por outras palavras, a TMV indica quanto a variável dependente (y) varia em relação à variável independente (x).

A tabela e o gráfico seguintes mostram a variação da temperatura, ao longo do dia, na ilha do Sal, com dados simulados entre as 6 h e as 20 h.

Hora (h)	Temperatura (°C)
6	22
7	23
8	24
9	26
10	28
11	30
12	31
13	32
14	33
15	33
16	32
17	30
18	28
19	26
20	24



- A tabela mostra as temperaturas registadas, de hora a hora, das 6 h às 20 h.
- O gráfico representa visualmente essa variação, permitindo observar tendências, ao longo do dia.

Seja f a função que à hora x faz corresponder $f(x)$ temperatura registada nessa hora.

A partir da informação dada, no gráfico e na tabela, podemos efetuar diversas conclusões, por exemplo:

- Às 8 horas a temperatura era de $24\ °\text{C}$.

$$f(8)=24$$

- Às 12 horas a temperatura era de $31\ °\text{C}$.

$$f(12)=31$$

- Às 19 horas a temperatura era de $26\ °\text{C}$.

$$f(19)=26$$

- A variação de temperatura entre as 8 horas e as 12 horas foi de $7\ °\text{C}$.

$$f(12)-f(8)=31-24=7$$

Como a variação é positiva, dizemos que houve um aumento de temperatura.

- A variação de temperatura entre as 12 horas e as 19 horas foi de $-5\ °\text{C}$.

$$f(19)-f(12)=26-31=-5$$

Como a variação é negativa, dizemos que houve uma diminuição de temperatura.

Variação

A **variação** é a diferença entre dois valores de uma grandeza, ao longo do tempo, ou em função de outra variável.

Se uma grandeza f (como temperatura, distância, altura, etc.) muda de um valor $f(a)$ para outro valor $f(b)$, então a **variação** é dada por:

$$\Delta f=f(b)-f(a)$$

em que:

- $f(a)$ é o valor **inicial**;
- $f(b)$ é o valor **final**;
- Δf (lê-se "delta f") é a **variação da grandeza**.

- Se o valor final for **maior** do que o inicial $(f(b)-f(a)>0)$, a variação será **positiva**, indicando uma **subida, acréscimo ou aumento.**
- Se o valor final for **menor** do que o inicial $(f(b)-f(a)<0)$, a variação será **negativa**, indicando uma **queda, decréscimo ou diminuição.**
- Se o valor final for **igual** ao inicial $(f(b)-f(a)=0)$, não ocorre variação**.**

Exercícios

41 **Um trabalhador da ilha do Sal auferiu os salários anuais (correspodente a 12 pagamentos mensais) apresentados na tabela abaixo.**

41.1. Indica o salário mensal do trabalhador, em 2021.

41.2. Determina a variação do salário anual entre 2020 e 2023.

41.3. Comenta a afirmação: "De 2020 a 2023 o valor do salário anual aumentou todos os anos".

Ano	Salário (escudos)
2020	450 000
2021	480 000
2022	470 000
2023	540 000

42 **A seguinte tabela apresenta o número de passageiros, que estavam num autocarro, após cada paragem.**

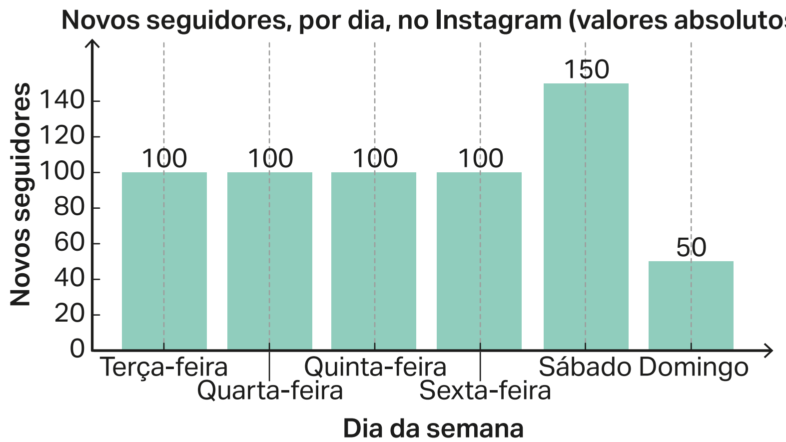
Paragem	N.º de passageiros
Início	12
P1	18
P2	22
P3	15
Fim	10

42.1. Indica o número total de paragens.

42.2. Qual foi a variação do número de passageiros da paragem P1 para a paragem P3?

42.3. Indica as situações em que a variação do número de passageiros foi negativa.

43 **O gráfico seguinte apresenta os valores absolutos de novos seguidores de um artista, numa determinada semana.**



43.1. Indica o dia dessa semana em que o artista obteve mais seguidores.

43.2. Indica a variação verificada, do número de novos seguidores, de quarta-feira para sábado.

43.3. Quantos novos seguidores obteve o artista nessa semana?

Taxa média de variação (TMV)

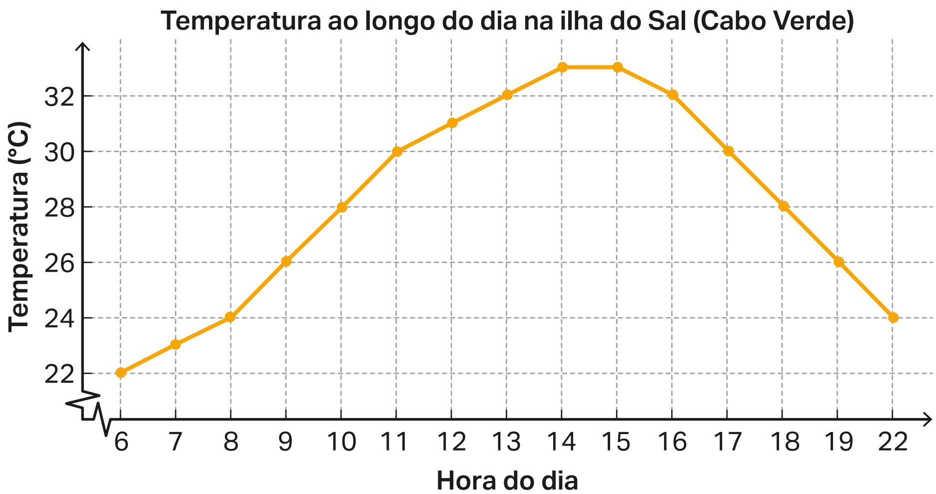
A **taxa média de variação** de uma função mede como o valor da função muda, em média, ao longo de um intervalo.

Seja uma função f definida num intervalo $[a, b]$. A **taxa média de variação** de f nesse intervalo é dada por:

$$TMV_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ou seja, é o **quociente entre a variação de y e a variação de x**.

Vamos recorrer novamente ao gráfico que mostra a temperatura, ao longo do dia na ilha do Sal, com dados simulados entre as 6 h e as 20 h.



A partir da informação dada, no gráfico e na tabela, podemos tirar diversas conclusões sobre a taxa média de variação.

- A taxa média de variação entre as 8 horas e as 12 horas foi $1{,}75\ °C$.

$$TMV_{[8,12]} = \frac{f(12) - f(8)}{12 - 8} = \frac{31 - 24}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Podemos então afirmar que o aumento médio de temperatura entre as 8 e as 12 horas foi de $1{,}75\ °C$.

- A taxa média de variação entre as 12 horas e as 19 horas foi de $-1{,}25\ °C$.

$$TMV_{[12,19]} = \frac{f(19) - f(12)}{19 - 12} = \frac{26 - 31}{4} = \frac{-5}{4} = -1{,}25$$

Podemos então afirmar que a diminuição média de temperatura entre as 12 e as 19 horas foi de $-1{,}25\ °C$.

Exemplo 36

Um carro percorreu uma estrada entre duas cidades e os dados da distância percorrida, desde o início, a cada hora foram registados na seguinte tabela.

Tempo (h)	Distância (km)
0	0
1	60
2	130
3	180
4	240

A **taxa média de variação da distância** (isto é, a **velocidade média**) entre 0 h e 2 h foi:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{130-0}{2}=65$$

- a velocidade média nas duas primeiras horas foi de 65 km/h;
- a taxa média de variação entre 2 h e 4 h foi de $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{240-130}{2}=55$.
- a velocidade média nas duas últimas horas foi de 55 km/h.

Exemplo 37

A tabela seguinte apresenta o número de utilizadores de uma *app*.

Dia	Utilizadores ativos
Segunda	1000
Quinta	1600

Taxa média de variação no número de utilizadores entre segunda-feira e quinta-feira, ou seja, entre o 2.º e o 5.º dias da semana:

$$TMV_{[2,5]}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{1600-1000}{3}=\frac{600}{3}=200$$

Em média, a *app* teve 200 novos utilizadores, por dia, entre segunda-feira e quinta-feira.

Exercícios

44 **Um agricultor da ilha de Santiago registou os valores de milho (em kg), durante cinco anos apresentados na tabela ao lado.**

Ano	Produção (kg)
2019	950
2020	1200
2021	1300
2022	1000
2023	1100

44.1. Calcula a TMV entre 2019 e 2021.

44.2. Calcula a TMV entre 2021 e 2023.

44.3. Em que período a produção teve variação negativa?

45 **A pluviosidade acumulada, em mm, durante dois anos, numa determinada região, foi:**

- **2022: 320 mm**
- **2023: 400 mm**

Qual foi a taxa média de variação?

(A) 60 mm/ano **(B)** 80 mm/ano **(C)** 100 mm/ano **(D)** 720 mm/ano

46 **Um ciclista percorre uma estrada e as distâncias registadas, ao longo do tempo, constam da tabela seguinte:**

Tempo (h)	Distância (km)
0	0
1	12
2	28
3	39

46.1. Qual foi a TMV entre 0 h e 2 h?

46.2. Qual foi a TMV entre 1 h e 3 h?

46.3. A velocidade média aumentou ou diminuiu entre esses intervalos?

47 **A função f está representada graficamente abaixo.**

Determina:

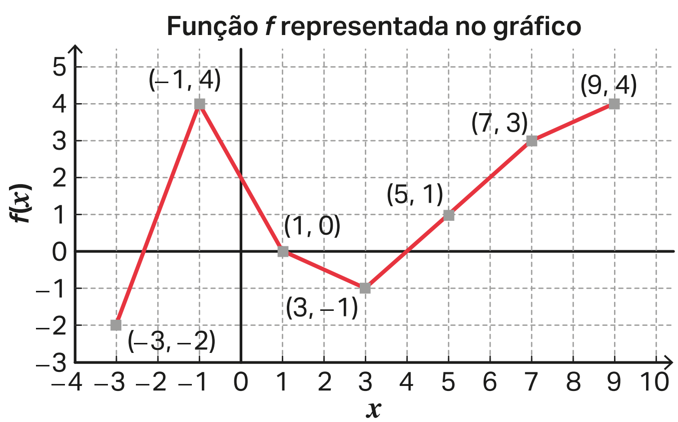
47.1. A variação de f no intervalo $[-3, -1]$ e a taxa média de variação nesse mesmo intervalo.

47.2. A taxa média de variação da função nos seguintes intervalos:

a) $[-1, 3]$;

b) $[3, 9]$;

c) $[5, 7]$.



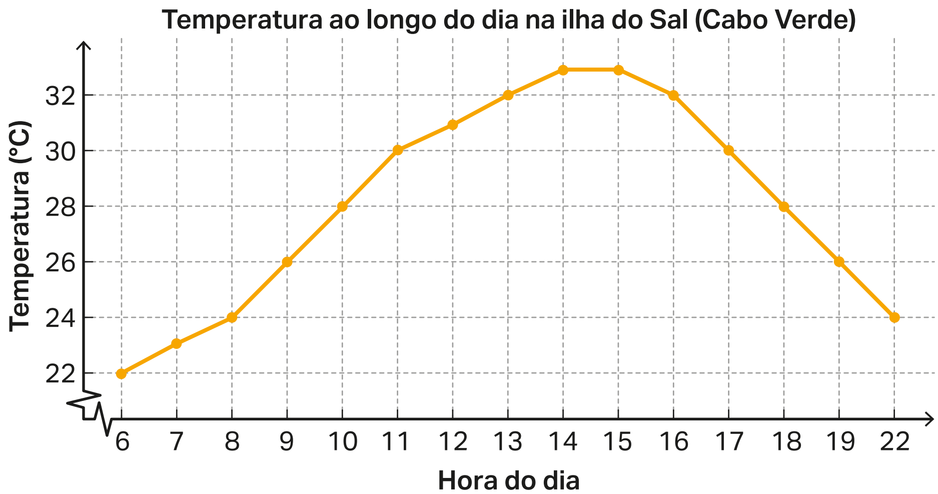
Manual Digital

Vídeo
Velocidade média e taxa média de variação

2.4.2. Interpretação geométrica da TMV

A taxa média de variação entre dois pontos de uma função pode ser interpretada, geometricamente, como **a inclinação da reta secante** que liga dois pontos no gráfico da função.

De novo, vamos recorrer ao gráfico que mostra a temperatura, ao longo do dia, na ilha do Sal, com dados simulados entre as 6 h e as 20 h.



Vamos interpretar geometricamente a taxa média de variação no intervalo das 8 horas às 14 horas.

- **8 h**: a temperatura é $24\ °C \longrightarrow$ ponto $A = (8{,}24)$
- **14 h**: a temperatura é $33\ °C \longrightarrow$ ponto $B = (14{,}33)$

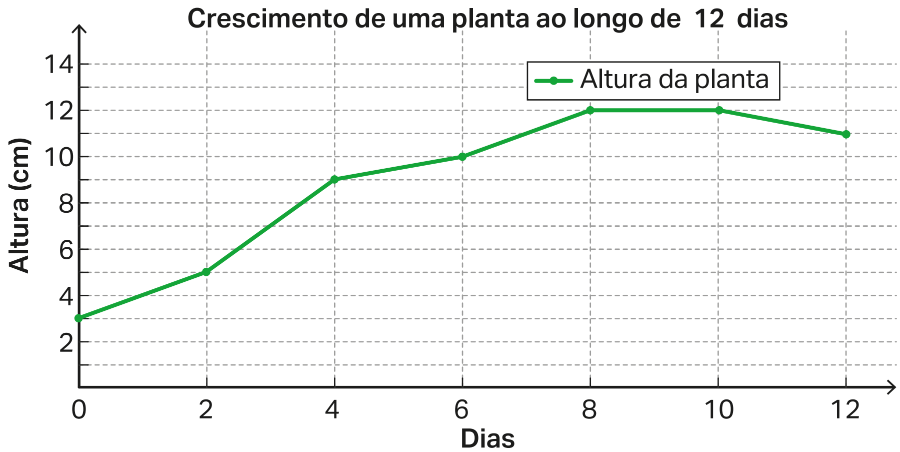
Interpretação geométrica:

Se traçarmos uma **reta que contenha os pontos A e B** do gráfico:

- Essa reta tem **inclinação positiva** (declive $1{,}5$), pois a temperatura aumentou entre as 8 h e as 14 h.
- Quanto **maior a inclinação**, **maior a taxa média de variação**.
- A TMV aparece no gráfico como a inclinação da secante entre dois pontos.
- Uma TMV positiva $\longrightarrow$ reta inclinada para cima: $f(b) > f(a)$;
- Uma TMV negativa $\longrightarrow$ reta inclinada para baixo: $f(b) < f(a)$;
- Uma TMV zero $\longrightarrow$ reta horizontal: $f(b) = f(a)$;

Exercícios

48 O gráfico seguinte representa o crescimento (em cm) de uma planta, ao longo de 12 dias.



Considera os pontos:

$$A = (2\,,\ 5) \text{ e } B = (4\,,\ 9)$$

48.1. Representa geometricamente a reta secante entre os pontos A e B.

48.2. Calcula a TMV entre os dias 2 e 4.

48.3. O que indica a inclinação positiva da reta nesse intervalo?

49 Uma reta secante liga os pontos $P = (2\,,\ 4)$ e $Q = (6\,,\ 0)$ no gráfico de uma função f.

Qual é o valor da **taxa média de variação** de f entre $x = 2$ e $x = 6$?

(A) 1

(B) -1

(C) -4

(D) -0

50 Considera as funções p e q definidas por:

$$p(x) = 2x - 4$$

$$q(x) = x^2 - 2x$$

Calcula a taxa de variação da função:

50.1. p em $[1\,,\ 3]$;

50.2. p em $[0\,,\ a]$;

50.3. q em $[-2\,,\ 1]$;

50.4. q em $[b\,,\ 0]$.

Manual Digital

Vídeo
Taxa média de variação e interpretação geométrica

2.4.3. Derivada de uma função num ponto

Ao estudarmos o comportamento de uma função, muitas vezes não nos interessa apenas saber o seu valor em determinado ponto, mas sim perceber **como está a variar** nesse ponto: se está a subir, a descer e com que intensidade.

É, nesse contexto, que surge a noção de **derivada**, um conceito fundamental da matemática que permite medir a rapidez de variação de uma função num instante específico.

A noção de derivada de uma função e as regras da sua aplicação constituem o que é conhecido por cálculo diferencial, que tem a sua origem no século XVII, com dois grandes nomes da ciência: **Isaac Newton** (1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).

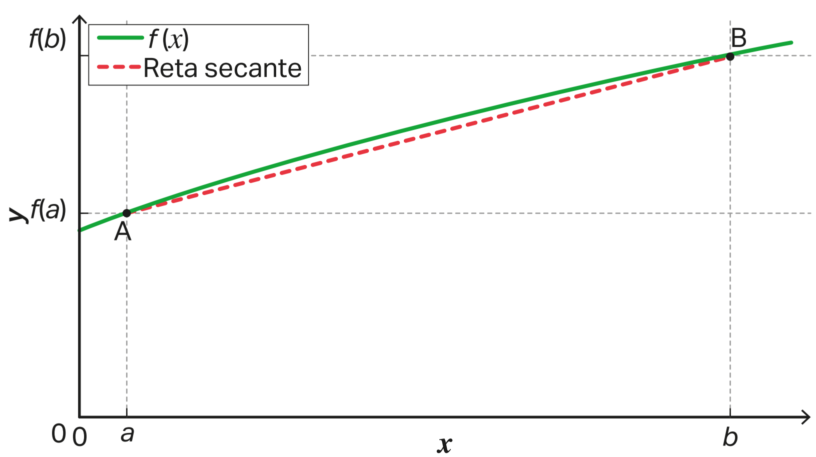
Este conceito está presente em inúmeras situações do quotidiano e da ciência:

- na evolução do crescimento de uma população;
- nos índices de desenvolvimento económico;
- na variação das temperaturas;
- no cálculo de velocidades e acelerações de objetos em movimento.

A derivada é, assim, uma ferramenta essencial para **compreender mudanças**, fornecendo uma visão **instantânea** da variação de uma grandeza.

Para encontrar a inclinação da reta secante a dois pontos de uma função, determinamos a TMV entre esses dois pontos.

Por exemplo, considerando uma função real de variável real definida por $y = f(x)$ e a e b dois elementos do seu domínio, consideramos a reta secante que contém os pontos $A(a\,,\ f(a))$ e $B(b\,,\ f(b))$:



A $TMV_{[a\,,\ b]}$ corresponde à inclinação da reta secante à função f que passa nos pontos A e B.

$$TMV_{[a\,,\ b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Mas, e se quisermos saber a inclinação da função num único ponto? Por exemplo, no ponto A?

Para encontrar a **inclinação da função num ponto específico**, determinamos a **derivada**:

- Aproximamos o ponto B de A, ou seja, escreva-se a abcissa de B, em função da abcissa de A.

$$b = a + h$$

  Calculamos a TMV entre a e $a+h$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

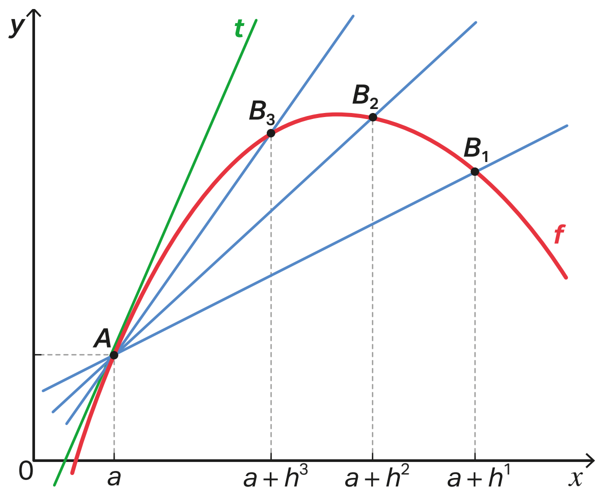
- E agora fazemos $h \longrightarrow 0$ (ou seja, imaginamos que h tende para zero, isto é, a e b tendem a aproximar-se).

Definição formal da derivada:

A derivada de f no ponto $x = a$ é:

$$f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretação geométrica da derivada num ponto



Para estudar a derivada no ponto $A(a\,,\; f(a))$, pode-se imaginar determinar as TMV nos intervalos $[a\,,\; h_1]$, $[a\,,\; h_2]$, $[a\,,\; h_3]$, sendo h_1, h_2, h_4, $\ldots$ uma sucessão de valores cada vez mais pequenos. Estamos, por isso, a estudar o declive das retas secantes que contêm os pontos $A(a\,,\; f(a))$ e $B(a+h\,,\; f(a+h))$, de forma a perceber o que acontece quando $h \longrightarrow 0$. Nessa situação, estamos a aproximar-nos da busca do declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

A derivada de uma função f num ponto $(a\,,\; f(a))$ representa-se por $f'(a)$ e corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.

Manual Digital

Vídeo
Derivada de uma função num ponto

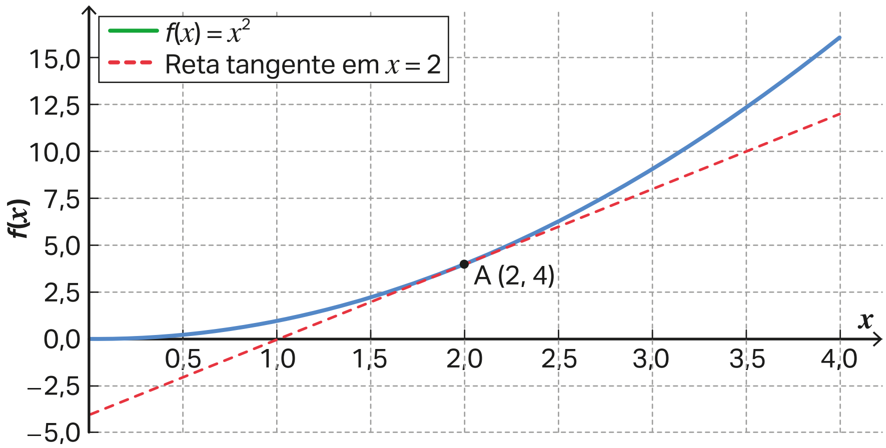
Exemplo 38

Seja $f(x)=x^2$.

Queremos calcular a derivada em $x=2$.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

Então, o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x)=x^2$ no ponto de abcissa $x=2$ é 4.



A reta tangente "toca" o gráfico de f apenas no ponto de abcissa $x=2$ e o seu declive (4) representa a **variação instantânea** da função nesse ponto.

Exercícios

51 Seja $f(x)=x^2+1$.

51.1. Calcula a derivada de f no ponto de abcissa $x=1$.

51.2. Representa graficamente a função e a reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $x=1$.

52 Seja $f(x)=3x-x^2$.

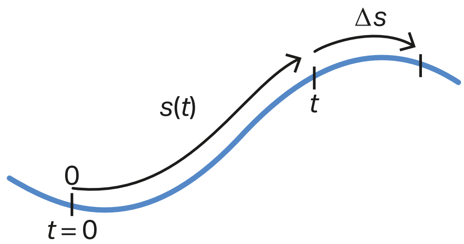
52.1. Determina $f'(2)$.

52.2. Representa graficamente a função e a reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $x=2$.

2.4.4. Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto

A cinemática estuda o movimento de um corpo (neste caso, um ponto material) sem se preocupar com as causas do movimento. Foca-se em grandezas como posição, velocidade e aceleração.

A derivada surge como uma ferramenta para relacionar essas grandezas, permitindo medir como elas variam ao longo do tempo.



Manual Digital

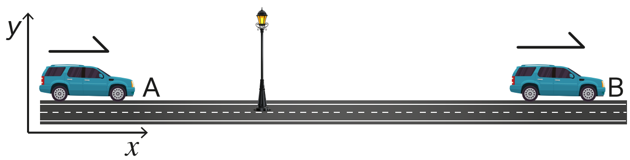
Vídeo
Interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto

Posição

Seja $s(t)$ a função posição, que indica a posição de um objeto em função do tempo t. A unidade de $s(t)$ pode ser, por exemplo, metros (m).

Velocidade instantânea – Derivada da posição

A velocidade média entre dois instantes t_1 e t_2 corresponde à TMV da função posição, nesse intervalo de tempo:



$$V_{\text{média}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A velocidade instantânea, no instante t, é dada pela derivada da função posição, nesse instante:

$$v(t) = s'(t)$$

A velocidade é a **taxa de variação da posição** em relação ao tempo.

Aceleração – Derivada da velocidade

A aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

A aceleração é a **taxa de variação da velocidade** em relação ao tempo.

Exemplo 39

Velocidade instantânea

Um corpo move-se ao longo de uma linha reta e a sua posição em função do tempo é dada por:

$s(t) = t^2 + 2t$ (em metros, com t em segundos)

Para determinar a sua velocidade instantânea, no instante $t=3$ segundos, usando a definição de derivada faz-se:

$$v(3)=s'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{s(3+h)-s(3)}{h}$$

Como: $s(3)=3^2+2\times 3=15$ e

$$s(3+h)=(3+h)^2+2\times(3+h)=9+6h+h^2+6+2h=15+8h+h^2$$

Substituindo na definição:

$$v(3)=\lim_{h\to 0}\frac{15+8h+h^2-15}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}8+\mathrm{h}=8$$

A velocidade do corpo no instante $t=3$ segundos é $8\ \text{m/s}$.

Exercícios

53 **Um corpo move-se segundo $s(t)=t^3$. Qual é a sua velocidade no instante $t=2$?**

(A) 2

(B) 8

(C) 12

(D) 24

54 **Um carro desloca-se segundo a lei:**

$$s(t)=5t-0{,}5t^2 \text{ (em metros)}$$

54.1. Em que instante o carro para momentaneamente?

54.2. Qual é a velocidade no instante $t=2$?

2.4.5. Diferenciabilidade e continuidade num ponto

Em análise matemática, dois conceitos fundamentais para o estudo das funções reais de variável real são a **continuidade** e a **diferenciabilidade** num ponto.

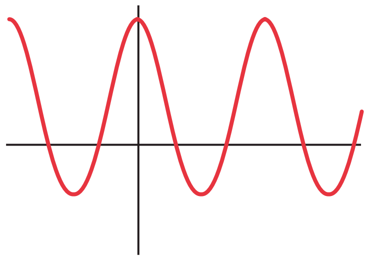
Continuidade num ponto

Uma função f é **contínua num ponto** de abcissa $x=a$ se o limite quando x tende para a existe e é igual ao valor da imagem pela função nesse ponto. Em termos formais:

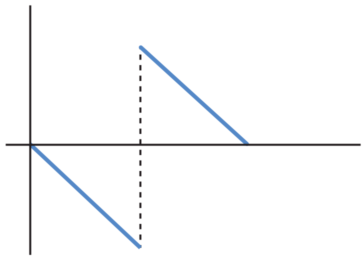
$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Isto significa que a função não apresenta "saltos" ou "quebras", em $x=a$.

Exemplo de função contínua



Exemplo de função não contínua



Diferenciabilidade num ponto

Uma função f é **diferenciável num ponto** de abcissa $x = a$ se existe a derivada de f nesse ponto, ou seja, se o seguinte limite existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este limite representa o declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função em $x = a$.

Relação entre continuidade e diferenciabilidade

- Toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.
- O inverso não é necessariamente verdadeiro, uma função pode ser contínua num ponto mas não ser diferenciável nesse ponto.

Exemplo 40

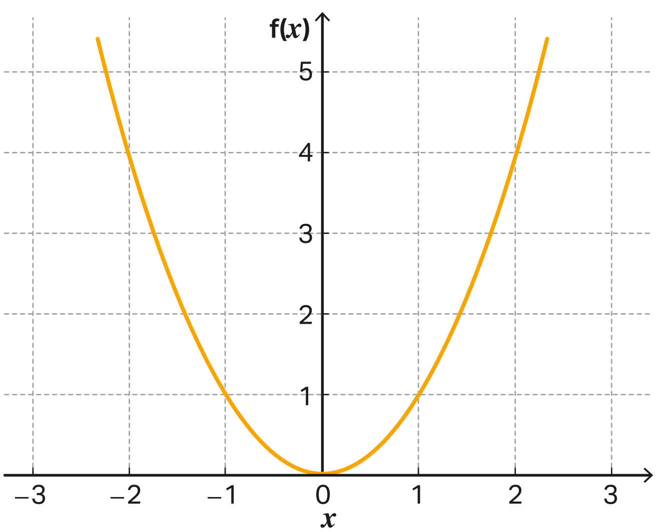
Função contínua e diferenciável

Considera a função:

$$f(x) = x^2$$

- É contínua em todo o $\mathbb{R}$ porque para todos os números reais a, o limite de $f(x)$ quando $x \longrightarrow a$ é sempre igual a $f(a)$.
- É diferenciável em todo $\mathbb{R}$. Em todos os pontos do gráfico, é possível encontrar uma reta tangente, com declive igual a um número real.

Gráfico de f(x) = x^2



Manual Digital

Vídeo
Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto

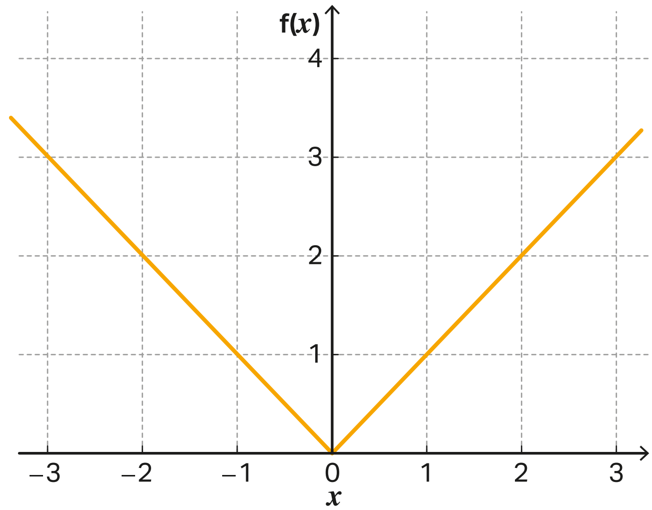
Exemplo 41

Função contínua, mas não diferenciável

Considera a função:

$$f(x) = |x|$$

Gráfico de f(x) = $|x|$



- É contínua em todo o $\mathbb{R}$, inclusivamente, no ponto de abcissa $x = 0$, pois $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} |x| = 0 = f(0)$.
- Não é diferenciável em $x = 0$, pois os declives das retas tangentes no ponto de abcissa $x = 0$, se determinadas à direita ou à esquerda, são diferentes.
  À direita, a reta tangente seria $y = x$, logo o declive é 1. À esquerda, a reta tangente seria $y = -x$, logo o declive é -1.

Então, não existe derivada da função no ponto de abcissa $x = 0$.

Exercício

55 **Considera a função definida por partes:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

55.1. Efetua o esboço gráfico da função.

55.2. A função f é contínua em $x = 1$?

55.3. A função f é diferenciável em $x = 1$? Justifica.

2.4.6. Regras de derivação

Como vimos, calcular a derivada diretamente pela definição pode ser trabalhoso, pois envolve o cálculo de limites. Para facilitar o processo, existem regras práticas que nos permitem derivar funções, com maior rapidez e precisão. Estas regras de derivação baseiam-se em propriedades matemáticas fundamentais e são essenciais no estudo do cálculo diferencial.

Derivada de uma constante

A derivada de uma constante é zero.

Se $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

Por exemplo, se $f(x) = 7$, então $f'(x) = 0$.

Derivada da função identidade

Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.

Derivada da potência de x

Se $f(x) = x^n$, com $c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Por exemplo, se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4 \cdot x^3$.

Ou se $f(x) = x^{-2}$, então $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$.

Exercício

56 Calcula a derivada das seguintes funções definidas por:

56.1. $f(x) = 5$

56.2. $f(x) = -8$

56.3. $f(x) = x$

56.4. $f(x) = x^9$

56.5. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

56.6. $f(x) = x^{-6}$

Derivada do seno

Se $f(x) = \text{sen}\,(x)$, então $f'(x) = \cos\,(x)$.

Derivada do cosseno

Se $f(x) = \cos\,(x)$, então $f'(x) = -\,\text{sen}\,(x)$.

Derivada do logaritmo

Se $f(x) = \log_a(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{\ln(a)}$.

Derivada do logaritmo natural

Se $f(x) = \ln(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Derivada de potência de expoente x

Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x \times \ln(a)$.

Exercício

57 Calcula a derivada das seguintes funções:

57.1. $f(x) = -\text{sen}(x)$

57.2. $f(x) = -\cos(x)$

57.3. $f(x) = \log_4(x)$

57.4. $f(x) = \log_{10}(x)$

57.5. $f(x) = 4^x$

57.6. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

Derivada da soma e da diferença

A derivada da soma (ou da diferença) de duas funções é igual à soma (ou diferença) das derivadas.

Se $f(x) = u(x) \pm v(x)$, então $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Por exemplo, se $f(x) = x + x^3$, então $f'(x) = (x)' + \left(x^3\right)' = 1 + 3x^2$.

Ou se $f(x) = x^5 - 2x$, então $f'(x) = \left(x^5\right)' - (2x)' = 5x^4 - 2$.

Derivada do produto

Se $f(x) = u(x) \times v(x)$, então $f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^3 \times \text{sen}(x)$, então

$$f'(x) = \left(x^3\right)' \times \text{sen}(x) + x^3 \times (\text{sen}(x))' = 3x^2\,\text{sen}(x) + x^3 \cos(x) .$$

Ou se $f(x) = 7 \times x^4$, então

$$f'(x) = (7)' \times x^4 + 7 \times \left(x^4\right)' = 0 \times x^4 + 7 \times 4x^3 = 28x^3 .$$

No exemplo anterior, podemos verificar um caso particular:

Derivada do produto de uma constante por uma função

$$(k \times f(x))' = k \times f'(x) \qquad (k \neq 0)$$

Por exemplo, se $f(x) = 5 \ln(x)$, então $f'(x) = \frac{5}{x}$.

Derivada do quociente

Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, então $f'(x) = \frac{u'(x) \bullet v(x) - v'(x) \bullet u(x)}{(v(x))^2}$.

Por exemplo, se $f(x) = \frac{x^4 + 2}{3}$, então

$$f'(x) = \frac{(x^4+2)' \times 3 - (x^4+2) \times (3)'}{3^2} = \frac{(4x^3+0) \times 3 + 0}{9} = \frac{12x^3}{9} = \frac{4x^3}{3}.$$

Exercício

58 **Calcula a derivada das seguintes funções:**

58.1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$

58.2. $f(x) = (2x)(x^2+1)$

58.3. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

58.4. $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$

58.5. $f(x) = x^4 - 3x + \sqrt{x}$

Manual Digital

Vídeos
Derivada de funções constantes

Derivada de funções: x, x^2 e x^3

2.4.7. Problemas que envolvem derivadas

Agora, que já aprendemos as principais regras de derivação, e sabemos como calcular derivadas de forma rápida e eficaz, estamos preparados para usar a derivada para resolver problemas de situações reais.

Em muitas situações práticas, como calcular a velocidade de um corpo em movimento, a taxa de crescimento de uma planta ou o ponto mais alto de um projétil, a derivada surge como uma ferramenta essencial. Antes, essas questões exigiriam limites complicados; agora, com as regras de derivação, conseguimos resolver esses problemas com rapidez e confiança.

Vamos aplicar o que aprendemos a contextos concretos e ver como a derivada nos ajuda a interpretar e resolver diferentes tipos de situações.

Manual Digital

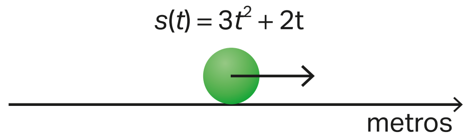
Vídeos
Derivada de funções: $\frac{1}{x}$

Derivada da função soma

Derivada da função produto

Exemplo 42

Um objeto move-se ao longo de uma linha reta e a sua posição em função do tempo t (em segundos) é dada por $s(t) = 3t^2 + 2t$ (em metros).



Qual é a velocidade instantânea do objeto no instante $t = 4$ segundos?

A velocidade instantânea é a derivada da posição:

$$v(t) = s'(t) = 6t + 2$$

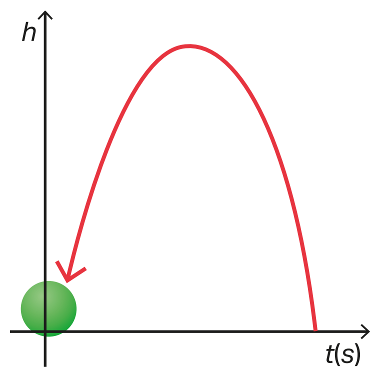
No instante $t = 4$:

A velocidade instantânea do objeto no instante $t = 4$ é $v(4) = 6 \times 4 + 2 = 26$ m/s.

Exemplo 43

A altura de uma bola lançada para cima é dada, em função do tempo, em segundos, por

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5 \text{ (em metros).}$$



a) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

b) Em que instante a bola atinge essa altura?

A velocidade é a derivada da altura:

$$v(t) = h'(t) = -10t + 20$$

Reparemos que, a altura máxima é atingida quando o gráfico muda o sentido de variação. Isto é, a bola está a subir e, nesse instante, passa a descer. Aqui, a reta tangente ao gráfico será horizontal, ou seja, terá declive nulo. Na verdade, neste ponto, a velocidade da bola será zero.

Portanto, para encontrar a altura máxima, fazemos $v(t) = 0$:

$$-10t + 20 = 0 \implies t = 2$$

Substituímos em $h(t)$:

$$h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 1{,}5 = -20 + 40 + 1{,}5 = 21{,}5 \text{ m}$$

A altura máxima atingida pela bola foi de $21{,}5$ m, atingida no instante $t = 2$ s.

Exemplo 44

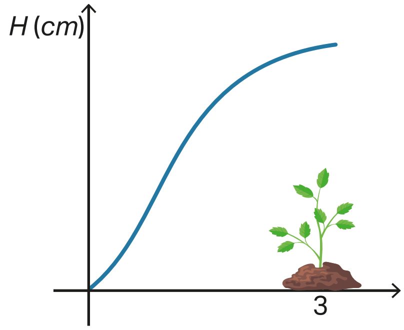
A altura de uma planta (em cm) após t dias é dada por, $H(t) = \ln\left(t^2 + 1\right)$.

Qual é a taxa de crescimento da planta ao fim de três dias?

A expressão da derivada de H é dada por:

$$H'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

A taxa de crescimento da planta ao fim de três dias é $H'(3) = 0{,}6$ cm.



Manual Digital

Vídeo
Derivada da função quociente

Exercícios

59 Uma mota parte do repouso e percorre uma estrada com aceleração constante de $5\ \text{m/s}^2$.

Trata-se de um movimento uniformemente acelerado (MUV), em que se aplicam as seguintes igualdades:

$v = v_0 + a \cdot t$, em que v_0 é a velocidade inicial e a a aceleração, e $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

59.1. Qual será a sua velocidade ao fim de 10 segundos?

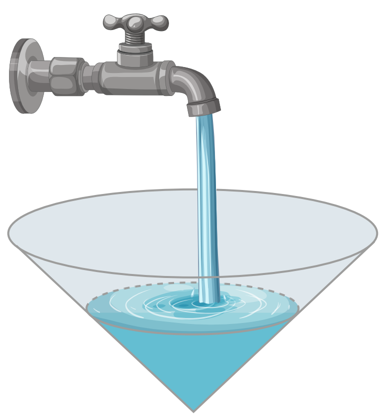
59.2. Qual foi a distância percorrida nesse tempo?

60 Num depósito, a água é vertida para um tanque cónico e a altura da água $h(t)$, em metros, varia com o tempo (em minutos) de acordo com:

$$h(t) = 0{,}5t^2$$

60.1. Qual é a taxa de variação da altura da água, em relação ao tempo, no instante $t = 4$ min?

60.2. Qual é a interpretação prática de $h'(t)$?



61 A posição (em metros) de um carro em função do tempo (em segundos) é dada por:

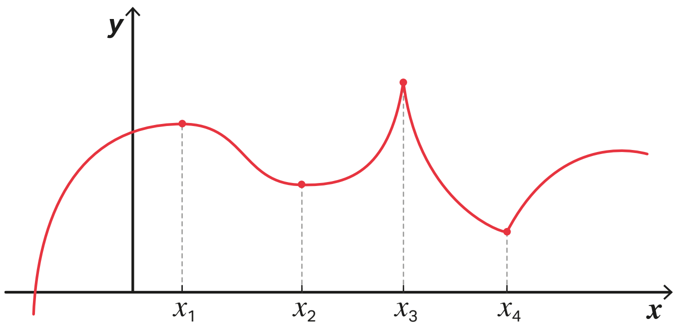
$$s(t) = 4t^3 - 12t^2 + 6t + 2$$

61.1. Qual é a velocidade do carro no instante $t = 2$?

61.2. Em que instantes o carro está parado?

2.4.8. Sinal da derivada, sentido de variação e extremos

Considera o gráfico $y(x)$, representado na figura, onde estão assinalados os pontos de abcissa x_1, x_2, x_3 e x_4.



Os pontos assinalados são **pontos críticos** da função $f(x)$.

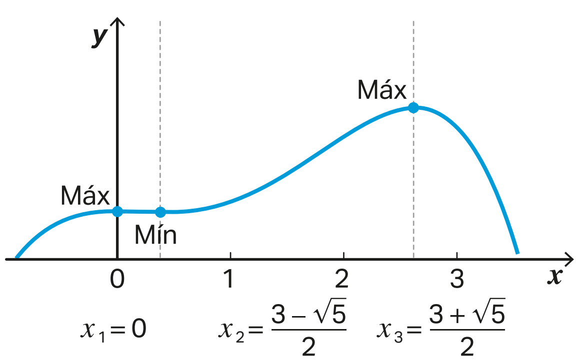
- x_1 e x_3 são **maximizantes** e $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são **máximos relativos.**
- x_2 e x_4 são **minimizantes** e $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são **mínimos relativos.**
- Cada uma das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos críticos são horizontais. Por isso,
$$f'(x_1)=0;\ f'(x_2)=0;\ f'(x_3)=0;\ f'(x_4)=0.$$
- Nos pontos do gráfico em que a função é crescente, a tangente ao gráfico tem declive positivo, logo, $f'(x)>0$.
- Nos pontos do gráfico em que a função é decrescente, a tangente ao gráfico tem declive negativo, logo, $f'(x)<0$.

Ainda podem registar-se mais duas considerações:

- Quando f, pode concluir-se que o gráfico de f tem, em x, concavidade voltada para cima;
- Quando $f''(x)<0$, pode concluir-se que o gráfico de f tem, em x, concavidade voltada para baixo.

Exemplo 45

Considera a função $f(x)=-x^4+4x^3-2x^2+5$, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente.



Os pontos críticos da função correspondem aos pontos em que $f'(x)=0$.

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Leftrightarrow -4x^3+12x^2-4x=0 \\ &\Leftrightarrow -4x\left(x^2-3x+1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x^2-3x+1=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Manual Digital

Vídeo
Resolução de problemas envolvendo cinemática

Para verificarmos, analiticamente, se os pontos críticos (extremos) são mínimos ou máximos, temos de efetuar o teste da 2.ª derivada em cada ponto crítico.

$$f''(x)=\left(-4x^3+12x^2-4x\right)'=-12x^2+24x-4$$

- Para $x_1=0$: $f''(0)=-4<0 \longrightarrow f$ é côncava para baixo.
  Máximo relativo: $f(0)=5$
- Para $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$: $f''(x_2)>0 \longrightarrow f$ é côncava para cima.
  Mínimo relativo: $f(x_2)$
- Para $x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$: $f''(x_2)<0 \longrightarrow f$ é côncava para baixo.
  Máximo relativo: $f(x_3)$

Vamos, fazer um estudo analítico da função, recorrendo a um quadro de variação de sinal do gráfico da função. Assim, podemos comprovar os diferentes comportamentos de monotonia.

	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	$+\infty$
$-4x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3x+1	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	**Crescente**	**Máx.**	**Decrescente**	**Mín.**	**Crescente**	**Máx.**	**Decrescente**

- A função $f(x)$ é crescente em $]-\infty\,;\ x_1[\,\cup\,]x_2\,;\ x_3[$.
- A função $f(x)$ é decrescente em $]x_1\,;\ x_2[\,\cup\,]x_3\,;\ +\infty[$.

Exercício

62 **Determina os intervalos de monotonia e extremos de cada uma das funções.**

62.1. $f(x)=x^2+4$

62.2. $f(x)=(x-2)^2(x+1)$

62.3. $f(x)=e^x-x^2\bullet e^x$

Síntese

Taxa média de variação

Variação

A **variação** é a diferença entre dois valores de uma grandeza, ao longo do tempo, ou em função de outra variável.

Se uma grandeza f (como temperatura, distância, altura, etc.) muda de um valor $f(a)$ para outro valor $f(b)$, então a **variação** é dada por:

$$\Delta f = f(b) - f(a)$$

Em que:
- $f(a)$ é o valor **inicial**;
- $f(b)$ é o valor **final**;
- Δf (lê-se "delta f") é a **variação da grandeza**.

- Se o valor final for **maior** do que o inicial $(f(b) - f(a) > 0)$, a variação será **positiva**, indicando uma **subida, acréscimo ou aumento.**
- Se o valor final for **menor** do que o inicial $(f(b) - f(a) < 0)$, a variação será **negativa**, indicando uma **queda, decréscimo ou diminuição.**
- Se o valor final for **igual** ao inicial $(f(b) - f(a) = 0)$ não há variação**.**

Taxa média de variação (TMV)

A **taxa média de variação** de uma função determina a mudança das suas imagens, em média, ao longo de um intervalo. Ou seja, diz-nos quanto a variável dependente (y) varia, em relação à variável independente (x).

Seja uma função definida num intervalo $[a\,,\ b]$. A **taxa média de variação** de f nesse intervalo é dada por:

$$TMV_{[a\,,\ b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ou seja, é o **quociente entre a variação de y e a variação de x**.

Interpretação geométrica da TMV

- A TMV é igual ao declive da reta que contém dois pontos do gráfica de uma função.
- Uma TMV positiva $\longrightarrow$ reta inclinada para cima: $f(b) > f(a)$;
- Uma TMV negativa $\longrightarrow$ reta inclinada para baixo: $f(b) < f(a)$;
- Uma TMV zero $\longrightarrow$ reta horizontal: $f(b) = f(a)$;

Síntese

Derivação

Definição formal da derivada num ponto

A derivada de f no ponto de abcissa $x = a$ é:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada de funções reais de variável real e aplicações

Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto

Posição

Seja $s(t)$ a função posição, que indica a posição (por exemplo, em metros) de um objeto em função do tempo t.

Velocidade

Velocidade média entre dois instantes t_1 e t_2: $V_{[t_1,\, t_2]} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

Velocidade instantânea, no instante t: $v(t) = s'(t)$

Aceleração

Aceleração instantânea, no instante t: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Continuidade num ponto

Uma função f é **contínua num ponto** de abcissa $x = a$ se o limite de $f(x)$ quando x tende para a existe e é igual ao valor da função nesse ponto. Em termos formais:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Diferenciabilidade num ponto

Uma função f é **diferenciável num ponto** se existe a derivada de f nesse ponto, ou seja, se o seguinte limite existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este limite representa o declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa $x = a$.

Síntese

Relação entre continuidade e diferenciabilidade

- Toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.
- O inverso não é necessariamente verdadeiro, uma função pode ser contínua num ponto mas não ser diferenciável nele.

Regras de derivação

- Se $f(x)=c$, então $f'(x)=0$ com $c \in \mathbb{R}$, quando c constante.
- Se $f(x)=x$, então $f'(x)=1$.
- Se $f(x)=x^n$, então $f'(x)=n \cdot x^{n-1}$, com $n \in \mathbb{R}$.
- Se $f(x)=\text{sen}(x)$, então $f'(x)=\cos(x)$.
- Se $f(x)=\cos(x)$, então $f'(x)=-\ \text{sen}(x)$.
- Se $f(x)=\log_a(x)$, então $f'(x)=\dfrac{1}{x \times \ln(a)}$.
- Se $f(x)=\ln(x)$, então $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.
- Se $f(x)=a^x$, então $f'(x)=a^x \times \ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}$.

Regras operatórias de derivação

- Se $f(x)=u(x) \pm v(x)$, então $f'(x)= u'(x) \pm v'(x)$.
- Se $f(x)=u(x) \times v(x)$, então $f'(x)= u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$.

$$(k \times f(x))' = k \times f'(x) \qquad k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

- Se $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, então $f'(x)=\dfrac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2}$.

Para aplicar

1 **A tabela abaixo mostra a quantidade total de chuva (em milímetros), registada na ilha de São Nicolau, durante cinco anos consecutivos.**

1.1. Qual foi a variação da pluviosidade entre 2019 e 2020?

1.2. Em que intervalo de anos houve a maior variação positiva?

1.3. Qual foi a variação total de pluviosidade entre 2019 e 2023?

Ano	Pluviosidade (mm)
2019	220
2020	310
2021	180
2022	400
2023	370

1.4. Houve algum período em que a pluviosidade diminuiu em relação ao ano anterior? Se sim, qual?

2 **Uma conta de Instagram registou os dados ao longo de uma semana.**

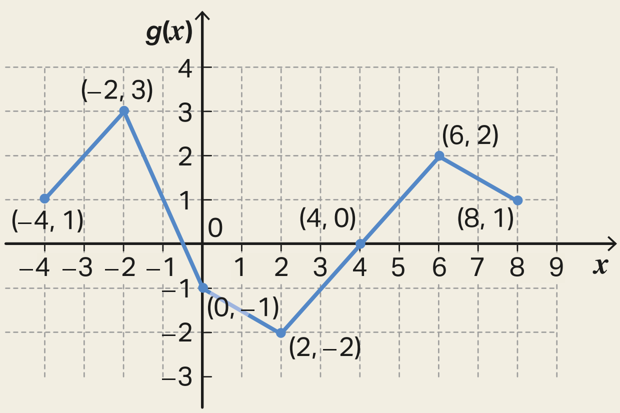
2.1. Qual foi a TMV entre segunda-feira e quarta-feira?

2.2. Qual foi a TMV entre quarta-feira e sábado?

Dia	Seguidores
Segunda-feira	500
Quarta-feira	800
Sábado	1400

2.3. Em qual desses períodos a conta cresceu mais rapidamente?

3 **A função g está representada no gráfico seguinte.**



Determina:

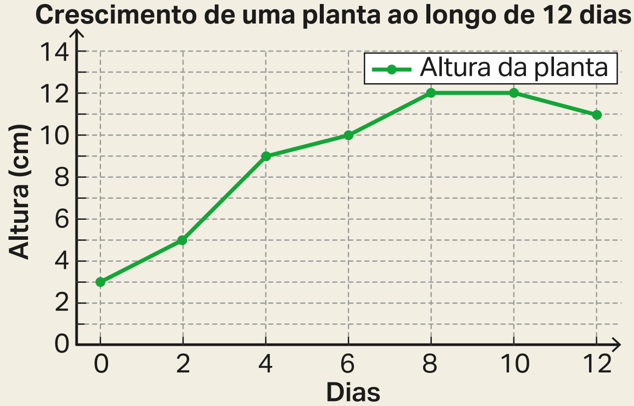
3.1. A variação de g no intervalo $[-4\ ,\ -2]$ e a taxa média de variação nesse mesmo intervalo.

3.2. A taxa média de variação da função nos seguintes intervalos:

a) $[-2\ ,\ 2]$ **b)** $[2\ ,\ 6]$ **c)** $[4\ ,\ 8]$

Para aplicar

4 O gráfico seguinte representa o crescimento (em cm) de uma planta, ao longo de 12 dias.



Considera os pontos:

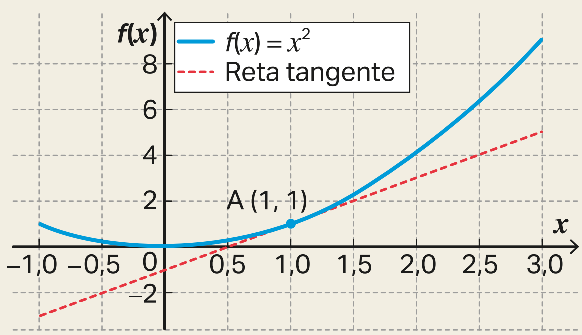
- $E=(10\,,\ 12)$
- $F=(12\,,\ 11)$

4.1. Determina a TMV no intervalo $[10\,,\ 12]$.

4.2. Como é o declive da reta *EF* ?

4.3. O que significa a TMV negativa, no contexto deste caso?

5 **O gráfico seguinte representa a função $f(x)=x^2$. No ponto de abcissa $x=1$, está desenhada a reta tangente ao gráfico.**



5.1. Qual é a equação da reta tangente, nesse ponto?

5.2. Interpreta graficamente o que representa a derivada de f no ponto de abcissa $x=1$.

5.3. Qual é o valor de $f'(1)$?

6 **Duas atletas, a Ana e a Beatriz, participam numa corrida.**

- A Ana parte, no instante $t = 0$, com velocidade constante de 6 m/s.
- A Beatriz parte 20 segundos depois, com velocidade constante de 9 m/s.

6.1. Quanto tempo a Beatriz demora a alcançar a Ana?

6.2. Qual a distância percorrida pela Beatriz até ao encontro?

7 **Determina a expressão da derivada das seguintes funções.**

7.1. $f(x) = 2x^5 + x^2 - 5$

7.2. $f(x) = (\text{sen}\,(x))(x^2 + 1)$

7.3. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$

8 **Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$**

8.1. Determina $f'(x)$.

8.2. Determina os intervalos onde a função está a crescer e a decrescer.

8.3. Identifica os máximos e mínimos relativos.

9 **Um fabricante quer construir uma caixa, sem tampa, com base quadrada e volume de $32\ 000$ cm³.**

Quais devem ser as dimensões que minimizam a área total de material usado?

Sugestão:
Repara que, se o lado da base for x e a altura da caixa for h, podes determinar:

- Volume: $V = x^2 h = 32\ 000$
- Área (sem tampa): $A = x^2 + 4xh$

10 **Determina os intervalos de monotonia e extremos relativos de cada uma das funções.**

10.1. $f(x) = 2x^2 - x + 1$

10.2. $g(x) = x^2 \times (x + 1)$

10.3. $h(x) = (x + 4) \times e^x$

Teste

Manual Digital

Vídeo
Modelos de crescimento populacional

1 **Segundo o modelo de Malthus, o crescimento populacional:**

(A) Cresce de forma linear com os recursos disponíveis.

(B) Cresce de forma exponencial, enquanto os recursos crescem de forma linear.

(C) Cresce em ciclos, aumentando e diminuindo ao longo do tempo.

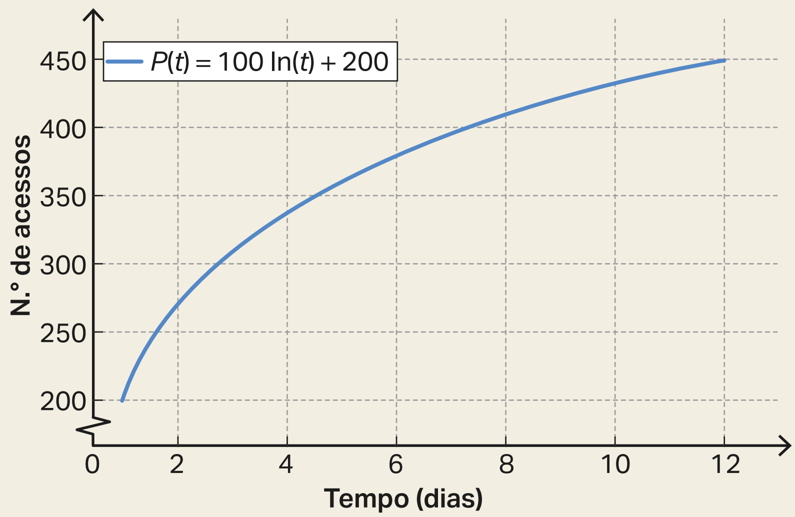
(D) Permanece constante devido à migração.

2 **Uma garrafa está a ser enchida com água a uma taxa constante de $0{,}4$ litros por minuto. Inicialmente, já contém $0{,}8$ litros.**

Qual será a quantidade de água na garrafa ao fim de 7 minutos?

(A) 2,6 L **(B)** 3,6 L **(C)** 4,0 L **(D)** 4,6 L

3 **O gráfico seguinte mostra a evolução do número de acessos a um *website* nos dias seguintes a uma campanha publicitária.**



$$P(t) = 100 \times \ln(t) + 200$$

3.1. Qual era o número de acessos no primeiro dia?

(A) 100 **(B)** 200 **(C)** 300 **(D)** 0

3.2. Como será o comportamento da função ao longo do tempo?

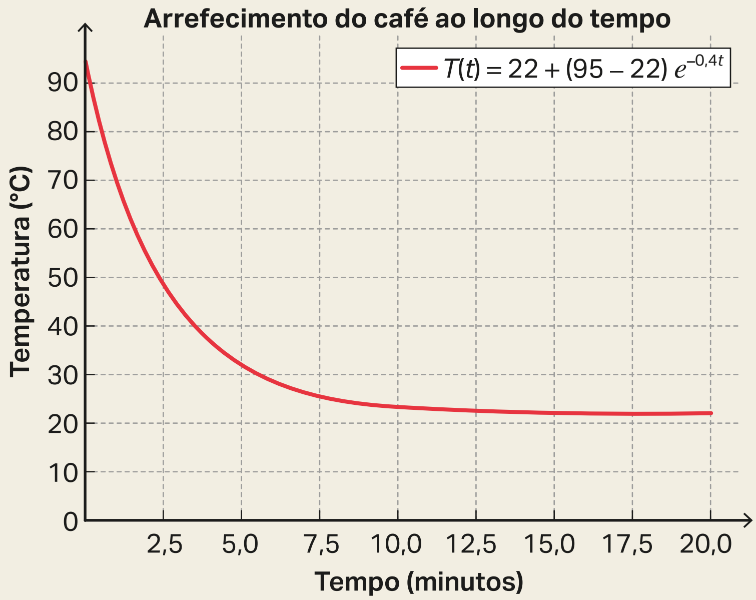
(A) Cresce de forma constante.

(B) Cresce cada vez mais rapidamente.

(C) Cresce rapidamente e depois abranda.

(D) Diminui com o tempo.

4 O gráfico seguinte mostra como a temperatura de um café, servido a $95\ °C$, diminui ao longo do tempo, numa sala com temperatura constante de $22\ °C$. A variação segue um modelo de decaimento exponencial contínuo.



Responde às seguintes questões com base no gráfico.

4.1. Qual é a temperatura ambiente da sala?

(A) $0\ °C$ **(B)** $22\ °C$
(C) $70\ °C$ **(D)** $95\ °C$

4.2. A função representa:

(A) Um crescimento linear.
(B) Um decaimento exponencial.
(C) Um aquecimento exponencial.
(D) Uma oscilação periódica.

5 Considera a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
Quais dos seguintes pontos são extremos relativos da função?

(A) $x = 0$ é um mínimo relativo e $x = 2$ é um máximo relativo.
(B) $x = 0$ é um máximo relativo e $x = 2$ é um mínimo relativo.
(C) $x = 1$ é um máximo relativo e $x = 2$ é um mínimo relativo.
(D) $x = 1$ é um mínimo relativo e $x = 2$ é um máximo relativo.

Teste

6 O número de utilizadores de uma plataforma é dado por:

$$U(t)=\frac{1000}{1+49\times e^{-0,5\times t}}$$

Qual era o número inicial de utilizadores?

(A) 49
(B) 10 000
(C) 20
(D) 100

7 A temperatura num laboratório subiu de 18 °C às 10 h para 30 °C às 14 h.

Qual foi a TMV?

(A) 3 °C/h
(B) 4 °C/h
(C) 6 °C/h
(D) 12 °C/h

8 Seja $f(x)=x^2-5$.

Qual é a derivada de f no ponto de abcissa $x=3$?

(A) – 1
(B) 6
(C) – 3
(D) – 5

9 Define o que se entende por modelo populacional e indica dois fatores que podem influenciar a dinâmica de uma população.

10 Um vídeo começa com 200 visualizações e cresce 25% por dia. Quantas visualizações haverá, ao fim de quatro dias?

11 Numa estação meteorológica, a temperatura às 8 h era de 12 °C e aumenta de forma constante a uma taxa de 2,5 °C por hora.

11.1. Escreve a expressão $T(t)$ que representa a temperatura ao longo do tempo, com t número de horas passadas após as 8 h.

11.2. Qual será a temperatura ao meio-dia?

11.3. A que horas a temperatura atingirá 27 °C?

12 **A tabela regista o número acumulado de máscaras produzidas, ao longo dos dias numa fábrica.**

Dia	Máscaras produzidas
0	800
1	950
2	1100
3	1250

12.1. Verifica se os dados seguem um crescimento linear.

12.2. Escreve a função que representa o número de máscaras produzidas, ao longo do tempo.

12.3. Quantas máscaras terão sido produzidas, ao fim de 10 dias?

12.4. Ao fim de quantos dias, a produção atingirá 2000 máscaras?

13 **Determina os extremos relativos de cada uma das funções.**

13.1. $g(x) = -2x^2 + x$

13.2. $h(x) = 2x(x-1)^4$

14 **Um automóvel parte do repouso e desloca-se em linha reta com aceleração constante de 3 m/s .**
Sabe-se que o movimento é uniformemente acelerado e que se aplicam as equações:

$$v = v_0 + a \cdot t \ \text{ e } \ s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

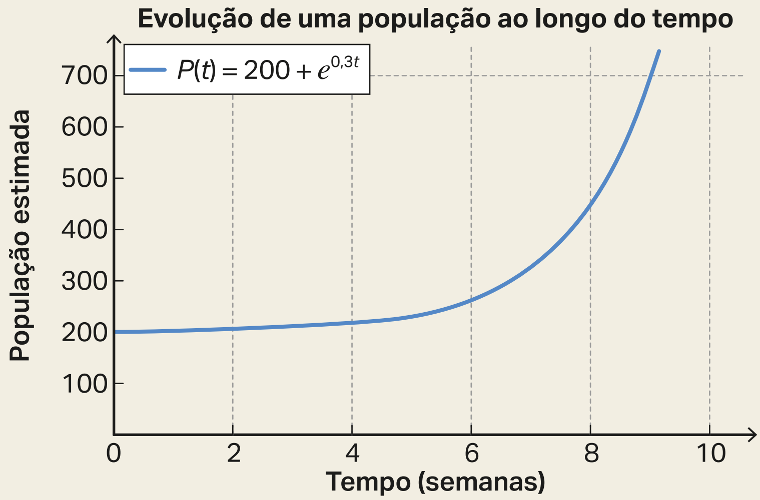
14.1. Qual é a velocidade do automóvel ao fim de 8 segundos?

14.2. Qual a distância total percorrida nesse intervalo de tempo?

14.3. Após atingir essa velocidade (ao fim de 8 segundos), o automóvel mantém-na constante durante 10 segundos. Qual é a distância total percorrida desde o início do movimento?

Teste

15 **O gráfico seguinte representa a evolução de uma população (número de indivíduos) ao longo do tempo (em semanas), de acordo com um modelo de crescimento exponencial.**



15.1. A população cresce ou decresce? Justifica com base no comportamento da curva.

15.2. Qual era a população inicial?

15.3. Estima a população ao fim de quatro semanas.

15.4. A população cresce sempre ao mesmo ritmo? Explica.

15.5. Aproximadamente, em que semana a população ultrapassa os 1000 indivíduos?

15.6. A curva atinge algum valor máximo? Porquê?

16 **Um laboratório regista a eficiência de uma enzima, ao longo do tempo, com a fórmula:**

$$E(t) = 50 \times \ln(t+1)$$

16.1. Qual é a eficiência inicial da enzima?

16.2. Qual será a eficiência, ao fim de quatro horas?

16.3. Qual é o significado de adicionar 1 ao tempo t?

16.4. Este modelo é adequado para um crescimento rápido inicial, seguido de estabilidade? Justifica.

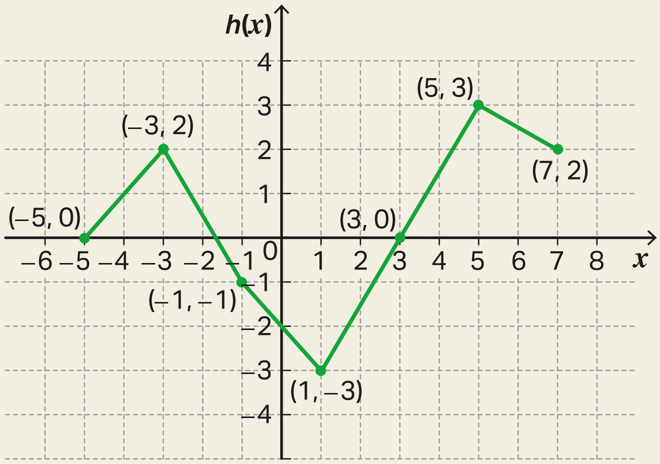
17 A temperatura de uma substância (em °C) varia ao longo do tempo (em minutos) segundo a função:

$$T(t) = 20 + 10e^{-0,2t}$$

17.1. Qual é a taxa de variação da temperatura no instante $t = 0$?

17.2. A temperatura está a aumentar ou a diminuir nesse instante?

18 A função h está representada no gráfico.



Determina:

18.1. A variação de h no intervalo $[-3, -1]$ e a respetiva taxa média de variação.

18.2. A taxa média de variação de h nos intervalos seguintes:

a) $[-1, 3]$

b) $[1, 5]$

c) $[5, 7]$

19 Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

19.1. Elabora um quadro de variação de sinal para $f(x)$.

19.2. Determina os intervalos de monotonia da função.

19.3. Indica, se existirem, todos os pontos críticos.

3

Probabilidade

3.1. Álgebra dos acontecimentos

3.2. Cálculo combinatório

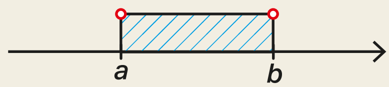
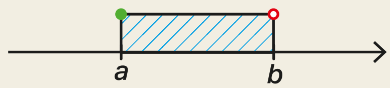
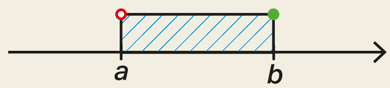
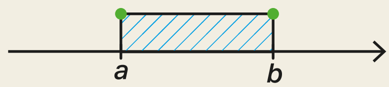
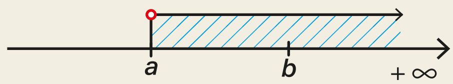
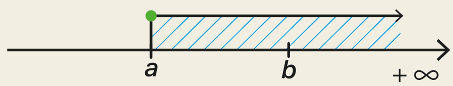
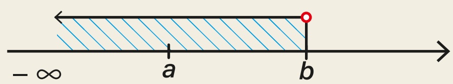
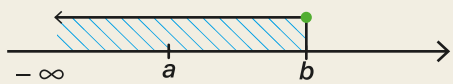
3.3. Probabilidade

3.4. Modelos de probabilidade em espaços finitos

Recorda

Intervalos

Dados dois números reais a e b, com $a < b$, podemos representar o conjunto de números reais entre a e b na forma de: uma condição, intervalo ou através da representação na reta real, como podemos ver na tabela seguinte.

Condição	Intervalo	Representação na reta real
$a < x < b$	$]a\,;\ b[$	
$a \leqslant x < b$	$[a\,;\ b[$	
$a < x \leqslant b$	$]a\,;\ b]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a\,;\ b]$	
$x > a$	$]a\,;\ +\infty[$	
$x \geqslant a$	$[a\,;\ +\infty[$	
$x < b$	$]-\infty\,;\ b[$	
$x \leqslant b$	$]-\infty\,;\ b]$	

Atenção:

$]a\,;\ b[$	Intervalo aberto. $a \notin]a\,;\ b[\ ;\quad b \notin]a\,;\ b[$
$[a\,;\ b[$	Intervalo fechado em a e aberto em b. $a \in [a\,;\ b[\ ;\quad b \notin [a\,;\ b[$
$]a\,;\ b]$	Intervalo aberto em a e fechado em b. $a \notin]a\,;\ b]\ ;\quad b \in]a\,;\ b]$
$[a\,;\ b]$	Intervalo fechado. $a \in [a\,;\ b]\ ;\quad b \in [a\,;b]$

Recorda

Símbolo	Designação
$+\infty$	"mais infinito"
$-\infty$	"menos infinito"

A interseção dos intervalos A e B representa-se por $A \cap B$.

$$x \in A \cap B \text{ se e só se } x \in A \wedge x \in B$$

A reunião dos intervalos A e B representa-se por $A \cup B$.

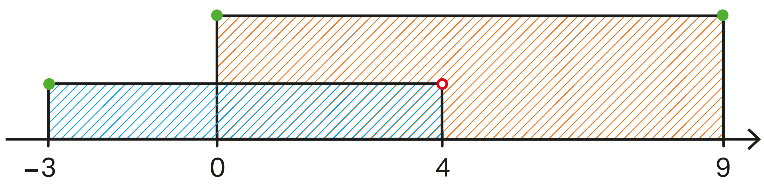
$$x \in A \cup B \text{ se e só se } x \in A \vee x \in B$$

Exemplos:

Sendo $A = [-3\,;\,4[$ e $B = [0\,;\,9]$

então:

$A \cap B = [0\,;\,4[$ $\qquad$ $A \cup B = [-3\,;\,9]$

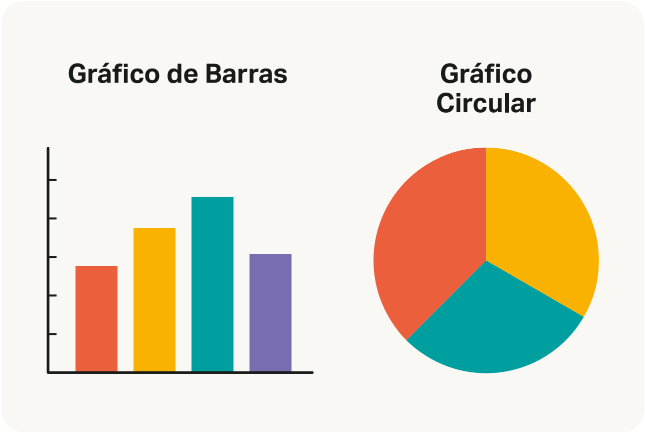


Frequência absoluta n_A: número de vezes que ocorreu o acontecimento A.

Frequência relativa $f_A = \dfrac{n_A}{n}$: razão entre o número de ocorrências de A e o número total de repetições da experiência.

Gráfico de Barras é utilizado para comparar quantidades entre categorias. Cada categoria é representada por uma **barra vertical ou horizontal**, e o comprimento (ou altura) da barra mostra a **frequência** (absoluta ou relativa).

Gráfico Circular é utilizado para mostrar a proporção que cada categoria representa dentro do total. Cada setor circular corresponde a uma categoria, e o seu tamanho depende da **frequência relativa** (percentagem).



Antes de começar

1 Considera os intervalos: $A =]-2\,;\,+4]$ e $B =]3\,;\,+\infty[$

1.1. Representa na forma de uma condição cada um dos intervalos A e B.

1.2. Representa os intervalos numa reta real.

1.3. Determina $A \cap B$.

1.4. Determina $A \cup B$.

1.5. O número -2 pertence a $A \cup B$?

1.6. Indica todos os números inteiros que pertencem a $A \cap B$.

2 **Foi feito um levantamento das idades dos alunos da disciplina de Expressão Plástica na Escola do Mindelo. A lista de idades (em anos) é a seguinte:**

$16\,,\ 17\,,\ 17\,,\ 18\,,\ 18\,,\ 18\,,\ 19\,,\ 19\,,\ 19\,,\ 19\,,\ 20\,,\ 20\,,\ 20\,,\ 20\,,\ 20\,,\ 21\,,\ 21\,,\ 21\,,\ 22\,,\ 22\,,\ 23\,,\ 23\,,\ 23$

2.1. Organiza os dados numa tabela de frequências absolutas com os valores distintos das idades.

2.2. Constrói a tabela de frequências relativas (com duas casas decimais) e de frequências absolutas acumuladas.

2.3. Quantos alunos têm:

a) Menos de 20 anos?

b) Entre 18 e 21 anos (inclusive)?

c) 22 anos ou mais?

3 **Uma turma de Artes do 11.º ano foi questionada sobre qual é a sua modalidade artística preferida.** As respostas foram as seguintes:

Modalidade	Pintura	Escultura	Fotografia	Cinema	Música
N.º de alunos	9	4	6	8	3

3.1. Constrói a tabela de frequências absolutas e relativas (em percentagem, com uma casa decimal).

3.2. Indica qual é a modalidade mais apreciada e a menos apreciada.

3.3. Representa graficamente os resultados (podes escolher entre gráfico de barras ou gráfico circular).

3 Probabilidade

3.1. Álgebra dos acontecimentos

A noção de conjunto, tal como hoje é conhecida, foi formalizada no século XIX pelo matemático alemão **Georg Cantor**. Apesar de a ideia de agrupar elementos com características comuns já existir desde a Antiguidade, foi Cantor quem lhe deu uma estrutura matemática rigorosa, introduzindo conceitos fundamentais como subconjuntos, pertença e conjuntos infinitos. A sua teoria tornou-se a base da matemática moderna, influenciando áreas como a lógica, a topologia e a análise.

Georg Cantor

Andrey Kolmogorov

Associada à teoria dos conjuntos está a álgebra dos acontecimentos, que se desenvolveu juntamente com a teoria da probabilidade. Cada acontecimento pode ser entendido como um subconjunto de um espaço de resultados e as operações sobre acontecimentos – como união, interseção ou complementar – seguem exatamente as regras da álgebra de conjuntos. Esta linguagem tornou-se essencial para descrever situações aleatórias com clareza e rigor. No século XX, o matemático russo **Andrey Kolmogorov** consolidou esta ligação ao definir os axiomas da probabilidade com base em estruturas de conjuntos e medidas, dando origem à teoria moderna da probabilidade.

Blaise Pascal

A origem da própria probabilidade remonta ao século XVII, quando matemáticos como **Blaise Pascal** e **Pierre de Fermat** começaram a estudar problemas relacionados com jogos de azar. O que começou por ser uma curiosidade ligada ao acaso e à sorte evoluiu para uma disciplina com grande aplicação em áreas tão diversas como a estatística, as ciências naturais e sociais, a economia e as tecnologias digitais.

Pierre de Fermat

Ligado à probabilidade está o cálculo combinatório, que trata das diferentes formas de contar agrupamentos ou disposições de elementos dentro de um conjunto. Esta terminologia da matemática surgiu da necessidade de contar possibilidades sem as listar exaustivamente – algo essencial em problemas de probabilidade.

Isaak Newton

Desenvolveu-se, sobretudo a partir do século XVII, com contributos de matemáticos como **Newton** e **Leibniz**, e tornou-se uma ferramenta indispensável na resolução de problemas em que é necessário saber de quantas maneiras algo pode acontecer, como, por exemplo, na escolha de grupos, ordenações, combinações ou permutações.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Assim, a teoria dos conjuntos, a álgebra dos acontecimentos, o cálculo combinatório e a probabilidade formam um conjunto conexo de ideias que nos permitem descrever, analisar e prever fenómenos em que intervém o acaso, de forma rigorosa e fundamentada.

3.1.1. Conjuntos e operações com conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção bem definida de elementos. Esses elementos podem ser números, pessoas, letras, objetos.

Num conjunto, todos os seus elementos devem estar bem definidos, ou seja, não podem existir dúvidas sobre o que está incluído ou não no conjunto. Além disso, não é relevante a ordem pela qual os seus elementos surgem, mas não se repetem elementos. Se um elemento aparece mais de uma vez, considera-se apenas uma ocorrência.

Normalmente, usam-se letras maiúsculas para representar um conjunto $(A, B, C, \ldots)$.

Um conjunto pode ser representado de diferentes formas:

- **Por extensão (ou enumeração)**: consiste em listar explicitamente todos os elementos do conjunto, separados por vírgulas e entre chavetas. É útil quando o conjunto é pequeno ou finito.

Exemplo 1

$A = \{2, 4, 6, 8\} \longrightarrow$ conjunto dos números pares até 8.

- **Por compreensão (ou descrição de propriedade)**: em vez de listar, define-se uma regra que caracteriza todos os elementos do conjunto. Útil para conjuntos grandes ou infinitos ou quando a regra é mais importante que os elementos em si.

Exemplo 2

$B = \{x \in \mathbb{N} :\ x < 10\} \longrightarrow$ "B é o conjunto dos números naturais menores que 10"

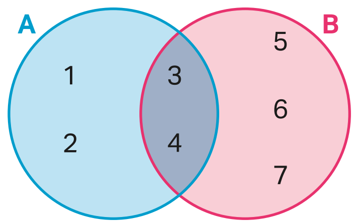
- **Por representação gráfica**: em muitos contextos, usam-se diagramas de Venn para representar conjuntos e as suas relações. É muito útil para visualizar interseções, uniões, subconjuntos, complementares, etc.

Exemplo 3

O conjunto A é constituído pelos elementos 1, 2, 3 e 4.

O conjunto B é constituído pelos elementos 3, 4, 5, 6, e 7.

Os elementos 3 e 4 pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B.



Exemplo 4

Considerando o conjunto dos números naturais pares menores que 10:

o conjunto pode ser representado por extensão da seguinte forma:

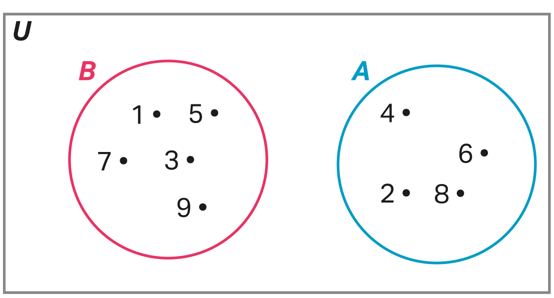
$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

também pode ser representado por compreensão:

$$A = \{x \in \mathbb{N} :\ x < 10 \text{ é par}\}$$

Graficamente, pode ser representado por um diagrama de Venn, considerando, por exemplo, os seguintes conjuntos:

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



Repara que os conjuntos A e B não têm elementos comuns, diz-se que a interseção é vazia e escreve-se $A \cap B = \{\ \}$ ou $A \cap B = \varnothing$, uma vez que um número não pode ser simultaneamente par e ímpar.

Exercício

1 **Considera o conjunto das vogais do alfabeto português.**

1.1. Representa este conjunto por extensão.

1.2. Representa este conjunto por compreensão.

1.3. Faz uma representação gráfica usando um diagrama de Venn, considerando:

- U como o conjunto de todas as letras do alfabeto português;
- A o conjunto das vogais;
- B o conjunto das consoantes.

Existem diferentes tipos de conjuntos.

- **Conjunto vazio:** Um conjunto vazio é um conjunto que não tem elementos e representa-se por $\varnothing$.

Exemplo 5

Conjunto dos números naturais menores que zero:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \ x < 0\}$$

Não existe nenhum número natural menor do que zero, por isso o conjunto não tem elementos, logo, $A = \{\} = \varnothing$.

- **Conjunto finito:** um conjunto finito tem um número finito de elementos.

Exemplo 6

- Conjunto dos dias da semana:

  $D = \{$segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado, domingo$\}$

  Este conjunto tem sete elementos, logo, é finito.

- Conjunto dos cinco primeiros números pares positivos menores ou iguais a 10:

  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

  Este conjunto também é finito, porque tem um número finito de elementos.

- **Conjunto infinito**: um conjunto infinito tem um número infinito de elementos, não sendo possível contá-los todos.

Exemplo 7

- O conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

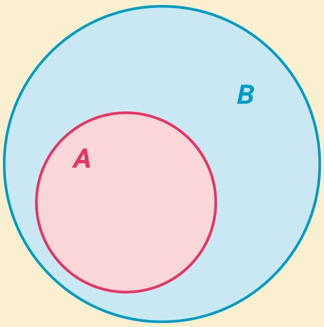
  Este conjunto não tem fim, porque há sempre mais um número natural a seguir ao anterior.
- O conjunto de todos os números pares:

  $P = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é um número par}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

  Também é infinito, porque há infinitos números pares naturais.

Repara que o conjunto dos números naturais contém todos os elementos do conjunto, P, definido como o conjunto de todos os números pares. Dizemos que o conjunto P é um subconjunto do conjunto $\mathbb{N}$, pois todos os seus elementos pertencem ao conjunto $\mathbb{N}$.

Se B e A são dois conjuntos, dizemos que A é subconjunto de B (escreve-se $A \subseteq B$) se e só se cada elemento de A também pertence a B.



Exemplo 8

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$

  Como todos os elementos de B estão em A, então: $B \subseteq A$.
- $D = \{a, e, i, o, u\}$ e $E = \{a, e\}$

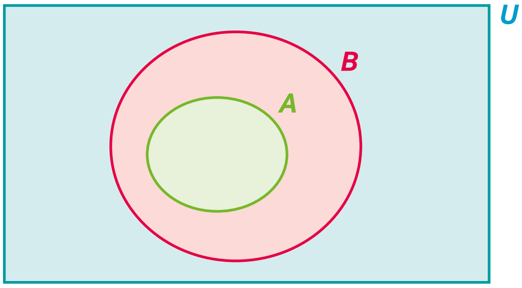
  Todos os elementos de E pertencem a D, portanto: $E \subseteq D$.
- $F = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 10\}$ e $G = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

  G é subconjunto de F porque todos os seus elementos pertencem ao conjunto dos números naturais menores ou iguais a 10, assim $G \subseteq F$.

Um subconjunto é qualquer conjunto cujos elementos pertencem **todos** a outro conjunto. Isto inclui o próprio conjunto e o conjunto vazio.

Nota:

1. Todo o conjunto é subconjunto de si próprio: $A \subseteq A$
2. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto: $\varnothing \subseteq A$
3. Um subconjunto não tem elementos fora do conjunto original. Pode ter todos, alguns ou nenhum dos elementos.
4. $A \subseteq B$ se e somente se $A \cap B = A$
5. $A \subseteq B$ se e somente se $A \cup B = B$



Exercício

2 **Considera o conjunto B dos números inteiros entre -3 e 3.**

2.1. Representa este conjunto em extensão.

2.2. Representa este conjunto em compreensão.

2.3. Considera dois conjuntos, U e A, à tua escolha, tal que $A \subseteq B \subseteq U$, e representa-os usando um diagrama de Venn.

Dois **conjuntos A e B dizem-se iguais** se têm exatamente os mesmos elementos. Simbolicamente, representa-se $A = B$.

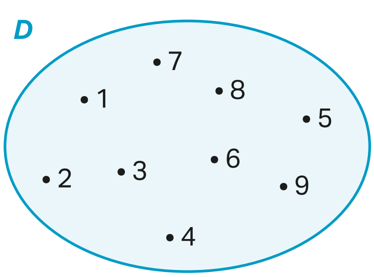
Exemplo 9

Considera os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 9\}$



Os conjuntos A, B, C e D são constituídos pelos mesmos elementos, logo, são iguais.

Exercício

3 **Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer.**
Indica o valor lógico das seguintes afirmações.

(A) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

(B) O conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto.

(C) Um conjunto infinito pode ter subconjuntos finitos.

(D) Todo o conjunto finito tem um número finito de elementos.

(E) Se $A \subseteq B$, então $A \neq B$.

(F) Dois conjuntos são iguais se e só se possuem exatamente os mesmos elementos.

(G) O conjunto dos números naturais é finito.

(H) O conjunto vazio contém pelo menos um elemento.

Sempre que se trabalha com conjuntos, parte-se de um **conjunto universo**, representado por U.

Este conjunto corresponde ao conjunto de referência num dado contexto, reunindo todos os elementos possíveis desse mesmo contexto, que pode corresponder a um problema, situação ou domínio específico. Todos os conjuntos considerados são subconjuntos de U.

Exemplo 10

- Se se estiver a estudar os números naturais até 10, o conjunto universo será:

  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

  Se $A = \{2, 4, 6, 8\}$, então $A \subseteq U$.

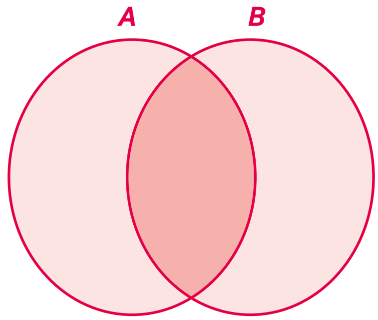
- Se se estiver a estudar as letras do alfabeto, o conjunto universo será:

  $U = \{a, b, c, ..., z\}$

  Se $A = \{a, e, i, o, u\}$, então $A \subseteq U$.

O **conjunto universo depende sempre do contexto.** Definir U corretamente é essencial para trabalhar, como iremos ver mais à frente, com complementares e garantir que as operações entre conjuntos fazem sentido.

3.1.2. Operações com conjuntos

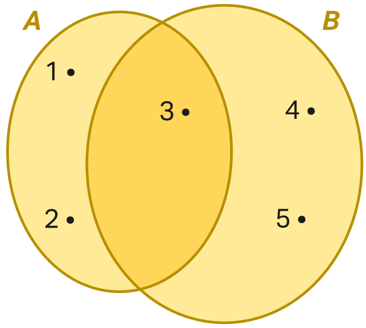


- **Reunião**: a reunião de dois conjuntos A e B corresponde à junção de todos os elementos que fazem parte de um e/ou de outro conjunto, sem se repetirem.

  Representa-se, simbolicamente, por $A \cup B$.

Exemplo 11

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
Logo, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

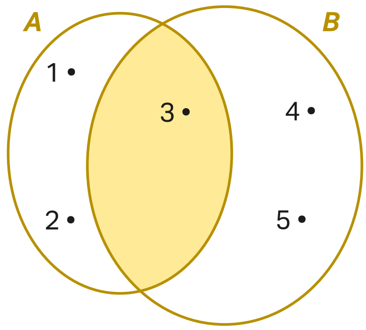


- **Interseção**: a interseção de dois conjuntos A e B corresponde apenas ao conjunto formado pelos elementos que pertencem, simultaneamente, ao conjunto A e ao conjunto B.

  Representa-se simbolicamente por $A \cap B$.

Exemplo 12

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
Logo, $A \cap B = \{3\}$.

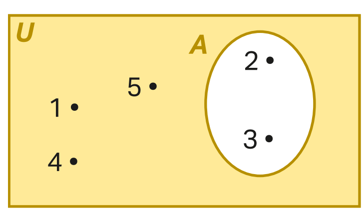


- **Complementar**: o conjunto complementar a outro conjunto, A, corresponde ao conjunto formado por todos os elementos de U que não estão nesse conjunto, A.

  Representa-se simbolicamente por $\bar{A}$.

Exemplo 13

Dado um conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
e o conjunto $A = \{2, 3\}$,
então: $\bar{A} = \{1, 4, 5\}$.



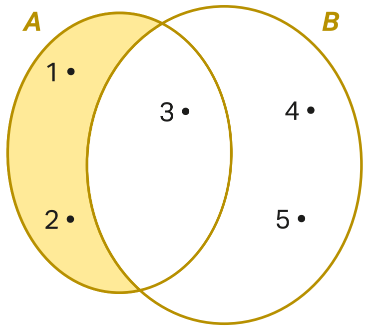
- **Diferença**: a diferença entre o conjunto A e o conjunto B corresponde ao conjunto diferença, onde pertencem todos os elementos que estão em A, mas não estão em B. Representa-se simbolicamente por $A \setminus B$ (lê-se A exceto B).

Exemplo 14

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

Então, $A \setminus B = \{1, 2\}$



Exercício

4 Sejam dados os seguintes conjuntos:

- $A = \{2, 4, 6\}$
- $B = \{4, 5, 6, 7\}$

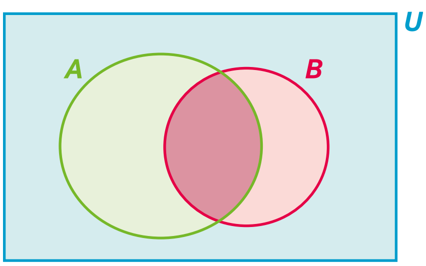
4.1. Define um conjunto universo U apropriado para este contexto.

4.2. Determina:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \setminus B$

d) $\bar{A}$ (complementar de A em relação a U)

3.1.3. Propriedades da reunião e da interseção de conjuntos



Comutativa

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

Demonstração:

Sejam A e B conjuntos quaisquer, subconjuntos de um universo U.

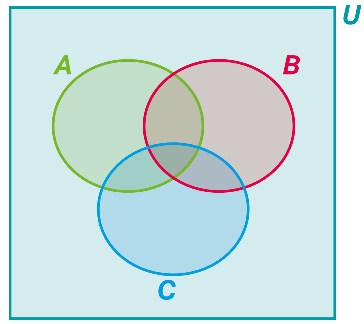
$$
\begin{aligned}
x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{Definição de interseção} \\
&\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A && \text{Comutatividade} \\
&\Leftrightarrow x \in B \cap A && \text{Definição de interseção}
\end{aligned}
$$

Como $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cap A$, podemos concluir que $A \cap B = B \cap A$.

Exercício

5 Prova que dados os conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, então $A \cup B = B \cup A$.

Associativa



$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Demonstração:

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, subconjuntos de um universo U.

$x \in (A \cup B) \cup C$	$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$	Definição de união
	$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$	Definição de união
	$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$	Associatividade
	$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$	Definição de união
	$\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$	Definição de união

Logo, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Exercício

6 Prova que dados os conjuntos A, B e C, subconjuntos de um universo U, então $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demonstração:

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, subconjuntos de um universo U.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Logo, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercício

7 Prova que dados os conjuntos A, B e C, subconjuntos de um universo U, então $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Idempotência

$A \cap A = A$ $\quad$ $A \cup A = A$

Existência de elemento neutro

$A \cap U = A$ $\quad$ $A \cup \varnothing = A$

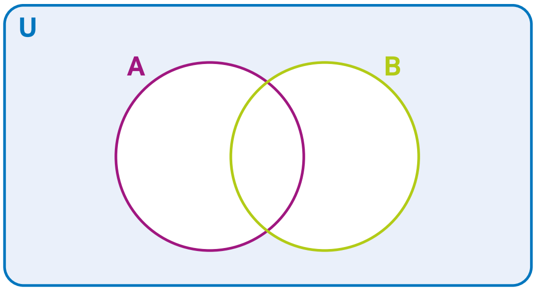
Existência de elemento absorvente

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\quad$ $A \cup U = U$

Leis de De Morgan

1.ª Lei de De Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{\mathbf{A \cup B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$

Demonstração:

Sejam A e B conjuntos quaisquer, subconjuntos de um universo U.

Pela definição de complementar

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$$

Pela definição de união, se $x \notin A \cup B$, então x não pertence ao conjunto A e x não pertence ao conjunto B, ou seja $\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

Pela definição de complementar, como $x \notin A$, então $x \in \overline{A}$ e como $x \notin B$, então $x \in \overline{B}$.

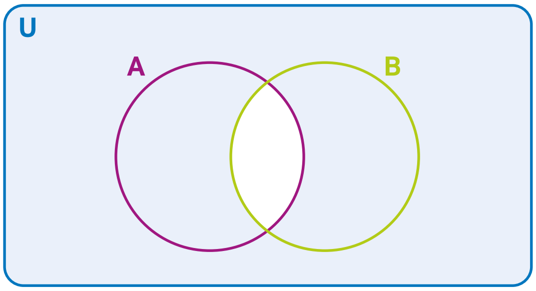
Assim, $\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$

Logo, pela definição de interseção $\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Isto é, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2.ª Lei de De Morgan

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{\mathbf{A \cap B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$

Demonstração:

Sejam A e B conjuntos quaisquer, subconjuntos de um universo U.

Pela definição de complementar

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$

Pela definição de interseção, se $x \notin A \cap B$, então x não pertence ao conjunto A **ou** x não pertence ao conjunto B, ou seja $\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

Pela definição de complementar, como $x \notin A$, então $x \in \bar{A}$ e como $x \notin B$, então $x \in \bar{B}$.

Assim, $\Leftrightarrow \; x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}$

Logo, pela definição de união $\Leftrightarrow \; x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

Isto é, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Exercícios

8 Demonstra as propriedades da idempotência, existência de elemento neutro e existência de elemento absorvente da reunião e da interseção de conjuntos.

9 Prova que dados os conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U, então:

9.1. $(\bar{A} \cap B) \cup A = A \cup B$

9.2. $(\overline{A \cap B}) \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$

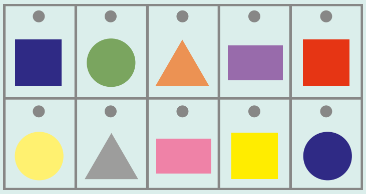
3.1.4. Experiências aleatórias e deterministas

Tarefa

1 Imagina que estás a preparar uma *performance* ou instalação artística interativa. Em cada momento, o público pode:

- Rodar uma roleta com cores diferentes (amarelo, laranja, vermelho, roxo, azul e verde).

- Escolher ao acaso uma carta com formas geométricas (quadrado azul, círculo verde, triângulo laranja, retângulo lilás, quadrado vermelho, círculo amarelo, triângulo cinzento, retângulo rosa, quadrado amarelo e círculo azul).



- Ativar um botão que acende uma luz numa determinada zona.

- Lançar uma bola ao ar.

Para cada uma das ações indica o que poderá acontecer.

Na vida e na arte, há situações em que sabemos exatamente o que vai acontecer e outras em que não temos como prever o resultado. Se carregarmos num interruptor, sabemos que a luz se acende – não há surpresas. Mas se lançarmos tinta com um pincel num gesto livre, nunca saberemos ao certo qual será o padrão formado. Este contraste entre o certo e o imprevisível ajuda-nos a distinguir dois tipos de situações: as experiências deterministas e as experiências aleatórias.

Na *performance* artística da tarefa, existem situações em que é possível saber com maior certeza o que irá acontecer, pois quando se ativa o interruptor espera-se que aquela lâmpada específica acenda e quando se lança uma bola ao ar espera-se que ela caia. Dizemos que são experiências deterministas.

Uma experiência é **determinista** quando, numa determinada situação, repetindo exatamente as mesmas condições, o resultado é sempre o mesmo. O resultado é previsível e controlado.

Exemplos:

- Acender um projetor ao carregar num botão específico.
- Misturar duas cores de tinta específicas e obter sempre a mesma cor final.
- Fazer uma colagem com os mesmos materiais e obter o mesmo efeito visual.
- Ligar uma máquina de projeção.
- Desenhar com um compasso.
- Imprimir uma imagem com um *stencil*.

Contudo, a maioria das ações propostas ao público não tem resultado garantido, depende do acaso:

- ao rodar a roleta de cores, não sabemos exatamente qual a cor que vai sair. Sabemos que pode sair amarelo, laranja, vermelho, roxo, azul e verde, mas não é possível saber, com toda a certeza, qual delas sairá;
- quando se escolhe ao acaso uma carta de um conjunto de cartas com formas geométricas, também não é possível saber que carta irá sair. Conhecem-se as possibilidades, mas não se sabe qual será a carta.

Neste caso, dizemos que são experiências aleatórias, pois o resultado varia de forma imprevisível, mesmo que as condições sejam iguais. Envolve incerteza.

Uma experiência é **aleatória** quando, mesmo sendo repetida nas mesmas condições, o resultado varia, dependendo do acaso.

Exemplos:

- Lançar um dado, com faces numeradas de 1 a 6, e saber qual o número que irá sair.
- Sortear, de uma caixa opaca, um papel com uma forma (círculo, quadrado, triângulo).
- Escolher ao acaso uma música para inspirar um desenho.

- Atirar tinta sobre uma tela (técnica à Jackson Pollock) – o padrão nunca é igual.
- Lançar uma moeda ao ar e registar, ao cair, a face que fica voltada para cima – o resultado é incerto, pode sair cara ou coroa.
- Extrair, sem ver, uma carta de um baralho convencional de cartas e verificar qual o naipe que sai.

Exercícios

10 **Classifica as seguintes experiências em deterministas ou aleatórias.**

(A) Misturar azul e amarelo, em iguais proporções, para obter verde.

(B) Deixar cair gotas de tinta preta, a partir de diferentes alturas, sobre um papel para verificar a cor da mancha.

(C) Usar um molde de silhueta para projetar sempre a mesma forma.

(D) Sortear um número entre 1 e 5 para escolher que cor usar.

(E) Dobrar papel ao acaso para criar uma escultura em papel.

11 **O professor de Arte pediu à sua turma para criar uma tela segundo as seguintes indicações:**

- **criar um fundo com aguarela usando apenas amarelo;**
- **depois salpicar tinta com uma escova de dentes para criar padrões únicos.**

Indica qual das indicações corresponde a uma experiência aleatória e qual corresponde a uma experiência determinista.

Sempre que realizamos uma experiência aleatória, há vários resultados possíveis, mesmo que não saibamos qual deles irá acontecer.

Exemplo 15

Quando se lança um dado, não sabemos qual a face que ficará voltada para cima e, consequentemente, o número que irá sair. Mas sabemos, por exemplo, que nunca poderá sair uma face com sete pintas, pois não existem faces com sete pintas.

Poderão apenas sair as faces com o número 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

A este conjunto de possibilidades chamamos espaço de resultados:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

O **universo (ou espaço) de resultados** (também chamado **espaço amostral**) é o conjunto de **todos os resultados possíveis** de uma experiência.

Representa-se normalmente por uma letra maiúscula, como Ω (a letra grega ómega).

O espaço de resultados corresponde ao conjunto universo de uma dada experiência, uma vez que inclui todas as possibilidades que podem acontecer. Por exemplo, no lançamento de um dado, temos seis possibilidades diferentes para a face que irá sair:

- sair a face com o 1;
- sair a face com o 2;
- sair a face com o 3;
- sair a face com o 4;
- sair a face com o 5;
- sair a face com o 6.

Considerando a experiência aleatória de lançar um dado, temos seis possibilidades para a face que irá sair. A cada uma dessas possibilidades chamamos acontecimento.

Um **acontecimento** (ou **evento**) é qualquer subconjunto do espaço de resultados. Pode ser um único resultado ou vários ou, ainda, nenhum resultado (vazio).

Exemplo 16

Na experiência de lançar um dado, sejam A e B os seguintes acontecimentos:

A: "Sair um número par"

Existem três faces com números pares, as faces com o 2, o 4 e o 6,
logo, $A = \{2, 4, 6\}$.

B: "Sair um número maior do que 4"

Existem duas faces nestas condições, logo, $B = \{5, 6\}$.

C: "Sair um número menor do que 2"

Existe apenas uma face nestas condições, logo, $C = \{1\}$.

D: "Sair um número negativo"

Não existe nenhuma face nestas condições, logo, $D = \{\ \}$.

Repara que $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$, $C \subseteq \Omega$ e $D \subseteq \Omega$.

Assim, podemos classificar diferentes acontecimentos:

Acontecimento simples

Um acontecimento simples é aquele que corresponde a apenas um único resultado possível da experiência.

Exemplo 17

Num lançamento de um dado, o acontecimento A: "Sair número 3" é um acontecimento simples, porque só tem um resultado possível, sair o número 3:

$A = \{3\}$.

Acontecimento composto

Um acontecimento composto inclui vários resultados possíveis.

Exemplo 18

Num lançamento de um dado, o acontecimento B: "Sair um número par" é um acontecimento composto, pois contém vários resultados:

$B = \{2, 4, 6\}$

Acontecimento impossível

Um acontecimento impossível é aquele que nunca pode ocorrer, ou seja, é o conjunto vazio $\varnothing$.

Exemplo 19

No lançamento de um dado, o acontecimento C: "Sair um número negativo" é impossível, pois no espaço de resultados não existem números negativos:

$C = \{\ \}$

Acontecimento certo

Um acontecimento certo é aquele que acontece sempre qualquer que seja o resultado da experiência. Corresponde ao próprio espaço de resultados Ω.

Exemplo 20

Num lançamento de um dado, o acontecimento D: "Sair um número natural" corresponde a todos os acontecimentos que integram o universo de resultados que satisfazem este acontecimento:

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

Os acontecimentos certos, compostos e elementares também se dizem acontecimentos possíveis.

Manual Digital

Vídeo
Experiências e universo de resultados

Exercícios

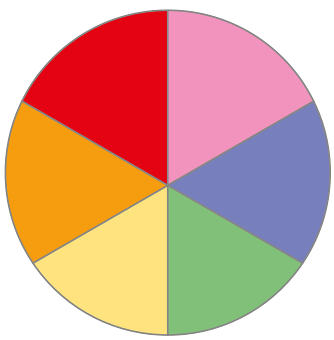
12 **Determina o espaço de resultados das experiências seguintes.**

12.1. Sortear uma figura geométrica entre círculo, quadrado e triângulo.

12.2. Lançar, simultaneamente, duas moedas ao ar e registar as faces que saíram.

12.3. Sortear uma cor entre seis disponíveis numa paleta: vermelho, azul, amarelo, verde, branco e preto.

13 **Uma artista utiliza uma roleta dividida em seis setores, todos de igual tamanho, cada um com uma cor diferente: vermelho, roxo, azul, verde, amarelo e laranja. A artista roda a roleta para escolher, ao acaso, a cor de fundo de uma obra.**



Sejam os seguintes acontecimentos:

- A: **"Sair uma cor primária"**
- B: **"Sair uma cor fria"**
- C: **"Sair a cor laranja"**

13.1. Determina o espaço de resultados da experiência.

13.2. Escreve cada acontecimento como subconjunto do espaço de resultados.

13.3. Indica se os acontecimentos A, B e C são simples ou compostos.

13.4. Se a roleta parar na cor amarela, quais dos acontecimentos anteriores ocorreram?

3.2. Cálculo combinatório

Manual Digital

Atividade
Classificação de acontecimentos

Na arte, como na vida, há muitas formas diferentes de combinar elementos: por exemplo, quando vamos escolher cores para um mural, organizar objetos numa instalação ou criar padrões com formas e texturas. Às vezes, queremos saber quantas possibilidades existem sem ter de as listar todas. A matemática dá-nos as ferramentas para isso: o cálculo combinatório.

Este ramo da matemática ajuda-nos a contar disposições possíveis de forma rápida e organizada, mesmo em situações complexas. É uma ferramenta eficaz, sobretudo quando lidamos com problemas de escolha, ordenação ou combinação de elementos.

Tarefa

2 Quantas formas há?

Um artista tem três tipos de pincéis (fino, médio, grosso) e duas cores (vermelho e azul). Para começar um esboço, decide escolher um pincel e uma cor.
De quantas formas diferentes o pode fazer?

Sabemos que:

- existem três pincéis: fino, médio e grosso;
- existem duas cores: vermelho e azul.

Começamos por enumerar, de forma simples, todas as combinações possíveis, ou seja, listar todas as possibilidades:

- (fino, vermelho)
- (médio, vermelho)
- (grosso, vermelho)
- (fino, azul)
- (médio, azul)
- (grosso, azul)

Contando, temos seis possibilidades.

Nesta situação, como as combinações são poucas, uma vez que temos apenas três tipos de pincéis e duas cores, é fácil listar todas as hipóteses, mas em situações com mais elementos distintos poderá não ser tão fácil. Mas usando esta situação, podemos encontrar uma estratégia de contagem.

Em vez de listar, podemos observar um padrão:

- Para cada um dos três pincéis, há duas cores possíveis a combinar.

Assim, o total de combinações é: $3 \times 2 = 6$.

Este raciocínio baseia-se na ideia de que estamos a fazer escolhas sucessivas (primeiro o pincel, depois a cor), e o número total de possibilidades obtém-se multiplicando os casos possíveis de cada escolha.

Portanto, o artista pode começar o esboço de seis formas diferentes.

Este é um exemplo simples de **princípio fundamental da contagem**.

Princípio fundamental da contagem

Se há a formas de fazer uma escolha e b formas de fazer outra, então há $a \times b$ formas de fazer as duas escolhas em sequência.

Esta estratégia permite contar possibilidades sem as escrever todas, poupando tempo e esforço em situações mais complexas.

De seguida, vamos estudar diferentes estratégias que nos permitem realizar diferentes contagens.

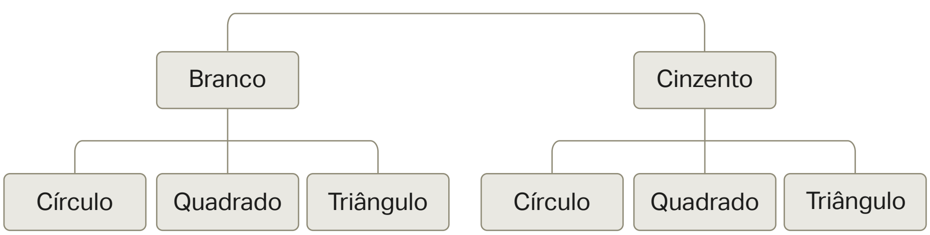
3.2.1. Diagramas de árvore

Os **diagramas de árvore** são uma forma visual de representar todas as possibilidades de uma escolha faseada (etapa a etapa).

Exemplo 21

Um aluno vai escolher um papel de base (branco ou cinzento) e depois uma forma geométrica para colar (círculo, quadrado ou triângulo).

Podemos representar assim:



Repara que nesta situação também se aplica o princípio fundamental da contagem.

Cada ramo completo representa uma possibilidade e contando os ramos finais temos $2 \times 3 = 6$ possibilidades.

Exercícios

14 Um *designer* gráfico está a desenvolver uma identidade visual para um cliente. Para a criação de um logótipo experimental, pretende testar diferentes combinações de fonte e cor, selecionando:

- uma fonte tipográfica, entre Arial e Times;
- uma cor, entre preto, cinzento e branco.

Pretende-se explorar as possibilidades de combinação, utilizando ferramentas do cálculo combinatório.

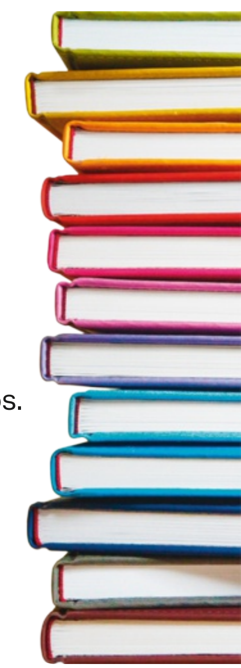
14.1. Constrói um diagrama de árvore que represente todas as escolhas possíveis do *designer* e que permita visualizar os diferentes formatos que podem ser criados.

14.2. Determina quantas combinações distintas o *designer* pode testar.

14.3. Lista, de forma organizada, todas as combinações possíveis de fonte e cor.

15 Uma *designer* de comunicação está a criar modelos gráficos para capas de livros artísticos. Cada capa é definida por três escolhas sucessivas:

- estilo de letra: manuscrita, moderna ou clássica;
- cor dominante: vermelho, azul ou preto;
- elemento gráfico adicional: ícone, linha decorativa ou fotografia.



15.1. Constrói um diagrama de árvore que represente todas as possibilidades resultantes destas três escolhas.

15.2. Determina quantos modelos diferentes de capa podem ser produzidos.

15.3. Explica como aplicas o princípio fundamental da contagem à tua resposta.

16 Uma artista plástica está a planear uma instalação visual que inclui:

- uma base de cor: branco, preto ou cinzento;
- uma figura tridimensional: cubo, cilindro ou pirâmide;
- uma textura superficial: espelhada ou opaca.

Contudo, existem restrições técnicas:

- se a base for preta, a textura espelhada não pode ser usada;
- a figura cilindro só é usada com as bases branco ou cinzento.

16.1. Enumera todas as combinações possíveis sem restrições (como se todas as escolhas fossem possíveis).

16.2. Elimina as combinações que violam as condições dadas e apresenta as combinações viáveis.

16.3. Quantas combinações existem, aplicando as restrições?

3.2.2. Tabelas

As tabelas de dupla entrada servem para organizar possibilidades, sempre que há apenas duas decisões.

Exemplo 22

Para a composição de uma obra, um artista digital pode escolher um filtro, de três possíveis (A, B e C), e uma textura, de duas possíveis (Lisa ou rugosa).

A tabela organiza todas as conjugações possíveis que o artista pode fazer.

	Lisa	**Rugosa**
Filtro A	$A-L$	$A-R$
Filtro B	$B-L$	$B-R$
Filtro C	$C-L$	$C-R$

No total, o artista pode fazer $3 \times 2 = 6$ conjugações possíveis de um filtro e uma textura.

Exercícios

17 **Um escultor está a desenvolver uma nova série de peças para uma exposição de arte contemporânea. Para cada escultura, decide realizar duas escolhas sucessivas:**

- **material principal da escultura: *madeira* ou *pedra*;**
- **tipo de acabamento superficial: *polido*, *mate* ou *envelhecido*.**

Contudo, há restrições técnicas e conceptuais a considerar:

- **por razões de durabilidade, a madeira não pode ser usada com acabamento polido;**
- **o acabamento envelhecido é reservado exclusivamente para esculturas em pedra, de modo a garantir um efeito estético coerente.**

17.1. Lista todas as combinações possíveis sem aplicar restrições.

17.2. Elimina as combinações que violam as condições dadas e apresenta as combinações válidas.

17.3. Quantas combinações são possíveis, aplicando as restrições?

18 **Considera a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados cúbicos equilibrados, numerados de 1 a 6. A cada lançamento, associa-se o produto dos números obtidos nas duas faces superiores.**

18.1. Determina o espaço de resultados possível desta experiência, ou seja, o conjunto de todos os produtos que podem resultar do lançamento dos dois dados.

18.2. Quantos elementos tem esse espaço de resultados?

18.3. Este espaço é finito ou infinito? Justifica.

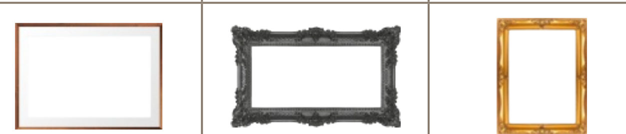
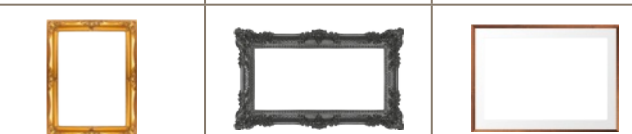
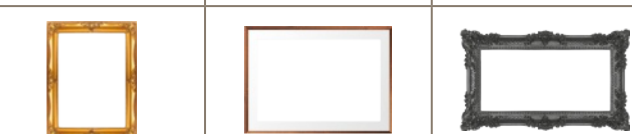
18.4. O número 17 pode ser resultado da experiência? E o 36?

18.5. De quantas formas diferentes pode obter-se o resultado do produto igual a 12?

3.2.3. Permutações

Considera que um artista tem três molduras diferentes (A, B, C) e quer pendurá-las numa parede, lado a lado. De quantas formas diferentes o pode fazer?

Como todas as molduras são diferentes, a sua ordem é importante. Logo, temos as seguintes possibilidades:

	A B C
	A C B
	B A C
	B C A
	C A B
	C B A

Repara que temos três posições para colocar os quadros:

- para a primeira posição, temos as três molduras disponíveis, ou seja, três possibilidades;
- para a segunda posição, já só haverá duas molduras disponíveis, pois uma já foi colocada na primeira posição, portanto, passamos a ter 3×2 possibilidades;
- por fim, para a terceira posição, só haverá uma moldura, uma vez que as restantes já foram utilizadas, logo, $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

1.ª Posição	**2.ª Posição**	**3.ª Posição**
3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade

Dizemos que existem $3 \times 2 \times 1 = 3!$ formas diferentes de colocar as molduras.

$3!$ lê-se "3 fatorial" e corresponde às diversas ordens possíveis de dispor os elementos diferentes sem repetições, diz-se que são permutações de 3.

Em matemática, diz-se que há uma permutação quando se dispõem todos os elementos de um conjunto sem repetição, mudando a ordem desses elementos. Ou seja, uma permutação é uma ordenação possível de todos os elementos de um conjunto finito.

Manual Digital

Vídeos
Probabilidades e métodos de contagem: tabela de dupla entrada

Tabelas de dupla entrada e a comparação de probabilidades

Permutações

Dado um conjunto com n **elementos distintos**, chama-se **permutações** às diferentes sequências ordenadas que se podem formar utilizando **todos os elementos** do conjunto **sem repetição.**

O número total de permutações possíveis desses elementos é dado por:

$$P(n) = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$P(n)$ lê-se "permutações de n" e $n!$ lê-se "n fatorial".

Propriedade das permutações

$P(n) = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p)!$

Exemplo 23

$5! = 5 \times 4!$

$10 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!$

$\frac{10!}{5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

Exemplo 24

Numa apresentação de teatro experimental, quatro amigos vão sentar-se lado a lado na primeira fila da plateia. Os amigos são: Melissa, Edson, Carla e Lucas.

De quantas formas diferentes se podem sentar?

Como a ordem importa (sentar-se à esquerda ou à direita altera a disposição), trata-se de uma permutação de quatro elementos.

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Existem 24 maneiras diferentes de organizar os quatro amigos na fila.

As permutações aplicam-se, por exemplo, a situações em que se pretende ordenar imagens, distribuir elementos por lugares distintos ou explorar diferentes sequências visuais, usando todos os elementos de um conjunto sem repetir nenhum.

Exercício

19 **Uma fotógrafa vai escolher quatro das suas fotografias favoritas para expor numa fila (todas diferentes).**

Considerando a ordem pela qual coloca as fotografias, de quantas formas diferentes as pode expor?

Exemplo 25

Numa galeria de arte, vão ser expostas cinco obras distintas de um mesmo artista, alinhadas numa parede. Considera que as obras são referenciadas pelas letras A, B, C, D e E.

Contudo, há duas condições de montagem impostas pelo curador:

- a obra A deve ficar sempre à esquerda da obra B (não necessariamente ao lado);
- as obras D e E devem ficar juntas, lado a lado, em qualquer ordem.

De quantas maneiras diferentes é possível fazer esta exposição das cinco obras?

Repara que para respeitar as condições não podemos aplicar apenas uma permutação.

Vejamos:

Se D e E têm de ficar juntas, podemos agrupá-las, temporariamente, num bloco único, que pode ter duas formas: $[DE]$ ou $[ED]$.

Assim, os cinco elementos tornam-se quatro unidades para permutar:

- o bloco (DE ou ED)
- A
- B
- C

Agora, calculemos as permutações dos quatro elementos com o bloco:
número de maneiras de organizar quatro elementos $= 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Mas, atenção, o bloco $[DE]$ tem duas formas internas (DE ou ED), por isso teremos $24 \times 2 = 48$ disposições que mantêm D e E juntos.

Contudo, ainda nos falta atender à condição de A ter de se encontrar à esquerda de B. Em metade das permutações, A estará antes de B. A outra metade são casos em que B está antes de A – que não nos interessam.

Portanto, consideramos apenas metade $48 : 2 = 24$.

Assim, existem 24 disposições diferentes das cinco obras, respeitando ambas as condições:

- A vem antes de B;
- D e E estão juntas, em qualquer ordem.

Exercícios

20 **Numa oficina de ilustração, quatro participantes – Ana, Bruno, Carla e Daniel – vão sentar-se lado a lado em quatro cadeiras numeradas. Contudo, a Ana tem de ficar numa das extremidades da fila.**

De quantas formas diferentes se poderão sentar os participantes, respeitando a condição?

21 **Numa encenação teatral, cinco elementos vão entrar em cena numa fila: Luís, Sandro, Isilda, Tony e Milena. No entanto, o Luís e o Sandro devem entrar um a seguir ao outro, em qualquer ordem.**

De quantas formas diferentes podem entrar os cinco elementos, respeitando a condição?

3.2.4. Arranjos

Tarefa

3 Um artista digital utiliza uma caixa-forte para guardar os seus arquivos mais importantes. O sistema da caixa exige a criação de um código numérico de quatro algarismos, escolhidos de entre os seguintes algarismos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

Todos os algarismos do código devem ser diferentes entre si e a ordem em que aparecem é importante.

Quantos códigos diferentes de quatro algarismos pode o artista definir?

Para responder à questão, vamos analisar as possibilidades para cada uma das posições do número:

- para a 1.ª posição podemos escolher qualquer um dos algarismos, ou seja, temos 10 possibilidades (algarismos de 0 a 9);
- de seguida, para a 2.ª posição já só temos nove possibilidades, porque um dos algarismos já foi utilizado antes;
- de igual forma, para a 3.ª posição, agora, têm-se apenas oito possibilidades
- e, por fim, para a 4.ª posição existem apenas sete possibilidades.

1.ª Posição	2.ª Posição	3.ª Posição	4.ª Posição
10 possibilidades	9 possibilidades	8 possibilidades	7 possibilidades
$10 \times 9 \times 8 \times 7$			

Portanto, podem definir-se $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ códigos distintos, sem repetição dos algarismos.

Diz-se que se procedeu ao arranjo dos 10 algarismos quatro a quatro (em grupos de quatro elementos) e escreve-se ${}^{10}A_4$.

$${}^{10}A_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

Arranjos sem repetição

Dado um conjunto com n **elementos distintos**, chama-se **arranjos simples de** n **elementos,** p **a** p, a todas as sequências ordenadas que se podem formar escolhendo p **elementos diferentes** entre os n disponíveis, **sem os repetir**.

O número total de arranjos simples é representado por:

$${}^{n}A_p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Lê-se: **"arranjos sem repetição de n, p a p"**.

Em particular, quando $n = p$, ${}^{n}A_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$.

Nota:
Por convenção, $0! = 1$.

Exemplo 26

Considera que um coreógrafo tem cinco bailarinos e quer escolher três para uma sequência, em que a ordem nessa sequência é importante, ou seja $ABC \neq ACB$.

Neste caso, os cinco bailarinos podem ser sequenciados, em grupos de 3, de 60 formas diferentes, pois:

$${}^{5}A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Os **arranjos** referem-se a escolher e **ordenar uma parte** de um conjunto de elementos.

Exercícios

22 Uma artista tem seis cores e quer escolher duas para usar em sequência (ex.: fundo e detalhe). Quantos arranjos possíveis há das duas cores?

23 Um curador tem sete obras de arte distintas e deseja escolher três delas para uma página de catálogo, onde serão apresentadas em fila, pela ordem escolhida.
De quantas maneiras diferentes pode selecionar e ordenar três dessas obras para a página?

24 Um *designer* gráfico está a criar logótipos tipográficos minimalistas utilizando letras diferentes do alfabeto. Pode utilizar todas as letras do alfabeto.
Sabendo que ele pretende criar logótipos formados por três letras distintas, em que a ordem das letras é relevante (por exemplo, ABC é diferente de CAB), quantos logótipos diferentes pode criar?

Exemplo 27

Um ilustrador criou seis cartazes distintos para uma exposição visual. Pretende selecionar três deles para serem colocados em sequência à entrada da galeria. A ordem dos cartazes é importante (forma um percurso visual). Contudo, por razões temáticas, o cartaz B não pode ser o primeiro da sequência.

Quantas sequências diferentes de três cartazes pode o ilustrador formar, respeitando esta restrição?

- Sabemos que o cartaz B não pode ser o primeiro, por questões temáticas, então, para a primeira posição poderemos colocar qualquer um dos outros cinco **cartazes**, sendo que, de seguida, nas posições 2 e 3 já não temos quaisquer restrições, ou seja, dos cinco cartazes restantes (cartaz B e os outros quatro cartazes) teremos de escolher dois, considerando a ordem, logo, arranjos de cinco, dois a dois.

1.ª Posição	2.ª Posição	3.ª Posição
Qualquer um dos cinco cartazes por excluímos o cartaz B	Arranjos dos restantes cartazes (cartaz B + quatro cartazes restantes)	
$5 \times {}^5A_2$		

Portanto, existem $5 \times {}^5A_2 = 5 \times 5 \times 4 = 100$ sequências diferentes que respeitam a restrição de o cartaz B não se encontrar na 1.ª posição.

OU

- Vejamos uma forma alternativa de contar as opções de sequências. Supondo que não existem restrições, o número total de sequências possíveis corresponde aos arranjos de seis cartazes em grupos de três, ou seja:

$$^6A_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

Mas, considerando a restrição de que o cartaz B não se pode encontrar em 1.ª posição, vamos subtrair a todas as sequências possíveis aquelas em que o cartaz B se encontra na 1.ª posição.

Portanto, fixando B na 1.ª posição, temos apenas uma possibilidade para essa posição e de seguida restam os cinco cartazes de onde teremos de escolher dois, em ordem, logo, arranjos de cinco, dois a dois.

1.ª Posição	2.ª Posição	3.ª Posição
Cartaz B	Arranjos dos restantes cartazes	
$1 \times {}^5A_2$		

Ou seja, $1 \times {}^5A_2 = 1 \times 5 \times 4 = 20$ sequências em que o cartaz B se encontra em 1.ª posição.

Logo, efetuando a subtração, temos:

$120 - 20 = 100$ sequências diferentes de três cartazes, respeitando a condição de que o cartaz B não fique em primeiro lugar.

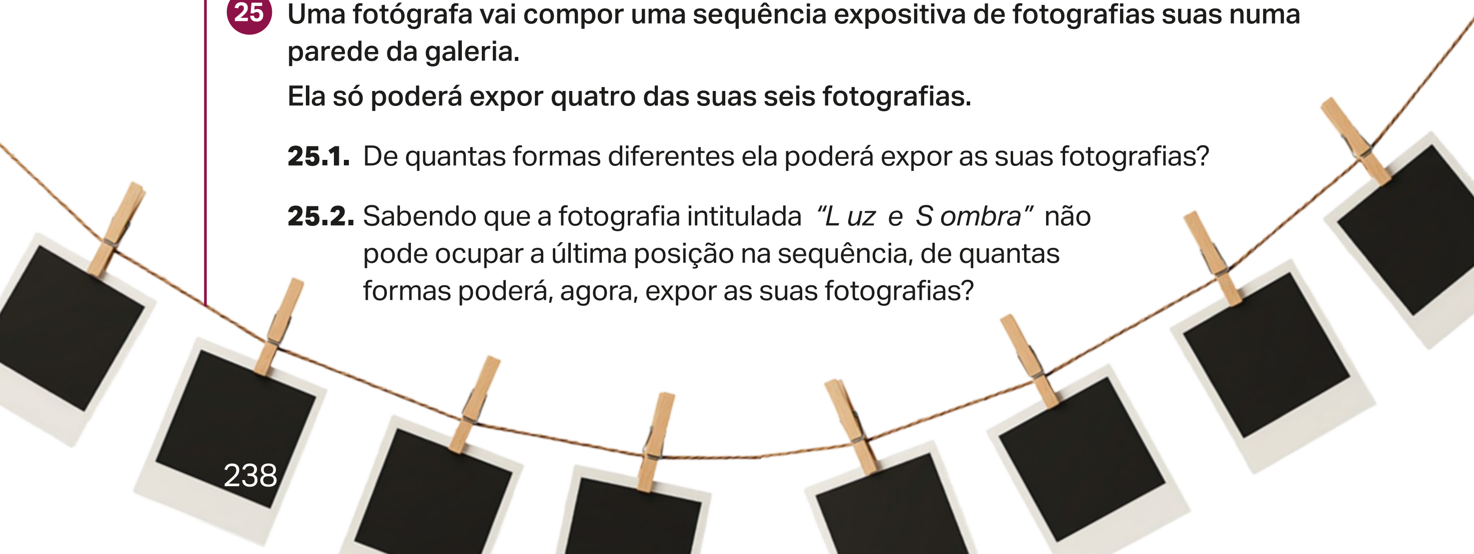
Repara que, no cálculo combinatório, tal como noutras áreas da matemática, não existe apenas um caminho para se chegar à resposta correta – diferentes estratégias de raciocínio podem conduzir ao mesmo resultado, desde que sejam logicamente válidas e bem fundamentadas.

Exercícios

25 **Uma fotógrafa vai compor uma sequência expositiva de fotografias suas numa parede da galeria.**
Ela só poderá expor quatro das suas seis fotografias.

25.1. De quantas formas diferentes ela poderá expor as suas fotografias?

25.2. Sabendo que a fotografia intitulada *"Luz e Sombra"* não pode ocupar a última posição na sequência, de quantas formas poderá, agora, expor as suas fotografias?



26 Um *designer* gráfico dispõe de cinco cartazes diferentes: A, B, C, D e E. Pretende escolher três deles para compor uma faixa horizontal, em que a ordem visual é relevante. Os cartazes A e C não podem ficar lado a lado.

De quantas formas diferentes poderá compor a faixa horizontal?

Tarefa

4 Retomemos o caso do artista digital que utiliza uma caixa-forte para guardar os seus arquivos mais importantes, o sistema da caixa permite que, na criação de um código numérico de quatro algarismos, escolhidos de entre os seguintes algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, se possam repetir algarismos.

Quantos códigos diferentes de quatro algarismos pode o artista definir, podendo repetir algarismos?

Analisemos as possibilidades para cada uma das posições dos algarismos no código:

- Na 1.ª posição, podemos colocar qualquer um dos algarismos, ou seja, temos 10 possibilidades (algarismos de 0 a 9).
- De seguida, para a 2.ª posição também podemos colocar qualquer um dos 10 algarismos, uma vez que podemos repetir algarismos.
- De igual maneira, para as 3.ª e 4.ª posições, em que podemos repetir algarismos.

1.ª Posição	2.ª Posição	3.ª Posição	4.ª Posição
10 possibilidades	**10 possibilidades**	**10 possibilidades**	**10 possibilidades**
$10 \times 10 \times 10 \times 10$			

Portanto, podem definir-se $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ códigos distintos, em que se podem repetir algarismos.

Diz-se que se procedeu ao arranjo com repetição dos 10 algarismos quatro a quatro (em grupos de quatro elementos) e escreve-se ${}^{10}A'_4$.

$$ {}^{10}A'_4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 $$

Arranjos com repetição

Dado um conjunto com n **elementos distintos**, chama-se **arranjos com repetição de n elementos, p a p**, às sequências ordenadas que se podem formar escolhendo p **elementos** entre os n disponíveis, **permitindo repetições** dos elementos.

O número total de arranjos com repetição é dado por:

$$^{n}A'_{p} = n \times n \times n \times \ldots \times n = n^{p}$$

Lê-se: **"arranjos com repetição de n, p a p"**.

Exercícios

27 Um artista de multimédia programa uma instalação interativa em que a sequência de luzes projetadas é controlada por um código de quatro sinais.

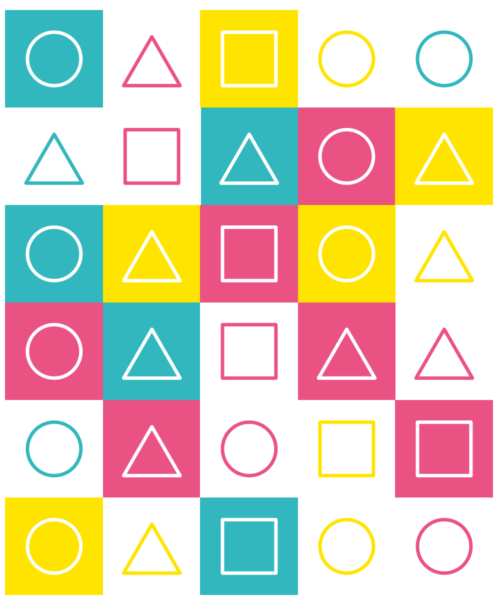
Cada sinal é representado por uma das seguintes letras, correspondentes a efeitos de luz: B (Branco), R (Roxo) ou C (Ciano).

O código é uma sequência de quatro letras, em que a ordem dos sinais é importante e se podem repetir (por exemplo, BBRC ou CRRC são válidos).

Quantos códigos distintos de quatro letras pode o artista definir?

28 Uma *designer* de moda cria um padrão para estampar tecidos usando uma sequência de 5 símbolos:

- △ (triângulo);
- ○ (círculo);
- □ (quadrado).



Cada padrão consiste numa sequência linear de cinco símbolos, podendo repetir-se o mesmo símbolo várias vezes (por exemplo: ○○□△○).

Quantos padrões diferentes pode a *designer* criar?

3.2.5. Combinações

Tarefa

5 Uma curadora está a organizar uma galeria virtual com trabalhos de estudantes de arte. Recebeu sete propostas distintas e precisa de selecionar três para apresentar numa nova secção da exposição.

No entanto, a ordem em que as obras são apresentadas não é relevante, interessando apenas quais são as escolhidas.

Quantas seleções diferentes poderá a curadora fazer?

Se a ordem **não** importa, escolher A, B e C é o mesmo que escolher C, B e A.

Comecemos por analisar diferentes opções, recordando sempre que a ordem, neste caso, não interessa (A e B é o mesmo que B e A).

- Se fosse apenas **uma obra** (A) e tivéssemos de selecionar uma, só podíamos selecionar uma, ou seja, uma combinação possível: A.
  Dizemos que a combinação de 1, 1 a 1, é 1 e escreve-se: ${}^1C_1 = 1$.
- Se fossem apenas **duas obras** (A, B) e tivéssemos de selecionar:
  - uma, tínhamos duas combinação possíveis: A ou B;
    $${}^2C_1 = 2$$
  - duas, tínhamos uma combinação possível: AB.
    $${}^2C_2 = 1$$
- Se fossem apenas **três obras** (A, B, C) e tivéssemos de selecionar:
  - uma, tínhamos três combinações possíveis: A, B ou C;
    $${}^3C_1 = 3$$
  - duas, tínhamos três combinações possíveis: AB, AC ou BC;
    $${}^3C_2 = 3$$
  - três, só tínhamos uma combinação possível: ABC.
    $${}^3C_3 = 1$$

- Se fossem **quatro obras** (A, B, C, D) e tivéssemos de selecionar:
  - uma, tínhamos quatro combinações possíveis: A, B, C ou D;

$$^4C_1 = 4$$

  - duas, tínhamos seis combinações possíveis: AB, AC, AD, BC, BD ou CD;

$$^4C_2 = 6$$

  - três, só tínhamos quatro combinação possível: ABC, ABD, ACD ou BCD;

$$^4C_3 = 4$$

  - quatro, só tínhamos uma combinação possível: ABCD.

$$^4C_4 = 1$$

Poderíamos continuar esta análise com um maior número de obras, mas o processo tornar-se-ia moroso. Nestes casos, recorre-se à noção de combinações de n elementos, p a p, que permite determinar com rigor o número de agrupamentos possíveis de p elementos escolhidos entre n, sem atender à ordem dos elementos no grupo.

As **combinações** referem-se à escolha de uma parte dos elementos, **sem importar a ordem.**

Combinações

Dado um conjunto com n **elementos distintos**, chama-se **combinações de n elementos, p a p,** a todos os subconjuntos, sem importar a ordem e sem repetição, que se podem formar escolhendo p **elementos diferentes**, entre os n disponíveis.

O número total de combinações simples é representado por:

$$^nC_p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Lê-se: "combinações de n, p a p".

Desta forma, a curadora pode selecionar as três obras para a exposição de 35 **maneiras diferentes**, sem se preocupar com a ordem em que são apresentadas, pois:

$$^7C_3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3!\,4!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = \frac{210}{6} = 35$$

Na análise feita, repara que:

- $^1C_1 = 1$, $^2C_2 = 1$, $^3C_3 = 1$ e $^4C_4 = 1$

De onde podemos concluir que a combinação de n elementos de um conjunto em grupos de n elementos resulta sempre em apenas uma possibilidade.

$$^{n}C_{n} = 1$$

Pois,

$$^{n}C_{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Nota:
Por convenção, $0! = 1$.

$^{2}C_{1} = 2$, $^{3}C_{1} = 3$ e $^{4}C_{1} = 4$

De onde podemos concluir que a combinação de n elementos de um conjunto em grupos de um elemento resulta sempre em apenas n possibilidade.

$$^{n}C_{1} = n$$

Pois,

$$^{n}C_{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Exemplo 28

Um *designer* de moda tem cinco tecidos e quer escolher dois para combinar num modelo, mas a ordem não interessa (usar A e B é igual a usar B e A).

Desta forma, ele poderá fazer 10 combinações possíveis, pois:

$$^{5}C_{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Exercícios

29 **Um artista vai escolher três, das suas sete tintas, para fazer uma composição. A ordem de escolha não importa.**
Quantas combinações possíveis existem?

30 **Uma figurinista tem ao seu dispor oito figurinos diferentes criados por estudantes. Para uma cena específica da peça, pretende escolher três figurinos distintos, que serão utilizados por diferentes personagens.**

30.1. De quantas formas diferentes pode fazer essa seleção, sabendo que a ordem dos figurinos não interessa?

30.2. Se o figurino da personagem principal for previamente selecionado, quantas formas diferentes existem, agora, para escolher os outros dois figurinos?

O **cálculo combinatório** permite planear possibilidades sem as escrever todas, dando liberdade para experimentar e, ao mesmo tempo, rigor para estruturar. Com tabelas, árvores, permutações, arranjos e combinações, é possível contar com criatividade.

Síntese

Um **conjunto** é uma coleção bem definida de elementos, que podem ser números, pessoas, letras, objetos, etc.

Um conjunto pode ser representado de diferentes formas:

- Em extensão (ou enumeração)

  Exemplo:

  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \longrightarrow$ conjunto dos números pares até 8

- Em compreensão

  Exemplo:

  $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\} \longrightarrow$ "B é o conjunto dos números naturais menores que 10"

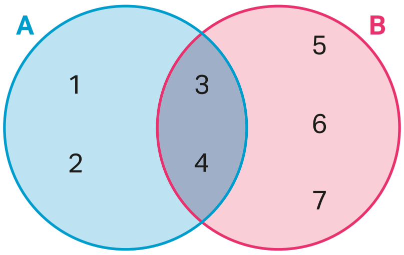
- Por representação gráfica

  Exemplo:

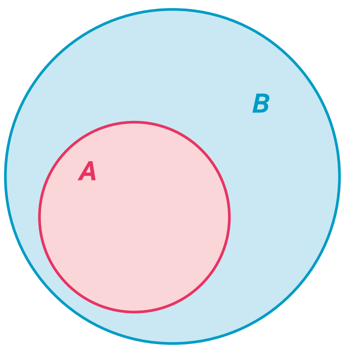
  O conjunto A é constituído pelos elementos 1, 2, 3 e 4.

  O conjunto B é constituído pelos elementos 3, 4, 5, 6 e 7.

  Os elementos 3 e 4 pertencem, simultaneamente, aos conjuntos A e B.



Se B e A são dois conjuntos, dizemos que A é **subconjunto** de B (escreve-se $A \subseteq B$) se cada elemento de A também pertence a B.



A e B dizem-se dois **conjuntos iguais** se têm exatamente os mesmos elementos.

Denota-se por $A = B$.

Síntese

Operações com conjuntos

União: todos os elementos dos dois conjuntos $\longrightarrow \; A \cup B$

Interseção: apenas os elementos comuns aos dois conjuntos $\longrightarrow \; A \cap B$

Complementar: apenas os elementos que estão fora do conjunto $\longrightarrow \; \bar{A}$

Diferença: apenas os elementos que estão no conjunto A, mas não estão no conjunto $B \; \longrightarrow \; A \setminus B$

Leis de De Morgan

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Experiência **determinista:** o resultado é sempre o mesmo.

Experiência **aleatória:** o resultado varia, depende do acaso.

Universo (ou espaço) de resultados (**espaço amostral**) é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência. Representa-se por Ω (a letra grega ómega).

Exemplo: No lançamento de um dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Acontecimento (ou **evento**) é qualquer subconjunto do espaço de resultados. Pode ser um único resultado ou vários.

Tipos de acontecimentos:

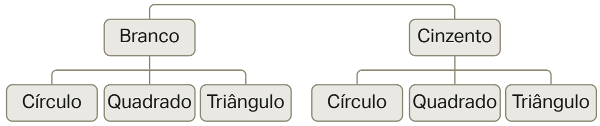
- **Acontecimentos simples:** apenas um único resultado da experiência.
  $A =$ "*Sair o número* 3 *no lançamento de um dado*"
- **Acontecimentos compostos:** inclui vários resultados possíveis.
  $B =$ "*Sair número par no lançamento de um dado*"
- **Acontecimento impossível:** nunca pode ocorrer, ou seja, é o conjunto vazio $\emptyset$.
  $C =$ "*Sair o número zero no lançamento de um dado*"
- **Acontecimento certo:** acontece sempre, qualquer que seja o resultado da experiência. Corresponde ao próprio espaço de resultados Ω.
  $D =$ "*Sair um número inteiro no lançamento de um dado*"

Princípio fundamental da contagem

Se há a formas de fazer uma escolha e b formas de fazer outra, então há $a \times b$ formas de fazer as duas escolhas em sequência.

Síntese

Diagramas de árvore são uma forma visual de representar todas as possibilidades de uma escolha faseada (etapa a etapa).



Tabelas de dupla entrada servem para organizar possibilidades, quando há apenas duas decisões.

	Lisa	Rugosa
Filtro A	A – L	A – R
Filtro B	B – L	B – R
Filtro C	C – L	C – R

Permutações: todas as sequências diferentes e ordenadas que se podem formar utilizando **todos os elementos** do conjunto, **sem repetição**.

$$P(n) = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Arranjos sem repetição: todas as sequências ordenadas que se podem formar escolhendo ***p* elementos diferentes** entre os n disponíveis, **sem repetição**.

$$^{n}A_{p} = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Nota:
- $0! = 1$
- $^{n}A_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$
- $^{n}A_{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$

Arranjos com repetição: todas as sequências ordenadas que se podem formar escolhendo ***p* elementos** entre os n disponíveis, **permitindo repetições**.

$$^{n}A'_{p} = n \times n \times n \times \ldots \times n = n^{p}$$

Combinações: todos os subconjuntos, sem importar a ordem e sem repetição, que se podem formar escolhendo ***p* elementos diferentes** entre os n disponíveis.

$$^{n}C_{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Nota:
- $^{n}C_{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$
- $^{n}C_{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$

Para aplicar

1 **Representa em extensão os seguintes conjuntos:**

A: "Números primos menores que 17"

B: "Números naturais inferiores a $\sqrt{50}$"

C: "Números inteiros cujo quadrado é inferior a 17"

2 **Considera os seguintes conjuntos:**

$A=\{1, 4, 9, 16\}$

$B=\{x\in\mathbb{N}: 3<x<10\}$

$C=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$D=\{x\in\mathbb{N}: x\geqslant 9 \wedge x\leqslant 4\}$

$E=\{x\in\mathbb{Z}: 2x\leqslant 9\}$

2.1. Representa, em compreensão, o conjunto A.

2.2. Existem conjuntos iguais? Quais?

2.3. Mostra que o conjunto B é igual ao conjunto $F=\{x\in\mathbb{N}: x>3 \wedge x\leqslant 9\}$.

2.4. Representa, em extensão, o conjunto E.

3 **Considera os seguintes conjuntos, definidos no universo dos números reais não negativos:**

$A=\{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$

$B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C=]0, 4]$

$D=[3, 7]$

Determina:

3.1. $A\cap B$.

3.2. $A\cup B$.

3.3. $A\cap C$.

3.4. $B\cap D$.

3.5. $A\setminus B$.

3.6. $B\setminus A$.

3.7. $C\setminus D$.

3.8. $D\setminus C$.

3.9. $\bar{A}$ sendo $U=\{x\in\mathbb{N}: 1\leqslant x\leqslant 25\}$

3.10. $\bar{B}$, sendo $U=\{x\in\mathbb{N}: 1\leqslant x\leqslant 25\}$

3.11. $\bar{C}$, sendo $U=\mathbb{R}$.

3.12. $\bar{D}$, sendo $U=\mathbb{R}$.

Para aplicar

4 **Sabe-se que:**
$A \cup B = \{0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9\}$, $A \cap B = \{0\ ,\ 1\ ,\ 6\ ,\ 7\}$
e $A \setminus B = \{8\ ,\ 9\}$.

4.1. Determina, em extensão, o conjunto A.

4.2. Determina, em extensão, o conjunto B.

4.3. O que podes concluir em relação à afirmação $B \subset A$?

5 **Uma artista plástica criou uma instalação interativa em que o público pode, em cada sessão, realizar as seguintes ações:**

i. Rodar uma roleta com seis cores: amarelo, azul, rosa, roxo, laranja e verde.

ii. Sortear uma carta com uma figura geométrica de entre 10 opções possíveis.

iii. Premir um botão que acende uma luz branca, na parede.

Qual das afirmações seguintes está correta?

(A) As três ações são experiências deterministas, porque o número de opções é limitado.

(B) Apenas a ação de premir o botão é uma experiência aleatória, pois depende do acaso.

(C) Rodar a roleta e sortear uma carta são experiências aleatórias, porque o resultado é imprevisível.

(D) A ação de rodar a roleta é determinista, pois as cores estão previamente definidas.

6 **Durante uma *performance* artística, o público é convidado a lançar ao ar uma pequena bola, premir um botão de luz e sortear, ao acaso, uma peça com um padrão geométrico.**

6.1. Classifica cada uma das três ações de experiência determinista ou experiência aleatória, justificando a tua resposta com base no conceito de previsibilidade do resultado.

6.2. Identifica o espaço de resultados para a ação de sortear uma peça, sabendo que há cinco padrões possíveis: listras, bolinhas, ziguezague, espiral e mosaico.

7 **Numa galeria de arte, os visitantes participam de uma experiência interativa: sorteiam uma carta entre seis, cada uma com uma cor diferente (vermelho, azul, amarelo, verde, preto e branco).**

7.1. Determina o espaço de resultados Ω.

7.2. Sejam os seguintes acontecimentos:

- A: "Sair uma cor primária"
- B: "Sair uma cor neutra"
- C: "Sair a cor azul"

a) Escreve cada acontecimento como subconjunto de Ω.

b) Indica quais dos acontecimentos são **simples** e quais são **compostos**.

c) Se a carta sorteada for "azul", quais dos acontecimentos ocorreram?

8 **Um grupo de estudantes está a preparar cartazes digitais, para promover exposições de arte contemporânea. Para cada cartaz, têm de fazer as seguintes escolhas:**

- **fundo**: branco, cinzento ou gradiente;
- **tipo de letra**: serifada, sem serifa ou decorativa;
- **ícone decorativo**: pincel, espiral ou nenhum.

Contudo, existem algumas restrições gráficas:

- se o fundo for **gradiente**, **não** pode ser usada letra **decorativa**;
- o ícone **espiral** apenas pode ser usado com fundo **branco**.

8.1. Determina todas as combinações possíveis, sem restrições.

8.2. Apresenta as combinações que respeitam as condições dadas.

8.3. Quantas combinações válidas existem?

9 **Um artista quer dispor quatro esculturas diferentes numa vitrina, lado a lado.** De quantas formas o pode fazer?

Para aplicar

10 **Numa oficina de cerâmica, há cinco cores de esmalte. A ceramista quer usar três delas numa peça, mas a ordem não interessa.**
Quantas combinações possíveis existem?

11 **Um aluno de artes tem de criar logótipos com dois símbolos e uma letra (A, B ou C).**
Sabendo que há quatro símbolos disponíveis, quantos logótipos diferentes pode criar?
Repara que a ordem é importante nesta situação.

12 **Uma exposição vai escolher três obras de um total de seis candidatas para serem apresentadas juntas, sem ordem definida.**
Quantos trios possíveis pode haver?

13 **Uma artista quer fazer padrões com três das suas cinco formas preferidas, dispostas numa ordem específica.**
Quantos padrões diferentes pode criar?

14 **Numa prateleira estão seis livros diferentes de matemática.**
De quantas maneiras distintas é possível organizá-los:

14.1. Colocados lado a lado na prateleira?

14.2. Colocados lado a lado se dois dos livros tiverem de ficar sempre juntos?

14.3. Se os livros forem colocados em duas prateleiras de três livros cada?

14.4. Se apenas quatro dos seis livros forem colocados na prateleira?

15 **Um cofre tem um teclado numérico com os dígitos 0 a 9. Para o abrir, é necessário introduzir um código de quatro dígitos diferentes.**
Quantos códigos diferentes podem ser formados?

16 **Um cadeado digital aceita combinações de três dígitos, podendo cada dígito variar entre 0 e 9. Os dígitos podem repetir-se.**
Quantos códigos diferentes se podem formar?

17 **Uma empresa quer atribuir senhas de acesso, com quatro dígitos, aos seus funcionários, usando apenas os algarismos 0 a 9. As regras de criação da senha variam conforme o nível do funcionário.**

Sabendo que:

I. para funcionários de nível 1 os quatro dígitos não se podem repetir.

II. para funcionários de nível 2, os quatro dígitos podem-se repetir.

17.1. Quantas senhas diferentes podem ser criadas, por funcionários do nível 1?

17.2. Quantas senhas diferentes podem ser criadas, por funcionários do nível 2?

17.3. Um funcionário cria uma senha usando os 4 dígitos, 1, 2, 3 e 4, sem repetir nenhum. Quantas senhas diferentes consegue formar com esses 4 algarismos?

18 **Um encenador está a preparar uma *performance* interativa, em que das 10 pessoas que se vão sentar na primeira fila irá escolher cinco para interagirem com os atores.**

18.1. De quantas formas diferentes pode o encenador escolher cinco pessoas entre as 10 para subirem ao palco, se a ordem em que forem chamadas não interessar?

18.2. Supondo que o encenador decide agora que as cinco pessoas escolhidas irão interagir com os atores em sequência, cada uma num momento específico, de quantas formas pode escolher e ordenar essas cinco pessoas entre as 10?

18.3. Supõe que o encenador escolheu as cinco pessoas e quer saber de quantas formas pode distribuí-las pelas cinco posições de entrada no palco.

De quantas formas diferentes o pode fazer?

18.4. No caso de entre as 10 pessoas existirem duas irmãs gémeas, que não podem ser escolhidas juntas, por razões de encenação, de quantas formas pode o encenador escolher cinco pessoas, respeitando essa condição?

18.5. Das 10 pessoas, há um ator profissional que tem de ser incluído entre os cinco escolhidos. De quantas formas pode o encenador escolher e ordenar os cinco participantes, garantindo que esse ator está incluído?

3.3. Probabilidade

Na vida nem tudo é previsível. Se lançarmos uma bola ao ar, esperamos que ela caia – sempre, desde que estejamos num lugar com gravidade. Este é um exemplo de uma experiência determinista: o resultado é conhecido e repete-se sempre que as condições forem iguais.

Mas, se atirarmos tinta sobre uma tela com um gesto livre e espontâneo, nunca saberemos exatamente onde irá cair cada gota. Esta é uma experiência aleatória: mesmo que repitamos o gesto, o resultado pode variar.

Este contraste entre o previsível e o incerto está na base do estudo da probabilidade.

A Teoria da Probabilidade ajuda-nos a compreender e a modelar matematicamente situações em que o acaso tem um papel fundamental. Mesmo que um fenómeno tenha resultados incertos, ao longo de muitas repetições surgem padrões. Por isso, dizemos que, apesar da incerteza, há uma certa regularidade estatística.

Exemplo 29

Experiências deterministas	Experiências aleatórias
(Resultado previsível, sempre o mesmo nas mesmas condições) • Acender uma lâmpada ⟶ a luz aparece. • Colar uma figura geométrica num ponto específico de uma tela ⟶ fica exatamente onde foi colada. • Tocar numa tecla específica de piano ⟶ ouve-se sempre a mesma nota. • Misturar azul e amarelo em partes iguais ⟶ dá verde. • Programar uma luz para acender a determinada hora ⟶ acende sempre à mesma hora.	(Resultado incerto, pode variar mesmo repetindo da mesma forma) • Atirar purpurinas ao ar sobre uma tela molhada ⟶ podem nunca cair exatamente no mesmo sítio. • Sortear um nome de um saco com papéis ⟶ o nome que sai é imprevisível. • Escolher uma cor "de olhos fechados" entre várias tintas ⟶ não se sabe qual será escolhida. • Fotografar folhas ao vento ⟶ cada foto é diferente. • Fazer uma mancha de tinta com uma seringa e/ou um conta-gotas ⟶ a forma final é incerta.

3.3.1. Noção de probabilidade

O lançamento de um dado, com as faces numeradas de 1 a 6, corresponde a uma experiência aleatória, pois podemos prever o que vai acontecer, ou seja, qual face poderá sair, mas não sabemos qual realmente sairá.

Neste caso, ocorrerá, com certeza, um dos seguintes acontecimentos:

A_1: "Sair número 1" A_2: "Sair número 2"

A_3: "Sair número 3" A_4: "Sair número 4"

A_5: "Sair número 5" A_6: "Sair número 6"

Para cada um destes acontecimentos, só existe um resultado possível e não poderá ocorrer outro acontecimento que não um destes.
Dizemos que cada um destes acontecimentos é um acontecimento simples, pois só há um resultado favorável.

Numa experiência aleatória, a reunião de todos os acontecimentos simples resulta no espaço de resultados. Neste caso:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Existem outros tipos de acontecimentos possíveis, por exemplo:

- B: "Sair número maior do que 5"

  Em que também só há uma ocorrência favorável, que é sair o número 6, logo, $B = \{6\}$.

- C: "Sair número par"

  Neste caso, existem várias ocorrências favoráveis, são elas as faces com o 2, o 4 e o 6. Dizemos que é um acontecimento composto e $C = \{2, 4, 6\}$.

- D: "Sair número menor do que 1"

  No lançamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6 nunca poderá sair um número menor do que 1. Diz-se que este acontecimento é impossível e $D = \{\ \}$.

- E: "Sair um número positivo"

  No lançamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6, qualquer que seja a face a sair, o número será sempre positivo. Diz-se que o acontecimento é certo e $E = \Omega$.

Repara que no lançamento de um dado com as seis faces numeradas, de 1 a 6, se o dado for equilibrado, cada face tem a mesma hipótese de sair: 1 em 6.

Diz-se que a probabilidade de sair, por exemplo, "face 4" é de $\frac{1}{6}$ porque há um resultado favorável (sair a face com o número 4) em seis resultados possíveis.

Exemplo 30

Uma urna tem 10 bolas numeradas de 1 a 10.

A probabilidade de sair um número par é de $\frac{5}{10}$, porque há cinco números pares $(2, 4, 6, 8, 10)$, ou seja, cinco casos favoráveis, nas 10 possibilidades existentes.

$$P(\text{Sair número par}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Exercícios

31 **Uma caixa contém oito cartões com letras diferentes, formando a palavra ARTESANO. É retirado um cartão ao acaso.**

31.1. Qual é o espaço de resultados?

31.2. Indica o número de resultados favoráveis para cada um dos seguintes acontecimentos:

- A: "Sair uma vogal"
- B: "Sair uma letra da palavra ARTE"
- C: "Sair a letra S"

31.3. Indica a probabilidade de cada um dos acontecimentos A, B e C acontecerem.

32 **Indica, justificando com base nos resultados possíveis e favoráveis, qual das seguintes situações tem maior probabilidade de acontecer:**

A. Lançar um dado cúbico equilibrado e sair um número par.

B. Lançar uma moeda e sair "cara".

C. Tirar ao acaso uma carta de um baralho de 40 cartas e sair uma carta do naipe de copas.

D. Escolher uma bola de uma caixa com duas bolas vermelhas, quatro verdes e duas azuis e sair uma bola azul.

32.1. Para cada situação, apresenta:

- o número total de resultados possíveis;
- o número de resultados favoráveis;
- a probabilidade correspondente.

32.2. Ordena as situações da mais provável para a menos provável.

No lançamento de um dado, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, tal como no lançamento de uma moeda ao ar, sabemos que as possibilidades de sair qualquer uma das faces numeradas é igual, ou seja, por exemplo, a probabilidade para o acontecimento "sair número 1" é igual à probabilidade do acontecimento "sair número 4". Diz-se que os acontecimentos simples são equiprováveis.

Sejam A e B dois acontecimentos.
Os acontecimentos A e B são **equiprováveis** se e só se têm a mesma probabilidade de acontecer.

$$P(A) = P(B)$$

A probabilidade de um acontecimento varia entre 0 e 1.
Para qualquer acontecimento A: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Sendo que:

- 0 significa que o acontecimento é **impossível**;
- 1 significa que o acontecimento é **certo**;
- a probabilidade de um acontecimento pode ser apresentada na forma de fração, na forma decimal e em percentagem.

Repara que numa experiência aleatória:

- O espaço de resultados (Ω) é o conjunto de todos os resultados possíveis.
  Exemplo: lançar um dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Os acontecimentos simples correspondem a cada resultado isolado.
  Exemplo: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
- A união dos acontecimentos simples, ou seja, se juntarmos todos os acontecimentos simples, resulta no espaço de resultados.
  Exemplo: $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
- Um acontecimento certo, que corresponde ao espaço de resultados, por definição, é sempre 1.
- Então, como a soma das probabilidades dos acontecimentos simples corresponde à probabilidade da união de todos eles (ou seja, de Ω), temos que:
  $$P(\{1\}) + P(\{2\}) + \cdots + P(\{6\}) = = P(\Omega) = 1$$

Portanto, numa experiência aleatória, **a soma das probabilidades de todos os acontecimentos simples é sempre igual a 1.**

Exemplo 31

No lançamento de um dado normal:

- a probabilidade de sair um número maior do que 6 é 0;
- a probabilidade de sair um número positivo é de 100%;
- a probabilidade de sair um número menor do que 4 é de $\frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$;
- A probabilidade de sair um número par é de $\frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$.
- Sair número par e sair um número menor do que 4 são acontecimentos equiprováveis.

Exercício

33 Considera os seguintes acontecimentos:

A. Ao lançar um dado cúbico equilibrado, sair um número múltiplo de 3.

B. Ao lançar uma moeda, sair "coroa".

C. Ao tirar ao acaso uma carta de um baralho de 40 cartas, sair uma carta de cor vermelha.

D. Ao escolher uma bola de uma caixa com duas bolas vermelhas, quatro verdes e duas azuis, sair uma bola que não é azul.

33.1. Indica a probabilidade de cada um dos acontecimentos A, B, C e D.

33.2. De entre os quatro acontecimentos, quais correspondem a acontecimentos equiprováveis?

3.3.2. Regra de Laplace – noção clássica de probabilidade

A **probabilidade** é uma forma de medir o grau de certeza ou incerteza associado à ocorrência de um acontecimento. Um dos principais responsáveis por transformar esta ideia intuitiva numa teoria matemática rigorosa foi **Pierre-Simon Laplace**.

No início do século XIX, Laplace estruturou e desenvolveu os fundamentos da teoria da probabilidade, tal como a conhecemos hoje. Foi ele quem formalizou a conhecida **regra de Laplace**, usada para calcular a probabilidade de um acontecimento em contextos simples, em que todos os resultados possíveis são considerados igualmente prováveis.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matemático, físico e astrónomo francês, foi uma figura central da ciência europeia, do século XVIII. Viveu numa época marcada por profundas transformações científicas e sociais e dedicou a sua vida ao estudo do Universo e dos fenómenos do acaso.

Para Laplace, a probabilidade era mais do que uma medida da incerteza – era uma ferramenta essencial para **compreender e prever acontecimentos**, desde jogos de sorte até fenómenos astronómicos. A sua visão conciliava o **acaso com a ordem**, mostrando que, mesmo em situações aparentemente imprevisíveis, existem **padrões regulares que a matemática pode descrever**.

Laplace acreditava que, quanto mais conhecimento tivermos sobre um sistema, mais previsível ele se torna. Esta ideia influenciou, não só o desenvolvimento da matemática, mas também o pensamento científico moderno.

A sua obra mais influente, *Théorie analytique des probabilités* (1812), revelou-se um marco decisivo: demonstrou como a matemática pode ser aplicada à análise de situações incertas, com base na observação de padrões repetidos, ao longo do tempo – como no lançamento de dados ou na previsão do comportamento de sistemas complexos.

Regra de Laplace

Quando todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória são **equiprováveis**, a **probabilidade de um acontecimento A** é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Exemplo 32

Numa paleta estão quatro cores (vermelho, azul, amarelo e verde), todas iguais em tamanho e forma. Um aluno tapa os olhos e escolhe uma.

Consideremos o acontecimento: A: "escolher uma cor primária (vermelho, azul e amarelo)"

Casos favoráveis: três (vermelho, azul e amarelo) $\#A = 3$

Casos possíveis: quatro (vermelho, azul, amarelo e verde) $\#\Omega = 4$

Logo, como há três cores primárias entre quatro possíveis, $P(A) = \frac{3}{4}$.

Exemplo 33

Probabilidade da interseção e reunião de acontecimentos

Consideremos, no lançamento de um dado, os seguintes acontecimentos:

P: "Sair um número par"

A: "Sair um número menor do que 3"

Temos que: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo, $\#\Omega = 6$.

$P = \{2, 4, 6\}$, $A = \{1, 2\}$

Considerando o acontecimento C: "Sair um número par menor do que 3", temos que:

$$C = P \cap A = \{2\} \quad \text{e} \quad \#C = 1$$

Assim, $P(C) = \frac{1}{6}$.

Agora, considerando o acontecimento D: "Sair um número par ou sair um número menor do que 3", temos que $D = P \cup A = \{1, 2, 4, 6\}$, logo, $\#D = 4$.

Assim, $P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exemplo 34

Numa aula de Artes, cada aluno escolhe aleatoriamente uma cor de entre oito disponíveis, num conjunto de 40 cartões coloridos (cinco de cada cor). As cores incluem vermelho, azul, verde, amarelo, laranja, roxo, preto e branco.

A professora retira ao acaso um cartão da caixa. Assim, temos que

$\Omega = \{5 \text{ vermelhos}, 5 \text{ azuis}, 5 \text{ verdes}, 5 \text{ amarelos}, 5 \text{ laranjas}, 5 \text{ roxos}, 5 \text{ pretos}, 5 \text{ brancos}\}$

$$\#\Omega = 40$$

Considerando os seguintes acontecimentos:

- A: "Sair uma cor quente" (vermelho, amarelo ou laranja)
- B: "Sair uma cor primária" (vermelho, azul ou amarelo)

Temos que a probabilidade de:

- C: "O cartão retirado corresponder a uma cor quente ou primária"

$$C = A \cup B$$

$A = \{5 \text{ cartões vermelhos}, 5 \text{ cartões amarelos}, 5 \text{ cartões laranja}\}$

$B = \{5 \text{ cartões vermelhos}, 5 \text{ cartões azuis}, 5 \text{ cartões amarelos}\}$

Logo, $C = A \cup B =$

$= \{5 \text{ cartões vermelhos}, 5 \text{ cartões amarelos}, 5 \text{ cartões laranja}, 5 \text{ cartões azuis}\}$

$$\#C = 20$$

e $P(C) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

- D: "O cartão retirado corresponder a uma cor quente e primária"

$$D = A \cap B$$

Logo, $D = A \cap B = \{5 \text{ cartões vermelhos}, 5 \text{ cartões amarelos}\}$

$$\#D = 10$$

e $P(D) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Exercícios

34 **Numa turma de teatro, 30 alunos estão disponíveis para um *casting*.**

Considera os seguintes acontecimentos:

- **A: "12 já participaram apenas em peças de comédia"**
- **B: "10 já participaram apenas em peças de drama"**
- **C: "5 participaram em ambos os géneros"**

Sabendo que é escolhido um aluno ao acaso:

34.1. Qual é a probabilidade de o aluno ter participado em comédia ou drama?

34.2. Qual é a probabilidade de ter participado em ambos os géneros?

35 **Uma escola promove uma exposição com obras feitas por 50 alunos, para a qual será escolhido um aluno ao acaso.**

Sabendo que:

- **22 usaram apenas tinta acrílica;**
- **18 usaram apenas colagem;**
- **8 usaram ambas as técnicas.**

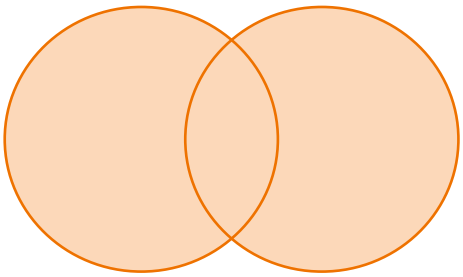
35.1. Qual é a probabilidade de o aluno escolhido ter usado acrílico ou colagem?

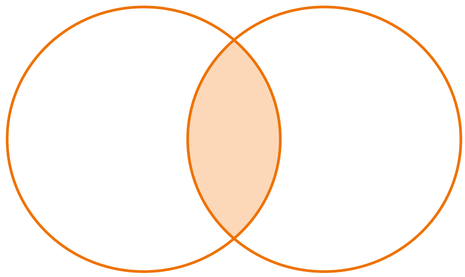
35.2. Qual é a probabilidade de o aluno escolhido ter usado apenas uma das técnicas?

Manual Digital

Vídeos
Definição de Laplace de probabilidade

O **diagrama de Venn** é uma forma de representar graficamente conjuntos, facilitando a compreensão de operações básicas dos mesmos.


União


Interseção

Exemplo 35

Numa loja de venda de chocolate artesanal foi realizada uma pesquisa sobre as preferências dos consumidores em relação aos tipos de chocolate. Obtiveram-se os seguintes resultados:

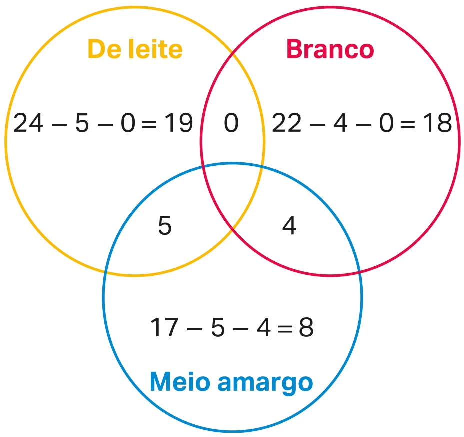
I. 24 consumidores gostam de chocolate de leite;
II. 22 consumidores gostam de chocolate branco;
III. 17 consumidores gostam de chocolate meio amargo;
IV. cinco consumidores gostam de chocolate de leite e de chocolate meio amargo;
V. quatro consumidores gostam de chocolate meio amargo e de chocolate branco.
VI. nenhum consumidor referiu gostar de chocolates de leite e branco, simultaneamente.

É possível representar esta situação num diagrama de Venn.

Mas é importante notar que existem respostas duplicadas, pois um entrevistado quando responde que gosta de chocolate de leite e meio amargo, a sua resposta é contabilizada não só no grupo do chocolate de leite, mas também no grupo do chocolate meio amargo e no grupo de chocolate de leite e meio amargo (interseção dos dois anteriores).

Desta forma, as respostas de uma única pessoa que foram contabilizadas duas ou mais vezes têm de ser subtraídas:

- aos 24 consumidores que gostam de chocolate de leite, temos de subtrair aqueles que já foram contabilizados no grupo de chocolate de leite e meio amargo e chocolate de leite e branco, resultando 19;
- aos 22 consumidores que gostam de chocolate branco, subtraímos aqueles que já foram contabilizados no grupo de chocolate branco e de leite e chocolate branco e meio amargo, resultando 18;
- aos 17 consumidores que gostam de chocolate meio amargo, subtraímos aqueles que já foram contabilizados no grupo de chocolate meio amargo e branco e chocolate meio amargo e de leite, resultando 8.



Desta forma, concluímos que foram entrevistados 54 $(19+18+8+5+4+0)$ consumidores.

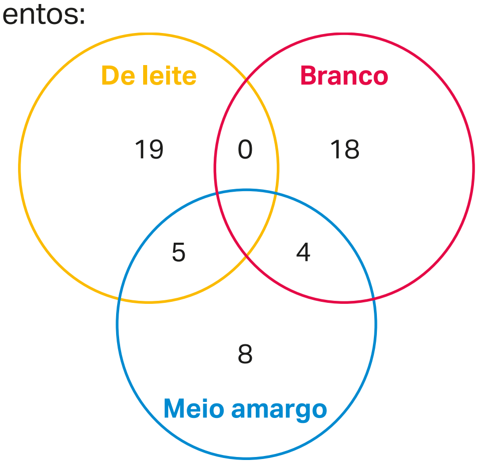
Consideremos, então, os seguintes acontecimentos:

A: "Gostar apenas de chocolate de leite"

B: "Gostar de chocolate de leite"

C: "Gostar de chocolate meio amargo"

D: "Gostar de chocolate branco"



Assim, por exemplo:

$P(A)=\frac{19}{54}$

$P(B)=\frac{19+5+0}{54}=\frac{24}{54}=\frac{4}{9}$

Ao pensar na probabilidade de escolher um consumidor que goste de chocolate meio amargo e de chocolate branco (simultaneamente) estamos a pensar na probabilidade:

$$P(C\cap D)=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

Se pensarmos em um consumidor que goste de chocolate meio amargo ou de chocolate branco, então falamos de:

$$P(C \cup D) = \frac{5+4+8+18}{54} = \frac{35}{54}$$

Repara que também poderíamos calcular $P(C \cup D)$ fazendo:

- $P(C)$, ou seja, a probabilidade de o consumidor gostar de chocolate meio amargo;
- $P(D)$, ou seja, a probabilidade de o consumidor gostar de chocolate branco;
- Somar as duas probabilidades, mas retirar o que somamos duas vezes, por dizer respeito a consumidores que estão quer no grupo do chocolate meio amargo, quer no grupo do chocolate branco, ou seja, $P(C \cap D)$.

Assim, $\#C \cup D = \#C + \#D - \#C \cap D$

Logo, $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{17}{54} + \frac{22}{54} - \frac{4}{54} = \frac{35}{54}$

Regra geral da união de acontecimentos

Sejam A e B dois acontecimentos, temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemplo 36

Considerando as seguintes probabilidades:

$P(\text{estudar matemática}) = 0{,}6$

$P(\text{estudar artes}) = 0{,}5$

$P(\text{estudar ambas}) = 0{,}2$

Temos que: $P(\text{estudar matemática ou artes}) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$.

Exercícios

36 **Num inquérito a 50 alunos de Artes sobre os seus gostos musicais, sabe-se que**

- **28 gostam de *jazz*;**
- **30 gostam de *rock*;**
- **12 gostam dos dois estilos.**

36.1. Constrói um diagrama de Venn que represente a situação.

36.2. Escolhendo um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de o aluno gostar de *jazz* ou *rock*?

36.3. Escolhendo um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de ele não gostar de nenhum dos dois?

37 **Numa escola artística, 40 alunos participaram em atividades extracurriculares. Sabe-se que:**

- **25 assistiram a um filme de um autor europeu;**
- **18 assistiram a uma peça de teatro local;**
- **10 assistiram a ambos os eventos.**

37.1. Representa a situação num diagrama de Venn.

37.2. Quantos alunos só assistiram ao filme?

37.3. Quantos alunos não participaram em nenhuma das atividades?

37.4. Qual é a probabilidade de escolher ao acaso um aluno que tenha participado em pelo menos uma das atividades?

Quando os acontecimentos C e D são disjuntos ou incompatíveis, pois não podem acontecer simultaneamente, não têm resultados em comum, então $C \cap D = \varnothing$ e $P(C \cap D) = 0$.

Nestes casos conclui-se que: $P(C \cup D) = P(C) + P(D)$.

Dois acontecimentos A e B dizem-se **disjuntos ou incompatíveis** quando a sua interseção resulta no conjunto vazio.

$$A \cap B = \varnothing$$

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo 37

Considerando a experiência aleatória lançamento de um dado, seja A o acontecimento "Sair o número 2".

Temos que um acontecimento contrário de A, representado por $\bar{A}$, é "Não sair o número 2".

Assim, $A = \{2\}$ e $\bar{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Logo, $P(A) = \frac{1}{6}$ e $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$.

Repara que $P(A) = \frac{1}{6} = 1 - \frac{5}{6} = 1 - P(\bar{A})$.

A probabilidade do acontecimento contrário (complementar)

Se A for o acontecimento **contrário** de $\bar{A}$, então:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Manual Digital

Atividade
Propriedades da probabilidade: união de acontecimentos

Exemplo 38

Se a probabilidade de chover amanhã é $0{,}3$, então a de **não chover** é $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Exercício

38 Numa pequena biblioteca há **20 livros**, distribuídos da seguinte forma:

- oito romances;
- seis livros de poesia;
- quatro peças de teatro;
- dois livros de ensaio.

Considera a experiência aleatória em que se escolhe ao acaso um dos livros da estante e os seguintes acontecimentos:

- A: "O livro escolhido é de poesia"
- B: "O livro escolhido é de teatro"
- C: "O livro escolhido não é de romance"
- D: "O livro escolhido é de ensaio"
- E: "O livro escolhido é de romance ou de poesia"
- F: "O livro escolhido é de teatro ou de ensaio"

38.1. Indica dois pares de acontecimentos disjuntos entre os apresentados.

38.2. Indica um par de acontecimentos complementares entre os apresentados.

38.3. Qual é a probabilidade de se escolher um livro de romance ou de poesia?

38.4. Qual é a probabilidade de não se escolher um livro de romance?

Nos exemplos anteriores, foi fácil determinar o número de casos possíveis e favoráveis apenas por contagem direta. No entanto, em muitas situações, esse número não é evidente nem fácil de contar. É precisamente nesses casos que recorremos ao cálculo combinatório, que nos dá ferramentas para contar de forma sistemática e rigorosa, permitindo assim calcular probabilidades com exatidão.

Manual Digital

Vídeo
Probabilidade da união de dois acontecimentos disjuntos

Exemplo 39

1. Um artista vai expor numa parede três quadros diferentes – um com uma árvore, outro com uma casa e outro com uma figura humana.

a) De quantas maneiras diferentes pode dispor os três quadros lado a lado?

b) Se o artista escolher ao acaso uma das disposições possíveis, qual é a probabilidade de a figura humana ficar no meio?

Resolução

a) Como os três quadros são todos diferentes, trata-se de uma permutação de três elementos.

Total de disposições: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Portanto, existem seis formas diferentes de dispor os quadros.

b) O número de casos possíveis já foi determinado em a), ou seja, seis.

O número total de casos para que o quadro da figura humana fique no meio:

- fixamos o quadro da figura humana no meio: 1
- arranjamos os restantes quadros nas restantes posições (importa a ordem): ${}^{2}A_2 = 2 \times 1 = 2$

Casos favoráveis: $1 \times {}^{2}A_2 = 1 \times 2 \times 1 = 2$

$P\,(\text{“O quadro com figura humana fica no meio”}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Uma encenadora vai escolher três atores de um grupo de seis para participarem numa improvisação, sem ordem definida. Qual é a probabilidade de que dois dos atores escolhidos sejam mulheres, sabendo que no grupo há quatro mulheres e dois homens?

Resolução

- Total de maneiras de escolher três pessoas de um grupo de seis

  Casos possíveis: ${}^{6}C_3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{120}{6} = 20$

- Total de maneiras de escolher duas mulheres e um homem.

  - Escolher duas mulheres de quatro: ${}^{4}C_2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$

  - Escolher um homem de dois: ${}^{2}C_1 = 2$

  Total de casos favoráveis: ${}^{4}C_2 \times {}^{2}C_1 = 6 \times 2 = 12$

- Probabilidade:

  $P\,(\text{“Dois atores escolhidos serem mulheres”}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

3. Num concurso há 10 cartazes finalistas, numerados de 1 a 10.
Um júri vai escolher três cartazes vencedores, para a atribuição do 1.º, 2.º e 3.º prémios. Qual é a probabilidade de o cartaz número 7 ganhar algum prémio?

Resolução

Considerando que estamos a falar dos cartazes que vão ficar em 1.º, 2.º e 3.º lugar, a ordem da seleção é importante.

- Total de maneiras de selecionar os três cartazes, de entre os 10 cartazes, sendo que a ordem é importante:
  Casos possíveis: ${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$
- Total de maneiras de selecionar os três cartazes, sendo que o cartaz número 7 ganhe algum prémio.
  - Fixamos o cartaz 7 numa das três posições possíveis: 3

  Depois, escolhemos dois cartazes dos nove restantes e ordenamos os dois: ${}^{9}A_2 = 9 \times 8 = 72$

  Casos favoráveis: $3 \times {}^{9}A_2 = 3 \times 9 \times 8 = 216$
- Probabilidade:
  $P\,(\text{“Cartaz número } 7 \text{ ser premiado”}) = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$

Manual Digital
Vídeo
Acontecimentos incompatíveis e acontecimentos complementares

Exercícios

39 **Numa roleta com seis cores (rosa, roxo, azul, verde, amarelo, laranja), qual a probabilidade de sair:**

39.1. A cor amarela;

39.2. Uma cor primária (azul, amarelo);

39.3. uma cor fria (azul, verde, roxo)?

40 **Um artista criou um baralho com 10 cartas, cada uma contendo uma forma geométrica. As formas são as seguintes:**
- **três triângulos;**
- **dois quadrados;**
- **um círculo;**
- **dois retângulos;**
- **dois pentágonos.**

O artista sorteia ao acaso uma carta do baralho.

40.1. Qual é a probabilidade de sair um polígono com três lados?

40.2. Qual é a probabilidade de não sair um círculo?

41 **Numa parede, vão ser colocados cinco painéis distintos com grafites, escolhidos de um conjunto de oito.**

41.1. Quantas maneiras há de dispor os cinco painéis?

41.2. Qual é a probabilidade de um grafite específico (feito pela Inês) ficar no primeiro painel?

42 **Um curador vai escolher quatro fotografias de um conjunto de 10 para expor lado a lado, numa ordem específica.**

Qual é a probabilidade de duas fotos de um mesmo autor (Tiago) ficarem juntas?

43 **Num desfile de Carnaval, há seis máscaras diferentes disponíveis e quatro alunos voluntários para participar. Cada aluno escolhe uma máscara e uma mesma máscara pode ser escolhida por mais do que um aluno (uso repetido permitido).**

43.1. De quantas formas diferentes os quatro alunos podem escolher máscaras?

43.2. Qual é a probabilidade de todos escolherem máscaras diferentes?

44 **Há 10 cartazes finalistas, numerados de 1 a 10, que participam num concurso. Um júri vai escolher três cartazes vencedores, em que o 1.°, o 2.° e o 3.° lugares serão atribuidos.**

Qual é a probabilidade de os cartazes com os n.° 5 e n.° 6 serem premiados?

45 **Uma professora distribuiu seis boiões de tintas a óleo, todos de cores diferentes, por três alunos, dando dois a cada um.**

45.1. De quantas maneiras pode fazer esta distribuição?

45.2. Qual é a probabilidade de um aluno específico (João) ficar com o boião da cor vermelha, sabendo que apenas um dos boiões distribuídos tem essa cor?

46 **Numa instalação, os visitantes escolhem três objetos de entre 12 disponíveis.**

Qual é a probabilidade de um objeto frágil ser escolhido, sabendo que existem quatro objetos frágeis entre os 12?

47 **De um total de 15 curtas, o comité vai escolher cinco para exibição, sem ordem, e todas de géneros distintos (drama, comédia, experimental, etc.).**

Qual é a probabilidade de serem escolhidos exatamente dois filmes de comédia, sabendo que há quatro comédias no total?

48 **Um grupo de oito artistas vai formar duplas para criar quatro ilustrações em conjunto, sendo que cada pessoa participa apenas numa dupla.**

48.1. Quantas formações diferentes de duplas são possíveis?

48.2. Qual é a probabilidade de dois artistas específicos (Soraia e Miguel) ficarem juntos?

3.3.3. Probabilidade condicionada

Supõe que estás a selecionar aleatoriamente pincéis para uma oficina de pintura. Se alguém já tirou alguns pincéis da caixa, a tua escolha será afetada: a probabilidade de escolher um pincel redondo será diferente dependendo do que já foi tirado.

Este tipo de situação, em que a probabilidade de um acontecimento depende do que já aconteceu, é o tema a estudar neste capítulo.

Tarefa

6 **Uma caixa contém:**

- três bolas vermelhas;
- duas bolas azuis;
- uma bola amarela.

Foram retiradas duas bolas sem serem repostas.
Qual é a probabilidade de:

6.1. a primeira ser azul e a segunda ser vermelha;

6.2. ambas serem vermelhas?

Reflexão: O que acontece às probabilidades depois de a primeira bola ser tirada?

Na tarefa, consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "A primeira bola a sair ser azul e a segunda bola a sair ser vermelha"

Casos favoráveis: Duas bolas azuis que podem ser retiradas na primeira vez e três bolas vermelhas que podem ser retiradas na segunda vez, ou seja, $2 \times 3 = 6$.

Casos possíveis: Seis bolas que existem na primeira retirada e cinco bolas que existem na segunda retirada, ou seja, $6 \times 5 = 30$.

Logo, $P(\text{primeira azul e segunda vermelha}) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

Agora, para a situação de saírem as duas bolas vermelhas, consideremos os acontecimentos:

B: "A primeira bola a sair ser vermelha e a segunda bola a sair ser vermelha"

Casos favoráveis: Três bolas vermelhas que podem ser retiradas na primeira vez e apenas duas bolas vermelhas que podem ser retiradas na segunda vez, ou seja, $3 \times 2 = 6$.

Casos possíveis: Seis bolas que existem na primeira retirada e cinco bolas que existem na segunda retirada, ou seja, $6 \times 5 = 30$.

Logo, $P(\text{Ambas as bolas vermelhas}) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

Como as bolas são retiradas sem reposição, o número total de bolas diminui e o conjunto de bolas também se altera. Isto significa que a probabilidade do segundo acontecimento depende do primeiro, ou seja, a primeira bola retirada afeta diretamente o total de bolas disponíveis e a quantidade de cada cor restante – estamos perante uma situação de probabilidade condicionada.

Representamos a probabilidade de um acontecimento A, sabendo que já aconteceu o acontecimento B, por $P(A|B)$.

Exercício

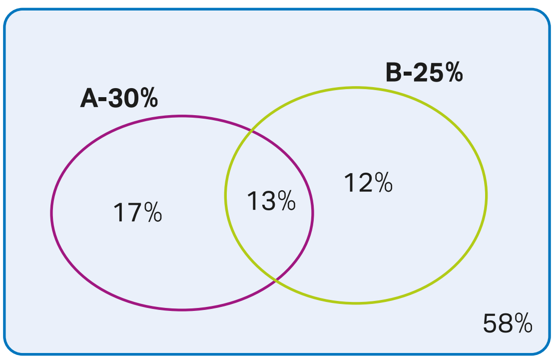
49 **Numa caixa há quatro pincéis grandes e seis pequenos. São retirados dois sem reposição.**
Qual é a probabilidade de ambos serem pequenos?

Exemplo 40

Na cidade de Mindelo, um comité cultural está a organizar uma exposição com artistas locais.

Para conhecer melhor o panorama artístico, fez um inquérito a 50 000 habitantes e verificou os seguintes dados:

- 30% seguem a revista de fotografia e design *Olhar Criativo* (revista A);
- 25% seguem regularmente a revista de arte contemporânea *Pincel de Luz* (revista B);
- 12% seguem apenas a revista *Pincel de Luz*, mas não seguem *Olhar Criativo*.



Sabendo que uma pessoa é escolhida ao acaso e que essa pessoa segue a revista *Pincel de Luz*, a probabilidade de ela seguir também a revista *Olhar Criativo* é condicionada, ou seja, está restringida aos habitantes que seguem a revista *Pincel de Luz*.

Assim, consideremos os acontecimentos:

A: "Seguir a revista *Olhar Criativo*"

B: "Seguir a revista *Pincel de Luz*"

Nesta situação, para determinar a probabilidade de seguir a revista *Olhar Criativo*, sabendo que ela segue a revista *Pincel de Luz*, estamos a condicionar o acontecimento apenas àqueles que seguem a revista *Pincel de Luz*.

$A|B = \{$seguem *Olhar Criativo*, sabendo que seguem *Pincel de Luz*$\} = A \cap B$

Logo, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{13\%}{30\%} \approx 43{,}3\%$.

Probabilidade condicionada

A probabilidade de um acontecimento A ocorrer, sabendo que o acontecimento B ocorreu, com $P(B) > 0$, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Repara que, se A e B são dois acontecimentos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Exemplo 41

Lançamento de uma moeda duas vezes

No lançamento de uma moeda, considerando os acontecimentos:

A: "Sair cara no 1.º lançamento"

B: "Sair cara no 2.º lançamento"

Temos que $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Como $P(A) = \dfrac{1}{2}$ e $P(B \cap A) = \dfrac{1}{4}$.

Temos que $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = P(B)$.

O resultado do primeiro lançamento não alterou o resultado do segundo lançamento, pois os acontecimentos são independentes.

Acontecimentos independentes

Dizemos que dois acontecimentos A e B são independentes se a ocorrência de um não influencia a ocorrência do outro. Nesse caso, $P(B \mid A) = P(B)$, de onde se conclui que, neste caso:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo 42

Tabelas de dupla entrada e probabilidade condicionada

Sabe-se que numa oficina de arte, num total de 50 alunos:

- 30 escolheram aguarela, 20 acrílico;
- 18 rapazes escolheram aguarela, 12 rapazes escolheram acrílico.

É possível organizar a informação numa tabela, completando-a da seguinte forma:

No total, são 30 **rapazes**, pois 18 escolheram aguarela e 12 acrílico.

Sabendo que no total são 50 alunos, logo, 20 **são raparigas.**

Dos 30 que escolheram aguarela, 18 são rapazes, logo, 12 **são raparigas.**

De forma análoga, dos 20 que escolheram acrílico, 12 são rapazes e, portanto, oito **são raparigas.**

	Aguarela	Acrílico	Total
Rapaz	18	12	30
Rapariga	12	8	20
Total	30	20	50

Desta forma, facilmente podemos determinar que, por exemplo:

$P(Rapaz \mid Aguarela) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

$P(Acrílico \mid Rapariga) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Exercício

50 **Numa turma de 30 alunos, sabe-se que:**

- **dos que praticam desporto, seis usam óculos e 12 não usam óculos;**
- **dos 12 que não praticam desporto, cinco usam óculos.**

50.1. Completa a tabela com os valores em falta.

	Usa óculos	**Não usa óculos**	**Total**
Pratica desporto	6	12	
Não pratica desporto	5		12
Total			30

50.2. Qual é a probabilidade de se escolher ao acaso um aluno que:

a) Usa óculos;

b) Pratica desporto e usa óculos;

c) Não usa óculos, sabendo que pratica desporto;

d) Pratica desporto, sabendo que não usa óculos?

50.3. Os acontecimentos "Usar óculos" e "Praticar desporto" são independentes?

Manual Digital

Vídeo
Probabilidade condicionada

Teorema da probabilidade total

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos que cobrem todo o espaço amostral, tal que:

- acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos (ou seja, não têm resultados em comum: $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$);
- cada resultado possível da experiência aleatória pertence exatamente a um dos acontecimentos A_i;
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

Então, $P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$.

Exemplo 43

Numa fábrica, há duas máquinas a produzir parafusos:

- a máquina A produz 60% dos parafusos;
- a máquina B produz os restantes 40%.

Manual Digital
Vídeo
Acontecimentos independentes

Sabe-se que:

- 2% dos parafusos da máquina A são defeituosos;
- 5% dos parafusos da máquina B são defeituosos.

Considerando os seguintes acontecimentos:
D: "O parafuso é defeituoso"
A: "Parafuso foi produzido pela máquina A"
B: "O parafuso foi produzido pela máquina B"

Ao escolher ao acaso um parafuso da produção total:

- a probabilidade de o parafuso escolhido ser defeituoso:

  $P(D) = P(D \mid A) \cdot P(A) + P(D \mid B) \cdot P(B)$

  $= 0{,}02 \times 0{,}6 + 0{,}05 \times 0{,}4$

  $= 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032 = 3{,}2\%$

- sabendo que o parafuso é defeituoso, a probabilidade de ter sido produzido pela máquina B:

  $P(B \mid D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)}$

  Mas, $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D \mid B)$

  Logo, $P(B \mid D) = \dfrac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}05}{0{,}032} = \dfrac{0{,}02}{0{,}032} = 0{,}625 = 62{,}5\%$

- os acontecimentos "O parafuso é defeituoso" e " O parafuso foi produzido pela máquina A" não são independentes, pois:

  $P(D \mid A) = 0{,}02$

  $P(D) = 0{,}032$

  Como $P(D \mid A) \neq P(D)$, os acontecimentos não são independentes.

Exercício

51 **Numa Escola Secundária da Praia, foi feito um levantamento sobre os alunos da disciplina de Matemática Aplicada às Artes (MAA). Os dados recolhidos representam o seguinte:**

- **60% dos estudantes são raparigas e os restantes 40% são rapazes.**
- **Entre as raparigas:**
  - **25% usam cabelo liso ou ondulado;**
  - **50% usam o cabelo entrançado;**
  - **as restantes usam o cabelo crespo.**

- Entre os rapazes:
  - 10% usam cabelo liso ou ondulado;
  - 15% usam o cabelo entrançado;
  - os restantes usam o cabelo crespo.

Escolhe-se, ao acaso, um estudante da disciplina de MAA.

51.1. Qual é a probabilidade de o estudante escolhido usar o cabelo liso ou ondulado?

51.2. Sabendo que o estudante usa o cabelo crespo, qual é a probabilidade de ser rapariga?

Manual Digital

Vídeo
Acontecimentos independentes

Regra de Bayes

A regra de Bayes permite-nos determinar a probabilidade condicionada quando conhecemos o valor da probabilidade condicionada contrária, isto é:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,A) \times P(A)}{P(B)}$$

Demonstração:

Sabemos que: $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff P(A\,|\,B) \times P(B) = P(A \cap B)$

e $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff P(B\,|\,A) \times P(A) = P(A \cap B)$

Logo, $P(A\,|\,B) \times P(B) = P(B\,|\,A) \times P(A) \iff P(A|B) \times = \dfrac{P(B\,|\,A) \times P(A)}{P(B)}$

Exercício

52 Sejam A e B dois acontecimentos tais que: $P(A) = 0{,}7$ e $P(B) = 0{,}4$.
Determina $P(A\,|\,B)$ supondo que $P(B\,|\,A) = 0{,}2$.

3.3.4. Probabilidade frequencista

Em muitos contextos reais, os resultados não são todos igualmente prováveis, sendo necessário outro tipo de abordagem.

Na probabilidade clássica, recorre-se à regra de Laplace, partindo do princípio que todos os resultados são equiprováveis, já na **probabilidade frequencista** tem-se em consideração que os acontecimentos poderão não ser equiprováveis. Assim, a probabilidade frequencista baseia-se em experiências reais e repetições.

Logo, a probabilidade de um acontecimento corresponde à frequência relativa com que ele ocorre ao longo do tempo.

Manual Digital

Vídeo
Teorema das probabilidades totais

Tarefa

7 Considera a seguinte tabela.

Aconteci-mento	Probabilidade	10 lançamentos		20 lançamentos		50 lançamentos		100 lançamentos	
		n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i
Sair face 1									
Sair face 2									
Sair face 3									
Sair face 4									
Sair face 5									
Sair face 6									
Total									

7.1. Determina, e completa na tabela, a probabilidade de cada acontecimento.

7.2. Considera a seguinte experiência aleatória: "Lançar um dado".
Repete a experiência 10 vezes, ou seja, efetua 10 lançamentos e regista na tabela o número de vezes que saiu cada uma das faces, n_i, e determina a frequência relativa, f_i.

7.3. Aos teus resultados junta os resultados de outro colega, perfazendo 20 lançamentos, e efetua o registo de n_i e f_i.

7.4. Procede de forma análoga para os 50 lançamentos e 100 lançamentos.

7.5. O que concluis?

Nota: Apresenta todos os valores arredondados com duas casas decimais.

Quando uma experiência aleatória é realizada um grande número de vezes, a frequência relativa de cada acontecimento simples tende a aproximar-se da probabilidade desse acontecimento. Assim, a probabilidade frequencista de um acontecimento corresponde ao valor para o qual tende a estabilizar a frequência relativa da realização desse acontecimento à medida que aumenta o número de repetições da experiência aleatória.

A probabilidade frequencista de um acontecimento A, representada por $P(A)$, corresponde ao valor para o qual tende a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A) \approx f_A$.

Manual Digital

Atividade
Regra de Bayes

Exemplo 44

Num estúdio de música, 100 artistas escolheram aleatoriamente a cor para a capa do álbum, 32 escolheram azul.

Podemos estimar que:

$$P(\text{Escolher cor azul}) \approx \frac{32}{100} = 0{,}32 = 32\%$$

De entre 200 obras, 50 usaram predominantemente tons de vermelho. A probabilidade estimada de uma obra escolhida ao acaso usar tons de vermelho é de:

$$P(\text{Obra escolhida usar tons de vermelho}) \approx \frac{50}{200} = 0{,}25 = 25\%$$

Repara que na probabilidade frequencista, tal como na probabilidade clássica:

- todos os valores de probabilidade estão entre 0 e 1, inclusive;
- a soma das probabilidades de todos os resultados do espaço Ω é igual a 1.

Exemplo 45

Numa instalação artística, uma máquina lança bolas para três caixas, com igual probabilidade. Num total de 90 lançamentos, a caixa A recebeu 26 bolas.

A **frequência relativa** para a bola cair na caixa A corresponde ao número de ocorrências dividido pelo número total de ensaios:

$$f_A = \frac{26}{90} \approx 0{,}289$$

A probabilidade (clássica) para o acontecimento A: "bola cair na caixa A" é:

$P(A) = \frac{1}{3} \approx 0{,}(3)$

Com 90 lançamentos, seria de esperar que $\frac{1}{3}$ das vezes as bolas caíssem na caixa A, ou seja:

$\frac{1}{3} \times 90 = 30$ bolas caíssem na caixa A.

Se a experiência fosse repetida 1000 vezes, neste caso, seria de esperar que $\frac{1}{3} \times 1000 \approx 333$ bolas caíssem na caixa A.

Como a probabilidade é igual para cada caixa, espera-se que cada caixa receba $\frac{1}{3}$ dos lançamentos.

Repara que a probabilidade clássica de uma bola cair em qualquer uma das três caixas é:

$$P=\frac{1}{3}\approx 0,(3)$$

A frequência relativa obtida foi $0,289$, que está próxima, mas ligeiramente abaixo do valor teórico. Isto é normal em ensaios com poucos dados, neste caso apenas 90 lançamentos.

Quanto maior for o número de ensaios, mais a frequência relativa deverá aproximar-se da probabilidade teórica, podendo assumir-se como a probabilidade frequencista.

Exemplo 46

Na criação de padrões têxteis, um artista define que há quatros tipos de manchas a imprimir aleatoriamente (círculo, quadrado, triângulo e hexágono). Após 160 testes, obteve os seguintes resultados:

Forma geométrica	N.º de ocorrências
Círculo	42
Quadrado	38
Triângulo	41
Hexágono	39
Total	160

A frequência relativa para cada uma das formas é a seguinte:

$$f_{\text{círculo}}=\frac{42}{160}=0,2625$$

$$f_{\text{quadrado}}=\frac{38}{160}=0,2375$$

$$f_{\text{triângulo}}=\frac{41}{160}=0,25625$$

$$f_{\text{héxagono}}=\frac{39}{160}=0,24375$$

Será que as formas são equiprováveis?

Se fossem perfeitamente equiprováveis, cada forma deveria surgir com frequência próxima da probabilidade clássica, isto é:

$$P=\frac{1}{4}=0,25$$

Na realidade, as diferenças são pequenas e podem dever-se ao acaso. Por isso, será razoável considerar que as formas são equiprováveis, embora uma análise estatística com mais dados nos permitisse confirmar com maior certeza.

Exercícios

53 **Num projeto de *design* interativo, uma máquina atribui aleatoriamente uma de quatro cores (vermelho, azul, amarelo ou verde) a peças de arte digital. Em 150 atribuições, a cor azul foi escolhida 48 vezes.**

53.1. Qual é a frequência relativa da cor azul?

53.2. Se fossem feitas 1500 atribuições, quantas vezes esperarias ver a cor azul, assumindo que as cores são equiprováveis?

53.3. Compara a frequência observada com a probabilidade clássica. O que concluis?

54 **Numa instalação sonora, um sensor aleatório ativa um de três sons distintos (campainha, apito ou batida). Após 180 ativações:**

- **Campainha: 62**
- **Apito: 58**
- **Batida: 60**

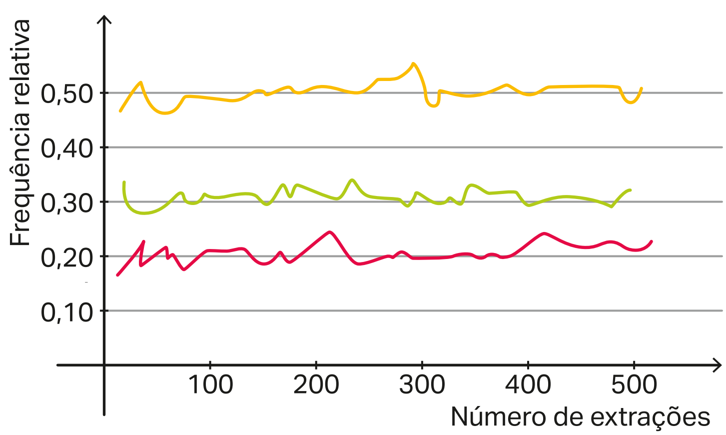
54.1. Calcula a frequência relativa de cada som.

54.2. Achas que os sons são equiprováveis? Justifica com base nos dados.

Exemplo 47

Consideremos a experiência aleatória de retirar um cartão colorido de uma caixa, com cartões cor de laranja, verdes e amarelos.

O seguinte gráfico ilustra os resultados obtidos, sabendo que se repetiu 500 vezes a experiência, anotando a cor e colocando novamente o cartão na caixa.



A probabilidade estimada de sair o cartão amarelo é de $0{,}5$.

A probabilidade estimada de sair o cartão verde é de $0{,}30$.

A probabilidade estimada de sair o cartão vermelho é de $0{,}20$.

A probabilidade estimada de não sair o cartão verde é de $0{,}70$ $(1-0{,}3)$.

Supondo que existem 60 cartões na caixa, estima-se que 12 sejam vermelhos, pois:

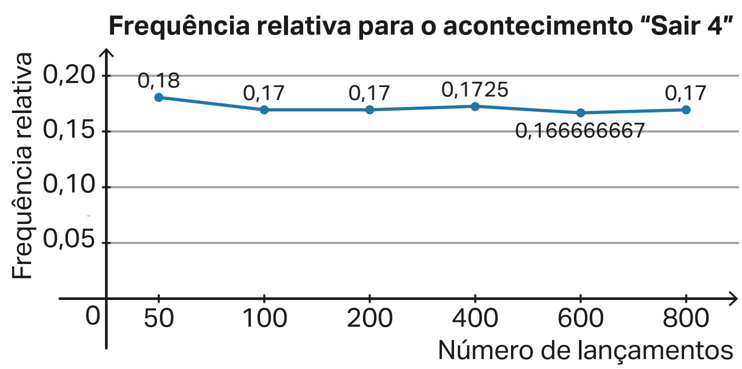
$$P(\text{Cartão vermelho}) = \frac{\#\,\text{cartões vermelhos}}{\#\text{cartões}} \Leftrightarrow 0{,}20 = \frac{\#\,\text{cartões vermelhos}}{60}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20 \times 60 = \#\,\text{cartões vermelhos}$$

$$\Leftrightarrow \#\,\text{cartões vermelhos} = 12$$

Exercício

55 **Um grupo de alunos realizou uma experiência repetida várias vezes, em que lançavam um dado não viciado e registavam o número de vezes que saía o número "4". O gráfico seguinte mostra a frequência absoluta do acontecimento "Sair 4" em função do número total de lançamentos.**



55.1. Com base nos dados, qual parece ser a tendência da frequência relativa à medida que aumenta o número de lançamentos?

55.2. Como se relaciona essa tendência com a probabilidade clássica de sair o número 4?

55.3. Justifica se esta experiência confirma a interpretação frequencista da probabilidade.

55.4. Se continuasses a realizar lançamentos até 2000, o que esperarias observar em relação à frequência absoluta de sair o número 4?

Síntese

Acontecimentos equiprováveis são acontecimentos que têm a mesma probabilidade de acontecer.

$$P(A) = P(B)$$

A probabilidade de um acontecimento pode ser representada na forma de fração, número decimal ou em percentagem.

Exemplo: $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

A probabilidade de um acontecimento certo é 1.

A probabilidade de um acontecimento impossível é 0.

A probabilidade de um acontecimento varia entre 0 e 1:

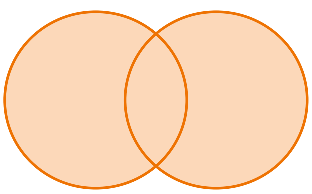
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

A soma das probabilidades de todos os resultados do espaço Ω é igual a 1.

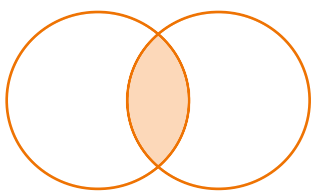
Regra de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

O **diagrama de Venn** é uma forma de representar graficamente conjuntos, facilitando a compreensão de operações básicas dos mesmos.



União



Interseção

Regra geral da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis são acontecimentos cuja interseção resulta no conjunto vazio, $A \cap B = \varnothing$, logo $P(A \cap B) = 0$.

Se A e B forem acontecimentos disjuntos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Síntese

Probabilidade do acontecimento contrário de $\bar{A}$: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Probabilidade condicionada

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) > 0$$

Acontecimentos independentes são acontecimentos em que a ocorrência de um não influencia a ocorrência do outro. Nesse caso, $P(B \mid A) = P(B)$, de onde se conclui que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Teorema da probabilidade total

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ acontecimentos que cobrem todo o espaço amostral, tal que:

- acontecimentos $A_1, A_2, \dots, A_n$ são mutuamente exclusivos (ou seja, não têm resultados em comum: $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$);
- cada resultado possível da experiência aleatória pertence exatamente a um dos acontecimentos A_i;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Então, $P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n) \cdot P(A_n)$

Regra de Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \times P(A)}{P(B)}$$

A **probabilidade frequencista** de um acontecimento A, representada por $P(A)$, corresponde ao valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja:

$$P(A) \approx f_A$$

Para aplicar

1 **Uma caixa contém sete cartões com as letras da palavra "DESENHO". Retira--se um cartão ao acaso.**

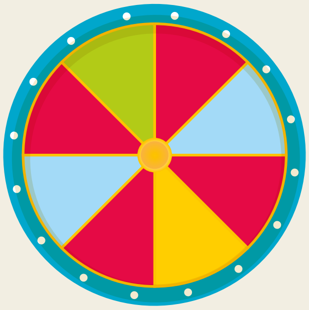
1.1. Qual é o espaço de resultados?

1.2. Qual é a probabilidade de sair uma vogal?

1.3. Qual é a probabilidade de sair uma consoante?

2 **Uma roleta artística tem oito setores iguais:**

- quatro vermelhos;
- dois azuis;
- um amarelo;
- um verde.



Após fazer rolar a roleta, qual é a probabilidade de a roleta parar:

2.1. num setor vermelho;

2.2. num setor que não seja de cor primária?

3 **Numa atividade de fotografia, cada participante envia uma imagem a cores e/ou a preto e branco:**

- No total participaram 60 pessoas;
- 35 enviaram uma fotografia a cores (A);
- 25 enviaram uma fotografia a preto e branco (B);
- 10 enviaram os dois tipos $(A \cap B)$.

Escolhe-se um participante ao acaso.

3.1. Constrói o diagrama de Venn que traduza esta situação.

3.2. Qual é a probabilidade de ter enviado uma fotografia a cores ou a preto e branco?

3.3. Qual é a probabilidade de ter enviado exclusivamente uma fotografia a preto e branco?

3.4. Sabendo que enviou uma fotografia a cores, qual é a probabilidade de também ter enviado uma fotografia a preto e branco?

Para aplicar

4 **Numa escola secundária estão a preparar uma peça de teatro. Dos 20 alunos que participaram na audição:**

- 12 alunos têm formação em expressão dramática;
- oito alunos têm formação em canto;
- três alunos têm formação em ambas as áreas.

4.1. Quantos alunos têm apenas formação em expressão dramática?

4.2. Quantos alunos não têm formação em nenhuma das áreas?

4.3. Considerando o acontecimento A: "O aluno tem formação em expressão dramática", qual é o acontecimento complementar?

4.4. Os acontecimentos A: "O aluno tem formação em expressão dramática" e B: "O aluno não tem qualquer formação" são disjuntos? Justifica.

4.5. Os acontecimentos A e C: "O aluno tem formação em ambas as áreas" são disjuntos? Justifica.

5 **Um curador escolhe três quadros diferentes, de um total de cinco, para expor, numa ordem específica. Qual é a probabilidade de o quadro número 2 ficar em primeiro?**

6 **Uma artista escolhe dois quadros de um total de seis para levar a concurso. Qual é a probabilidade de ambos os quadros escolhidos serem abstratos, sabendo que há três abstratos e três figurativos?**

7 **Um artista dispõe quatro esculturas diferentes numa fila.**

7.1. De quantas formas distintas pode organizar a exposição?

7.2. Qual é a probabilidade de uma escultura específica (a azul) ficar na última posição?

8 **Num estudo para determinar o sucesso na disciplina de Matemática, analisaram-se os resultados dos alunos das três turmas do 11.º ano de uma escola e obtiveram-se os seguintes resultados:**

	Negativa	Positiva
Turma 1	8	12
Turma 2	10	18
Turma 3	12	10

Observa a tabela e responde.

8.1. Quantos eram os alunos no total?

8.2. Quantos alunos tem a turma 1?

8.3. Quantos alunos obtiveram negativa?

8.4. Escolhido um dos alunos ao acaso, determina, apresentando os resultados na forma de fração irredutível, a probabilidade de:

a) pertencer à turma 1;
b) não pertencer à turma 2;
c) pertencer à turma 1 e ter positiva;
d) pertencer à turma 1, sabendo que teve positiva;
e) pertencer à turma 2, sabendo que obteve negativa;
f) ter positiva, sabendo que pertence à turma 2;
g) não ter negativa, sabendo que não pertence à turma 3;
h) não pertencer à turma 2, sabendo que não obteve positiva.

8.5. Os acontecimentos "obter positiva" e "pertencer à turma 1" são independentes? Justifica apresentando os cálculos adequados.

8.6. Se escolhermos uma das três turmas ao acaso e nela escolhermos um dos seus alunos aleatoriamente, qual é a probabilidade de este ter positiva? Apresenta o resultado com três casas decimais.

9 **Num grupo de 40 estudantes de artes, 25 preferem desenho e 15 escultura. Destes:**

- 10 rapazes preferem escultura;
- oito rapazes preferem desenho.

9.1. Completa a tabela.

	Desenho	**Escultura**	**Total**
Rapazes			
Raparigas			
Total			40

9.2. Qual é a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso ser rapaz?

9.3. Qual é a probabilidade de ser rapaz dado que prefere escultura?

Para aplicar

10 **Uma artista retira duas telas ao acaso, sem reposição, de uma pilha com três telas grandes e duas pequenas.**

10.1. Qual é a probabilidade de serem ambas pequenas?

10.2. Qual é a probabilidade de ser uma grande e uma pequena?

11 **Num estúdio de gravação, a probabilidade de chover num determinado dia é $0{,}3$ e a probabilidade de haver corte de energia é $0{,}2$.**

Sabendo que os dois acontecimentos são independentes, qual é a probabilidade de:

11.1. chover e haver corte de energia;

11.2. não chover nem haver corte de energia?

12 **Um artista cria um algoritmo que posiciona objetos em três zonas diferentes (esquerda, centro, direita) com igual probabilidade. Em 120 ensaios, os objetos foram posicionados na zona central em 33 vezes.**

12.1. Determina a frequência relativa da zona central.

12.2. Se forem realizados 1200 ensaios, quantas vezes se espera que os objetos sejam posicionados na zona central?

12.3. A frequência observada aproxima-se da probabilidade teórica? Explica.

13 **Durante um teste com drones artísticos, um deles pode escolher aleatoriamente um de três padrões de voo: circular, em ziguezague ou em linha reta. Após 90 voos, obtiveram-se os seguintes resultados:**

- Circular: 27
- Ziguezague: 29
- Linha reta: 34

13.1. Calcula a frequência relativa de cada padrão.

13.2. A escolha dos padrões parece ser aleatória e equiprovável? Justifica.

14 **Numa fábrica:**

- 70% dos produtos vêm da máquina A (2% defeituosos);
- 30% dos produtos vêm da máquina B (5% defeituosos).

14.1. Qual é a probabilidade de um produto ser defeituoso?

14.2. Sabendo que o produto é defeituoso, qual é a probabilidade de vir da máquina B?

15 **Numa escola de Artes, há dois clubes: o Clube de Fotografia e o Clube de Pintura. Sabe-se que:**

- 60% dos alunos pertencem ao Clube de Fotografia e os restantes 40% pertencem ao Clube de Pintura;
- no Clube de Fotografia, 20% dos alunos já participaram numa exposição;
- no Clube de Pintura, 35% dos alunos já participaram numa exposição.

Sabendo que um aluno da escola é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de já ter participado numa exposição?

16 **Numa experiência com 90 lançamentos de uma roleta com três cores, saíram: vermelho (30), azul (28) e verde (32).**

16.1. Calcula as frequências relativas das saídas de cada uma das cores.

16.2. As cores são equiprováveis? Justifica.

17 **Numa instalação, três tipos de sons são ativados aleatoriamente. Num total de 180 ativações, registaram-se: campainha (52), apito (47), batida (81).**

17.1. Calcula a frequência relativa de cada som.

17.2. Os sons são equiprováveis? Justifica.

18 **Numa turma de Artes, 40 alunos responderam à pergunta "Qual é a tua cor preferida para pintar?".**

As respostas foram:

Cor	Azul	Vermelho	Verde	Amarelo	Preto
N.º de alunos	10	8	7	5	10

18.1. Determina a frequência relativa de cada cor.

18.2. Qual é a probabilidade frequencista de escolher ao acaso um aluno que prefere uma cor primária (azul, vermelho ou amarelo)?

18.3. Se se escolher 2 alunos ao acaso, qual é a probabilidade de pelo menos um preferir o preto?

(Dica: começa por calcular a probabilidade de nenhum preferir o preto.)

3.4. Modelos de probabilidade em espaços finitos

3.4.1. Variável aleatória

No cálculo da probabilidade de um acontecimento, estamos a definir um modelo probabilístico associado a uma experiência aleatória. Este modelo pressupõe a construção de um espaço de resultados (ou espaço amostral) e a atribuição de uma probabilidade a cada resultado possível (acontecimentos elementares).

Os resultados de uma experiência aleatória são fáceis de analisar quando associados a valores numéricos. No entanto, nem todos os resultados são, à partida, numéricos.

Por exemplo, considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de três moedas e na observação das faces que ficam voltadas para cima.

Uma forma útil de estudar esta experiência é através da variável "número de caras obtidas".

Os valores possíveis desta variável são 0, 1, 2 ou 3.

Embora saibamos quais são os valores possíveis, não conseguimos prever qual será o resultado em cada repetição da experiência – esta imprevisibilidade é característica das experiências aleatórias.

A uma variável deste tipo, que associa a cada resultado possível da experiência aleatória um número, chamamos variável aleatória.

Uma **variável aleatória (v.a.)** é uma função que associa um número real a cada resultado possível de uma experiência aleatória.

As variáveis aleatórias podem ser **discretas** ou **contínuas**.

Uma variável aleatória **discreta** só assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos.

Exemplos:

- número de acidentes de trabalho, por mês, num determinado país;
- número de filhos de uma família portuguesa;
- número de assoalhadas de um apartamento;
- número de anos de escolaridade de um adulto da classe etária $[40, 50]$;
- número de erros num teste de 20 questões, de resposta múltipla, em que cada questão é respondida ao acaso; etc.

As variáveis aleatórias **contínuas** podem assumir qualquer valor de um intervalo pertencente ao seu domínio de variação.

Exemplos:

- tempo que um aluno, escolhido ao acaso, leva para ir de casa à escola;
- tempo entre acidentes consecutivos num determinado cruzamento;
- altura de um indivíduo, escolhido ao acaso na população cabo-verdiana;
- quantidade de chuva que cai num dia escolhido ao acaso; etc.

Enquanto uma v.a. discreta se refere a qualquer tipo de contagem, uma v.a. contínua refere-se a uma medida, como, por exemplo, o peso, a altura, o tempo, etc.

Utilizam-se letras maiúsculas para representar as variáveis aleatórias, como, por exemplo, X, Y, Z, … e utilizam-se as correspondentes letras minúsculas para representar os valores observados dessas variáveis aleatórias.

Exemplo 48

Lançamento de um dado

Se lançarmos um dado equilibrado, o espaço de resultados é:

$$\Omega = \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\}$$

Sabemos que:

$P(\text{"Sair face com 1 pinta"}) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(\text{"Sair face com 2 pintas"}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{"Sair face com 3 pintas"}) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(\text{"Sair face com 4 pintas"}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{"Sair face com 5 pintas"}) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(\text{"Sair face com 6 pintas"}) = \frac{1}{6}$

Desta forma, definindo a variável aleatória X, que representa o número de pintas da face voltada para cima, temos que:

$$P(X = x) = \frac{1}{6} \text{ para } x = 1\,,\ 2\,,\ \ldots,\ 6$$

Exemplo 49

Soma das pintas no lançamento de dois dados

Consideremos a variável aleatória X que representa a soma das pintas que se obtêm no lançamento dos dois dados equilibrados

X: a soma das pintas que se obtêm no lançamento dos dois dados equilibrados

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Esta variável pode assumir os valores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12. Para determinar a probabilidade de assumir cada um desses valores podemos pensar no espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em lançar os dois dados e somar as pintas das faces voltadas para cima.

Assim,

$P(X=2)=\frac{1}{36}$ $P(X=3)=\frac{2}{36}$ $P(X=4)=\frac{3}{36}$ $P(X=5)=\frac{4}{36}$

$P(X=6)=\frac{5}{36}$ $P(X=7)=\frac{6}{36}$ $P(X=8)=\frac{5}{36}$ $P(X=9)=\frac{4}{36}$

$P(X=10)=\frac{3}{36}$ $P(X=11)=\frac{2}{36}$ $P(X=12)=\frac{1}{36}$

Logo, o modelo de probabilidade para X é dado pela tabela:

Resultado x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidade	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Repara que:

- embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$;
- a probabilidade de a v.a. assumir qualquer um dos seus valores admissíveis está entre 0 e 1;
- a soma das probabilidades da v.a. é igual a 1;
- a soma 7 é a mais provável.

Exercício

56 **Considera a variável aleatória Z que representa o número de caras que se obtêm no lançamento de três moedas equilibradas.**

Constrói o modelo de probabilidade para Z.

3.4.2. Função massa de probabilidade (f.m.p.)

Consideremos uma população finita, por exemplo, um grupo de alunos de uma turma, e suponhamos que relativamente a esta população estávamos interessados em estudar o **número de irmãos**;

Os diferentes valores assumidos pela característica em estudo, na população, serão os objetos de uma variável aleatória X associada ao modelo.

Quando se procura a imagem, por exemplo, de $x = 2$, da variável aleatória X, pretende-se conhecer a probabilidade de um indivíduo da população, escolhido ao acaso, ter 2 irmãos.

Assim, estudar uma população é identificar o modelo probabilístico que a descreve.

Construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada.

A **função massa de probabilidade (f.m.p.)** (ou distribuição de probabilidade) de uma v.a. discreta é uma função que associa a cada valor possível x_i a probabilidade $P(X = x)$.

Uma variável aleatória X, discreta, fica perfeitamente identificada pela sua f.m.p., isto é, pelos valores x_i que assume e pelas probabilidades de assumir esses valores: $p_i = P(X = x_i)$.

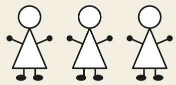
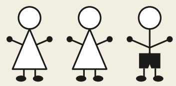
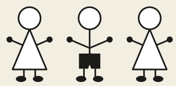
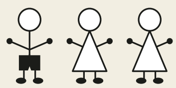
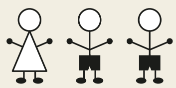
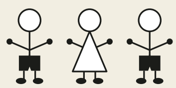
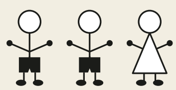
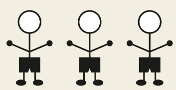
Atendendo à definição de probabilidade, é imediato que:

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1 \text{ para cada } i \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots = 1$$

Exemplo 50

Um casal planeou ter três filhos. Admitindo igual probabilidade para o nascimento de um rapaz ou de uma rapariga, considere-se a variável aleatória X que representa o número de raparigas de entre os três filhos.

Dado que X é a v.a. que representa a número de filhas em três filhos, X pode assumir os valores 0, 1, 2 ou 3.

Resultado	Variável aleatória X_i	
	$X=3$	$P(X=3)=\frac{1}{8}$
	$X=2$	
	$X=2$	$P(X=2)=\frac{3}{8}$
	$X=2$	
	$X=1$	
	$X=1$	$P(X=1)=\frac{3}{8}$
	$X=1$	
	$X=0$	$P(X=0)=\frac{1}{8}$

Assim, temos a seguinte função de massa de probabilidade para a v. a. X:

$X=x_i$	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Uma vez definida a função massa de probabilidade, podemos determinar, facilmente, probabilidades de acontecimentos relacionados com o fenómeno aleatório em estudo.

Por exemplo:

- Probabilidade de o casal ter mais de uma rapariga:

  $P(X>1)=P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)$

  $=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

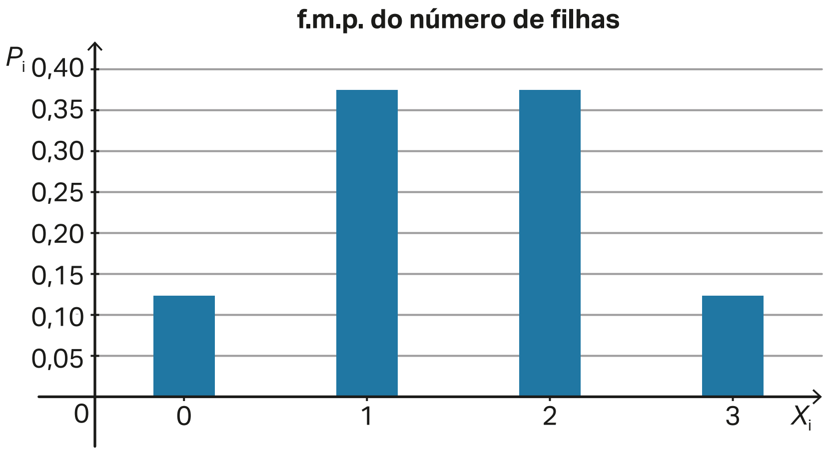
- Probabilidade de o casal só ter rapazes:

  $P(X=0)=\frac{1}{8}$

- Probabilidade de o casal ter uma ou duas raparigas:

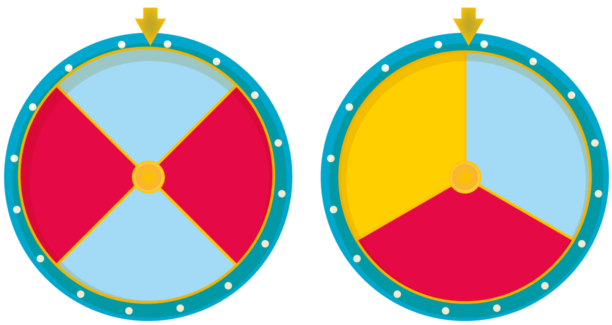
  $P\ (1 \leqslant X \leqslant 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$

A f.m.p. correspondente à v.a. X é a seguinte:



Exemplo 51

Considera a seguinte experiência aleatória, A: "Fazer girar, simultaneamente, as duas roletas da figura e registar o número de roletas que se imobilizam na região vermelha".



Roleta 1 Roleta 2

Seja Y: "Número de roletas que se imobilizam numa região vermelha".

Y pode tomar os valores 0, 1 ou 2.

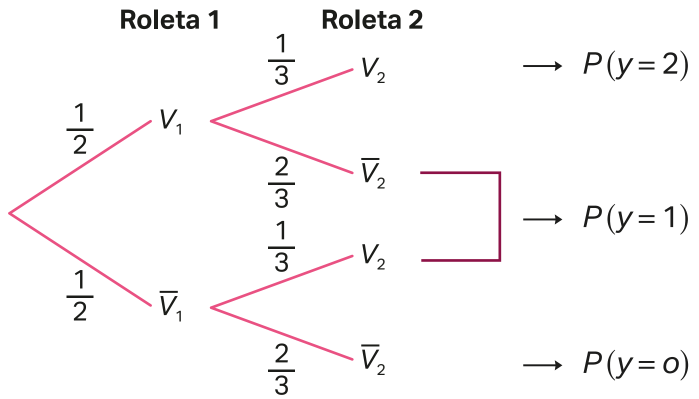
De notar que na roleta 1 a probabilidade de parar numa região vermelha é diferente da probabilidade de a roleta 2 parar numa região vermelha.

Sejam:

V_1 – roleta 1 para no vermelho e V_2 – roleta 2 para no vermelho

$P(V_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ e $P(V_2)=\frac{1}{3}$

Construindo um diagrama de árvore de probabilidade, temos que:



Assim, $P(y=2)=P(V_1)\times P(V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$P(y=1)=P(V_1)\times P\left(\overline{V_2}\right)+P\left(\overline{V_1}\right)\times P(V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(y=0)=P\left(\overline{V_1}\right)\times P\left(\overline{V_2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Tabela de distribuição de probabilidade de Y

$Y=y_i$	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Exercício

57 Considera a seguinte experiência aleatória:

A: "Lançamento de dois dados e registo do número de vezes que aparece a face 1"

B: "Número de raparigas nas famílias com quatro filhos"

(admitindo que a probabilidade se ser rapaz é igual à probabilidade de ser rapariga)

57.1. Define as variáveis aleatórias associadas a estas experiências e indica os valores que podem tomar.

57.2. Quais as probabilidades associadas às variáveis definidas? Constrói a tabela de distribuição de probabilidade relativa a cada variável.

3.4.3. Valor médio e desvio-padrão

Na estatística descritiva, aprendemos a calcular a **média** de um conjunto de dados: somamos todos os valores e dividimos pelo número total de observações. A média permite-nos saber, de forma geral, qual o valor "central" ou "típico" dos dados. Aprendemos também a calcular o **desvio-padrão**, que nos indica o grau de dispersão dos dados – ou seja, se os valores estão mais próximos ou mais afastados da média.

Essas noções continuam a ser úteis quando iniciamos o estudo das variáveis aleatórias e das **distribuições de probabilidade**, mas com uma diferença importante: agora, em vez de analisarmos dados reais já observados, estamos a trabalhar com **valores possíveis** e as **probabilidades associadas** a cada um desses valores.

Assim, surge a noção de **valor médio (ou esperança matemática)** de uma variável aleatória: uma generalização da média que pondera cada valor possível pela sua probabilidade. É o valor que esperaríamos obter, em média, se repetíssemos a experiência aleatória muitas vezes.

De forma semelhante, o **desvio-padrão de uma distribuição de probabilidade** mede o grau de dispersão dos valores possíveis em torno do valor médio, tendo também em conta as probabilidades associadas. Tal como na estatística descritiva, permite perceber se a variável aleatória toma geralmente valores próximos da média ou se, pelo contrário, apresenta uma grande variabilidade.

Portanto, ao estudarmos a média e o desvio-padrão numa distribuição de probabilidade, continuamos a analisar a tendência central e a dispersão – mas agora num contexto teórico, que nos ajuda a prever comportamentos futuros com base nas leis do acaso.

Dada uma v.a. X com f.m.p.

$\boldsymbol{X=x_i}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- o **valor médio** (μ) calcula-se por:

$$\mu = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

- o **desvio-padrão** mede o grau de dispersão dos valores da v.a. :

$$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2 \cdot p_1 + (x_2-\mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n-\mu)^2 \cdot p_n}$$

Exemplo 52

Lançamento de um dado

A distribuição de probabilidade para o acontecimento "lançamento de um dado" é a seguinte:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Assim, $\mu = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$

e $\sigma^2 = (1-3{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2 \times \frac{1}{6} +$

$+ (5-3{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2 \times \frac{1}{6}$

$= (-2{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (-1{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (-0{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (0{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (1{,}5)^2 \times \frac{1}{6} + (2{,}5)^2 \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{6} \times \left((-2{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (2{,}5)^2\right) = \frac{17{,}5}{6} \approx 2{,}91\,(6)$

Então, o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{2{,}91(6)} \approx 1{,}7$.

Nota:
Se o desvio-padrão for pequeno, os valores estão próximos do valor médio, se for grande, os valores estão mais espalhados.

Exemplo 53

Num concurso de pintura, as pontuações vão de 0 a 100 :

- se a média das pontuações for 75 e o desvio-padrão for 5 , isso indica que a maioria dos participantes teve notas próximas de 75 (pouca dispersão);
- mas se o desvio-padrão for 25 , as notas estão muito espalhadas, o que pode indicar avaliações muito diferentes entre os jurados.

Exercício

58 **Define uma v.a. que representa o número de bolas vermelhas extraídas ao tirar duas bolas de um saco com três vermelhas e duas azuis (sem reposição).**
Calcula o valor médio e o desvio-padrão.

3.4.4. Modelo binomial

As distribuições de probabilidade associadas a variáveis aleatórias discretas baseiam-se em espaços amostrais formados por valores discretos (isolados). A respetiva distribuição, também designada por função massa de probabilidade, pode ser representada graficamente através de um gráfico de barras, como já vimos.

Existem vários tipos de distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias discretas, consoante o tipo de fenómeno que se pretende modelar. Entre elas, destacamos a distribuição binomial, que iremos agora estudar.

A **distribuição binomial** aplica-se a situações em que se **repete uma experiência aleatória** um número fixo de vezes, n, e se pretende determinar a **probabilidade de um determinado acontecimento** $\boldsymbol{A}$ ocorrer exatamente k vezes nessas n repetições.

Nas restantes $n-k$ repetições, ocorrerá o **acontecimento contrário a** $\boldsymbol{A}$, com **probabilidade** $1-p$**,** sendo p a probabilidade de A.

O nome **binomial** advém do facto de cada repetição da experiência ter apenas dois resultados possíveis:

- ou ocorre o acontecimento A (sucesso);
- ou não ocorre (insucesso).

Exemplo 54

Considera a experiência aleatória "lançamento de uma moeda 10 vezes".

Definimos a variável aleatória:

X: "Número de caras obtidas nos 10 lançamentos"

Parâmetros do modelo:

- Cada lançamento tem apenas dois resultados possíveis:
  - **cara** (sucesso);
  - **coroa** (insucesso).
- A probabilidade de sucesso em cada lançamento é:

$$P(\text{Sair cara}) = \frac{1}{2}$$

- A probabilidade de insucesso é:

$$P(\text{Não sair cara}) = 1 - P(\text{Sair cara}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como temos 10 repetições independentes com duas saídas possíveis e probabilidade constante, X segue uma **distribuição binomial** com parâmetros $n=10$ e $p=\frac{1}{2}$, ou seja:

$$X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Cálculo de probabilidades

1. Probabilidade de sair 0 caras, ou seja, 10 insucessos:

$$P(X=0) = \underbrace{P(\text{Não sair cara}) \times \ldots \times P(\text{Não sair cara})}_{10 \text{ vezes}}$$

$$= \underbrace{(1-p) \times \ldots \times (1-p)}_{10 \text{ vezes}} = (1-p)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

2. Probabilidade de sair exatamente 1 cara, ou seja, um sucesso e nove insucessos:

O único sucesso pode ocorrer em **qualquer uma das 10 tentativas**, por isso há 10 combinações possíveis.

$$P(X=1) = {}^{10}C_1 \times P(\text{Sair cara}) \times \underbrace{P(\text{Não sair cara}) \times \ldots \times P(\text{Não sair cara})}_{9 \text{ vezes}}$$

$$= {}^{10}C_1 \times p^1 \times (1-p)^9 = 10 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

3. Probabilidade de saírem exatamente 2 caras, ou seja, dois sucessos e oito insucessos:

Os dois sucessos podem ocorrer em **qualquer uma das 10 tentativas**, por isso há 10 combinações, duas a duas, possíveis.

$$P(X=2) = {}^{10}C_2 \times P(\text{Sair cara}) \times P(\text{Sair cara}) \times \underbrace{P(\text{Não sair cara}) \times \ldots \times P(\text{Não sair cara})}_{8 \text{ vezes}}$$

$$= {}^{10}C_2 \times p^2 \times (1-p)^8 = {}^{10}C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = {}^{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Esta lógica aplica-se a qualquer valor de $X=k$, com a fórmula geral da **função de massa de probabilidade binomial**:

$$P(X=k) = {}^{n}C_k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Assim,

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Repara que:

- A distribuição é simétrica.

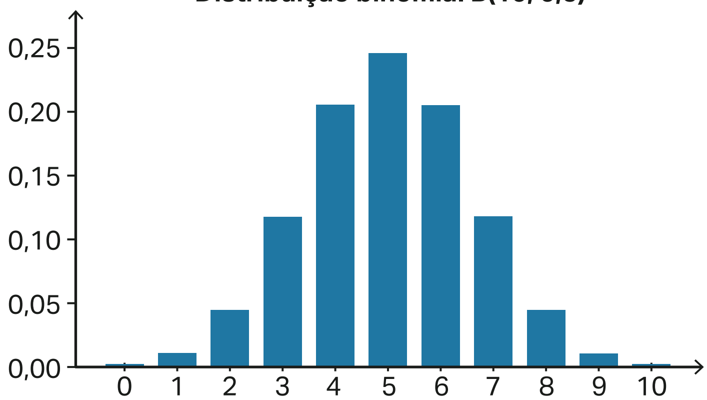
  Por exemplo, $P(x=2)=P(x=8)=\frac{45}{1024}$, ou seja, a probabilidade de saírem duas caras é igual à probabilidade de saírem oito caras, isto é, $\frac{45}{1024}$.
- A soma de todas as probabilidades dá 1, como esperado.

Manual Digital

Vídeo
Distribuição binomial

O gráfico de barras desta distribuição binomial $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ é o seguinte:

Distribuição binomial B(10, 0,5)



Como se pode ver:

- a distribuição é **simétrica** em torno de 5;
- o valor mais provável é $x_i=5$, seguido de 4 e 6.

Exercícios

59 **Considera a experiência aleatória na qual se lança uma moeda ao ar três vezes e se regista o número de caras obtidas.**

59.1. Define a v.a. associada a esta experiência e indica os valores que pode tomar.

59.2. Constrói a tabela de distribuição de probabilidade.

60 **Uma artista de rua tenta vender uma pintura a cada pessoa que passa. A probabilidade de venda é $0{,}2$. Considera que ele aborda cinco pessoas.**

60.1. Define a v.a. associada a esta experiência e indica os valores que pode tomar.

60.2. Constrói a tabela de distribuição de probabilidade.

60.3. Qual é a probabilidade de vender dois quadros em cinco abordagens?

60.4. Qual é a média e o desvio-padrão?

3.4.5. Modelo normal

Manual Digital

Vídeo
Distribuição normal

Em muitas situações da vida real – na arte, nas ciências ou no dia a dia – lidamos com grandezas que podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo contínuo, tais como o tempo de espera numa fila, a temperatura ambiente, o "peso" de uma pessoa, etc.

Estas situações são descritas por **variáveis aleatórias contínuas**, às quais estão associados **modelos de probabilidade contínuos**.

Ao contrário das variáveis discretas (que assumem valores isolados, como lançar um dado), as variáveis contínuas podem assumir infinitos valores dentro de um intervalo. Por exemplo, entre 59 kg e 61 kg há infinitos valores possíveis para o "peso" de uma pessoa.

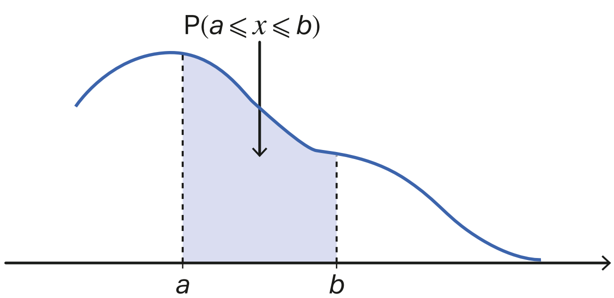
Função densidade de probabilidade

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua é representada por uma **função densidade de probabilidade** (f.d.p.). Esta função permite calcular a probabilidade de a variável tomar valores dentro de um determinado intervalo.

Nota importante: Em variáveis contínuas, a probabilidade de ocorrer exatamente um valor específico é nula. Por exemplo, considera-se que a probabilidade de alguém "pesar" exatamente 60 kg é praticamente 0, porque o "peso" pode variar ligeiramente acima ou abaixo. Por isso, as probabilidades calculam-se sempre em intervalos, mesmo que muito pequenos.

A probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor entre a e b calcula-se pela **área sob a curva da função densidade**, entre esses dois valores:

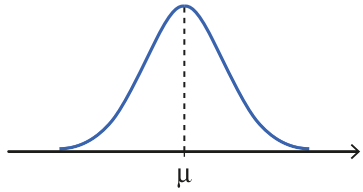
$$P(a < X < b) = \text{área sob a curva no intervalo } [a, b]$$

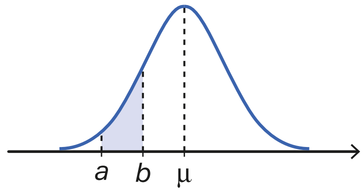


Tal como nas variáveis discretas, existem vários modelos contínuos que representam diferentes tipos de fenómenos aleatórios. Entre eles, destacamos o modelo normal, que iremos agora estudar, pois é uma distribuição frequente em fenómenos naturais e sociais.

Uma **variável aleatória contínua** diz-se **normal** quando a sua distribuição de probabilidade é representada por uma curva em forma de sino, conhecida por **curva de Gauss.** Esta curva é:

- **simétrica** em relação a um eixo vertical que passa pela média (valor médio) da variável;
- **mais alta ao centro**, onde se concentra a maioria dos valores;
- **mais baixa nas extremidades**, onde os valores são menos prováveis.





P($a < x < b$) é igual à área sombreada

Este modelo de distribuição é chamado de **modelo normal** ou **distribuição normal.**

A **probabilidade de a variável tomar valores num intervalo]a, b[** corresponde à **área sob a curva** entre os pontos a e b. Como a curva é contínua, essa área pode ser pequena ou grande, consoante o intervalo considerado e a forma da curva.

Uma distribuição normal é totalmente determinada por dois parâmetros:

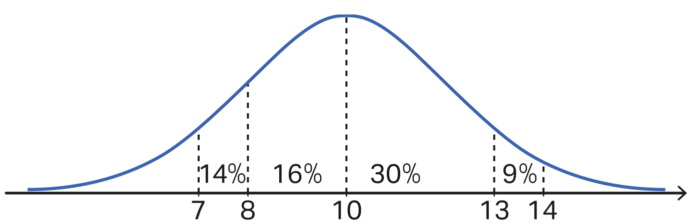
- $\mu \longrightarrow$ média (valor central da distribuição);
- $\sigma \longrightarrow$ desvio-padrão (medida da dispersão dos valores).

Representa-se por: $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Por exemplo, $X \sim N(50, 8)$, significa que a variável X segue uma distribuição normal, com média 50 e desvio-padrão 8.

Exercício

61 **Supõe que a seguinte figura representa a função densidade da variável aleatória X: largura (em cm) de pinceladas espontâneas feitas por diferentes artistas num mural coletivo de arte contemporânea.**



61.1. Qual é a percentagem de pinceladas com largura entre os 8 e os 10 cm?

61.2. Qual é a percentagem de pinceladas com largura entre os 13 e os 14 cm?

61.3. Qual é a percentagem de pinceladas com largura entre os 7 e os 14 cm?

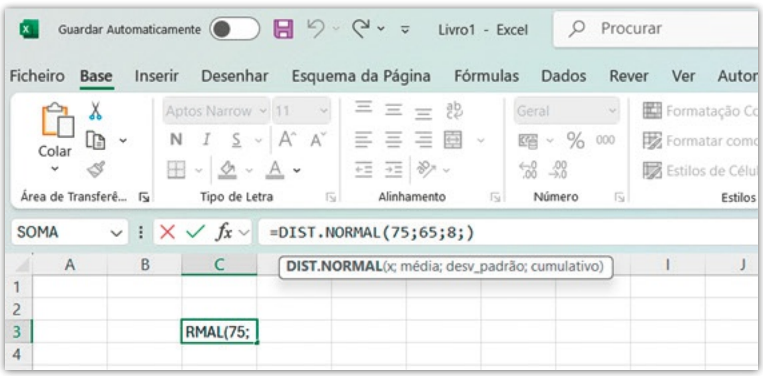
61.4. Qual é a percentagem de pinceladas com largura entre os 8 e os 13 cm?

Num modelo de distribuição contínuo, como o caso da distribuição normal, a probabilidade corresponde a uma determinada área sob o gráfico. Assim, para realizar esse cálculo, é possível utilizar a tecnologia para calcular probabilidades associadas a quaisquer intervalos.

Exemplo 55

Usando o modelo normal com $\mu = 65$ e $\sigma = 8$ kg, a probabilidade de uma pessoa adulta "pesar" mais de 75 kg é de 0,023, aproximadamente.

Com recurso ao Excel, podemos utilizar a função de distribuição normal, seguindo os parâmetros:



Exemplo 56

A variável aleatória X representa o "peso" (em kg) dos quadros expostos numa galeria e segue uma distribuição normal, com média $\mu = 20$ e desvio-padrão $\sigma = 2$.

Para determinarmos, por exemplo, a probabilidade de um quadro "pesar" entre 18 kg e 22 kg, ou seja, $P(18 < X < 22)$, podemos utilizar diferentes *softwares*.

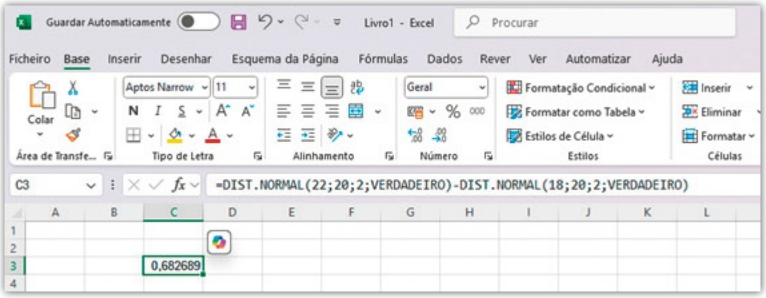
1. GeoGebra

1. Abrir a https: //www.geogebra.org/calculator
2. Escrever a função:
   Integral (DistribuiçãoNormal (20,2,22)-DistribuiçãoNormal (20,2,18))

O resultado será a **probabilidade entre 18 e 22 kg**, isto é, aproximadamente 0,68.

2. Excel

1. Abrir o Excel.
2. Escrever a função:
   =DIST.NORMAL (22;20;2;VERDADEIRO)-DIST.NORMAL (18;20;2;VERDADEIRO)



O resultado será a **probabilidade entre 18 e 22 kg ,** isto é, aproximadamente $0{,}68$.

Repara que em ambos os casos recorremos a uma estratégia de cálculo, pois:

$$P(18 < X < 22) = P(X < 22) - P(X < 18)$$

Exercícios

62 **O tempo (em minutos) de uma *performance* artística ao ar livre segue uma distribuição normal com média de 50 minutos e desvio-padrão de 8 minutos.**
Utilizando tecnologia para determinar as probabilidades correspondentes aos intervalos pedidos, responde:

62.1. Qual é a probabilidade de uma *performance* durar entre 45 e 60 minutos?

62.2. Qual é a probabilidade de durar menos de 40 minutos?

63 **Numa galeria de arte, as dimensões das telas expostas seguem uma distribuição normal com média de 80 cm de altura e desvio-padrão de 10 cm .**
Utilizando tecnologia para determinar as probabilidades correspondentes aos intervalos pedidos, responde:

63.1. Qual é a probabilidade de uma tela escolhida ao acaso ter entre 70 cm e 90 cm de altura?

63.2. Qual é a probabilidade de uma tela medir mais de 95 cm ?

Ao analisarem grandes conjuntos de dados, muitos cientistas verificaram que os histogramas obtidos apresentavam uma forma característica – simétrica e em forma de sino –, que podia ser modelada por uma curva conhecida como distribuição normal.

Manual Digital

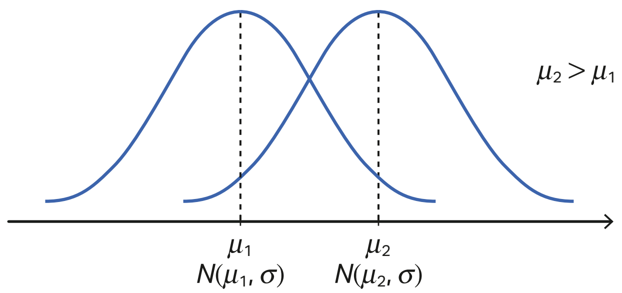
Vídeo
Histograma e função de densidade

Por exemplo, ao estudar a altura de adultos numa população, os tempos de reação em testes de atenção ou as variações da temperatura diária, observaram-se distribuições que se ajustavam bem ao modelo normal. Este modelo tornou-se, assim, uma ferramenta essencial na estatística, servindo de base a muitos métodos de inferência estatística clássica utilizados para tirar conclusões sobre populações a partir de amostras.

Propriedades da curva normal

- O valor médio localiza a curva no referencial.

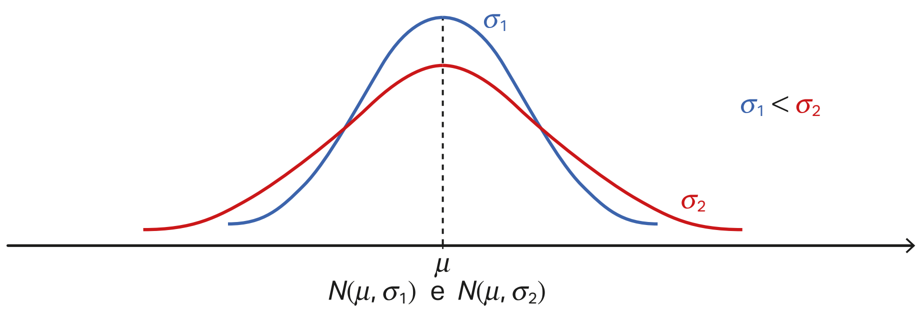
  Exemplo:



  Na figura anterior estão representadas duas curvas normais com igual desvio-padrão, mas diferentes valores médios.

- Quanto maior for o desvio-padrão mais achatada é a curva, uma vez que maior é a dispersão em torno do valor médio μ é maior.

  Exemplo:



  Na figura anterior estão representadas duas curvas de distribuição normal que diferem apenas no valor do desvio-padrão.

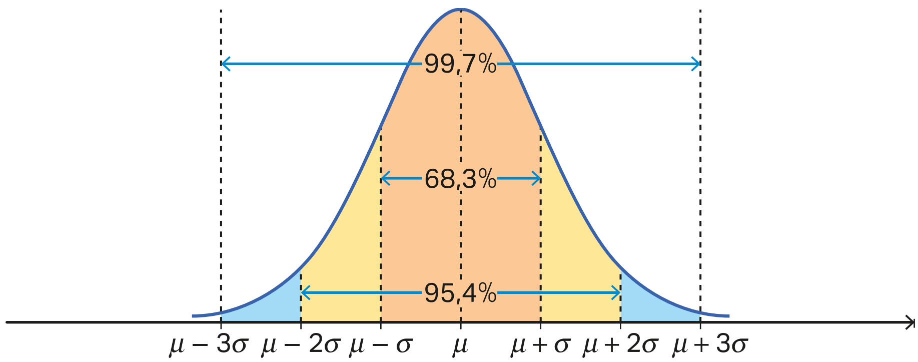
- Dada uma variável aleatória X com uma distribuição normal, $N \sim (\mu - \sigma)$, tem-se:

  $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}683$

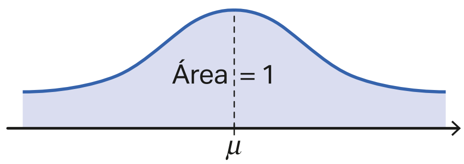
  $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$

  $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}997$

Na curva normal, corresponde a:



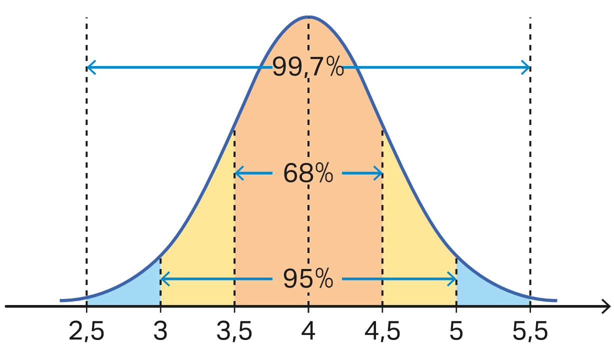
- Como em qualquer função densidade, a área total situada abaixo da curva é igual a 1.



Exemplo 57

Num ateliê de pintura, o tempo de secagem de uma nova tinta acrílica (em horas), quando aplicada numa camada uniforme, segue uma distribuição normal com média de 4 horas e desvio-padrão de $0{,}5$ horas.

Isto significa que, se vários artistas aplicarem a tinta nas mesmas condições, a maioria das obras secará em tempos próximos das 4 horas, mas com alguma variação natural.



Analisando a distribuição normal, podemos concluir que:

- aproximadamente, 68% das telas secarão entre $3{,}5$ e $4{,}5$ horas (1 desvio-padrão da média)

$$P(3{,}5 < X < 4{,}5) \approx 68\%$$

- aproximadamente, 95% secarão entre 3 e 5 horas (2 desvios-padrão da média)

$$P(3 < X < 5) \approx 98\%$$

- é muito improvável que uma tela demore menos de $2{,}5$ horas ou mais de $5{,}5$ horas a secar

$$P(X < 2{,}5 \ \vee \ X > 5{,}5) = 1 - P(2{,}5 < X < 5{,}5) \approx 1 - 99{,}7\% = 0{,}03\%$$

Manual Digital

Vídeo
Modelo de distribuição normal

Exercícios

64 **Foram feitas medições da altura de esculturas expostas numa bienal de arte contemporânea, pertencentes a uma vasta coleção internacional. Verificou-se que a distribuição destas alturas segue um comportamento normal, com valor médio de $84{,}5$ cm e desvio-padrão de 14 cm. Designando a variável em estudo por X (altura das esculturas, em cm), indica:**

64.1. o valor da altura que está dois desvios-padrão acima do valor médio;

64.2. o valor da altura que está um desvio-padrão abaixo do valor médio;

64.3. a percentagem de esculturas cuja altura está a uma distância inferior a um desvio-padrão do valor médio;

64.4. a percentagem de esculturas com altura inferior a $84{,}5$ cm.

65 **Supõe que o tempo médio de conservação de um certo tipo de pigmento usado em pinturas contemporâneas apresenta um comportamento aproximadamente normal, com valor médio de $5{,}6$ anos e desvio-padrão de $1{,}2$ anos.**

65.1. Qual é a percentagem de pinturas que conservam o pigmento entre $3{,}2$ e 8 anos?

65.2. Qual a percentagem de pinturas que conservam o pigmento entre 2 e $9{,}2$ anos?

65.3. Qual é a percentagem de pinturas cuja conservação do pigmento dura mais de $4{,}4$ anos? E menos de $4{,}4$ anos?

Síntese

Uma **variável aleatória (v.a.)** é uma função que associa um número real a cada resultado possível de uma experiência aleatória e representa-se por uma letra maiúscula $(X, Y, Z, \ldots)$.

A **função massa de probabilidade (f.m.p.)** (ou distribuição de probabilidade) de uma v.a. discreta é uma função que associa a cada valor possível x_i a probabilidade $P(X=x_i)$.

Dada uma v.a. X com f.m.p.:

$X=x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

- o **valor médio** (μ) calcula-se por:

  $\mu = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ldots + x_n \times p_n$

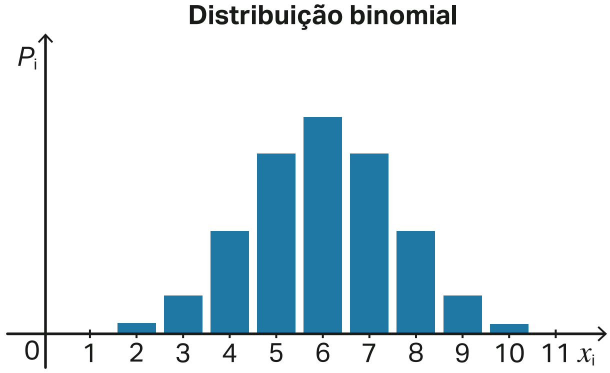
- o **desvio-padrão** mede o grau de dispersão dos valores da v.a. :

  $\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2 \cdot p_1 + (x_2-\mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n-\mu)^2 \cdot p_n}$

O **modelo binomial** é um modelo discreto usado quando temos:

- um número fixo de experiências n;
- cada experiência com dois resultados possíveis: **sucesso** (com probabilidade p) e **insucesso** $(1-p)$;
- as experiências são independentes.

Distribuição binomial



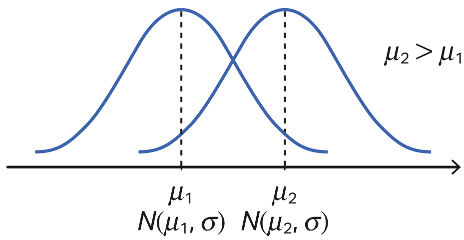
O **modelo normal** é **contínuo** e aplicado a fenómenos como altura, tempo, "peso", etc.

- Representado por uma curva **simétrica em forma de sino**.
- Definido por dois parâmetros:
  - μ: valor médio (centro da curva);
  - σ: desvio-padrão (largura da curva).

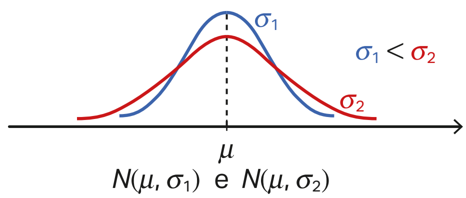
Síntese

Propriedades da curva normal

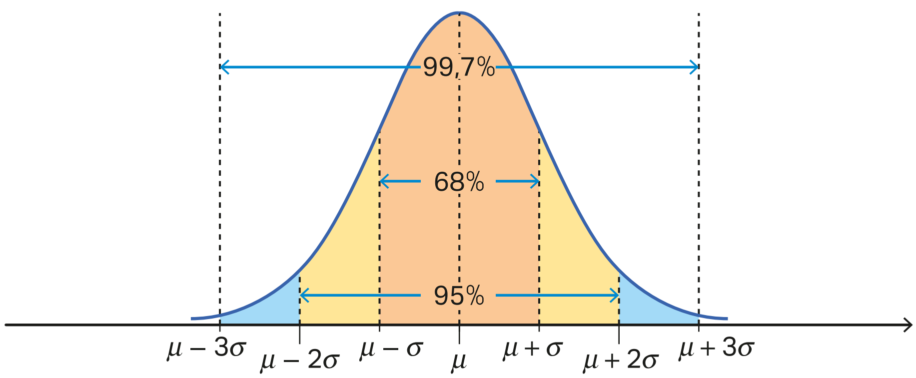
- O valor médio localiza a curva no referencial.



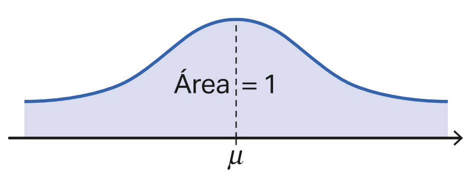
- Quanto maior for o desvio-padrão mais achatada é a curva, uma vez que maior é a dispersão em torno do valor médio μ .



- Dada uma variável aleatória X com uma distribuição normal, tem-se:



- Como em qualquer função densidade, a área total situada abaixo da curva é igual a 1 .



Para aplicar

1 **Dada a experiência: "Observar o tempo (em minutos) de uma *performance* de rua", a variável é discreta ou contínua? Justifica.**

2 **Uma artista lança três cubos de argila ao ar com igual probabilidade de cair ou não em cima da tela.**

2.1. Define a variável aleatória.

2.2. Constrói a função massa de probabilidade.

2.3. Determina a probabilidade de exatamente dois cubos caírem sobre a tela.

3 **Dada a tabela de probabilidades de X (número de erros num teste com três questões de escolha múltipla):**

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Qual é a probabilidade de haver menos de dois erros?

4 **Um curador de galeria contabiliza o número de obras vendidas por cada artista numa feira.**

Os valores possíveis são 0, 1, 2, 3 com probabilidades $0{,}1$; $0{,}25$; $0{,}5$; $0{,}15$, respetivamente.

4.1. Define a f.m.p. através de uma tabela.

4.2. Calcula o valor médio.

4.3. Calcula o desvio-padrão.

5 **Um músico de rua tem 30% de probabilidade de vender um CD a cada pessoa que o ouve. Em cinco abordagens:**

5.1. Qual é a probabilidade de vender exatamente dois CD?

5.2. Qual é o valor médio de vendas esperadas?

5.3. Qual é o desvio-padrão?

6 **As larguras dos pincéis de um lote seguem uma distribuição normal com média de 2 cm e desvio-padrão $0{,}5$ cm.**

6.1. Qual é a largura correspondente a 2σ acima da média?

6.2. Qual é a percentagem estimada de pincéis com largura entre $1{,}5$ cm e $2{,}5$ cm?

Para aplicar

7 **Numa oficina, um pintor experimental aplica uma técnica nova com sucesso em 70% dos casos. Faz 10 experiências.**

7.1. Qual é o valor médio de sucessos esperados?

7.2. Qual é o desvio-padrão?

8 **Uma instalação de luzes tem sensores que contam o número de vezes que uma pessoa interage com ela durante 10 minutos .**

Valores observados	0	1	2	3	4
Frequência	5	15	25	20	10

8.1. Constrói uma tabela com a distribuição de probabilidades.

8.2. Calcula o valor médio.

8.3. A v.a. segue uma distribuição normal? Justifica.

9 **Uma roleta tem quatro cores: vermelho, azul, verde e amarelo.**
Seja $X =$ número de vezes que sai "vermelho" em três lançamentos.

9.1. Qual é a distribuição de X?

9.2. Calcula $P(X = 2)$.

10 **Um escultor vende 0 , 1 ou 2 peças por dia com as probabilidades $0{,}5$, $0{,}3$ e $0{,}2$, respetivamente.**

10.1. Qual é o valor médio de vendas diárias?

10.2. Que interpretação fazes do resultado?

11 **Um fotógrafo acerta em 90% das imagens. Num dia tira 20 fotografias.**

11.1. Qual é a probabilidade de nesse dia, acertar exatamente 18 fotografias?

11.2. Qual é a média e o desvio-padrão?

12 **Numa exposição, o tempo de observação por obra segue uma normal $N(4\,,\,1)$.**

12.1. Qual é a percentagem esperada de visitantes que observam uma obra entre 3 e 5 minutos?

12.2. Qual é a percentagem esperada de visitantes que observam uma obra mais de 6 minutos?

13 **Numa residência artística, o tempo de conclusão de uma obra (em dias) por um grupo de artistas segue uma distribuição normal com valor médio de 12 dias e desvio-padrão de 2 dias.**

13.1. Qual é a percentagem de artistas que terminam a obra entre 10 e 14 dias?

13.2. Qual é a probabilidade de um artista demorar mais de 16 dias?

13.3. Que percentagem de artistas conclui a obra em menos de 8 dias?

13.4. Determina o intervalo de dias em que se encontra aproximadamente 95% dos tempos de conclusão.

14 **Numa escola de Artes, mediu-se o tempo (em minutos) que os alunos do 11.º ano demoram a concluir um esboço de observação.**
Verificou-se que os tempos seguem uma distribuição normal com $\mu = 40$ minutos e $\sigma = 5$ minutos.

14.1. Qual a probabilidade de um aluno demorar menos de 40 minutos a terminar o esboço?

14.2. Qual a probabilidade de demorar entre 35 e 45 minutos?

14.3. Qual a probabilidade de demorar mais de 50 minutos?

14.4. Aproximadamente, quantos alunos em 100 deveríamos esperar que terminassem o esboço entre 35 e 45 minutos?

Teste

1 No lançamento de um dado, o acontecimento "sair número menor do que 1" é:

(A) Certo **(B)** Impossível

(C) Composto **(D)** Equiprovável

2 Uma urna tem 4 bolas vermelhas, 3 azuis e 3 verdes.
Qual é a probabilidade de sair uma bola azul?

(A) $\frac{3}{10}$ **(B)** $\frac{3}{9}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{3}{6}$

3 Sejam A e B dois acontecimentos, tais que $P(A)=0{,}4$ e $P(B)=0{,}5$.
Se A e B forem disjuntos, então $P(A \cup B)$ é...

(A) 0,2 **(B)** 0,9 **(C)** 0,1 **(D)** 0,7

4 Qual é a probabilidade de um acontecimento certo?

(A) 1

(B) 0

(C) Depende do número de casos favoráveis.

(D) Entre 0 e 1.

5 Uma curadora de arte quer escolher três obras de um conjunto de sete para expor juntas, mas a ordem das obras não interessa. De quantas formas diferentes pode fazer esta seleção?

(A) $7!$ **(B)** ${}^{7}A_{3}$ **(C)** ${}^{7}C_{3}$ **(D)** $3!$

6 Qual das seguintes somas é mais provável ao lançar dois dados?

(A) 2 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 12

7 Sejam A e B dois acontecimentos tais que:

- $P(A)>0$
- $P(B)>0$
- $A \neq \Omega$ e $B \neq \Omega$
- $P(A \mid B)=P(A)$

Qual das seguintes afirmações é **necessariamente verdadeira?**

(A) $P(A \cap B)=0$

(B) $P(A)=P(B)$

(C) Os acontecimentos A e B são compatíveis.

(D) $A \subseteq B$

8 **A seguinte tabela representa a função massa de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, correspondente ao número de peças com defeito num lote de três peças analisadas.**

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

Qual das seguintes afirmações está correta?

(A) A variável aleatória X é contínua.

(B) Esta distribuição não representa uma f.m.p. válida.

(C) A probabilidade de haver pelo menos duas peças com defeito é $0{,}4$.

(D) A probabilidade de não haver nenhuma peça com defeito é inferior a 10%.

9 **Um artista digital quer criar códigos visuais com três símbolos diferentes escolhidos de um conjunto de seis símbolos, em que a ordem dos símbolos é importante e de forma que não se repitam símbolos.**
Quantos símbolos diferentes pode o artista criar?

(A) ${}^6C_3$ **(B)** 6^3 **(C)** ${}^6A_3$ **(D)** $3!$

10 **Qual das seguintes afirmações sobre uma variável aleatória contínua X, com função densidade de probabilidade $f(x)$, é necessariamente verdadeira?**

(A) A função $f(x)$ é sempre constante.

(B) A função $f(x)$ pode assumir valores negativos.

(C) $P(a \leqslant X \leqslant b)$ corresponde à área entre a e b sob a curva de $f(x)$.

(D) A probabilidade de X assumir um valor exato pode ser diferente de zero.

11 **Lança-se um dado.**
Considera os seguintes acontecimentos:
A: **"Sair número par"**
B: **"Sair número maior do que 4"**
C: **"Sair número menor do que 1"**
Classifica cada acontecimento de certo, impossível, simples ou composto.

Teste

12 **Para cada uma das seguintes experiências, indica o espaço de resultados.**

12.1. Sortear, de uma caixa, uma figura entre círculo, quadrado e triângulo.

12.2. Lançar duas moedas ao ar e verificar as faces que ficaram voltadas para cima.

12.3. Sortear duas bolas, seguidas e sem reposição, de um saco com uma bola vermelha, uma azul, uma amarela, uma verde e uma preta.

13 **Representa o seguinte conjunto em extensão e em compreensão.**

A: "Números naturais pares menores do que 10"

14 **Uma caixa tem sete letras da palavra ARTISTA. É retirado ao acaso um cartão.**

14.1. Qual é o espaço de resultados?

14.2. Quantos resultados favoráveis existem para:

A: "Sair uma vogal"

B: "Sair uma letra da palavra ARTE"

C: "Sair a letra S"

14.3. Calcula a probabilidade de cada um dos acontecimentos A, B e C.

15 **Compara as probabilidades das seguintes situações:**

A: "Sair ímpar no lançamento de um dado"

B: "Sair "cara" no lançamento de uma moeda"

C: "Sair uma carta preta numa extração de um baralho de 40 cartas"

D: "Sair bola vermeha na extração de uma bola de uma caixa com 2 bolas vermelhas, 4 verdes e 2 azuis"

Indica um par de acontecimentos com a mesma probabilidade.

16 **Numa turma de 40 alunos, durante uma atividade de Oficina de Arte, 28 alunos usaram guache, 20 pastel seco e 12 usaram as duas técnicas.**

16.1. Constrói esta distribuição num diagrama de Venn.

16.2. Quantos alunos usaram apenas uma técnica?

16.3. Quantos alunos não usaram nenhuma técnica?

16.4. Qual é a probabilidade de um aluno ter usado guache ou pastel?

17 **Na prateleira de uma biblioteca, há um conjunto de 30 livros distribuídos da seguinte forma:**

- **10 são de romance**
- **oito são de poesia**
- **seis são de ensaio**
- **quatro são de romance e poesia**
- **dois são de poesia e ensaio**

Nenhum livro pertence simultaneamente a três géneros.

17.1. Quantos livros pertencem apenas a um género literário?

17.2. Qual é a probabilidade de, escolhendo um livro aleatoriamente, este ser de poesia?

17.3. Considerando os seguintes acontecimentos, identifica um par de acontecimentos complementares e um par de acontecimentos disjuntos.

A: "O livro é de poesia"

B: "O livro não é de poesia"

C: "O livro é de romance e ensaio"

18 **Considera a experiência aleatória na qual é retirada de uma urna uma bola. A urna contêm 4 bolas vermelhas, 3 azuis e 3 verdes. Qual é a probabilidade de:**

18.1. sair azul;

18.2. sair uma bola que não seja vermelha;

18.3. sair uma bola vermelha ou verde;

18.4. sair uma bola vermelha e uma bola verde, sendo que a primeira bola extraída foi reposta;

18.5. sair uma bola vermelha seguida de uma bola verde sem reposição;

18.6. sair bola verde, sabendo que já saiu uma bola vermelha?

19 **Um artista dispõe de três pincéis (fino, médio e grosso) e de duas cores (vermelho e azul) para realizar um esboço de uma paisagem.**
De quantas formas distintas pode começar o esboço?

Teste

20 **Um *designer* gráfico está a preparar a capa de um livro, para isso pode escolher Arial ou Times New Roman para o tipo de letra, e preto, cinzento ou branco, para a cor.**

20.1. Quantas combinações de tipo de letra e cor pode ele fazer?

20.2. Cada uma das combinações é equiprovável?

20.3. Sabendo que escolheu Arial como tipo de letra, qual é a probabilidade de ter escolhido cinzento?

21 **Uma artista quer colocar quatro esculturas diferentes num expositor.**

21.1. De quantas formas diferentes o artista o pode fazer?

21.2. De quantas formas pode o artista colocar as esculturas, se duas delas tiverem de ficar juntas?

22 **Um *designer* quer formar um logótipo com três letras diferentes do alfabeto. A ordem das letras é importante. Quantos logótipos pode criar?**

23 **Numa empresa vão ser criados códigos numéricos de segurança para cada funcionário aceder à sua área pessoal nos computadores. Os códigos terão quatro dígitos distintos usando os algarismos de 0 a 9.**

23.1. Quantos códigos diferentes podem ser criados, sem repetição de dígitos?

23.2. Quantos códigos podem ser criados, se os dígitos puderem ser repetidos?

24 **Uma artista quer fazer padrões com três das suas cinco formas favoritas, criando uma sequência. Quantos padrões diferentes pode fazer?**

25 **Um curador escolhe três obras de sete para um catálogo. A ordem não interessa. Quantas seleções diferentes pode fazer?**

26 **Um ilustrador quer escolher três dos seus seis cartazes para uma exposição, mas o cartaz B não pode ser o primeiro. Quantas sequências são possíveis nestas condições?**

27 **Lançam-se dois dados e calcula-se o produto dos valores que surgem nas faces voltadas para cima.**

27.1. Determina todos os produtos distintos possíveis nesta experiência.

27.2. Quantos elementos tem este espaço de resultados?

27.3. O número 17 será um resultado possível? Justifica.

27.4. Quantas combinações originam o produto 12?

27.5. Determina a probabilidade de o produto ser:

(A) par;

(B) múltiplo de 3;

(C) Inferior a 10.

28 **Numa aula de Artes, os alunos realizaram uma experiência em que lançaram uma peça metálica assimétrica 100 vezes, observando sobre que lado ela caía. Registaram os seguintes resultados:**

Lado da peça	Frequência absoluta
Lado A	42
Lado B	33
Ficou em pé	25

Com base nesta experiência, responde.

28.1. Qual é a probabilidade de a peça cair sobre o lado A?

28.2. Qual é a probabilidade de a peça **não** cair sobre o lado B?

28.3. Considera os seguintes acontecimentos:

A: "A peça cai sobre o lado A"

B: "A peça cai sobre o lado B"

C: "A peça cai sobre o lado A ou sobre o lado B"

Calcula:

(A) $P(C)$

(B) Verifica se A e B são disjuntos.

Teste

29 Uma escola artística organizou uma exposição com 40 alunos:

- 22 usaram apenas acrílico;
- 18 apenas colagem;
- oito acrílics e colagem.

29.1. Qual é a probabilidade de terem usado acrílico ou colagem?

29.2. Qual é a probabilidade de terem usado apenas uma técnica?

29.3. Qual a probabilidade de terem usado acrílico, sabendo que também usaram colagem?

30 Considera os acontecimentos A e B, sabendo que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ e $P(A \cap B) = 0{,}15$.

30.1. Calcula $P(A|B)$.

30.2. Pode afirmar-se que os acontecimentos são independentes?

31 Num grupo, 40% das pessoas leem poesia, 60% leem teatro e 30% leem ambos os géneros.

31.1. Qual é a probabilidade de alguém ler poesia dado que lê teatro?

31.2. Os acontecimentos "ler poesia" e "ler teatro" são independentes?

32 Considera os seguintes acontecimentos:

A: "Retiram-se duas cartas de um baralho de 40, sem reposição"

B: "Retiram-se duas cartas de um baralho de 40, com reposição"

Em qual dos casos os dois acontecimentos "sair copas na primeira carta" e "sair copas na segunda carta" são independentes? Justifica.

33 Uma caixa contém três bolas numeradas: 1, 2 e 3. Retira-se uma bola, anota-se o número e volta-se a colocá-la na caixa. Repete-se este processo duas vezes.

33.1. Indica o espaço de resultados da experiência.

33.2. Define a variável aleatória X: "Soma dos números das duas bolas retiradas".

34 Numa aula de Artes, os alunos construíram um dado artesanal. Para testar se o dado era uniforme e justo, os alunos lançaram-no 60 vezes.

Obtiveram os resultados apresentados na tabela ao lado.

Número obtido	Frequência
1	6
2	9
3	12
4	10
5	13
6	10

34.1. Calcula a frequência relativa de cada resultado.

34.2. Qual é o número mais provável de sair com base na experiência?

34.3. O Rui, aluno desta turma, disse o seguinte:

"Este dado não é justo!"

Concordas com a sua afirmação? O que poderiam fazer para afirmarem com mais certeza sobre o facto de o dado ser ou não justo?

35 Numa escola, 30% dos alunos frequentam o curso de Artes.

Sabe-se que:

- 60% dos alunos de Artes participaram na exposição anual;
- 20% dos alunos dos outros cursos também participaram.

35.1. Qual é a percentagem de alunos da escola que participaram na exposição?

35.2. Escolhendo um aluno ao acaso e sabendo que este aluno participou na exposição, qual é a probabilidade de ele ser do curso de Artes?

36 Um estudante tenta vender bilhetes para uma peça de teatro escolar. Sabe-se que a probabilidade de uma pessoa lhe comprar um bilhete é de $0{,}3$. O estudante aborda seis pessoas, de forma independente.

36.1. Define a variável aleatória associada a esta experiência e indica os valores que pode tomar, ponderando o número de bilhetes que consegue vender.

36.2. Constrói a tabela da distribuição de probabilidade da variável aleatória.

36.3. Qual é a probabilidade de o estudante conseguir vender exatamente dois bilhetes?

36.4. Calcula a média e o desvio-padrão da variável aleatória.

Teste

37 Num festival de arte urbana, mediu-se a altura das instalações expostas. Verificou-se que essa variável seguia uma distribuição normal, com:

- média $\mu = 210$ cm
- desvio-padrão $\sigma = 18$ cm

Seja X a variável aleatória que representa a altura das instalações, em cm.

37.1. Faz um esboço da curva normal associada a esta distribuição normal, indicando onde se localiza a média.

37.2. Qual é a percentagem aproximada de instalações com alturas entre 192 cm e 228 cm?

37.3. Qual é a percentagem aproximada de instalações com altura superior a 210 cm?

38 A tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	a	b	0,3

Sabe-se que a e b são números reais positivos.

O valor médio da variável X é igual a $1{,}2$. Quais são os valores de a e b?

39 A altura dos rapazes de 17 anos em Cabo Verde segue uma distribuição normal com média de $1{,}72$ m e desvio padrão de $0{,}07$ m.

39.1. Determina a probabilidade de um jovem medir mais de $1{,}80$ m.

39.2. Qual é a altura mínima dos 10% mais altos?

39.3. Se considerarmos 200 jovens, em quantos se espera que tenham menos de $1{,}60$ m?

40 Admite que o número de cafés consumido por um cabo verdiano, diariamente, segue uma distribuição normal, com um valor médio de quatro cafés e com um desvio padrão de um café.

40.1. Qual é a probabilidade de um cabo verdiano consumir mais de quatro cafés por dia?

40.2. Qual é a probabilidade de um cabo verdiano consumir entre três e cinco cafés por dia?

40.3. Qual é a probabilidade de um cabo verdiano consumir menos de seis cafés por dia?

Página 10 – Antes de começar

1. $P = 26$ cm ; $A = 40$ cm^2

2.1. 9,7 cm

2.2. 3 cm^2

3. $P = 20\pi$ cm ; $A = 100\pi$ cm^2

4. **a)** 43° **b)** 123° **c)** 152°

5. **a)** 35 **b)** 7 **c)** $2\sqrt{5}$

Página 11

6. $x = \sqrt{32}$; $y = \sqrt{97}$

7. **a)** $x = 18{,}475$ **b)** $y = 15{,}493$

c) $w = 15{,}588$ **d)** $z = 28{,}284$

8.1. 1,061 cm

8.2. 1,061 cm^2

8. 36,373 m

Página 13

1.1. 9π cm^2

1.2. $2{,}25\pi$ cm^2

1.3. 16π cm^2

Página 14

Tarefa 1

$\alpha = 90°$:

- Partes: 4
- Área do setor circular: 78,54
- Amplitude do setor circular: 90°

$\alpha = 120°$:

- Partes: 3
- Área do setor circular: 104,72
- Amplitude do setor circular: 120°

Página 15

2.1. 2,094 cm^2

2.2. 6,545 cm^2

2.3. 4,909 cm^2

Página 16

3.1. 15 cm

3.2. 18,75 cm

3.3. 112,5 cm

4. 180°

Página 19

5.1. 1200 cm^2

5.2. 432 cm^2

5.3. 960 cm^2

5.4. 24,14 cm^2

6. 0,687

Página 20

7.1. 90π cm^2

7.2. 4π cm^2

7.3. 432π cm^2

Tarefa 2

2.1. 3

2.2. $V_{\text{prisma}} = 3 \times V_{\text{pirâmide}}$

2.3. $A_{\text{base}} \times \text{altura} = 3 \times V_{\text{pirâmide}}$

2.4. $V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$

2.5. O volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma com base e altura iguais.

Página 22

8.1. $\dfrac{20}{3}\sqrt{3}$ cm^2

8.2. 18 cm^2

8.3. $90 + 90\sqrt{2}$ cm^2

8.4. $48\sqrt{3}$ m^2

Página 23

9.1. 30π cm^2

9.2. $\dfrac{4}{3}\pi$ cm^2

9.3. 144π cm^2

Página 24

10.1. $\sqrt{109}$ cm

10.2. $\sqrt{17}$ cm

10.3. $6\sqrt{5}$ cm

Página 25

11.1. $\frac{32}{3}\pi$ cm^3

11.2. $\frac{9}{2}\pi$ cm^3

11.3. 36π cm^3

Página 27

12.1. 720 cm^2

12.2. 360 cm^2

12.3. 640 cm^2

12.4. 49,7 cm^2

Página 28

14.1. 34,4 cm^2

14.2. 42,1 cm^2

14.3. 228,6 cm^2

14.4. 124,7 cm^2

Página 30

15.1. 78π cm^2

15.2. 10π cm^2

15.3. 216π cm^2

Página 31

16.1. 39π cm^2

16.2. 5π cm^2

16.3. 108π cm^2

17. $(9+3\sqrt{7})\pi$ cm^2

Página 32

18.1. 9π cm^2

18.2. 25π cm^2

18.3. 9π cm^2

Página 34 – Para aplicar

1.1. $\frac{49}{2}\pi$ cm^2

1.2. 9π cm^2

1.3. $\frac{25}{3}\pi$ cm^2

1.4. 4,5 cm^2

2. $\frac{225}{8}\pi$ cm^2

3.1. 7 pés de alecrim.

3.2. Cerca de 9,425 metros.

4. Quadruplica.

5. Aproximadamente, 78,5 m^2.

6. 27 metros.

Página 35

7. $V = 192$ cm^3 ; $A = 208$ cm^2

8. $V_{\text{cilindro}} = 3 \times V_{\text{cone}}$

9.1. 100π cm^3

9.2. 13 cm

9.3. 90π cm^2

10.1. 324π cm^2

10.2. 972π cm^3

11. $A = 66\pi$ cm^2 ; $V = 72\pi$ cm^3

Página 36

12. 163,45 cm^2

13.1. 220π cm^2

13.2. $\sqrt{44}$ cm

13.3. $\frac{100}{3}\sqrt{44}\,\pi$ cm^3

14. 40 500 cm^3

15.1. 264 m^2

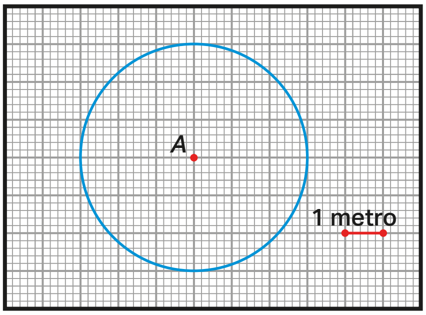
15.2. 27 caixas

15.3. 11 viagens

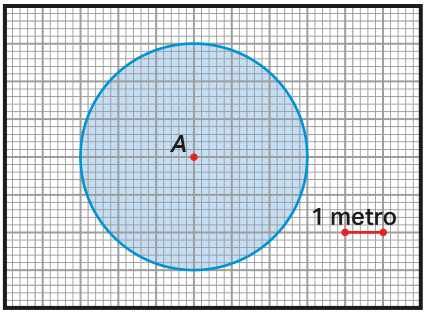
Página 38

Tarefa 4

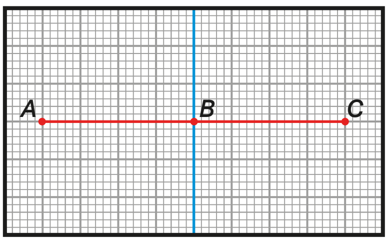
4.1.



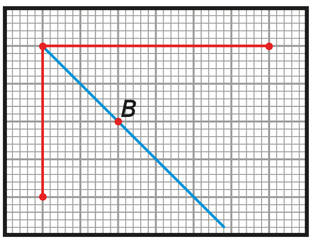
4.2.



4.3.

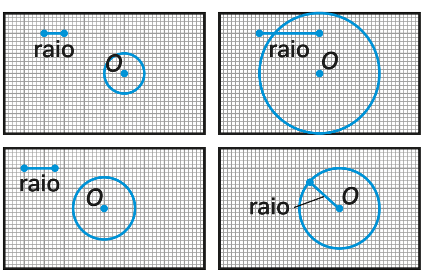


4.4.

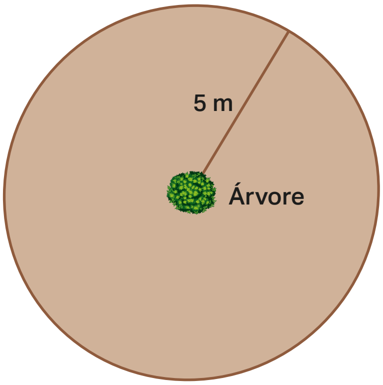


Página 47

21.

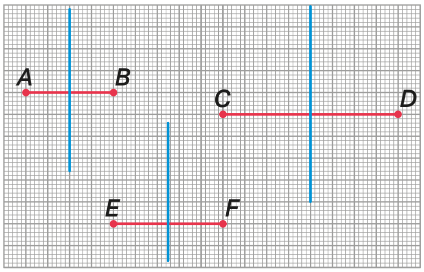


23.

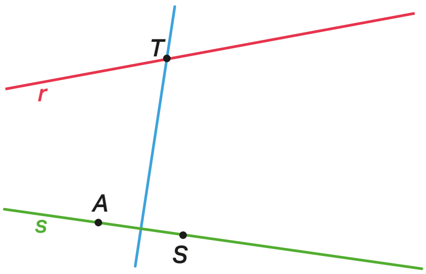


Página 51

24.

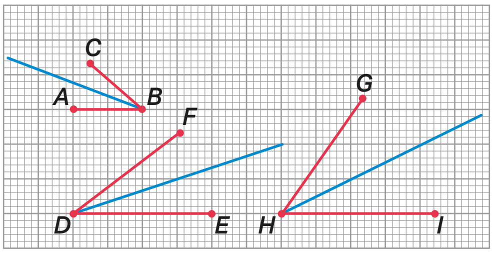


26.



Página 56

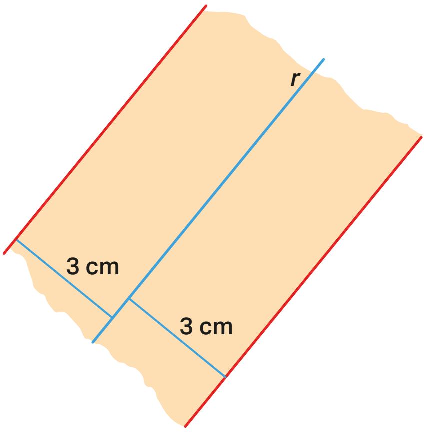
27.



28.2. Bissetriz

Página 59

29.1.



29.2. Secção do plano que contém a reta r.

30. Secção do plano que contém a estrada (2 metros para cada lado).

Página 60

31. Superfície esférica de centro em P e raio 10 cm.

32. Parte de uma superfície esférica de centro na torre de controlo e raio 150 km – a parte que está acima do solo.

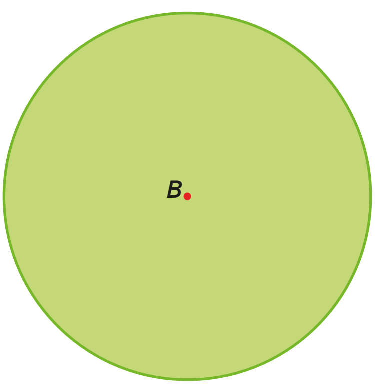
33. Superfície esférica de centro no ponto de explosão e raio 3 km.

34. Plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

35. Plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

Página 65

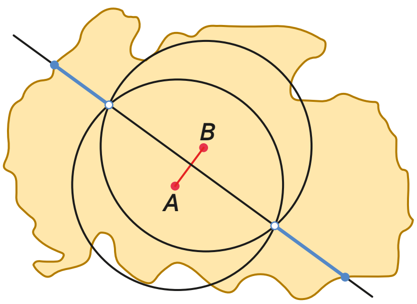
36.1.



36.2.

Página 66

36.3.



37.

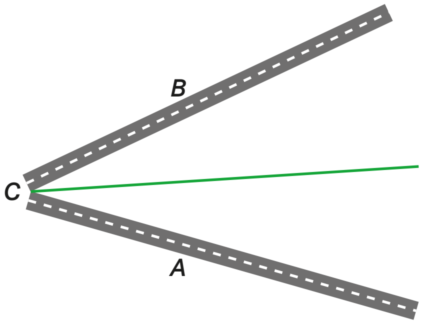
Página 68 – Para aplicar

1. Circunferência de centro em C e raio 3 cm.

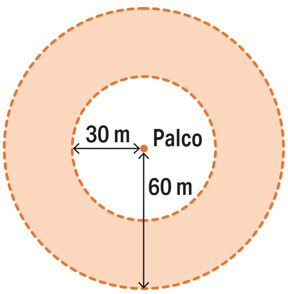
2. Esfera de centro no satélite e raio 1500 km. (Nota que se o satélite atinge pontos a 1500 km, também atinge os que estão mais próximos do que essa distância.)

3. Superfície esférica de centro no aeroporto e raio $200\ \text{km}$.

4.

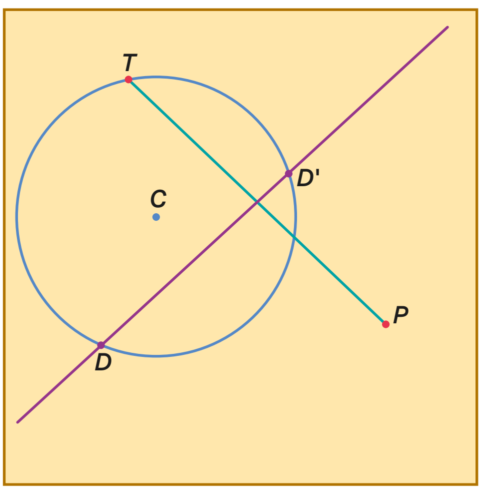


5.

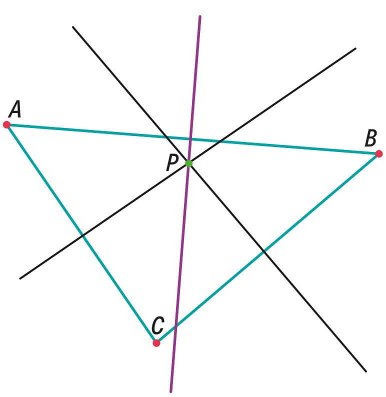


Página 69

6.

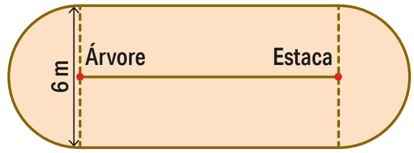


7.



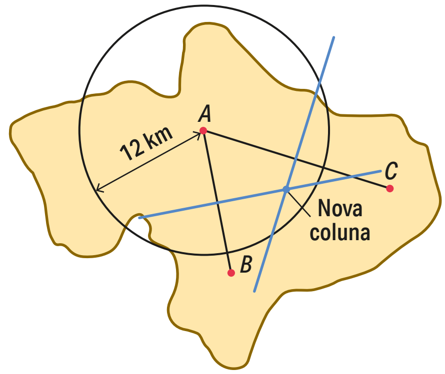
Página 70

8.



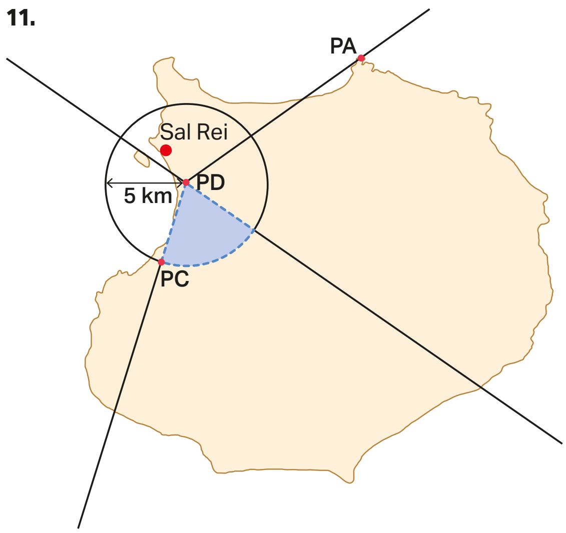
9. $\sqrt{63}$ cm

10.

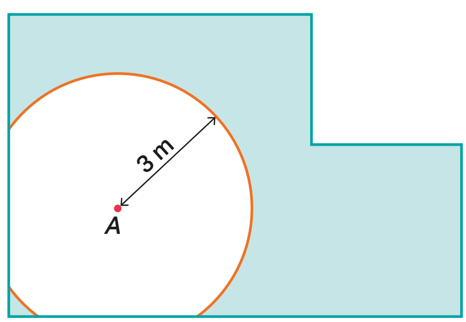


Página 71

11.

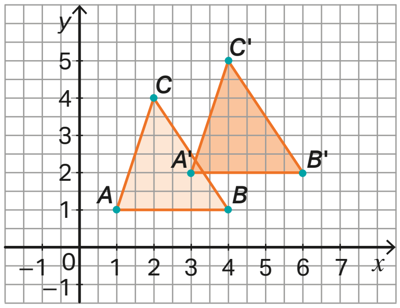


12.



Página 73

Tarefa 14



Página 75

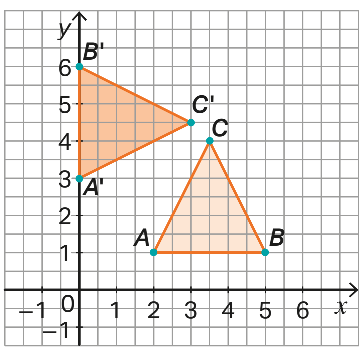
38.1. São congruentes porque têm os comprimentos dos lados correspondentes e as amplitudes dos ângulos internos correspondentes iguais.

38.2. Não são congruentes, uma vez que as figuras não têm a mesma forma, nem os comprimentos dos lados das figuras são iguais.

38.3. São congruentes porque têm os comprimentos dos lados correspondentes e as amplitudes dos ângulos internos correspondentes iguais.

Página 77

39.1.



39.2. $\overline{AB} = 3$; $\overline{A'B'} = 3$; $\overline{BC} = 3{,}35$; $\overline{B'C'} = 3{,}35$; $\overline{AC} = 3{,}35$; $\overline{A'C'} = 3{,}35$.

39.3. Sim.

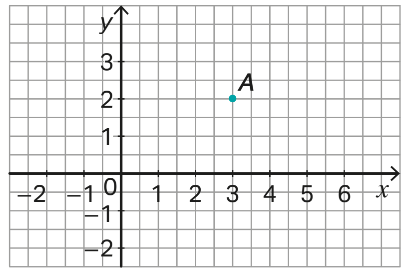
Página 81

40. **(A)** homotetia; **(B)** isometria; **(C)** isometria; **(D)** isometria.

41. **(A)** ampliação de centro *O*
(B) redução de centro *O*
(C) ampliação de centro *O*

Página 86

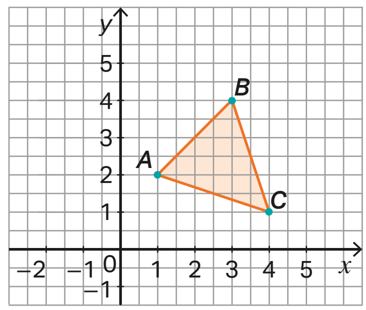
42.1.



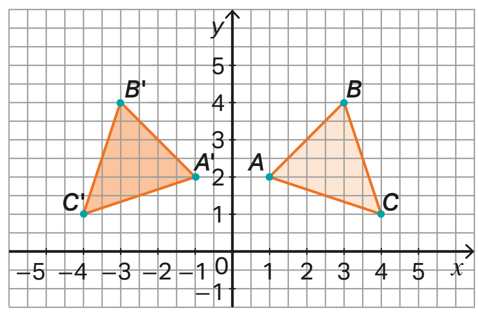
42.2. $A'(-3\,,\ 2)$

42.3. $A''(3\,,\ -2)$

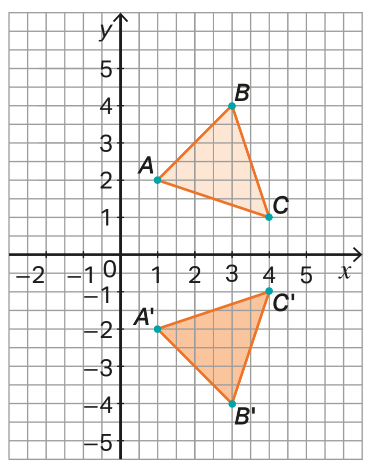
43.1.



43.2.



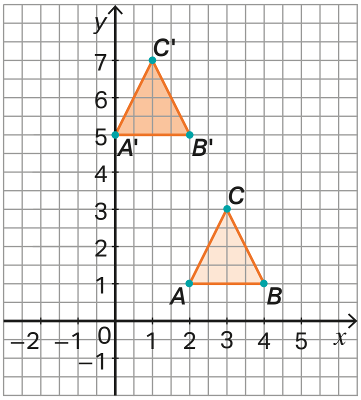
43.3.



Página 90

44.1. $A'(0\ ,\ 5)$; $B'(2\ ,\ 5)$; $C'(1\ ,\ 7)$.

44.2.



Página 94

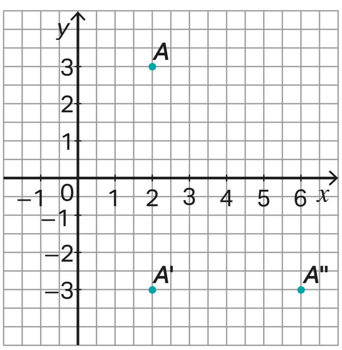
45.1. $A = A'$

45.2. **(B)**

Página 96

Tarefa 19

Coordenadas finais: $A'' = (6\ ,\ -3)$



Página 97

47. **(A)** Verdadeira; **(B)** Falsa; **(C)** Falsa; **(D)** Falsa; **(E)** Verdadeira; **(F)** Verdadeira; **(G)** Falsa.

Página 100

Tarefa 20

<u>Triângulo equilátero</u>:
- N.º de eixos de simetria: 3
- Os eixos passam por vértices? Sim.

<u>Quadrado</u>:
- N.º de eixos de simetria: 4
- Os eixos passam por vértices? Sim.

<u>Pentágono regular</u>:
- N.º de eixos de simetria: 5
- Os eixos passam por vértices? Sim.

<u>Hexágono regular</u>:
- N.º de eixos de simetria: 6
- Os eixos passam por vértices? Sim.

Página 101

48.1. 8 **48.2.** 8

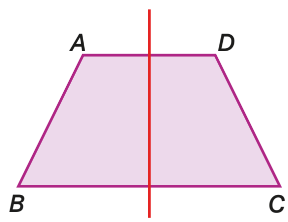
48.3. 5 **48.4.** 4

48.5. 1 **48.6.** 8

Página 102

50.1. A primeira tem simetria axial, a segunda não tem.

50.2.



Página 105

51.1. 1 **51.2.** 4

51.3. 4 **51.4.** 2

51.5. 8 **51.6.** Infinitas

52.1. Verdadeira **52.2.** Falsa

52.3. Verdadeira **52.5.** Falsa

52.4. Verdadeira

53.

Figura	Ângulo mínimo de rotação que gera coincidência	Ordem de simetria
Triângulo equilátero	60°	3
Quadrado	90°	4
Pentágono regular	72°	5
Retângulo (não quadrado)	180°	2
Círculo	1°	infinito

Página 108

54.1.

54.2. Reflexão; rotação; translação; reflexão deslizante.

Página 110

56.1.

56.2. Reflexão e translação.

Página 112

57. Para se conseguir uma pavimentação, os ladrilhos têm de partilhar vértices. Nesses vértices, a soma dos ângulos internos dos polígonos que constituem o ladrilho têm de ser de $360°$.

58. A primeira é regular, as restantes são semirregulares.

Página 117 – Para aplicar

1. **(A)** Verdadeira; **(B)** Falsa. A homotetia não conserva os comprimentos dos lados.; **(C)** Verdadeira; **(D)** Verdadeira; **(E)** Falsa. Os frisos podem resultar da aplicação de diversas transformações isométricas.; **(F)** Verdadeira; **(G)** Verdadeira; **(H)** Falsa. A simetria rotacional está relacionada com a rotação da figura e não com a reflexão segundo um eixo.; **(I)** Verdadeira.

2.1. Translação

2.2. Reflexão deslizante

2.3. Reflexão deslizante

2.4. Reflexão deslizante

Página 118

3.1.

3.2. Rotação e translação.

4.1. 0 simetrias axiais; 1 simetria central; 1 simetria de rotação.

4.2. 0 simetrias axiais; 0 simetrias centrais; 0 simetrias de rotação.

4.3. 8 simetrias axiais; 1 simetria central; 8 simetrias de rotação.

4.4. 1 simetria axial; 0 simetrias centrais; 0 simetrias de rotação.

5.1. No local onde agora se encontra o triângulo amarelo.

5.2. No local onde agora se encontra o triângulo vermelho.

5.3. No local onde agora se encontra o triângulo verde.

5.4. No local onde agora se encontra o triângulo verde.

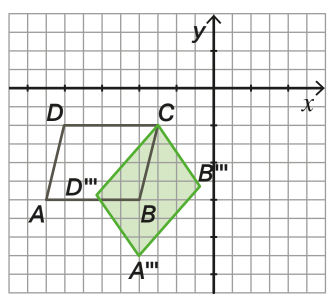
Página 119

6.1. $A(-4{,}5\,;\,-3)$; $B(-2\,,\,-3)$; $C(-1{,}5\,;\,-1)$; $D(-4\,,\,-1)$.

6.2. $A'(2{,}5\,;\,-3)$; $B'(0\,,\,-3)$; $C'(-0{,}5\,;\,-1)$; $D'(2\,,\,-1)$.

6.3. $A(0{,}5\,;\,-3)$; $B(3\,,\,-3)$; $C(3{,}5\,;\,-1)$; $D(1\,,\,-1)$.

6.4.



7.1. A e C têm simetria de reflexão. B, C e D têm simetria de rotação de ângulo mínimo 45°.

7.2. B e D não têm simetria de reflexão

7.3. A e D só têm simetria de rotação.

7.4. 45º

8.1. Sim, de ângulo mínimo 60°.

8.2. Sim, 12 eixos de simetria.

8.3. Sim.

8.4. A figura não resulta de transformações isométricas de um modelo.

Página 120 – Teste

1.	**(C)**	**2.**	**(A)**	**3.**	**(C)**
4.	**(A)**	**5.**	**(D)**	**6.**	**(B)**

Página 121

7.	**(B)**	**8.**	**(B)**
9.	**(C)**	**10.**	**(A)**

11.1. 12 cm

11.2. $720\pi\ \text{cm}^2$

Página 122

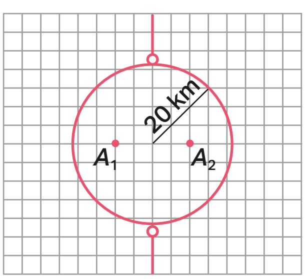
12.1. $12\sqrt{2}$ cm

12.2. $(144\sqrt{2}+144)\pi\ \text{cm}^3$

12.3. $180\pi\ \text{cm}^2$

13. Mediatriz do segmento de reta que une os dois postes.

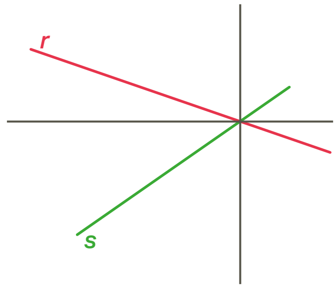
14.



15.1. Parte acima do solo de uma superfície esférica de centro na torre e raio 6 km.

15.2. $\sqrt{15{,}75} \cong 3{,}97$ km

16.1.



16.2. Bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

16.3. Quatro pontos.

Página 123

17.1. Sim, é equilátero, a cordas iguais correspondem arcos de igual amplitude e, por isso, os ângulos inscritos correspondentes (que são ângulos internos do triângulo) têm a mesma amplitude.

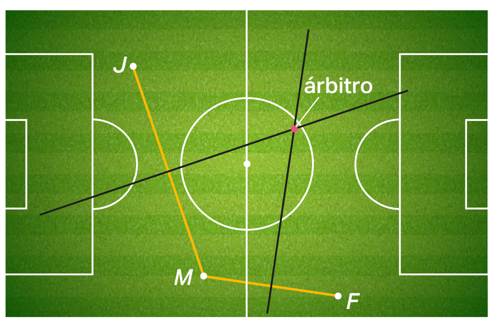
17.2. Sim, tem 3 simetrias de reflexão e 3 simetrias de rotação.

17.3. Simetrias de reflexão, simetria central e simetrias de rotação.

17.4. Rotação de centro em O e amplitude 90°.

17.5. A e C.

18. O árbitro encontra-se num ponto O interior da área central do campo.



19. **(A)** reflexão deslizante; **(B)** reflexão; **(C)** translação; **(D)** reflexão deslizante.

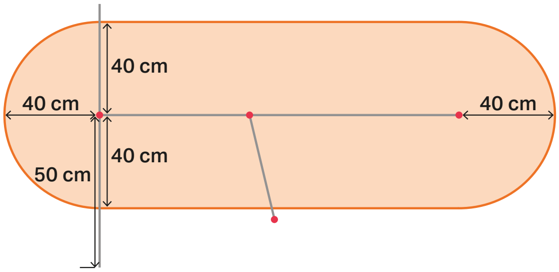
Página 124

20.1. Sim, consegue.

20.2. **(D)**

21.1. 40 cm

21.2.



21.3. Cerca de $45\,027\text{ cm}^2$.

Página 125

22.1. $A(-4\,,\ 8)\,;\ B(1\,,\ 6)\,;\ C(5\,,\ 13)$.

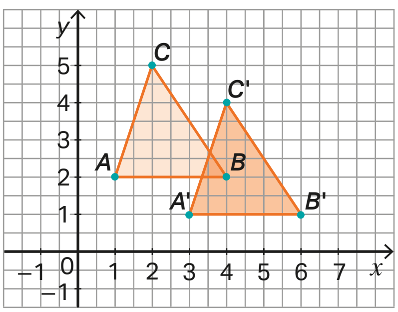
22.2. $A(4\,,\ 2)\,;\ B(-1\,,\ 4)\,;\ C(-5,\ -3)$.

22.3. $A(-4\,,\ -2)\,;\ B(1\,,\ -4)\,;\ C(5\,,\ 3)$.

23. **(A)** translação; **(B)** translação; **(C)** reflexão deslizante.

24. Sim.

25.1.



25.2. Têm o mesmo comprimento.

25.3. Sim, são figuras congruentes.

25.4. Translação segundo o vetor de coordenadas $(2\,,\ -1)$.

Página 129

1.1.

Ano	Número de aves
0	100
1	120
2	144
3	173
4	208
5	270

1.2. seis anos.

1.3. $100 + 100 \times 0{,}2^n$

2.1. Ao 5.º dia irá estudar mais de uma hora.

2.2. 90 minutos.

2.3. Não, porque só fará este estudo durante 10 dias, no qual estudará duas horas.

Página 131

3. **(A)** contínuo; **(B)** discreto; **(C)** contínuo; **(D)** discreto; **(E)** contínuo; **(F)** discreto.

Página 134

4. 144

5. Não. Os 10.º, 11.º e 12.º termos são $55, 89$ e 144. A partir do 12.º termo, todos serão superiores a 144.

Página 135

6. $12\,,\ 15\,,\ 18$.

7. PA de razão -3. O 7.º termo é 2.

8. 31

9. 14

Página 136

10. 5

11. 22

Página 137

12. 155

13. 225

14. 67 800

Página 139

15. 48

16. A razão é $\frac{1}{3}$ e o 6.º termo é $\frac{1}{3}$.

Página 140

17. 320 **18.** 243 **19.** 0,01

20. 189 **21.** 1875

Página 145

22.1. $P(t) = 300 + 150t$

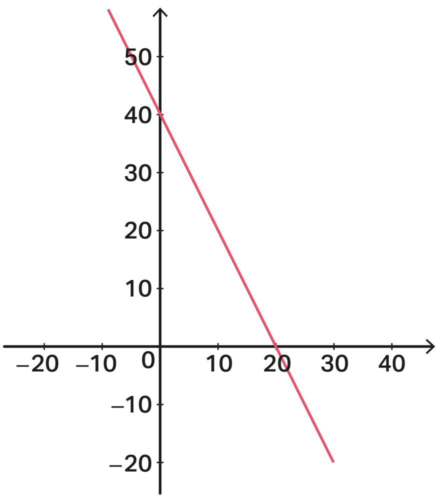
22.2. 1050

22.3. oito horas.

23.1. $Q(t) = 40 - 2t$

23.2. Ao fim de 15 horas.

23.3.



24.1. 54 °C

24.2. Ao fim de sete minutos.

Página 146

25.1. Sim, começou com 5 cm e a cada dia aumentou 3 cm.

25.2. $P(t) = 5 + 3t$

25.3. 35 cm

Página 147

26.1. Sim, é linear. Começou com 90 °C e a cada dois minutos diminuiu 6 °C.

26.2. $P(t) = 90 - 3t$

26.3. 60 °C

26.4. Ao fim de 20 minutos.

Página 149

27.1. $P(t) = 300 \times e^{0,12t}$

27.2. Aproximadamente, 547 peixes.

27.3. Aproximadamente, seis anos.

28.1. $P(t) = 120\,000 \times e^{0,018t}$

28.2. Aproximadamente, 143 666.

28.3. Ao fim de 51 anos, ou seja, em 2071.

Página 150

29.1. Decréscimo

29.2. 1000

29.3. Cerca de 380

29.4. Diminui, aproximando-se de zero.

29.5. Nos três primeiros dias.

29.6. Teoricamente, nunca atinge o zero.

30.1. **(D)** **30.2.** **(C)**

Página 152

31.1. Sim. Trata-se de um crescimento rápido.

31.2. $A(t) = 200 \times e^{0,21t}$

31.3. 705 m^2

31.4. Cerca de oito semanas.

Página 153

32.1. 3 **32.2.** 5 **32.3.** 0

32.4. 2 **32.5.** 1

Página 154

33.1. -2 **33.2.** 0 **33.3.** 3

33.4. 5 **33.5.** -2

Página 156

34.1. 500

34.2. Cerca de 741.

34.3. 29.ª semana.

Página 157

35.1. 0

35.2. Cerca de 125.

35.3. Não, é aproximado por um modelo logarítmico contínuo, que inicialmente tem um crescimento rápido, mas depois abranda.

36.1. **(C)** **36.2.** **(C)**

37.1. Logarítmico.

37.2. Cerca de 250 visualizações.

37.3. Quase na 7.ª semana.

37.4. Teoricamente, o crescimento é infinito, mas cada vez mais lento.

Página 161

38.1. 50

38.2. Aproximadamente, 458.

38.3. 800

39.1. 100

39.2. Aproximadamente, 1194.

39.3. O valor-limite do qual o número de plantas se vai aproximar, com o passar do tempo, mas que nunca irá ultrapassar.

40.1. 200

40.2. Aproximadamente, 1116.

40.3. 14.º mês

Página 167 – Para aplicar

1. Num modelo discreto, as medições ocorrem em momentos dispersos. Nos momentos contínuos, as medições estão sempre a ocorrer. Por exemplo, se estudarmos a evolução do número de nascimentos num determinado hospital, estaremos a registar dados discretos, que podem ser traduzidos por pontos num gráfico. Se estudarmos a temperatura registada ao longo do dia, num determinado local, estamos a registar uma linha contínua que traduz a evolução da temperatura nesse local.

2. **(B)**

3. Na sequência de Fibonacci os dois primeiros termos são 0 e 1 e os seguintes são obtidos pela soma dos dois anteriores. Primeiros oito termos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.

4.1.

Ano	Número de aves
0	100
1	120
2	144
3	173
4	208
5	250

4.2. Após sete anos.

4.3. $P(n) = 100 \times 1{,}2^n$

5. É uma sequência na qual cada termo é obtido a partir do anterior pela soma de uma constante (a que se chama razão da progressão aritmética). Para determinar o n-ésimo termo, se P_1 for o primeiro termo da progressão e r a sua razão, então $P_n = P_1 + (n-1) \times r$.

6. **(B)**

Página 168

7.1. Quinto dia.

7.2. 90 minutos.

7.3. Sim, no 16.º dia.

8. -15 **9.** **(B)** **10.** **(D)**

11.1. $Q(t) = 300 - 25t$

11.2. 150 litros.

11.3. oito horas.

11.4. Até às 12 horas (inclusive), o modelo faz sentido. Passadas 12 horas, o contentor de leite fica vazio, pelo que o modelo deixa de ter sentido.

Página 169

12.1. $Q(t) = 600 \times 0{,}80^t$

12.2. 245,76 mg

12.3. Pouco depois de passar as oito horas.

13.1. **(D)** **13.2.** **(C)**

Página 170

14.1. 30 dB

14.2. 10 dB

14.3. Não. Conforme vimos nas alíneas anteriores, uma intensidade 100 vezes superior faz o nível sonoro passar de 10 dB para 30 dB.

15. 380 litros.

16. No modelo exponencial contínuo observa-se um crescimento rápido infinitamente. No caso do modelo logístico contínuo, observa-se que, inicialmente, o crescimento é rápido, porém, com o passar do tempo, abranda, tendendo a estabilizar.

Página 171

17.1. 80

17.2. Cerca de 955.

17.3. Não, 1200 é o valor-limite.

18.1. 2500

18.2. Cerca de 10 unidades de tempo.

18.3. 500 000 é o valor-limite, neste contexto, o número máximo de utilizadores desta marca.

19.1. Sim, observa-se um crescimento acentuado.

19.2. $H(t) = 10 \times e^{0,16\,t}$

19.3. Cerca de 49,5 cm.

19.4. 11 dias.

Página 174

41.1. 40 000 escudos.

41.2. 90 000 escudos.

41.3. A afirmação é falsa, uma vez que de 2021 para 2022 houve um decréscimo do salário anual.

42.1. Quatro paragens.

42.2. Menos 3 passageiros.

42.3. De P2 para P3 e de P3 para o fim.

43.1. Sábado.

43.2. Mais 50 seguidores.

43.3. 600 novos seguidores.

Página 177

44.1. 175 **44.2.** -100

44.3. Entre 2021 e 2023.

45. **(B)**

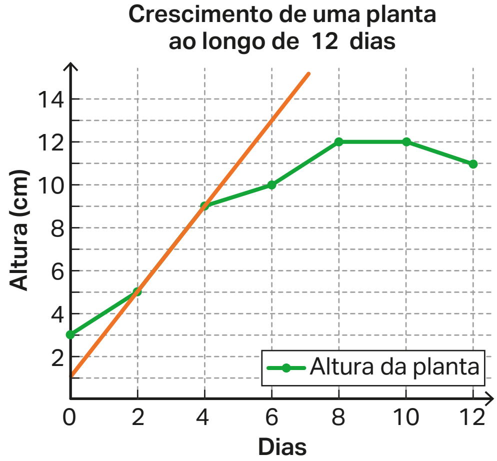
46.1. 14 **46.2.** 13,5 **46.3.** Diminuiu.

47.1. A variação foi de $+6$; a TMV $[-3, -1] = 3$

47.2. **a)** $-\frac{5}{4}$ **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** 1

Página 179

48.1.



48.2. 2

48.3. Indica crescimento da planta.

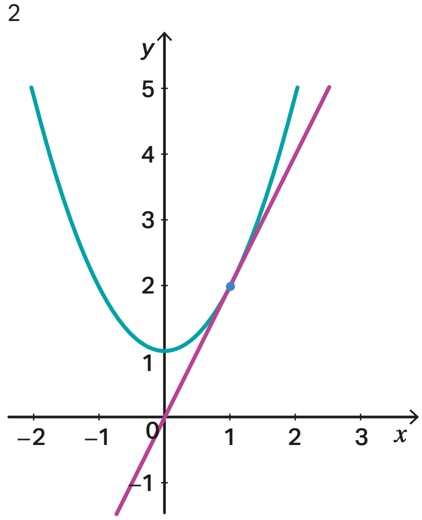
49. **(B)**

50.1. 2 **50.2.** 2 **50.3.** -3 **50.4.** $b-2$

Página 182

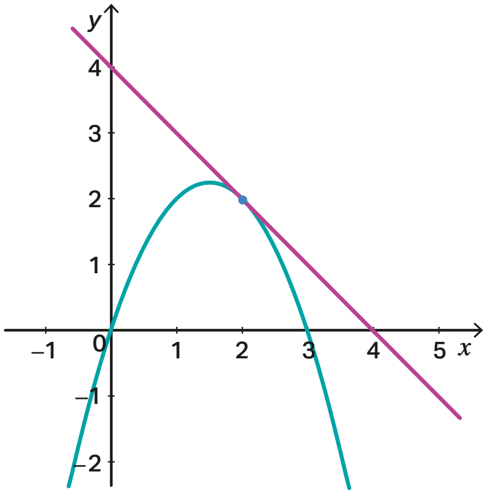
51.1. 2

51.2.



52.1. -1

52.2.

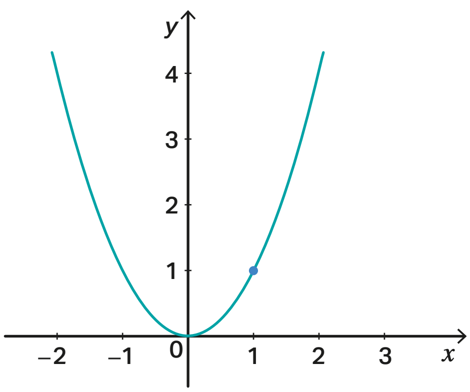


Página 184

53. **(C)** **54.1.** $t=5$ **54.2.** 3

Página 186

55.1.



55.2. Sim, a função é contínua.

55.3. Sim,
é. $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$

Página 187

56.1. $f'(x)=0$

56.2. $f'(x)=0$

56.3. $f'(x)=1$

56.4. $f'(x)=9x^8$

56.5. $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

56.6. $f'(x)=-6x^{-7}$

Página 188

57.1. $f'(x)=-\cos(x)$

57.2. $f'(x)=\operatorname{sen}(x)$

57.3. $f'(x)=\dfrac{1}{\ln(4)}$

57.4. $f'(x)=\dfrac{1}{\ln(10)}$

57.5. $f'(x)=4^x.\ln 4$

57.6. $f'(x)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x.\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Página 189

58.1. $f'(x)=3x^2+2x-5$

58.2. $f'(x)=6x^2+2$

58.3. $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

58.4. $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}$

58.5. $f'(x)=4x^3-3+\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

Página 191

59.1. 50 m/s

59.2. 250 m

60.1. 8

60.2. Traduz a velocidade com que a água atinge maiores alturas no tanque.

61.1. 6 m/s

61.2. Aproximadamente, passados 0,3 s e 1,7 s.

Página 193

62.1. Crescente em $]0,+\infty[$
Decrescente em $]-\infty\,,\,0[$
Mínimo absoluto em $x=0$

62.2. Crescente em $\mathbb{R}$. Não tem extremos.

62.3. Crescente em $]-1-\sqrt{2}\,,\,-1+\sqrt{2}[$
Decrescente em $]-\infty\,,\,-1-\sqrt{2}[$ e em $]-1+\sqrt{2}\,,\,+\infty[$
Mínimo relativo $f(-1-\sqrt{2})=(-2-2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$
Máximo relativo $f(-1+\sqrt{2})=(-2+2\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$

Página 197 – Para aplicar

1.1. 90 mm

1.2. Entre 2021 e 2022.

1.3. 150 mm

1.4. Sim, de 2020 para 2021 e de 2022 para 2023.

2.1. 150 por dia

2.2. 200 por dia

2.3. entre quarta-feira e sábado.

3.1. variação $= 2$; TMV $= 1$

3.2. **a)** $-\frac{5}{4}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{4}$

Página 198

4.1. $-\frac{1}{2}$

4.2. Declive negativo igual a $-\frac{1}{2}$.

4.3. Existe decrescimento da planta do 10.º para o 12.º dias.

5.1. $y = 2x - 1$

5.2. Indica se, nesse ponto, a função tem um comportamento crescente ou decrescente.

5.3. 2

Página 199

6.1. 40 segundos depois de partir.

6.2. 360 m

7.1. $f'(x) = 10x^4 + 2x$

7.2. $f'(x) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + \cos x$

7.3. $f'(x) = -\frac{x+6}{x^3}$

8.1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

8.2. Crescente em $]-\infty, 1[$ e $]3, +\infty[$
Decrescente em $]1, 3[$

8.3. Máximo relativo: $f(1) = 4$
Mínimo relativo: $f(3) = 0$

9. Lado da base 40 cm e altura 20 cm

10.1. Decrescente: $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$
Crescente: $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$
Mínimo relativo: $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$

10.2. Crescente: $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ e $]0, +\infty[$
Decrescente: $\left]-\frac{2}{3}, 0\right[$
Máximo relativo: $g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$
Mínimo relativo: $g(0) = 0$

10.3. Crescente: $]-5, +\infty[$
Decrescente: $]-\infty, -5[$
Mínimo relativo: $h(-5) = -e^{-5}$

Página 200 – Teste

1. **(B)** **2.** **(B)** **3.1.** **(B)** **3.2.** **(C)**

Página 201

4.1. **(B)** **4.2.** **(B)** **5.** **(B)**

Página 202

6. **(C)** **7.** **(A)** **8.** **(B)**

9. Um modelo populacional é uma função que aproxima a evolução da quantidade de elementos que constituem uma população com a passagem do tempo. A dinâmica de uma população pode sofrer alterações inesperadas, como, por exemplo, em consequência do aparecimento de uma pandemia, que faz a população diminuir, ou a melhoria de cuidados de saúde, nomeadamente, por via da vacinação, que levará a um aumento da população. Nestes casos, o modelo populacional pode não servir para aproximar a evolução da população nestes momentos de mudança.

10. Cerca de 488.

11.1. $T(t) = 12 + 2{,}5t$

11.2. 22 °C

11.3. 14 horas.

Página 203

12.1. Sim, a cada dia aumenta 150 máscaras.

12.2. $M(x) = 800 + 150x$

12.3. 2300 máscaras.

12.4. Oito dias.

13.1. Máximo relativo de g: $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$

13.2. Máximo relativo de h: $h\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{512}{3125}$
Mínimo relativo de h: $h(1)=0$

14.1. 24 m/s **14.2.** 13,5 m **14.3.** 253,5 m

Página 204

15.1. A população cresce.

15.2. 200

15.3. Cerca de 203.

15.4. Não. A população começa por crescer de modo menos acentuado e a dada altura o crescimento é mais acentuado.

15.5. Pouco depois da 22.ª semana.

15.6. Teoricamente, não atinge nenhum máximo, porque é traduzida por um modelo exponencial.

16.1. 0

16.2. 80,5

16.3. O logaritmo não se define para 0, pelo que no instante inicial teremos $\ln(1)$.

16.4. Uma função logaritmo tende a crescer de modo menos acentuado, com o passar do tempo, mas é o modelo logístico que reflete o comportamento de maior estabilização com o tempo.

Página 205

17.1. -2

17.2. Diminuir.

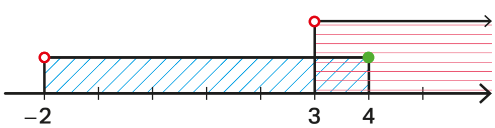
18.1. Variação: -3
Taxa média de variação: $-1{,}5$

18.2. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $-\frac{1}{2}$

Página 210 – Antes de começar

1.1. A: $-2<x\leqslant 4$
B: $x>3$

1.2.



1.3. $]3, 4]$

1.4. $]-2, +\infty[$

1.5. Não.

1.6. Apenas o número 4.

2.1.

Idades	frequências absolutas
16	1
17	2
18	3
19	4
20	5
21	3
22	2
23	3
Total	23

2.2.

Idades	frequências relativas	Freq. Absolutas acumuladas
16	0,04	1
17	0,09	3
18	0,13	6
19	0,17	10
20	0,22	15
21	0,13	18
22	0,09	20
23	0,13	23
Total	1	

2.3. **a)** 10 alunos

b) 15 alunos

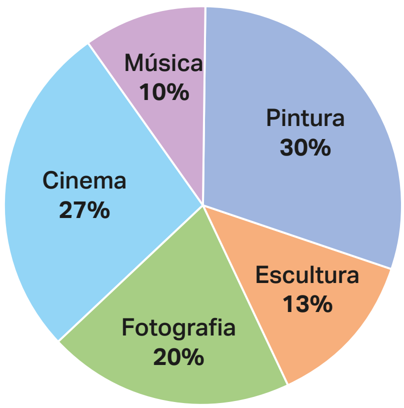
c) 5 alunos

3.1.

Modalidade	frequências relativas	Freq. Absolutas acumuladas
Pintura	30,0%	30,0%
Escultura	13,3%	43,3%
Fotografia	20,0%	63,3%
Cinema	26,7%	90,0%
Música	10,0%	10,0%
Total	100,0%	

3.2. A modalidade mais apreciada é a pintura, com 30% dos alunos e a menos apreciada é a música, com apenas 10%.

3.3.

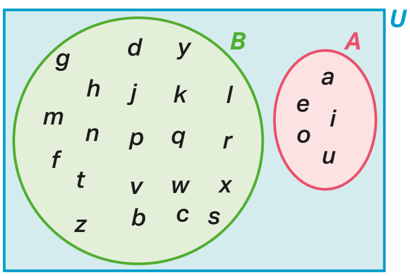


Página 214

1.1. {a , e , i , o , u}

1.2. $\{x \in \text{alfabeto} : x \text{ é vogal}\}$

1.3.

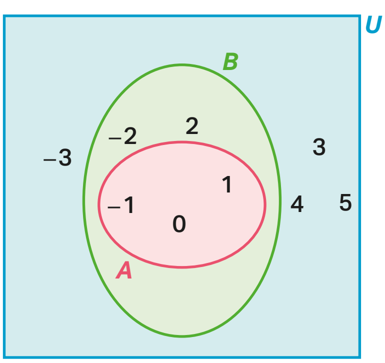


Página 216

2.1. $\{-2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2\}$

2.2. $\{x \in \mathbb{Z} : -3 < x < 3\}$

2.3. Por exemplo: $A = \{-1\,,\ 0\,,\ 1\}$ e
$U = \{-3\,,\ -2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\}$



Página 217

3. **(A)** Verdadeira; **(B)** Verdadeira; **(C)** Verdadeira; **(D)** Verdadeira; **(E)** Falsa; **(F)** Verdadeira; **(G)** Falsa; **(H)** Falsa.

Página 219

4.1. Por exemplo,
$U = \{0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,,\ 9\}$

4.2. **a)** $\{2\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\}$

b) $\{4\,,\ 6\}$

c) $\{2\}$

d) $\{0\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 7\,,\ 8\,,\ 9\}$

Página 220

5. Repara que a disjunção de condições corresponde à reunião de conjuntos e que essa operação é comutativa.

6. Repara que a conjunção de condições é associativa.

Página 221

7. Repara que a conjunção de condições corresponde à interseção de conjuntos e a disjunção à reunião. Depois, aplica as propriedades das operações com condições.

8. Repara que o conjunto-solução de uma condição impossível é vazio e de uma condição universal é o conjunto universo.

9. Repara que a negação de uma condição tem como conjunto-solução o complementar da condição inicial.

Página 222

Tarefa 1

Na roleta: sair amarelo, laranja, vermelho, roxo, azul ou verde.
Nas cartas: sair quadrado, ou círculo, ou triângulo, ou retângulo / sair azul, verde, laranja, lilás, vermelho, amarelo, cinzento ou rosa / ou ainda conjugar as informações: sair quadrado azul ou círculo verde ou triângulo laranja, ...
No botão: o local fica iluminado ou não fica iluminado.
No cesto: a bola entra no cesto ou não entra no cesto.

Página 224

10. **(A)** determinista; **(B)** determinista; **(C)** determinista; **(D)** aleatória; **(E)** aleatória.

11. Aleatória – salpicar tinta com escova de dentes
Determinista – criar fundo amarelo

Página 227

12.1. $\Omega = \{\text{círculo, quadrado, triângulo}\}$

12.2. $\Omega = \left\{\begin{matrix}\text{(cara, cara); (cara, coroa);} \\ \text{(coroa, cara); (coroa, coroa)}\end{matrix}\right\}$

12.3. $\Omega = \left\{\begin{matrix}\text{vermelho, azul, amarelo,} \\ \text{verde, branco, preto}\end{matrix}\right\}$

13.1. $\Omega = \left\{\begin{matrix}\text{vermelho, rosa, roxo,} \\ \text{verde, amarelo, laranja}\end{matrix}\right\}$

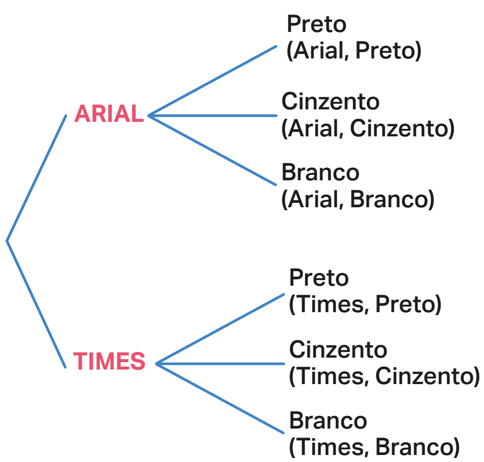
13.2. $A = \{\text{vermelho, azul, amarelo}\}$
$B = \{\text{roxo, verde}\}$
$C = \{\text{laranja}\}$

13.3. A e B são compostos, C é simples.

13.4. Ocorre o acontecimento A.

Página 230

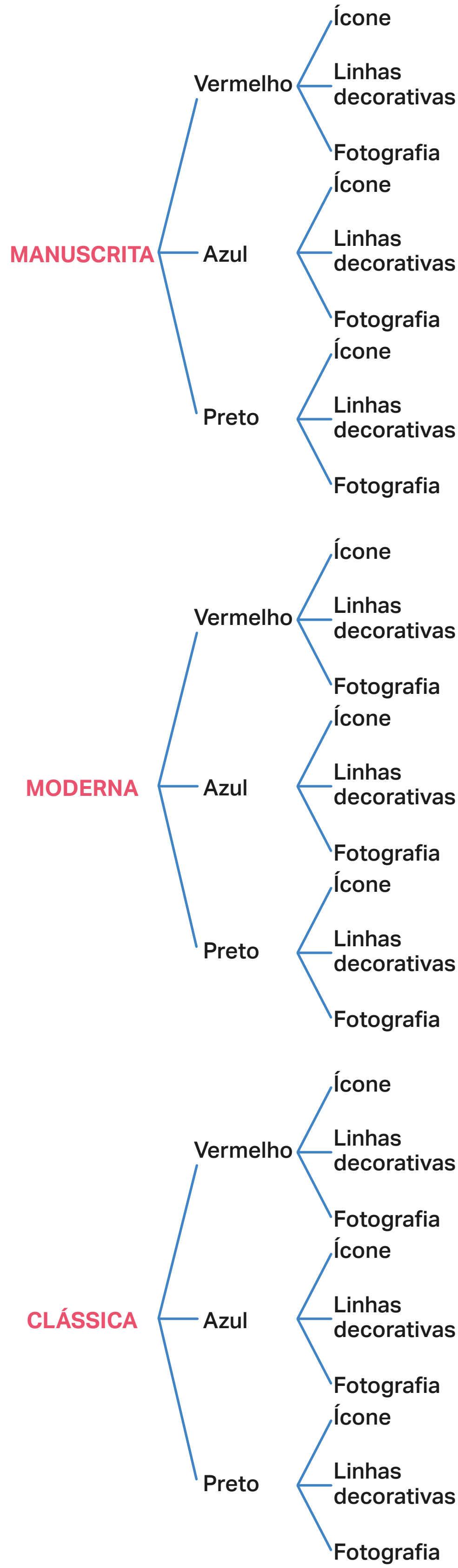
14.1.



14.2. 6

14.3. (arial, preto); (arial, cinzento); (arial, branco); (times, preto); (times, cinzento); (times, branco)

15.1.



15.2. 27

15.3. 3 tipos de letra, 3 cores e 3 elementos – $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Página 231

16.1. (branco, cubo, espelhada); (branco, cubo, opaca); (branco, cilindro, espelhada); (branco, cilindro, opaca); (branco, pirâmide, espelhada); (branco, pirâmide, opaca); (preto, cubo, espelhada); (preto, cubo, opaca); (preto, cilindro, espelhada); (preto, cilindro, opaca); (preto, pirâmide, espelhada); (preto, pirâmide, opaca); (cinzento, cubo, espelhada); (cinzento, cubo, opaca); (cinzento, cilindro, espelhada); (cinzento, cilindro, opaca); (cinzento, pirâmide, espelhada); (cinzento, pirâmide, opaca).

16.2. (branco, cubo, espelhada); (branco, cubo, opaca); (branco, cilindro, espelhada); (branco, cilindro, opaca); (branco, pirâmide, espelhada); (branco, pirâmide, opaca); (preto, cubo, opaca); (preto, pirâmide, opaca); (cinzento, cubo, espelhada); (cinzento, cubo, opaca); (cinzento, cilindro, espelhada); (cinzento, cilindro, opaca); (cinzento, pirâmide, espelhada); (cinzento, pirâmide, opaca).

16.3. 14

17.1.

	Madeira	Pedra
Polido	Madeira polido	Pedra polido
Mate	Madeira mate	Pedra mate
Envelhecido	Madeira envelhecido	Pedra envelhecido

17.2.

	Madeira	Pedra
Polido	----	Pedra polido
Mate	Madeira mate	Pedra mate
Envelhecido	----	Pedra envelhecido

17.3. 4

Página 232

18.1. $\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, \\ 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36 \end{matrix} \right\}$

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

18.2. 18

18.3. Finito.

18.4. 17 não pode, 36 pode.

18.5. 4

Página 234

19. 24

Página 235

20. 12

21. 48

Página 237

22.0 30

23. 210

24. 15 600

Página 238

25.1. 360

25.2. 300

Página 239

26. 12

Página 240

27. 81

28. 243

Página 243

29. 35

30.1. 56

30.2. 21

Página 247

1. $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$C=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

2.1. $A=\{x^2 : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leqslant x \leqslant 4\}$

2.2. Sim, $B=C$.

2.3. $B=F=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2.4. $E=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

3.1. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

3.2. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 16, 25\}$

3.3. $\{1, 2, 3, 4\}$

3.4. $\{3, 4, 5\}$

3.5. $\{9, 16, 25\}$

3.6. $\{2, 3, 5\}$

3.7. $]0, 3[$

3.8. $]4, 7]$

3.9. $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$

3.10. $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

3.11. $]-\infty, 0] \cup]4, +\infty[$

3.12. $]-\infty, 3[\cup]7, +\infty[$

Página 248

4.1. $A=\{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$

4.2. $B=\{3, 4, 5, 8, 9\}$

4.3. A afirmação é falsa. B tem elementos que não pertencem a A.

5. **(C)**

6.1. Lançar ao ar uma bola: determinista
Premir um botão: determinista
Sortear uma peça: aleatória

6.2. $\Omega=$ {listras, bolinhas, ziguezague, espiral, mosaico}

Página 249

7.1. $\Omega=$ {vermelho, azul, amarelo, verde, preto, branco}

7.2. **a)** $A=\{$vermelho, azul, amarelo$\}$
$B=\{$preto, branco$\}$ C= {azul}

b) C é simples, A e B são compostos.

c) A e C

8.1. 27

8.2. (branco, serifada, pincel); (branco, serifada, espiral); (branco, serifada, nenhum); (branco, sem serifa, pincel); (branco, sem serifa, espiral); (branco, sem serifa, nenhum); (branco, decorativa, pincel); (branco, decorativa, espiral); (branco, decorativa, nenhum); (cinzento, serifada, pincel); (cinzento, serifada, nenhum); (cinzento, sem serifa, pincel); (cinzento, sem serifa, nenhum); (cinzento, decorativa, pincel); (cinzento, decorativa, nenhum); (gradiente, serifada, pincel); (gradiente, serifada, nenhum); (gradiente, sem serifa, pincel); (gradiente, sem serifa, nenhum).

8.3. 19

9. 24

Página 250

10. 10

11. 36

12. 20

13. 60

14.1. 720

14.2. 240

14.3. 720

14.4. 360

15. 5040

16. 1000

Página 251

17.1. 5040

17.2. 10 000

17.3. 24

18.1. 252

18.2. 30 240

18.3. 120

18.4. 196

18.5. 15 120

Página 254

31.1. $\Omega=\{A, R, T, E, S, A, N, O\}$

31.2. A: 4; B: 5; C: 1

31.3. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{5}{8}$; $P(C)=\frac{1}{8}$

32.1. Número de casos possíveis de $A=6$
Número de casos favoráveis de $A=3$
$P(A)=\frac{1}{2}$
Número de casos possíveis de $B=2$
Número de casos favoráveis de $B=1$
$P(B)=\frac{1}{2}$
Número de casos possíveis de $C=40$
Número de casos favoráveis de $C=10$
$P(C)=\frac{1}{4}$

Número de casos possíveis de $D = 8$
Número de casos favoráveis de $D = 2$
$P(D) = \frac{1}{4}$

32.2. A e B são as mais prováveis; C e D são as menos prováveis.

Página 256

33.1. $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{2}$;
$P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{3}{4}$

33.2. B e C são equiprováveis.

Página 258

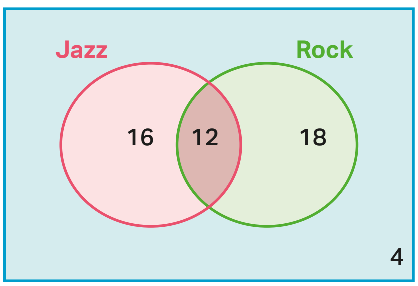
34.1. $\frac{9}{10}$ **34.2.** $\frac{1}{6}$

Página 259

35.1. $\frac{24}{25}$ **35.2.** $\frac{4}{5}$

Página 261

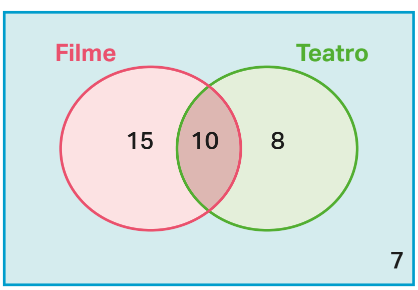
36.1.



36.2. $\frac{23}{25}$ **36.3.** $\frac{2}{25}$

Página 262

37.1.



37.2. 15

37.3. 7

37.4. $\frac{33}{40}$

Página 263

38.1. A e B **38.2.** E e F

38.3. 0,7 **38.4.** 0,6

Página 265

39.1. $\frac{1}{6}$ **39.2.** $\frac{1}{3}$ **39.3.** $\frac{1}{2}$

40.1. 0,3 **40.2.** 0,9

Página 266

41.1. 6720 **41.2.** $\frac{1}{8}$

42. $\frac{1}{15}$

43.1. 1296 **43.2.** $\frac{5}{18}$

44. $\frac{1}{15}$

45.1. 90 **45.2.** $\frac{1}{3}$

46. $\frac{41}{55}$

47. $\frac{30}{91}$

48.1. 105 **48.2.** $\frac{1}{7}$

Página 268

49. $\frac{1}{3}$

Página 271

50.1.

	Usa óculos	Não usa óculos	Total
Pratica desporto	6	12	18
Não pratica desporto	5	7	12
Total	11	19	30

50.2. **a)** $\frac{11}{30}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{12}{19}$

50.3. Sim. $P(\text{usa óculos}) \times P(\text{pratica desporto}) \cong$
$\cong P(\text{usa óculos e pratica desporto})$

Página 273

51.1. 19%

51.2. $\frac{1}{3}$

52. 0,35

Página 277

53.1. $\frac{8}{25}$

53.2. 375

53.3. A probabilidade clássica aponta para um valor inferior ao da frequência relativa obtida nesta experiência.

54.1. $f_r(campainha) = \frac{31}{90}$

$f_r(apito) = \frac{29}{90}$

$f_r(batida) = \frac{1}{3}$

54.2. Os sons são aproximadamente equiprováveis, porque todas as probabilidades são aproximadamente de 33%.

Página 278

55.1. Aproxima-se de $0,17$.

55.2. Está aproximadamente igual.

55.3. Confirma, porque a frequência relativa aproxima-se da probabilidade clássica com o aumento do número de lançamentos.

55.4. Espera-se que saia 4 em cerca de 333 lançamentos, ou seja, numa frequência relativa aproximada de $\frac{1}{6}$.

Página 281

1.1. $\Omega = \{D, E, S, N, H, O\}$

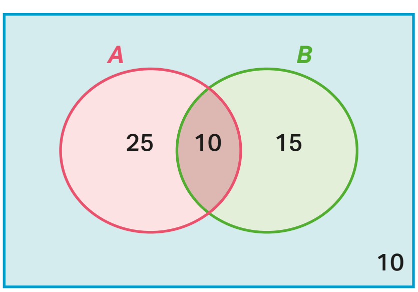
1.2. $\frac{3}{7}$

1.3. $\frac{4}{7}$

2.1. $\frac{1}{2}$

2.2. $\frac{7}{8}$

3.1.



3.2. $\frac{5}{6}$

3.3. $\frac{1}{4}$

3.4. $\frac{2}{7}$

Página 282

4.1. 9

4.2. 3

4.3. $\overline{A}$: "O aluno não tem formação em expressão dramática" ou $(B \setminus A) \cup \left(\overline{A \cup B}\right)$ "O aluno tem formação apenas em canto ou não tem formação em nenhuma das áreas".

4.4. Sim, porque a interseção dos dois é o conjunto vazio.

4.5. Não, porque a interseção não é o conjunto vazio.

5. $\frac{1}{5}$

6. $\frac{1}{5}$

7.1. 24

7.2. $\frac{1}{4}$

Página 283

8.1. 70

8.2. 20

8.3. 30

8.4. **a)** $\frac{2}{7}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{6}{35}$ **d)** $\frac{3}{10}$

e) $\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{9}{14}$ **g)** $\frac{5}{8}$ **h)** $\frac{2}{3}$

8.5. Não, porque $P(T1) \times P(P) = \frac{8}{49} \cong 0,1633$ e $P(T1 \cap P) = \frac{12}{70} \cong 0,1714$.

8.6. 0,566

9.1.

	Desenho	Escultura	Total
Rapazes	8	10	18
Raparigas	17	5	22
Total	25	15	40

9.2. $\frac{9}{20}$

9.3. $\frac{2}{3}$

Página 284

10.1. $\frac{1}{10}$

10.2. $\frac{6}{10}$

11.1. 0,06

11.2. 0,56

12.1. $\frac{11}{40}$

12.2. 400

12.3. A probabilidade teórica é de, aproximadamente, $0{,}333$. A frequência relativa observada é de, aproximadamente, $0{,}275$. Apesar de próxima, a frequência relativa ainda deverá aproximar-se mais de $\frac{1}{3}$.

13.1. $f_r\,(\text{circular}) = \frac{3}{10}$; $f_r\,(\text{ziguezague}) = \frac{29}{90}$;
$f_r\,(\text{linha reta}) = \frac{17}{45}$

13.2. Cada um dos padrões deveria ter surgido cerca de 30 vezes, caso haja uma escolha aleatória e equiprovável. Observou-se ligeira prevalência para a linha reta e menos para circular, indiciando não existir uma escolha aleatória e equiprovável.

14.1. $0{,}029$ **14.2.** Cerca de $0{,}517$

Página 285

15. $0{,}26$

16.1. $f_r(\text{vermelho}) = \frac{1}{3}$; $f_r(\text{azul}) = \frac{14}{45}$; f_r $(\text{verde}) = \frac{16}{45}$

16.2. Apesar de existir uma prevalência devido à saída de verde, com o aumento dos lançamentos espera-se que as frequências relativas de todas as cores se aproximem de $\frac{1}{3}$. Neste momento, com 90 lançamentos, os valores estão apenas aproximados, mas com indício de ser equiprovável a saída de cada uma das cores.

17.1. $f_r\,(\text{campainha}) = \frac{13}{45}$; $f_r\,(\text{apito}) = \frac{47}{180}$;
$f_r\,(\text{batida}) = \frac{9}{20}$

17.2. Não. Há, evidentemente, uma prevalência no som de batida comparativamente com os restantes.

Página 289

56.

x_i	0	1	2	3
$P(Z=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Página 292

57.1. Seja A a variável associada ao acontecimento A, que pode tomar os valores 0, 1 ou 2.
Seja B a variável associada ao acontecimento B, que pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 ou 4.

57.2.

x_i	0	1	2
$P(A=x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(Z=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Página 294

58.

x_i	0	1	2
$P\,(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$\mu = 1{,}2$
$\sigma = 0{,}6$

Página 297

59.1. Seja X a variável associada ao lançamento de uma moeda ao ar, três vezes, registando o número de caras obtidas. X pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3.

59.2.

x_i	0	1	2	3
$P\,(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

60.1. Seja X a variável associada ao número de vendas que a artista de rua consegue concretizar em cinco pessoas que aborda. X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

60.2.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P\,(X=x_i)$	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

60.3. $0{,}2048$

60.4. $\mu = 1$
$\sigma = 0{,}8944$

Página 299

61.1. 16%

61.2. 9%

61.3. 69%

61.4. 46%

Página 301

62.1. 0,6284

62.2. 0,1056

63.1. 0,6826

63.2. 0,0668

Página 304

64.1. 112,5 cm

64.2. 70,5 cm

64.3. 68,3%

64.4. 50%

65.1. 95,4%

65.2. 99,7%

65.3. Mais de 4,4 anos: 84,1%; menos de 4,4 anos: 15,9%

Página 307 – Para aplicar

1. Contínua, porque os valores obtidos estarão num intervalo infinito de valores possíveis.

2.1. Seja X a variável aleatória que traduz o número de cubos que caem em cima de uma tela no lançamento de três cubos de argila. X pode admitir os valores 0, 1, 2 ou 3.

2.2.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2.3. $\frac{3}{8}$

3. 0,4

4.1.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	0,5	0,15

4.2. $\mu = 1{,}7$

4.3. $\sigma \approx 0{,}8426$

5.1. 0,3087

5.2. $\mu = 1{,}5$

5.3. $\sigma \approx 1{,}0247$

6.1. 0,025

6.2. 68%

Página 308

7.1. 7

7.2. 1,45

8.1.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

8.2. 2,2

8.3. Não, porque seria de esperar que valores igualmente distantes da média tivessem iguais probabilidades (por exemplo 1 e 3).

9.1.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

9.2. $\frac{9}{64}$

10.1. 0,7

10.2. Em média, o escultor não chega a vender 1 peça por dia. Mas, se pensar em dois dias, terá vendido $1{,}4$ peças.

11.1. 0,285

11.2. $\mu = 18$; $\sigma \approx 1{,}342$.

Página 309

12.1. 68%

12.2. 2,5%

13.1. 68%

13.2. 0,025

13.3. 2,5%

13.4. Entre 8 e 16 dias

Página 310 – Para aplicar

1. **(B)** **2.** **(A)** **3.** **(B)**

4. **(A)** **5.** **(C)** **6.** **(C)**

7. **(D)**

Página 311

8. **(C)** **9.** **(C)** **10.** **(C)**

11. A: composto; B: composto; C: impossível

Página 312

12.1. $\Omega = \{\text{círculo, quadrado, triângulo}\}$

12.2. $\Omega = \left\{\begin{matrix}\text{(cara, cara); (cara, coroa);} \\ \text{(coroa, cara); (coroa, coroa)}\end{matrix}\right\}$

12.3. $\Omega = \left\{\begin{matrix}\text{vermelha e azul; vermelha e amarela;} \\ \text{vermelha e verde; vermelha e preta;} \\ \text{azul e amarela; azul e verde;} \\ \text{azul e preta; amarela e verde;} \\ \text{amarela e preta; verde e preta}\end{matrix}\right\}$

13. $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é par} \wedge x < 10\} = \{2, 4, 6, 8\}$

14.1. $\Omega = \{A, R, T, I, S\}$

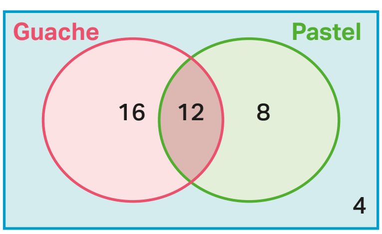
14.2. A: 3; B: 3; C: 1

14.3. $P(A) = \frac{3}{7}$; $P(B) = \frac{5}{7}$; $P(C) = \frac{1}{7}$

15. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$;
$P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{1}{4}$

A, B e C são equiprováveis.

16.1.



16.2. 24

16.3. 4

16.4. $\frac{9}{10}$

Página 313

17.1. 12

17.2. $\frac{4}{15}$

17.3. Complementares: A e B; disjuntos: A e C

18.1. $\frac{3}{10}$ **18.2.** $\frac{3}{5}$

18.3. $\frac{7}{10}$ **18.4.** $\frac{6}{25}$

18.5. $\frac{2}{15}$ **18.6.** $\frac{1}{3}$

19. 6

Página 314

20.1. 6

20.2. Sim.

20.3. $\frac{1}{3}$

21.1. 24 **21.2.** 12

22. 15 600

23.1. 5040

23.2. 10 000

24. 60

25. 35

26. 100

Página 315

27.1. $\Omega = \left\{\begin{matrix}1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, \\ 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\end{matrix}\right\}$

27.2. 18

27.3. Não.

27.4. Quatro.

27.5. **(A)** $\frac{3}{4}$; **(B)** $\frac{5}{9}$; **(C)** $\frac{17}{36}$

28.1. $\frac{21}{50}$

28.2. $\frac{67}{100}$

28.3. **(A)** $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{21}{50} + \frac{33}{100} = \frac{3}{4}$ São disjuntos

Página 316

29.1. $\frac{24}{25}$

29.2. $\frac{4}{5}$

29.3. $\frac{4}{13}$

30.1. 0,3

30.2. Sim

31.1. 0,5

31.2. Não

32. B, porque não muda o número de casos possíveis, pelo que a segunda extração não é afetada pela primeira.

33.1. $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

+	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

33.2.

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Página 317

34.1.

Número obtido	Frequência relativa
1	0,1
2	0,15
3	0,2
4	0,17
5	0,22
6	0,17

34.2. 5

34.3. Um dado justo implicaria uma saída de cada uma das faces com igual frequência. Para garantir se o dado é ou não viciado, o aumento de número de lançamentos poderá clarificar melhor a situação.

35.1. 32%

35.2. 0,5625

36.1. Seja X: número de vendas de bilhetes, na abordagem de seis pessoas.
X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

36.2.

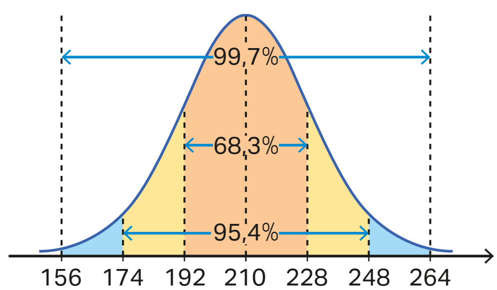
x_i	$P(X = x_i)$
0	0,117649
1	0,302526
2	0,324135
3	0,18522
4	0,059535
5	0,010206
6	0,000729

36.3. 0,324135

36.4. $\mu = 1{,}8$
$\sigma \approx 1{,}12$

Página 318

37.1.



37.2. 68%

37.3. 50%

38. $a = 0{,}1$; $b = 0{,}6$.

39.1. 0,1271

39.2. Cerca de 1,81 m

39.3. Cerca de 9 jovens

40.1. 0,5

40.2. 0,68

40.3. 0,975

Matemática Aplicada às Artes 11.º ano

Criação intelectual
Joana Cunha
Filipe José Alves do Couto

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
Porto Editora
© Pedro Moita
© Stock.Adobe.com

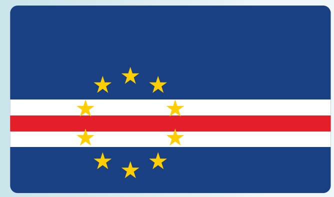
Edição
2025

Este manual segue
o programa da disciplina,
publicado pelo Ministério
da Educação.

Cabo Verde

Brasão

Bandeira



Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!